Софийски университет „Св. Климент Охридски”
Факултет по математика и информатика

ДИПЛОМНА РАБОТА

на тема:

Използване на примери за приложения на математиката като средство за повишаване на интереса и мотивацията на учениците към обучението по математика

Изготвил: Рая Сашова Иванова
Факултетен номер: 21745
Магистърска програма: Технологии за обучение по математика и информатика
Дипломен ръководител: доц. д-р Юлия Нинова

Юли 2017 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

КРАТКО ПРЕДСТВЯНЕ НА ДИПЛОМНАТА РАБОТА 4

УВОД 8

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧНИ ОСНОВИ НА ПРЕДЛАГАНИЯ ПОДХОД 11

1.1. Психологически бележки върху понятията „интерес“ и „мотивация“ 11

1.1.1. Интерес 11

1.1.2. Мотивация 13

1.1.3. Теория на Курт Левин за динамичното психично поле на личността 13

1.1.4. Интерес и мотивация 15

1.2. Анализ на поколенията в исторически план според класификацията на Марк МакКриндъл 15

1.3. Използване на примери за приложения на математиката като средство за повишаване на интереса и мотивацията на учениците към обучението по математика 20

1.4. Роля на учителя и методика на преподаване 24

ГЛАВА 2. РЕСУРСИ ЗА ПРИЛАГАНЕ НА ПОДХОДА 26

2.1. Числа 26

2.1.1. Цели числа 26

2.1.2. Рационални числа 33

2.1.3. Реални числа 34

2.1.4. Прости числа 37

2.1.5. Степенуване 41

2.1.6. Коренуване 41

2.1.7. Логаритъм 42

2.1.8. Числови редици 44

2.1.9. Комплексни числа 46

2.2. Изрази 47

2.3. Уравнения ... 48
2.3.1. Линейни уравнения ... 48
2.3.2. Квадратни уравнения ... 50
2.3.3. Уравнения от по-висока степен ... 51

2.4. Системи ... 52

2.5. Неравенства ... 53

2.6. Функции ... 53

2.7. Фигури и тела ... 54
2.7.1. Фигури ... 54
2.7.2. Тела ... 67

2.8. Вектор ... 70

2.9. Еднаквост, подобие, симетрия, ротация, транслация ... 71

2.10. Стереометрия ... 72

2.11. Тригонометрия ... 74

2.12. Графика ... 75

2.13. Вероятност и статистика ... 77
2.13.1. Комбинаторика ... 77
2.13.2. Статистика ... 82

2.14. Математически анализ ... 85

2.15. Аналитична геометрия ... 90

2.16. Логика ... 91

2.17. Моделиране ... 96

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ... 98

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА ... 99

КРАТКО ПРЕДСТВЯНЕ НА ДИПЛОМНАТА РАБОТА

Настоящата работа представя възможност за предизвикване интереса на учениците и повишаване на мотивацията им за усвояване на знания по математика и на учителите за преподаването им, като разглежда примери за приложението на математиката в исторически план и днес, които я показват като една полезна и свързана пряко с живота наука.

Темата за мотивацията на учениците към обучението винаги е стояла на дневен ред пред хората, ангажирани с процесите по образованието като цяло, но е особено актуална в обучението по математика. Защото въпреки приложенията ѝ в почти всяка сфера на живота, в училище тя остава в рамките на една сложна и неразбираема материя, в която учениците лесно губят интерес. В резултат на което се трупат пропуски, които в последствие водят до трудности в обучението.

Въпреки актуалността на проблема в повечето учебници и учебни помагала по математика се използва един начин на представяне на учебния материал: теоретична част, в която се излагат основните понятия и твърдения чрез определения и теореми, следвани от описание на решението на няколко примери и задачи за самостоятелна работа. Почти не се съдържат исторически факти по темата или приложения в други области на науката или ежедневието. В редки случаи се предоставят текстови задачи, които засягат тема, в която се прилага конкретното знание, но често те са за напредналите ученици и не са задължителни. От друга страна дори ученици, които се справят добре с математиката, срещат трудности при трансфера на математически знания в друга нетипична област. И ако в началния курс на обучение да не се поставя под въпрос полезността на математиката, то с всеки следващ клас материалът става все по-абстрактен, а представянето му все по-откъснато от действителността.

Основна цел на тази работа е да се представи възможност за повишаване интереса и мотивацията на учениците в обучението по математика чрез

предоставяне на ресурси от историята и практиката за разкриване на полезността на науката и зараждането на основните математически понятия от чисто житейски проблеми и въпроси. Този подход не следва да замести традиционното обучение, а да се прилага в допълнение на методите за преподаване, избрани от конкретния учител.

Задачите, които са дефинирани при реализирането на поставената цел, са:

- идентифициране на проблема за слабия интерес и ниската мотивация на учениците в обучението по математика;
- понятията „интерес“ и „мотивация“ в психологията;
- исторически преглед на характеристиките на поколенията и идентифициране на настоящото поколение;
- избор на подход за повишаване на интереса и мотивацията в обучението по математика;
- изясняване ролята на учителя и осигуряване на методика на преподаване;
- осигуряване на ресурси за постигане на целта;
- очаквани резултати от прилагане на метода;
- насоки за бъдещо развитие.

За постигане на поставените задачи са използвани следните ресурси:

- анализ на целите на обучението в училище;
- изразяване на ролята на обучението в училище и цел на образованието за развитие на съвременното общество;
- психологически бележки върху „интереса“ и „мотивацията“;
- анализ на психологическите характеристики на поколенията в исторически план с фокус към настоящите поколения, които са обект на обучение днес в училище; подходящи и неподходящи педагогически методи за всяко едно поколение;

- възможност за повишаване на интереса и мотивацията за обучение по математика;
- обосновка на избора на подход;
- методически бележки за учителите;
- предоставяне на подходящия ресурс - 115 примери.

Очаквани резултати:

- Да се стимулират учителите да представят учебния материал по-интересно, атрактивно и вълнуващо за учениците, показвайки къде конкретното знание има приложение.
- Да се улесни работата на учителите и да се повиши мотивацията им.
- Да се повиши интересът и мотивацията на учениците към обучението по математика, а в някои случаи и към науката като цяло.
- Да се улесни усвояването на задължителното учебно съдържание, а в някои случаи и допълнителен материал в резултат на провокиран интерес към конкретна тема.
- Да се подобри представянето на учениците в учебния процес.
- Да се улесни осъществяването на междупредметни връзки.
- Да се обогати общата култура на обучаемите.
- Да се подпомогне професионалното ориентиране на учениците.
- Да се подпомогне по-успешната им бъдеща реализация и конкурентност.
- При спазване на методическите бележки, подходящо поднасяне на информацията и съобразяване с аудиторията, прилагането на подхода не се очаква да има негативни последици върху образователния процес.

Насоки за бъдещо развитие на идеята

В бъдеще се предвижда да бъде направено изследване на ефективността на подхода. За целта:

- представените в тази дипломна работа ресурси да бъдат публично достъпни в електронен вариант, като да се допълват непрекъснато с нови предложения, заедно с методически бележки и статии по темата;
- да бъдат привлечени училища и учители-доброволци, които да участват в изследването;
- в първа фаза да се отчетат резултати след една година;
- във втора фаза да се отчетат резултати след цял курс на обучение;
- в трета фаза да се отчетат резултати за развитието на учениците 5 години след завършване на обучението в училище;
- в четвърта фаза да се отчетат резултати за реализацията на учениците 10 години след завършване на обучението в училище.

Структурата на дипломната работа е следната:

Увод

Глава 1. Теоретични основи на предлагания подход

Глава 2. Ресурси за прилагане на подхода

Заключение

УВОД

Основна цел на образованието е да подготви младите хора да бъдат пълноценна единица на обществото чрез придобиване на знания и опит, необходими за справяне с бъдещи житейски ситуации. Опитът на обществото е определило необходимата информация за достигане на тези знания и умения, които са разпределени в различните етапи от развитие на детето, през юношество до пълнолетие в зависимост от средностатистическото интелектуално и емоционално развитие на личността. Това съдържание трябва да е съобразено и продиктувано от изискванията на съвременното общество във всички сфери на технологично, икономическо, историческо, географско и социално развитие, заедно с всички особености на региона и държавата. Освен това трябва да бъдат взети под внимание и бъдещите тенденции на местно ниво и в световен мащаб, защото днешните ученици са утрешното активно поколение на Земята. Разбира се, с естественото развитие и еволюцията, учебното съдържание трябва да търпи промени, съобразени с новите изисквания на живота, за да може да се създава подготвено поколение, готово да продължи и развие постигнатото от предишните. Но само знанията и уменията не са достатъчни. За да има прогрес, тези деца трябва да могат да се адаптират и справят в непрекъснато променящия се свят и дори да бъдат двигател на промените. В този контекст съвсем естествено е да се променя и основния обект на образованието – а именно ученикът. Ако за праисторическият човек най-важното е било да се научи да ловува умело, за да осигури прехраната си, за средновековния човек – да усвои някакъв занаят, за да изхранва семейството си, днес целите са съвсем различни. Профилът на ученика се променя динамично, съответно знанията и уменията, както и методите за постигането им, също трябва да се променят съобразно новите характеристики на представителите на поколението, следвайки динамиката на времето. В тази връзка, ако един педагогически метод е бил ефективен преди сто или дори преди десет години, то днес може да не даде необходимите резултати и дори да окаже негативно влияние върху учебния процес.

Съвременната интелектуализация на общественото производство е явление с много аспекти. Един от най-важните от тях се отнася до засилване ролята на умствените възможности на човека (разсъждения на базата на научни знания и умения) при усъвършенстване и повишаване ефективността на различните дейности. Важни функции в това отношение изпълнява училището, тъй като то е създадено като организационна форма да осигури развитието на учениците чрез разпредметяване интелекта на предходни поколения, опредметен в знания, натрупани в различните науки, екстракт от което са учебните предмети. [1]

Във всеки етап от развитие на науките част от тях се използва или може да се използва непосредствено при изследването на природни или обществени явления. Частта от тези знания, използващи се за построяване на математически модели, през последните десетилетия значително нараства. Освен това в математическите знания и в тяхната структура е опредметен и един особен начин на разсъждение, който в други сфери на човешките дейности не винаги се е прилагал и може да се прилага точно така, както се прилага в математиката. Структурата на математическите знания и опредметения в тях начин на разсъждение придобиват все по-голямо значение както за развитието на науките, така и за разработката на съдържанието на други учебни дисциплини. Всичко това засилва ролята на математиката и на обучението по математика като водеща при осигуряване на умственото развитие на учениците, което е свързано със способността да извършват дедуктивни умозаключения. [1]

Математическият език позволява да се създаде здрава връзка между словесния език, изображенията и символния (знаковия) начин за предаване на информация. Умението да се разчита информация, представена по различен начин, придобива особено значение в епохата на огромен информационен поток, а ролята на математическото образование за развитието на способностите за опериране с информация, представена по

различен начин, е ключова. Умението чрез описание да се състави визуален образ (чертеж в математиката), на основата на изображение да се състави аналитично описание и други са умения, които се формират чрез обучението по математика. Математическото образование провокира човека да мисли в образи и метафори. [7]

ГЛАВА 1. Теоретични основи на предлагания подход

1.1. Психологически бележки върху понятията „интерес“ и „мотивация“

Понятията „интерес“ и „мотивация“ са обект на разглеждане от страна на психологията, социологията и философията. Въпреки това няма еднозначно дефинирани определения в нито една от споменатите науки. Съществуват различни схващания за целите на отделни теории и в различен контекст. Но прави впечатление, че винаги присъстват в трудовете, посветени на развитието на личността, като двете понятия се описват в тясна връзка. Оттук може да се заключи, че са важна част за израстването и оформянето на съзнателната личност.

Съществуват цели теории посветени на мотивацията. Те обаче не са обект на разглеждане в тази дипломна работа. Спомената е само теорията на психолога Курт Левин, посветена на мотивацията и развитието на личността. Тази теория заслужава специално внимание именно тук, защото представлява ярък пример за приложенията на математиката.

За целите на настоящата работа са приети схващанията за понятията „интерес“ и „мотивация“ в психологията, като по-близки в контекста на темата. Представени за изложенията на американския психолог Карол Изард, тъй като те до голяма степен обобщават работата на редица психолози преди него и представляват сравнително скорошен анализ и обобщение на голям брои теории. При него интерес и мотивация се разглеждат като взаимно-свързани проявления на емоциите. Използвана е и теорията на американския психолог Ейбрахам Маслоу, посветена на мотивацията на личността.

1.1.1. Интерес

Възприятието и вниманието са селективни и благодарение на това мозъкът реагира по различен начин на многобройните стимули, които въздействат постоянно върху сетивните органи. Човек поставя акценти и определя приоритети във всеки акт на възприятието и не е в състояние да

отделя еднакво внимание на многобройните впечатления. Американският психолог и философ Уилям Джейм използва термина „интерес“, но не систематично и не в качеството на строго научно понятие. Той утвърждава, че мисленето е винаги свързано с интереса. **Интересът е вътрешна емоция, която обезпечава селективния избор на процесите на внимание.** Интересът стимулира познавателната активност на индивида и се явява мотивиращо състояние на всекидневната дейност на нормалния човек. [3]

Интересът е позитивна емоция, която има основно значение за формирането и развитието на навиците, уменията и интелекта. Интересът осигурява работоспособността на човека. Тази емоция определя мислите и спомените, защото в значителна степен обуславя съдържанието на възприятието, вниманието и паметта. Емоцията на интереса повишава способността на човек за възприемане и обработка на постъпващата от външния свят информация. Интересът стимулира човека към изследователска и познавателна активност. Заедно с преживяването на емоцията интерес се проявяват чувствата на заинтересованост и любопитство. В ситуация на интерес средностатистическият индивид изпитва чувство на удоволствие. Той е по-активен и склонен към взаимодействие с обкръжаващата среда. [3]

Емоцията интерес е изиграла важна роля в еволюцията на човека. Именно тя заставя индивидите в продължение на дълго време да се занимават с определен вид дейност или с изработката на определени навици. Придобитите знания и навици попълват резервите на фонда на интелекта. Интересът заставя индивида да диференцира и описва тези аспекти на света, които би искал да опознае и изследва. Емоциите служат като източник на енергия за поведението. Като вид емоция интересът организира и направлява енергията, създавайки специфични и напълно определени тенденции към действие. Сред факторите, влияещи върху социализацията на интереса, е богатството на обкръжаващата среда. Лошите социално-икономически условия, по правило, ограничават разнообразието на конструктивните форми

на активност, достъпни за индивида, и по този начин ограничават възможността за приложение на неговия интерес. [3]

1.1.2. Мотивация

Мотивът е съзнателно или несъзнателно желание, което подтиква индивидът да извърши определени действия за постигането на цели за задоволяването на възникнали потребности.

Мотивацията е процесът на създаване на вътрешни положителни мотиви у индивида за извършване на определена дейност.

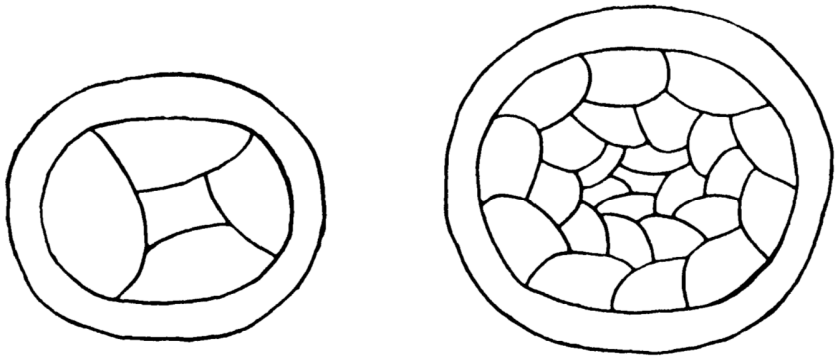
В известен смисъл почти всяко състояние на организма е само по себе си мотивиращо състояние. Неправилно е схващането, че мотивационното състояние е специално, особено състояние, различаващо се рязко от другите събития в организма. Тъкмо напротив, трябва да се приеме, че мотивацията е почти общовалидна характеристика на практически всяко състояние на организма. Освен естествената склонност за оцеляване, мотивацията включва и положителна склонност към растеж или себеактуализация. Различни мислители и философи още от времето на Аристотел са постулирали в една или друга форма тази склонност към растеж и самоусъвършенстване на организма. Мотивацията е енергията, придаваща сила на действието и поведението. [3], [5]

1.1.3. Теория на Курт Левин за динамичното психично поле на личността

В темата на настоящата дипломна работа, няма как да не се спомене теорията на немският психолог Курт Левин за мотивацията. Без да се прави задълбочен анализ на тази теория, заслужава да бъде спомената не само заради революционното влияние, което оказва в психологията и социологията (психология на групите), а най-вече защото Левин използва математически и физични модели за обяснението на поведението на индивида. Той използва теория на множествата, топология, вектор и поле за изграждане на концепцията за психичното поле и описване на динамиката на това поле посредством математически модели. Целта на К. Левин е да опише

мотивационното отношение на индивида и заобикалящата го среда в цялост. За целта той разглежда два модела: Модел на личността и Модел на средата.

Според него личността представлява система, състояща се от множество непресичащи се области. Всяка област представлява мотив (желание, потребност) и има отделна степен на сходство (близост). На снимката по-долу схема (a) представлява модел на дете, а схема (b) – на възрастен. Извън външния контур се намира средата, а пръстенът е граничната зона или пространството на действие. Тук трябва да се отбележи, че тази схема представлява „снимка“ на личността в даден момент, в друг тя може да изглежда различно, което изразява и динамиката на модела на Левин.



Жизненото пространство се състои от индивида и средата. Поведението е зависимо от жизненото пространство, т.е. от една страна зависи от индивидуалните качества, а от друга от влиянието на средата. Курт Левин представя влиянието на средата върху индивида като вектори с определена сила и посока. Резултантната на тези вектори определя поведението. Той въвежда термина „валентност“ на средата, която може да бъде положителна и отрицателна в зависимост от това какви емоции предизвика у индивида. Тези схващания стоят в основата на теорията на динамичното психично поле. В нея К. Левин подробно описва взаимодействията на средата и индивида, и поведението на личността в резултат на това взаимодействие, използвайки законите на математиката и физиката.

Друга идея на К. Левин, която взаимства от математическата топология, е, че винаги съществува „най-добър“ път към постигане на целта в

психологичното пространство на субекта, преминавайки през възможно най-малко области на психичното поле. Но в своята теория показва, че не винаги действията на индивида са предопределени от този път. [8], [9]

1.1.4. Интерес и мотивация

Емоциите обуславят мотивационните функции като свързани от една страна с вътрешни процеси, които устремяват индивида в определено направление или към определена цел, и от друга - с процеси, свързани със социалната мотивация. Интересът се явява мотивираща сила на постоянното сензорно взаимодействие на човека с обкръжаващата среда и спомага за развитие на мозъка. Интересът се появява като главна мотивационна съставяща на процесите на възприятие, внимание и познание. Оттук ролята му за развитието на знанията, навиците и интелекта е неоспорима. Няма нито един навик, който би могъл да се овладее без участието на устойчивия интерес.

Успешността на човешката дейност се определя от три фактора: сила на мотивацията (стремеж към успех), наличие в ценностната система на човека на ценностни постижения и усвояване на необходимите навици и умения. В тази връзка, колкото по-силен е интересът към определена дейност, толкова по-силен е стремежът тази дейност да бъде извършена по-добре. В основата на мотивацията на успеха е стремежът към постижения, съизмерими със степента на изразяване на интереса.

Интересът е необходим за развитието на навици. Той мотивира дейността на човека, водейки го към усъвършенстване на вродените способности. [3], [5]

1.2. Анализ на поколенията в исторически план според класификацията на Марк МакКриндъл

Обучението е насочено към учениците, затова и методите за преподаване трябва да използват както положителните така и отрицателните характеристики на поколението, за да се осигурят по-ефективни резултати.

Според класификацията на австралийския социолог Марк МакКриндъл в изследването му “Отвъд думите” през второто десетилетие на XXI в. съжителстват седем поколения. Най-старото от тях е поколението строители - родените преди 1925 г., а най-младото, появило се през 2010 г., е поколението Алфа. Учените са категорични, че заради ускореното технологично развитие и миграцията, поколенческите вълни са се скъсили и ако в началото на XX в. са били през 20-25 г., сега се сменят през около 10 години. Всяко едно от седемте поколения е със собствен неповторим профил, който го отличава от останалите. [10], [16]

Строители

Родените между 1925 и 1945 г. се наричат строители, защото са положили основите на новия свят след двете световни войни. Днес те са най-възрастните жители на Земята над 70-годишни. Строителите са израснали в лишения, преживели са войни и социални катаклизми. Дали са старта в изграждането на новия свят. Американски антрополози ги наричат и Мълчаливото поколение, чийто социален профил очертава качества като преданост, придържане към правилата, закона и реда. Това са хора на честта, морала, търпението и саможертвата. Консервативни, лоялни, отговорни и самодисциплинирани, често се позовават на миналото. Впечатляват се от авторитети, рангове и институции. Недоверчиви към предприемачеството и поемането на стопански риск. Стремят се да оставят професионално наследство след себе си. Работят, за да оцелеят, спестовни и религиозни са. Строителите са далече от компютри и дигитални технологии, но с опита и мъдростта си, са живата връзка между поколенията.

При тях педагогически методи, които се основават на строги правила, стегната структура на съдържанието или поставят учителя като авторитет, са изключително работещи и постигат добри резултати.

Бейби бумъри

Родените между 1946 и 1964 г. ученият нарича “бейби бумъри” (Baby Boomer), защото са първото благоденстващо поколение на миналия век. Днес те са на възраст от 53 до 71 години. Като следвоенни деца „бейби бумърите“ се асоциират с благоденствие и оптимизъм. Те са по-богати и по-здрави, от което и да е предишно поколение. Идеалисти, заредени с вяра в бъдещето. Ентусиасти с девиз "Живея, за да работя". Обичат работа в екип. Държат на името и имиджа си в обществото, и се стараят да бъдат добри професионалисти. Това мотивира стремежа им към добро лично възнаграждение и постигането на висок обществен статус. Имат високи естетически критерии в поддържането на външния си вид. Носталгици, религиозни, обвързани със семейството. Част от тази група сполучливо използват технологии днес, друга ги приемат неохотно.

При тях педагогически методи, които стимулират личните постижения и поощрява личния труд, са подходящи за постигане на високи резултати.

Поколение Х

Родените между 1965 и 1980 г. попадат в поколението Х. Това са хората, които в момента са на възраст между 37 и 52 години. Поколението преживяло Студената война, но първото расло без голяма депресия, война, революция. Заради войната във Виетнам в САЩ го наричат “поколение, отгледано от жени”, а в Англия - “децата на Тачър” (заради увеличаващия се брой на разводите в резултат от икономическата криза). Хората от поколението Х са доста по-самостоятелни. Държат на свободата си. Инвестират в развитието си. Гъвкави, прагматични и адаптивни, те са склонни към риск и авантюра. Технически грамотни и информирани. Познават дигиталните технологии още в юношеството. Част от тях с удоволствие ги използват. Въпреки това поколението Х е свикнало да учи на печатни материали и най-добре възприема информация чрез четене.

Подходящият педагогически метод е задачи за самостоятелна работа.

Поколение Y

Родените между 1981 и 1993 г. ги наричат поколение Y или още „децата на хилядолетието“. Това поколение е отглеждано от родителите тип “хеликоптер”, защото те изцяло контролират и планират живота на децата си. Затова Y следват правилата и са изключително зависими от родителите си. Самоуверени, склонни да се надценяват. Не признават старшинството, опита, квалификацията, науката. Работят, за да се забавляват. Възприемат работата си като средство за покриване на сметките. Много прагматични, кариерно ориентирани. Обичат да работят в екип. Държат много на личния си живот. Израснали в пазарна среда, за тях търговията е естествена. Общителни, наивни и оптимисти. Това е поколение на самоуките, пораснали и развили заедно със себе си и технологиите. Още тийнейджъри създават и поддържат блогове, участват в социални мрежи, изказват без страх своето мнение и позиция, не се крият зад маски и псевдоними. Поколението Y имат аудио-визуална памет, те възприемат добре информация чрез слушане и гледане. Поколението Y възприема образованието като средство да повиши своя стандарт чрез възможност за престижна работа, висока заплата и добър начин на живот.

Поколението Y работят най-добре в екип и по тази причина добър педагогически метод за това поколението е именно работа по двойки или в екип.

Поколение Z

Децата, родени между 1994 и 2009 г. попадат в поколението Z. Свикнали ежедневно с Интернет, те обработват информацията оттам много бързо. Често комуникират и си сътрудничат с онлайн общности, без да ги познават лично. Липсват им увереност и умения за общуване на живо. Индивидуалисти и незаинтересовани от работа в екип. Нетърпеливи, искат мигновени резултати от всичко, с което се захванат. Образованието и кариерата играят малка роля

в живота им. Поколението Z не възприемат добре информация под формата на текст и аудио, те имат визуална памет. Учат най-добре чрез видео и действие от тяхна страна. Трудно се концентрират за дълго време в една тема. Вниманието им е накъсано, често „скачат“ от тема в тема, както при сърфирането в Интернет. Правят го много бързо и извличат някаква есенция, която в момента им е важна и нужна. Така се създава впечатление за разсеяност и неспособност за учене. Но ако нещо ги заинтересова, проявяват изключителни възможности за запаметяване и разбиране. Дори могат да поискат да получат далеч повече знания от предвиденото в учебния материал. Въпреки че се наричат *дигитално поколение*, те използват технологиите единствено като средство и не се интересуват как работят, както например поколението X. Поколението Z са индивидуалисти за разлика от Y. Растат в икономическа криза, с родители, денонощно заети с кариерата си или с осигуряването на прехраната, и съответно свикват да бъдат самостоятелни. Това ражда у тях чувство за независимост. За тях образованието не е важно.

Педагогическите методи, които поставят учителя като авторитет или учене чрез печатни материали, не са най-подходящите за това поколение. Някои от представителите притежават невероятен потенциал, но трудно се стига до него. Тъй като представителите на поколение Z имат визуална памет, това трябва да се използва в методите за преподаване като се използва повече видео в учебните часове. Учене чрез действие е един от най-ефективните методи и трябва да се прилага възможно по-често.

Поколение α (Алфа)

Това са децата, родени след 2010 г. Поколението Алфа тръгват на училище по-рано и ще учат по-дълго от предходните поколения. Алфа се очаква да бъдат и по-материалистични и технологично ориентирани. Все още е трудно да се определят всички характеристики на това поколение. Социолозите и демографите предвиждат, че това ще бъде най-многобройното поколение до момента. Уроци като 3D игри ще събудят интерес и мисъл.

Разбира се, трябва да се взема предвид факта, че характеристиките на седемте поколения касаят основно населението в определени страни и могат да имат специфики в зависимост от икономическите, историческите, културните и социалните особености на страната. В България тази класификация като години и характеристики не важат на 100 % тъй като дигиталната революция се случи с малко закъснение, но в последните години поколението Z бързо наваксва. Днес в българското училище се обучава поколение Z, а съвсем скоро ще дойде и поколение α, носейки със себе си характеристиките на времето си. Образователната система не само в България, а и в световен мащаб, все още е тромава и не може достатъчно бързо да се адаптира към тях. Според американския учен Кен Робинсън, тя все още лежи на модел от индустриалната ера и е построена така, че да подготвя кадри за производството. Новите технологии обаче значително свиват категорията “работник”. Според други автори след криза винаги е следвал бум на артистичните професии. За добро или лошо, промените в живота и неизменно в подрастващите са факт. Сега остават предизвикателствата пред учителите да образоват тези млади хора, да им дадат необходимите знания и умения, като същевременно се опитат да развият у тях слабите страни, получени от характеристиките на поколението, но необходими им, за да се справят в бъдеще. Как да се случи това, до голяма степен все още остава индивидуален избор, подход и умения на учителя. Най-логично е да се използват както силните, така и слабите страни на поколението в положителна посока за мотивиране и развиване на нови умения.

1.3. Използване на примери за приложения на математиката като средство за повишаване на интереса и мотивацията на учениците към обучението по математика

Това че поколенията Z и α не проявяват голяма заинтересованост от учене и трудно се концентрират за дълго време не означава, че са с понижени възможности. Често те притежават невероятен потенциал, който обаче трябва

да бъде събуден. Една от основните причини за трудностите на учениците за възприемане на математически знания е именно неразбирането на предмета на математиката. Тъй като тези деца усвояват знания много бързо, когато нещо предизвика интерес в тях, този факт трябва да се използва в обучението. Често може да се чуе от тях: „Това за какво ми е? Къде ще го използвам?“. В [2] Дени Гедж пише от името на главната героиня Лола, която е ученичка: „…- Наистина мисля, че е, защото не разбирам за какво се говори в математиката. По история, география, френски, химия, физика – знам. Дори и невинаги да разбирам, имам известна представа за какво става въпрос. Докато това сякаш е някакъв таен език…“ Ако учителят успее да отговори на тези въпроси, вероятността да получи вниманието на обучаваните е голяма. А случи ли се това, преподавателят разполага с огромен потенциал и може да бъдат представени и респективно възприети знания, не само покриващи, а и многократно надвишаващи учебното съдържание. Не случайно един от принципите на методът сугестопедия за обучение е учебният материал, който се представя на учещите се за единица време, да бъде най-малко 2 до 3 пъти по-голям в сравнение с другите традиционни методи на обучение. При него се използва потенциала на обучавания в среда на спокойствие и доверие, което допринася за престижа на учителя в очите на учещите се, като елементите не се преподават и изучават изолирано, а следвайки принципа Цяло – Част, Част – Цяло, Частта чрез Цялото. [15] Традиционната дидактика пък предлага да се върви от простото към сложното, от частите към цялото, за да се осигури достъпност при изложение на учебния материал. Дори и някои педагози да не възприемат и дори отричат методът на преподаване на проф. д-р Георги Лозанов – сугестопедия, това не означава, че не могат да бъдат възприети някои идеи и да бъдат приложени в обучението в българското училище. Отчитайки характеристиките на новите поколения и тенденцията за развитие, показването на историческата и социална роля на математика в живота и свързаността и с всички останали науки в ежедневната работа в училище, ще помогне на учениците да не губят връзка с „Цялото“. Ако всяка индивидуална

тема бъде свързана с конкретни приложения, много по-лесно би се възприемал и усвоявал материала, ще се облекчи процеса на осъществяване на междупредметни връзки и вниманието на учениците ще бъде ангажирано по-дълго време, и не на последно място няма да губят цялостния поглед върху науката математика. При висок интерес дори може да бъде предизвикано желание за задълбочени познания в определена област, както в сферата на математиката, така и косвено към други сфери на науката. В същото време по този начин преподавателят получава силен инструмент за обосноваване на новите знания, което би повишило неговия авторитет пред учениците и улеснило работния процес в бъдеще. Обратно - отсъствието или неубедителното обосноваване на новите знания поражда елементи на догматичен стил на преподаване, което напротив би отблъснало учениците. Един от методите за обосноваване на фундаментални математически идеи използва историческия обзор на изучавания проблем чрез интересен или любопитен разказ. Учебната информация с исторически характер не трябва непременно да се запомня, въпреки че често остава трайно в паметта на обучаваните, без те да полагат особени усилия. Целта е да се постигне интерес и мотивация за възприемане на конкретното знание. Разглеждането на историческото развитие позволява ненатрапчиво и естествено да се запознаят обучаемите с процеса на възникване на нови идеи и формиране на научно мислене, както и многобройните ѝ приложения в живота. Друга важна задача в преподаването на математика е съхраняване на интереса на обучаваните към предмета, като преподавателят обстоятелствено и ефектно да разкрива практическата значимост на темата като я свързва с актуалните проблеми на съвременността. Разбира се темите, които се представят, трябва да са съобразени с интелектуалната и емоционална осъзнатост на обучаемия, както и с неговите максимални възможности за възприемане. Целите трябва да са конкретни и достижими, за да се постигне осъзнато възприемане, като се отчитат реалните възможности в зоната на близко и малко по-далечно развитие на обучаваните.

Рая Иванова – ф. н. 21745

При обучението по математика трябва да залегне схващането, че математиката е единствената наука, която е в услуга на всички останали науки. Трудно може да се открие сфера от живота, където пряко или косвено да не се използва математика. Тя е в основата на научно-техническия процес. Развитието на инженерството и съвременните технологии би било немислимо не само без математическите способи за изчисления, но най-вече заради математическите идеи, залегнали в основата на машините и в логиката на средствата за управлението им. Днес животът би бил немислим без „технологичните удобства“, които доскоро (само няколко десетки години) са били само в сферата на научната фантастика. Освен това световната икономика дължи своето съществуване на математиката. При това отново не само като средство за изчисления, но и за моделиране на икономически процеси, предвиждане на икономически състояния и събития с определена степен на сигурност, и взимане на решения за световното икономическо развитие. Всъщност като се започне от химия, физика, география, биология, медицина, дори история (използват се математически изчисления за определяне датирането на археологически находки), през икономика, статистика до демографска политика, социология, психология и философия, навсякъде се ползва математика. Приложенията ѝ не винаги са очевидни и познати на масовата публика. Голяма част от математиците в историята, като се започне от Древността до наши дни, са били ангажирани с на пръв поглед далечни за математиката въпроси, свързани с философия, психология, теология. Голяма част от Древногръцките математици са били и философи, и са се занимавали с актуалните философски въпроси на своето време. Като това не е само тенденция в Древността. През Средновековието математиците са се занимавали с актуални за времето си теологични въпроси, а през Ренесанса – с въпроси за смисъла на човешкото съществуване и човешкия ум и възприятия. Днес с теорията на хаоса се поставят въпроси за познатата и непознатата част от Вселената. Това не е случайно, защото математиката е отражение на заобикалящия ни свят. Възникнала е от необходимостта от решаване на

конкретни житейски проблеми, развила се в хода на еволюцията до абстрактни модели и се „връща“ отново, за да помогне за усъвършенстване живота на съвременното и бъдещото общество.

1.4. Роля на учителя и методика на преподаване

Обект на тази дипломна работа е именно разглеждането на примери за приложенията на математиката в исторически, настоящ и бъдещ план, за повишаване интереса и мотивацията на учениците в обучението по математика. Целта е преподавателите да включат в ежедневната си работа възможно повече примери за приложенията на математиката, за да могат учениците да не губят поглед върху Цялото. Тук трябва да се отбележи, че този метод трябва да бъде прилаган единствено и само, ако учителят е готов да инвестира време и усилия в собствената си подготовка по всяка една тема, да е подготвен да отговаря на въпроси, при интерес да разшири предвидения в програмата материал. Усилията трябва да са постоянни, а не епизодични. В против случай ефектът от използването на метода ще е временен или незадоволителен, и дори може да се получи негативно влияние както върху авторитета на преподавателя, така и върху крехката мотивация на обучаваните.

Трябва да се вземе под внимание и емоционалната и интелектуална интелигентност на аудиторията, както културните, религиозни и социални аспекти, едновременно на отделната група обучавани и на отделните индивиди от групата. Не бива да се допуска обида или негативно отношение към индивидуални личности, групи хора, етноси или религиозна принадлежност. Това е отговорната преценка на самия преподавател. В същото време, ако групата има интереси в определена област (например специализиран профил на училището или паралелката), трябва да се използват задълбочените интереси на учениците, примерите да са насочени в тази област, но не само, защото изграждането на обща култура и образованост е една от основните цели на образованието като цяло. В тази връзка

преподавателят трябва да се стреми да дава разнообразни примери, да поддържа интерес по различни теми и да задоволява персоналните интереси на аудиторията.

ГЛАВА 2. Ресурси за прилагане на подхода

В следващата част от изложението на дипломната работа са представени някои примери за приложения на математиката, представени са и много исторически факти, разделени по темите, включени в учебното съдържание в програмите по математика на МОН. [13]

2.1. Числа

2.1.1. Цели числа

- Броенето е едно от първите действия, което възниква исторически и еволюционно и може да се определи като най-чистото проявление на човешкия ум да мисли абстрактно или като начало на математическо мислене.

Когато първобитния човек започва да ловува, да отглежда животни и да обработва земята естествено възниква необходимост да отразява качествените, а по-късно и количествени изменения на заобикалящия го свят - т.е. ако успее да улови повече животни, ще успее да нахрани по-добре себе си и семейството си. По-късно се появява и количествено отразяване на броя. Доказателства за тази първа фаза на мислене на човека са се запазили в някои езици и култури. Така например в стария език на жителите на остров Фиджи съществуват термини, обозначаващи десет предмета от един и същи вид: „бола“ означава 10 лодки, а „коро“ – 10 кокосови ореха. [4]

- Първата форма на броене е възникнала естествено чрез нещо, с което древния човек е разполагал винаги – а именно частите на тялото. Първоначално са използвани пръстите на ръцете, което се повтаря в развитието на малкото дете и днес. Много често първият начин на броене на детето е именно „на пръсти“. Тази система е много подходяща за броене на малък брой предмети – 5 или 10, по естествени причини, но въпреки това е революционен напредък в развитието на математическото мислене – независимо дали са 10 крави или 10 елена, те могат да бъдат преброени с пръстите на ръцете, което е първа форма на абстрактно мислене. [4]
- Съществуват и други форми на броене с части на тялото. Например племето фасу от Нова Гвинея използва пръстите за числата от 1 до 5, дланта за

6, китката за 7, долната част на ръката за 8 и така нагоре до носа, който е символ на числото 18, или погледнато от днешна гледна точка бройна система с основа 18. [4]

- Номадите еленовъди от Сибир – юкагирите, изразяват броя на елените в стадо с 94 животни по следния начин: „трима души върху един, плюс още половин човек и още едно чело, две очи и един нос“. Освен, че това са първи аритметични действия с числа, това показва, че началното математическо мислене възниква естествено по аналогичен начин в различни части на земята, които по онова време не са имали възможност да обменят информация. [4]
- Любопитно е, че на практика се оказва, че някои видове животни също притежават способност да отчитат разликите в размера и количеството и дори да преброят малък брой предмети. Новозеландски учени направили следния експеримент: поставили голямо количество червеи в специална дупка и след това позволили на червеношийки да ги измъкнат оттам. Всеки път, когато част от червеите тайно били изваждани през дъното на дупката, птиците продължавали да обследват дупката, защото очевидно ги били „преброили“ вече и търсели липсващите. [4]
- Мравките са социални насекоми, еволюирали от осите в средата на геоложкия период Креда, преди около 150 мил. години. Мравката Cataglyphis fortis обитава пустинята Сахара и в търсене на храна прекосява огромни разстояния (спрямо размера си), които често са лишени от каквито и да било ориентири. Въпреки това насекомите могат да се върнат до мравуняка си. Възможно е мравка да пропътува около 50 метра, преди да намери умряло насекомо, от което да откъсне парче, за да го занесе в мравуняка, чийто вход е дупка с диаметър по-малък от милиметър. Учени направили следния експеримент: Променят дължината на крачетата на мравките, за да изследват феномена и откриват, че тези насекоми „броят“ крачките си, за да определят разстоянието. Те удължават с кокили или скъсяват крачетата на мравката след като тя вече е достигнала целта. В резултат мравките с по-дълги крака подминават мравуняка, а тези с по-къси изобщо не стигат до него. От друга страна, ако пътуването започне с вече променени крака, всички мравки се завръщат успешно, което показва, че дължината на крачетата е от съществено значение. [6]

- Правени са много експерименти дали животните могат да броят и дали могат да бъдат научени. Оказва се, че доста видове животни могат да бъдат обучени да броят до малък брой. Например, опити с шимпанзета, които успешно са обучени да разпознават числата от 1 до 6, като натискат правилния клавиш от клавиатура, когато им бъде показан съответния брой обекти на екран. Тук възникват доста въпроси: Способни ли са животните да броят? Къде трябва да бъде поставена границата между животинското и човешкото абстрактно мислене? В случая по-важното е, че тази способност на животните за елементарно броене е важна еволюционна крачка, която им позволява да определят коя от две групи фигури предлага по-голяма сигурност с оглед на количеството, както и коя от две групи фигури представлява по-голяма конкуренция, когато става дума за усвояване на ресурси на чужда територия. [4]
- Най-старото свидетелство за математическите способности на нашите праисторически роднини и същевременно първия вид помощно средство на паметта е рабошът – дървена пръчка, рог или животинска кост, по която всеки нарез отговаря на един брой. Най-старият открит рабош е т. нар. кост от Лебомбо. Тя представлява фибула (дългата кост, свързваща коляното с глезена) от бабун (вид маймуна) с поредица от 29 нареза по нея. Открита е в пещерата Лебомбо, намираща се между Южноафриканската република и Свазиленд, а нарезите по нея са направени през около 37 хил. години. [4]

- Най-древният артефакт, показващ следи от по-абстрактно математическо мислене, е т. нар. кост от Ишанго. Тя е намерена в Централна Африка, на границата с Уганда и датира от преди 25 хил. години и на пръв

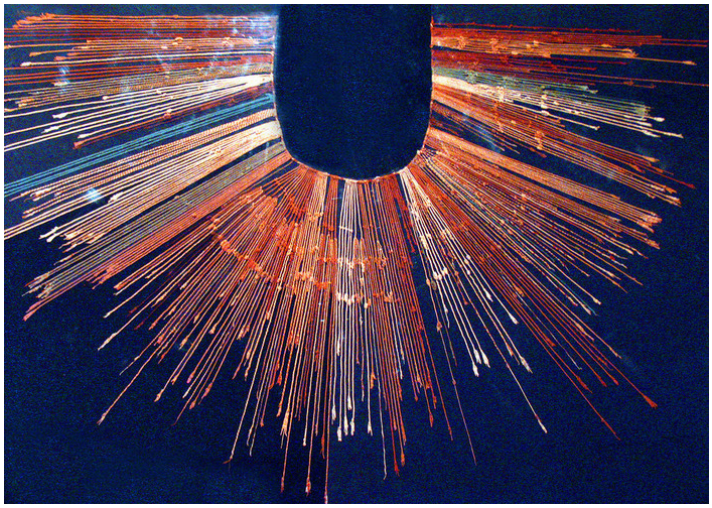
поглед представлява рабош. Нарезите по костта обаче са групирани по интересен и специфичен начин. Те са в два реда и всеки наброява 60 знака, във втория ред обаче са групирани съответно по 19, 17, 13 и 11 знака. Това са простите числа между 10 и 20. Предполага се, че това е лунен календар за шест месеца, с обозначени фазите на луните и се счита за най-ранния пример за приложение на математическите знания в измерване на времето. [4]

Рабошът има и друго приложение. В по-късен етап се използва и като парично средство, като бъде разсечен на две по дължина всяка страна по дадена сделка взима по една от частите. През Средновековието в Англия рабошите се използвали като официални счетоводни документи за приходите, дължими на правителството, поради което се съхранявали в Държавната хазна. Когато тази английска институция престава да съществува през 1826 г., от нея остават две волски коли с рабоши, наредени в Уестминстърския дворец, където заседава Британския парламент. През 1834 г. домакинът решава да се освободи от тях, като ги изгори в дворцовата фурна, но силата на пламъка от сухото дърво е била толкова силна, че изгаря целия дворец. След това на негово място е построена сградата на Парламента в Лондон. [4]

Рабош е намерен и на територията на България, макар и не от древността. Това е находка от пещерите при Белоградчик - открито е конско ребро с нарязани по него знаци, което според учените може да се приеме като първия ранен календар (рабош). Тук рабошът представлява народен начин за измерване на времето, който от до началото на XX в. е бил широко разпространен.

- Друго помощно средство за външно запаметяване древните използвали възлите по разноцветни върви или дребни камъчета и раковини, струпани на купчинки или накачени по дървени стълбове. Поради нетрайността на материалите, единствените оцелели свидетелства от палеолита са рабошите. Инките използвали „кипу“ – разноцветни конци от вълна на лама или алпака с множество навързани по тях възли и нанизани на общ шнур или въже. Възлите по отделните нишки представляват различни числа в зависимост от броя на пресукванията на конеца; по големите суми пък се изразяват посредством групи от възли. Предполага се, че цветът на конеца е определял вида на нещата, които са подложени на преброяване. Без да притежават писменост и бройна система, счетоводителите на инките –

кипукамайок (пазители на кипу), са били в състояние да съхраняват информация за данъците, таксите, приходите, преброяванията, календара, обработваемите площи и други. [4]



- С развитието на все по-сложни системи за броене и създаването на средства за изкуствено запаметяване на количествените измервания се създават условия за измислянето на цифрите. Първите цифри, създадени от древните култури (от Египет до Китай), съвсем приличат на рабоша – единични, двойни или тройни резки или черти. Днешната цифра 1 също представлява такъв знак, докато древните индийци изписвали чертичката хоризонтално. Записването на по-големи числа става посредством един от следните четири начина: групиране, умножение, с помощта на код и чрез позициониране.

Групирането е най-елементарната система за записване на числата – по-големите включват по-голям брой рабошови частици, например подобно на римското число 4, записвано като IIII. Установено е, че четири е най-големия брой предмети, които човек може да възприеме като точно количество, без да ги преброи. По тази естествена причина най-простите системи използват групиране на не повече от 4 символа, като например за 5 използват четири успоредни частици пресечени с пета хоризонтална. При тези системи за записване на числата реално се използват действията събиране и изваждане, и на практика това са първите действия с числа. Пример за такава система са римските цифри. Тази система е подходяща при боравенето с малки числа,

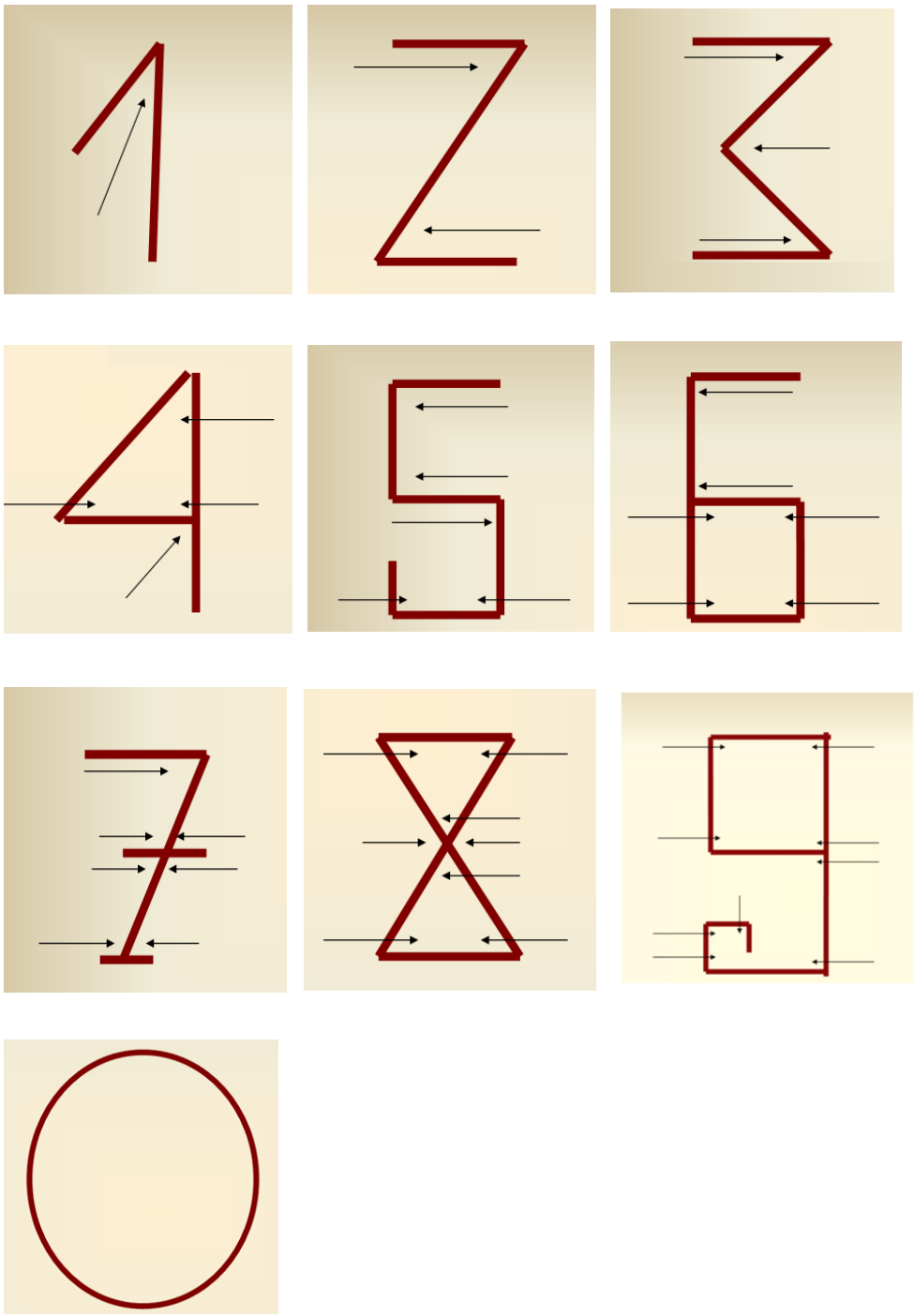
докато при по-големи числа е необходимо изписването на голям брой символи.

Умножението като система за записване на числата използва по-малко числови знаци от групирането. При нея записаните една до друга цифри се умножават. И до днес в Китай се ползва точно такава система.

Записването на числа с помощта на код е друга система. При нея всяко голямо кратно число се записва с отделен символ. Например в Древен Египет са ползвали отделни символи (кодове) не само за цифрите от 1 до 9, но и за кратните на 10 числа – 10, 20, 30, 40 и т.н; 100, 200, 300, 400 и т.н.; 1 000, 2 000, 3 000, 4 000 и т.н. Което е удобно при записване на големи числа, но пък налага помнене на голям брой символи. Друг пример е използване на букви от азбуката за означаване на числа, разбира се на по-късен етап, когато възниква писмеността. Пример за такава система е 16-ната бройна система, която се ползва в наши дни. [4]

- Основно предимство на позиционните бройни системи, каквато е десетична, която е най-широко използваната днес, е баланса между удобство и лесно заучаване. Мястото (позицията), която всеки символ заема при изписване на числото, показва от кой разред е той. Позиционната система може да функционира само при наличие на символ за „нищо“ – нулата. Това е и причината за по-късното и възникване, тъй като най-древните цивилизации не са могли да достигнат до идеята за символ, означаващ „нищо“. [4]
- Така чрез естествената необходимост да се записват количества възникват и аритметичните действия. Броенето е най-простата форма на събиране – всяко следващо число е сбор на предишното плюс едно. Събирането на две числа е равносилно на преброяване първо на едното после на другото (независимо дали са бизони, елени, плодове и т.н.). При това няма значение дали първо ще преброим едното и после другото или обратно, т. е. свойството комутативност на събирането. Също така, ако събираме 3 групи предмети не е от значение дали първо ще съберем (преброим) първите две и след това третото или първо второто и третото и ще добавим първото или с други думи свойството асоциативност на събирането. Докато при изваждането има значение реда на извършване на операциите. Така възникват и първите помощни средства за извършване на аритметични действия – абаците (които са аналог на днешните сметала). [4]

➢ Един любопитен факт за арабските цифри, които ние използваме: всяка цифра, изписана с прави линии и без извивки, съдържа толкова на брой ъгли, колкото е нейната числова стойност. Съответно нулата е без ъгли. [4]



➢ Целите числа и действията с тях възникват естествено в най-дълбока древност като необходимост за отразяване на количествените изменения на заобикалящия свят на древния човек, подпомагат еволюцията и са неразделна част от живота и до наши дни. Днес едва ли някой поставя под въпрос необходимостта от тях. В най-ранна възраст детето се научава да брои, за да бъде пълноценна част от човешкото общество. Дори и в слабо образовани части на света боравенето с числа е неразделна част от битието. Монетарната система е немислима без числата и действията с тях. Тук ролята на учителя е да покаже с примери от живота под формата на задачи, които да моделират житейски ситуации, че работата с числа е задължително изискване на обществото. А историческите факти са начин да се събуди любопитството на учениците, за създаване на междупредметни връзки и обогатяване на математическата култура на ученика, и не на последно място лесно запомняне чрез асоциация с интересен факт.

➢ Терминът „гугол“ (googol) се използва за означаване на числото 10^{100}, което се записва с 1 последвано от 100 нули. Тази дума е измислена от деветгодишния Милтън Сирота, когато чичо му, американския математик Едуард Каснер го помолил да измисли дума за много голямо число. Така „гугол“ за пръв път се появява в печатни публикации през 1938 г. Интересен е факта, че Лари Пейдж, един от основателите на Гугъл (Google), който се интересувал от математика, е кръстил компанията си на това голямо число, след като по погрешка изписва думата грешно. [6]

2.1.2. Рационални числа

➢ За математическото наследство на Древен Египет черпим сведения основно от папируса на Ринд, който датира от около 1 650 г. пр. н. е., и представлява препис от много стар текст. В този папирус 81 от общо 87 задачи е него включват използване на дроби. Египетският метод за смятане с дроби е най-забележителната страна на египетската аритметика. Египтяните използвали само аликвотни дроби – дроби с числител *1*. Всички техни дроби имали вида $\frac{1}{n}$ ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и т.н.) Единственото изключение е $\frac{2}{3}$, но за нея те създали специален символ. За да изразят останалите дроби египтяните събирали аликвотни дроби с различни знаменатели. Любопитно и все още необясним е

факта, че при изразяване на някаква дроб с числител, различен от *1*, събирали точно определени аликвотни дроби. Освен това те не изписвали числителят на дробта, защото той винаги е *1*, затова поставяли един овален знак на знаменателя, което показвало, че става дума за дроб. [4]

➢ Българската народна музика е прочута със своите неравноделни размери. Те се изразяват с обикновени дроби. Някои от по-популярните български народни танци и техните размери са:

Ръченица – $\frac{7}{8}$

Дайчово хоро – $\frac{9}{8}$

Пайдушко хоро – $\frac{5}{8}$

Копаница – $\frac{11}{16}$

2.1.3. Реални числа

➢ Между 1500 и 500 г. пр. н. е. през така наречения ведически период в Югоизточна Азия се формира една от големите цивилизации на Древна Индия, която се характеризира с високи математически постижения. Ведическата и по-късната будистка философия наблягат на безкрайния характер на времето и пространството, така че индийските математици отрано

били подготвени да възприемат идеята за безкрайността. В санскритски текстове се съдържат и прогресивно намаляващи числа, предназначени за обозначаване на най-малките единици материя (според някои изследователи това е най-ранния предшественик на атомната теория). Така се достига до число, равно на 70 трилионни части от метъра, което е невероятно близо до актуалните размери на въглеродния атом. В старинни джайнистки текстове се прави разлика между отделните видове безкрайност, докато древните будисти са делели числата на изброими, неизброими и безкрайни, което предхожда възникналите по-късно теории за неопределености (например от вида $\frac{0}{0}$). [4]

- Първоначално в древността са използвани само положителни числа, тъй като аритметиката била свързана с бита на хората. В Средновековна Индия за пръв път в писмена форма се появява идеята за отрицателни числа в трудовете на Брахмагупта – най-големият математик на Средновековна Индия. Неговият най-известен труд е озаглавен „Брахмаспхутасидханта“ (Отварянето на Вселената). Заниманията на Брахмагупта в областта на математиката са чисто практически. При работата си с парични заеми и изчисляването на лихвата по отпускането на заем, достига до идеята за отрицателни числа. Математиците от древността като тези в Египет и Гърция, са отричали валидността и дори съществуването на отрицателни числа. За тях при изваждането на 4 от 3 например не остава нищо и при това действието е напълно безсмислено. Брахмагупта прави откритието, че резултатът при горепосоченото изваждане е едно напълно валидно число, което дори може да се използва при изчисления. Тъй като откритието е свързано с лихварството, той нарича отрицателните числа „дълг“, а положителните – „богатство“ и дори извежда основните правила при математическите действия с отрицателни числа по следния начин:

„Дълг“ минус нула е равно на „дълг“

„Богатство“ минус нула е равно на „богатство“

Нула минус „дълг“ е равно на „богатство“

Нула минус „богатство“ е равно на „дълг“

Произведението на два „дълга“ е равно на „богатство“

Произведението на „богатство“ и „дълг“ е равно на „дълг“ [4]

- Откъси от счетоводната книга на един флорентински банкер от 1211 г. представляват най-ранните сведения за използването на двустранното счетоводство, но методът става изключително популярен едва след публикуването на книгата „Сума де аритметика, геометрия, пропорциони ет пропорционалита“ (Всичко за аритметиката, геометрията, пропорциите и пропорционалността) на Лука Пачоли през 1494 г. Тази книга представлява учебник по обща математика и включва трактат „Де Компутис ет Скриптурис“ (За сметките и тяхното записване), в който Пачоли описва двустранното счетоводство – метод, разпространен сред венецианските търговци, поради което се нарича „венециански метод“. „Сума ди аритметика“ е една от първите книги, отпечатани от пресата на Гутенберг (създателят на печатарската преса), и се превръща в най-четената математическа книга в цяла Италия, а трактатът „Де Компутис“ спечелва на своя автор прозвището „баща на счетоводството“. Много от споменатите принципи и методи се използват и до днес в счетоводството. [4]
- Пер дьо Ферма (1601 – 1675 г.) е френски юрист, магистрат, специалист по класически езици и може би един от най-великите „любители“ математици. Ферма лично не публикува нито един от своите трудове. Постиженията му стават популярни от кореспонденцията, която поддържа. Той работи предимно в областта на теорията на числата, като любимият му метод бил да изкаже някакво твърдение без доказателство и да остави предизвикателството на други да го докажат. Това буди съмнение, дали той действително е разполагал с доказателства за своите твърдения. Най-известния пример за това е така наречената „последна теорема на Ферма“, която цели 300 години поддържа интереса на математиците в областта на теорията на числата. Върху своя екземпляр на диофантовата „Аритметика“ Ферма пише кратка бележка, според която разделянето на число на втора степен на други две числа на втора степен (Питагорови тройки) не е възможно за подобни конструкции от числа, повдигнати на по-висока от втора степен. С други думи не съществуват три положителни числа, за които $a^n + b^n = c^n$, при *n > 2.* В допълнение пише, че е открил сигурно доказателство, но полето няма да го побере. Чак през 1995 г. английският математик Андрю Уайлс доказва твърдението, но то включва материал от направления в математиката, които не са били известни по времето на Ферма, така че доказателството със

сигурност не е същото. Остава все пак и въпроса, дали Ферма наистина е имал доказателство. [4]

2.1.4. Прости числа

- Какво е забележителното на простите числа и защо им се отделя такова внимание в математиката? Фундаменталната теорема на аритметиката гласи, че всяко цяло число, по-голямо от 1, е или просто или може да бъде представено като произведение на прости множители. При това комбинацията от прости множители на всяко съставно число е уникална. Така може да се направи съпоставка с химичните елементи, които са съставна част на веществата или атомите – съставна част на молекулите. Една такава аналогия би била много полезна за осмисляне и възприемане на термина просто число. Например, ако разлагането на прости множители се представи като разделяне на числото на съставните му части, това би улеснило разбирането на действието, усвояване на алгоритъма и прилагането му в последствие. Андрю Гренвил, британски математик, работил в областта на теория на числата, отбелязва: „Простите числа са най-базовите обекти в математиката. Те са и сред най-тайнствените, тъй като след векове проучвания структурата на множеството на простите числа все още не е добре разбрана…“ [4]
- Интересно проявление на простите числа в природата се наблюдава в репродукционния цикъл на цикадите от вида Magicicada septendecum, крилати насекоми, еволюирали преди около 1,8 млн. години и които се срещат в Северна Америка. Те прекарват повечето от живота си под земята, като се хранят със сокове от корени на растенията, като имат странен жизнен цикъл – всички индивиди от даден район се появяват едновременно, бурно се размножават, след което отново изпадат в хибернация. Интересното в случая е, че това се случва през 13 или 17 години (прости числа), в зависимост от района, който обитават. Защо? На теория, ако един вид цикади се възпроизвежда през 12 години, това ще съвпадне по време с репродукционния период на техните врагове, чийто жизнен цикъл е на 2, 3, 4 или 6 години. Така поколението цикади ще бъде обект на нападения на няколко нови поколения врагове в природата. Но, ако новото поколение се появи след 13 години, ще бъде застрашено само от естествените си врагове,

които също се възпроизвеждат на 13 години. Това е важен факт, който показва, че простите числа са важни в закона за естествения подбор. Марио Маркъс от Института по молекулярна физиология „Макс Планк“ в Дортмунд, Германия и екипът му откриват, че циклите с прости числа възникват естествено. За целта използват математичнески еволюционни модели за взаимодействието между хищник и жертва. Първо залагат случайна продължителност на цикъла на живот на компютърно симулирани популации. Резултатът е, че след време започва серия от мутации, която винаги води до цикъл на живот, базиран на прости числа. [6]

- Мартин Гарднър, американски писател, работил за популяризирането на науката, специализирал в областта на забавната математика, казва за простите числа следното: „Нито един клон на Теорията на числата не е толкова пропит с мистерия, колкото изучаването на простите числа – тези дразнещи, непокорни цели числа, които отказват да се делят без остатък на което и да е друго цяло число, с изключение на себе си и 1. Някои задачи за прости числа са толкова елементарни, та може да ги разбере и дете, но в същото време, понеже са толкова задълбочени и далеч от разрешаването, много математици подозират, че нямат решение…“ Действително едни от най-популярните недоказани (или в продължение на много години недоказани) твърдения в математиката са свързани именно с простите числа. [4]
- Две последователни нечетни прости числа се наричат числа близнаци. Такива са *3* и *5*, *5* и *7*. През 1919 г. норвежкия математик Виго Брун доказва, че сборът на реципрочните стойности на всички последователни прости числа близнаци е сумата *1,9022160…*, наречена Константа на Брун. [6]
- През 1958 г., след като нахвърля драскотини върху салфетка, американският математик и фокусник Норман Гилбрет представя озадачаваща хипотеза за простите числа. Написва първите няколко прости числа по-големи от 1 на първия ред. След което пресмята разликата между всеки два съседни члена и записва остатъка на втория ред и т.н.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, …

1, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, …

1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, …

1, 2, 0, 0, 0, 0, 2, …

1, 2, 0, 0, 0, 2, ...

1, 2, 0, 0, 2, …

1, 2, 0, 2, …

1, 2, 2, …

1, 0, ….

1,….

Хипотезата на Гилбрет гласи, че след първия ред числото в началото на всеки следващ ред е винаги единица. Досега не е намерено изключение от хипотезата, въпреки че още остава предизвикателство към математиците. [6]

- Едно от свойствата на забележителния „Триъгълник на Паскал“ е: Ако първото (след *1*) число в реда е просто, то всички останали числа в реда се делят на него (без *1*). [4]

……

1 5 10 10 5 1

……..

1 7 21 35 35 21 7 1

……

- През 1976 г. Уитфилд Дифи - бивш главен директор по сигурността на Sun Microsystems и Мартин Хелман - професор по електро-инженерство в NorCal Ivy League School в Станфорд публикуват своето проучване "Нови посоки в криптографията" (“New Directions In Cryptography”), в което дават идеята да се използва публичен ключ за криптирането на информация, дигитални подписи и лични ключове за декриптирането на данните, с което поставят основите на съвременната криптография. В тази статия се описва метод за предаване на ключ по несигурна мрежа с използване на прости числа.

Двама приятели Алис и Боб искат да си изпращат тайни съобщения през публична несигурна мрежа. За целта те избират едно просто число p и една основа q.

1) Алис избира числото **a** и пресмята $qa\ (mod\ p) = A$ и изпраща **A** на Боб.
2) Боб избира числото **b** и пресмята $qb\ (mod\ p) = B$ и изпраща **B** на Алис.
3) Алис вече има числото **B** и пресмята $k_1 = Ba$, а Боб пресмята $k_2 = Ab$. Тъй като $qab = qba$, то $к_1 = к_2 = к$ – ключ.
4) Сега двамата имат общият таен ключ и могат да го използват като криптиращ ключ, който е известен само на тях двамата и могат да си изпращат един на друг съобщени по един и същ открит комуникационен канал.

В споменатата статия има и други теми, например за еднопосочните функции или хеш-функциите, които оказват фундаментално значение за развитието на криптографията. За този си принос през 2016 г. Дифи и Хелман са удостоени с престижната награда на Тюринг, често наричана "компютърната Нобелова награда", която включва и парична премия в размер на 1 млн. долара.

Идеите на Дифи и Хелман намират приложение в RSA - алгоритъм за шифриране на данни, при който се използват различни ключове за шифриране и дешифриране. Наименованието идва от фамилните имена на създателите му Ronald L. Rivest, Adi Shamir и Leonard Adleman, патентован през 1983 г. Ключът с дължина от 512 до 1024 бита се използва за кодиране и е различен от ключа, използван за декодиране. Алгоритъмът RSA предоставя процедура за подписване на електронен документ и за проверка на автентичността на подписа и е най-популярния и използван алгоритъм за криптиране. Приложен е в операционни системи на Майкрософт, Епъл, Сън и Новел, както и в много софтуерни продукти и платформи по света.

Днес едва ли е необходимо да се поставя въпроса за необходимостта от криптиране и защита на данните. С бурното развитие на технологиите и използването им във всички сфери на съвременния живот, е немислимо да не

се използват криптиращи методи за защита на информацията, и простите числа се оказват с много важна роля. [4]

2.1.5. Степенуване

- В Древна Индия в периода 2600 – 1900 г. пр. н. е. около долината на река Инд съществувала древна цивилизация, която имала доста добри знания по математика, като умело ги използвали за изготвяне на изключително прецизни за времето си мерки и теглилки, които използвали в търговията със скъпо струващи стоки. От намерените останки от древните градове Мохенджо Даро и Харапа (на територията на днешен Пакистан) личи, че използвали двоична система за смятане по отношение на измерване на тегло. Единицата за мярка е тежест равна на около един грам. Харапската цивилизация разработила основни мерки за *2, 4, 6, 8, 16, 32, 64* и *120* единици, видно от намерените останки. За големите тежести прогресията на мерките била десетична, като единицата била *100* пъти теглото на *16* единици.

По-късно в един санскритски текст от IV в. се разказва, че Буда смятал до 10^{53}. На други места става въпрос за броене до 10^{421}. [4]

- Записването на степенуването, познато днес – със степенен показател, пести място и време, много по-лесно е да се напише a^7 вместо $a.a.a.a.a.a.a$. Френският философ и математик Декарт популяризира този начин на записване в своя труд „Геометрия“, излязъл през 1637 г., въпреки че той не е първият, които го използва. Преди него и други математици използвали различен начин на записване на степенуването. Други пък използвали горен индекс за друг цели. Горните индекси били много затруднявали първите печатари, защото трябвало да излязат над основния ред, поради това те ги изписвали с по-малък шрифт в сравнение с основния текст, което се е запазили и до днес. [4]

2.1.6. Коренуване

- Древногръцкият ученик на Платон от неговата Академия - Евдокс - при своята работа върху пропорциите, опитвайки се да намери дължината на диагонала на квадрат във страна *1* (или с други думи стойността на $\sqrt{2}$), установил, че това не може да се изрази точно. Така се стига до идеята за

ирационалните числа, от които древногръцките математици толкова се страхували и съзнателно избягвали. Съгласно легендата това откритие така потресло неговите събратя, че за да спрат разпространението на тази еретична идея, те го удавили. [4]

2.1.7. Логаритъм

- Логаритмите са много полезни за развитието на математиката, защото улесняват многократно по революционен начин трудоемкия и сложен процес по изчисляването и практически са нещо като джобен калкулатор още преди да бъде измислен. Изнамирането на логаритмите се корени в желанието на математиците да направят действията умножение и деление също така прости като събиране и изваждане.

Това става възможно при съответствие на една аритметична и една геометрична прогресия. Принципите на свързване на аритметични с геометрични прогресии са изследвани задълбочено от шотландския математик Джон Непер в книгата му „Мирифици Логаритморум Канонис Дескрипцио“ („Описание на чудната таблица на логаритмите“), излязла през 1614 г. Ученият въвежда в употреба понятието „логаритъм“, за което заимства от гръцките думи „логос“ (отношение) и „аритмос“ (число), за да му придаде значението „отношение между числата“. С помощта на Хенри Бригс (лондонски математик) Непер създава таблица със стойностите на логаритмите с основа от 1 до 10, които се използват за изчисления. Логаритмите улесняват намирането на квадрати и кубове, както и на квадратни и кубични корени. [4]

- В края на XVI и началото на XVII в. се започва бурно развитие на науката и знанията за Вселената и природата се развиват в нова революционна посока. Този период е известен в историята като Научната революция и в неговата основа стои математиката. В една от науките математиката има безспорно господство и това е астрономията. Астрономията се оказва от ключово значение за Научната революция, което от своя страна води и до революционни открития в математиката. Началото на Научната революция се свързва с полския духовник и астроном Николай Коперник (1473 – 1543 г.). Той

задълбочено наблюдава небесните тела и изучава математическите изчисления, свързани с тяхното движение (т. нар. Алфонсови таблици) и достига до извода, че в общоприетата Птолемеева теория има неща, които не могат да бъдат обяснени. В основата на Птолемеевата космология е Земята, която се намира в центъра на Вселената или така наречения Геоцентричен модел, в която останалите планети и звезди обикалят около Земята в кръгови орбити. Птолемей и неговите последователи през вековете се опиват да дадат строги математически доказателства в подкрепа на техните наблюдения и приети по подразбиране твърдения. С развитието на науката обаче астрономите все по-често се сблъсквали с някои несъответствия между техните наблюдения и общоприетите принципи, като се опитвали не много успешно да дадат някакви математически обяснения на наблюдаваните аномалии. Коперник изучава подробно как математиците се опитват да обяснят недостатъците на Птолемеевата система, и стига до извода, че най-вероятно самия геоцентричен модел е погрешен. Тогава той започва да прави математически изчисления, приемайки Слънцето за център на Вселената (така наречения хелиоцентричен модел) и установява, че този модел много по-добре обяснява наблюдаваните небесни явления. Коперник си дава сметка, че това е изключително революционно твърдение, противоречащо на приетите тогава догми и може да му донесе проблеми с Църквата, затова се въздържа от публикуване на своя труд „Де революционибус орбитум целестиум“ (Върху въртенето на небесните сфери) чак до смъртния си одър. Един негов млад и ентусиазиран привърженик и помощник, професорът по математика и астрономия от Витенбергсия университет - Йоахим Ретик през 1539 г. публикува „Нарацио Прима“ (Предварително съобщение), в което описва революционната хелиоцентрична теория на Коперник и математическите доказателства в подкрепа на нея, като пише, че лично е повторил всички изчисления.

Хелиоцентричната система става вдъхновение за много астрономи през следващите поколения и става причина за бурно развитие на математиката за целите на астрономията. Обаче постиженията на германския математик и астроном Йоханес Кеплер (1571 – 1630 г.) се отличават най-много. Той се вдъхновил от постиженията на Коперник и посветил живота си в търсене на

космическите тайни на Вселената. Неговото желание да разкрие тайния божествен ред на Сътворението го отвежда при датския астроном Тихо Брахе, който му завещава голямо количество астрономически наблюдения. Тяхната обработка отнема на Кеплер години и повече от 1000 страници, пълни със сложни изчисления., но най-накрая успява да докаже, че орбитата на Марс е елипса, като същото се отнася и за другите планети. С това той усъвършенства хелиоцентричния модел на Коперник, които приемал, че орбитите са кръгли. Това вероятно не би било възможно без открития от Непер логаритъм, които съкращава многократно времето за изчисления, и улеснява и съкращава много работата на математиците по онова време. [4]

- Логаритмичната линия има огромно приложение, тъй като позволява изключително бързо пресмятане. През 1850 г. един 19-годишен артилерийски лейтенант от френската армия променя оригиналния дизайн на сметачната линия. По този начин военни започват да правят изчисления за далеко бойните оръжия, докато са във война с Прусия. По време на Втората световна война американските бомбандировачи често използвали специализирани сметачни линии. [4] Онлайн ресурс може да бъде намерен на адрес:
http://ed.ted.com/lessons/how-does-math-guide-our-ships-at-sea-george-christoph

- Днес много величини в науката се представят като логаритми на други величини и числа. Например pH показателят в химията, единицата бел за измерване на акустиката или пък скалата на Рихтер, по която се изчислява интезитетът на земетресенията, се основават на логаритмична скала с основа 10. Може да се направи сравнения, че откриването на логаритмите повлиява върху науката така както компютрите през XX в. [6] Онлайн ресурс може да бъде намерен на адрес:
http://ed.ted.com/lessons/steve-kelly-logarithms-explained

2.1.8. Числови редици

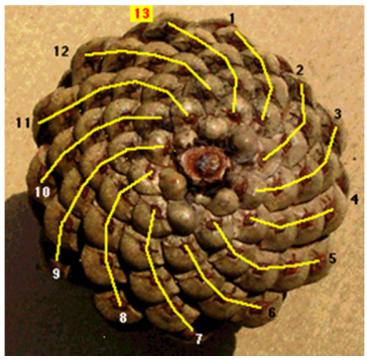
- Една от най-популярните числови редици е тази на числата на Фибоначи – италиански средновековен математик, чието истинско име е Леонардо от Пиза. Първото изречение в най-популярното му съчинение

„Либер Абаци“ (Книга за смятането) е: „Започва Либер Абаци, написана от Лоенардо Пизано (от Пиза), филиус Боначи, в годината 1202.“ Буквалния превод на филиус Боначи е: „син на Боначи“ (фамилията). По-късно италиански историк Гулиелмо Либри свързва двете думи и го нарича Леонардо Фибоначи, както е известен днес. Най-популярната задача от този труд е задачата за зайците.

Един човек поставил двойка мъжки и женски зайци в оградено със стена пространство. Колко двойки зайци могат да се родят от тази двойка, като се знае, че всеки месец всяка двойка ражда нова такава, която от своя страна два месеца по-късно достига полова зрялост?

Отговорът е числова редица, наречена „ред на Фибоначи“, макар че е бил познат още на древните индийски математици, в която всеки следващ член е сбор от предходните два.

Числата на Фибоначи се откриват и при много растения, които развиват спирали, като например слънчогледовите пити, ананасите, боровите шишарки и др. Ако се разгледа шишарка откъм основата, ще се забележат виещи се спирали – *8* по часовниковата стрелка и *13* в обратна посока, които са числа на Фибоначи. Това не е случайно, а стремеж за оптимално усвояване на дадено пространство. Алгоритъмът при възникване на спиралите е следния: Всяка следваща клетка се генерира при завъртане на ъгъл равен на златното сечение спрямо предишната клетка. Доказано е, че при такъв ъгъл се осигурява оптимално запълване на пространството, като образуваните по този начин спирали са винаги числа на Фибоначи. Така например в слънчогледовата пита семената най-често са подредени в *34* спирали по посока обратна на часовниковата стрелка и *55* – по посока на часовниковата стрелка, които са две последователни числа на Фибоначи. [4]



➢ В един от трудовете на арабския учен Ибн Халикан през 1256 г. се описва следната история: Великият везир Сиса бен Даир бил помолен от индийския крал Ширхам да каже каква награда иска за това, че е открил играта на шах. Сиса отвърнал:

- Ваше Величество, бих бил щастлив, ако ми дадете едно зрънце пшеница на първото квадратче от игралната дъска на шах, две зрънца на второто, четири на третото, осем на четвъртото и. т.н. за всичките шестдесет и четири квадратчета.
- Само това ли искаш, глупако Сиса?“, изкрещял учеденият владетел.

Кралят не осъзнал колко много пшеница ще получи Сиса. Реално това са 18 446 744 073 709 551 615 зрънца.

Ян Галберг пише: „При около 100 зрънца на всеки кубичен сантиметър общият обем на пшеницата на Сиса би била около 200 кубични километра. За да се натовари това количество, биха били необходими две хиляди милиона железопътни вагона, които ще образуват влак с дължина, равна на хиляда пъти обиколката на Земята.“

Любопитно е, че Данте използва тази история в „Рай“, описвайки светлините на Небесата като: „Бяха толкова много, че броят им сякаш се увеличаваше по-бързо от геометрична прогресия върху дъска за шах.“ [6]

2.1.9. Комплексни числа

➢ Макар идеята за комплексните числа да се обсъждала много преди това, историята им започва през XVI в. в Европа. Италианският инженер Рафаел Бомбели през 1572 г. публикува книгата си „Алгебра“ и в нея въвежда

означението $\sqrt{-1}$ като решение на уравнението $x^2 + 1 = 0$. Самият Бомбели пише: „Мнозина сметнаха, че допускането ми отива прекалено далеч.“ И наистина много от математиците не приемат веднага комплексните числа. По-късно Ойлер въвежда і за означение на имагинерната единица от първата буква на латинската дума „imaginarius“. Много от откритията във физиката не биха били възможни без употребата на комплексните числа. Те служат за изчисления, необходими при пресмятане на променливите токове, в теорията на относителността, при обработката на сигналите, динамиката на флуидите, теорията на струните и квантовата механика. [6]

- Кватернионите са комплексни числа в четириизмерно пространство. Описани са през 1843 г. от ирландския математик Уилям Хамилтон. Оттогава се използват за описания на динамиката на движение в три измерения и се прилагат в сфери като компютърната графика, програмиране на видео игри, обработка на сигнали, роботика, биоинформатика. В софтуера за полети на американската Космическа совалка се използват кватерниони при изчислението на управлението, навигацията и контрола на полета. [6]

2.2. Изрази

- Блез Паскал е забележителен френски учен от XVII в., който въпреки краткия си живот (умира на 39 години), успява да постигне много не само в математиката, но и във физиката – изучава поведението на течности и газове под налягане. Паскал доказва принципа, че височината на живачния стълб зависи от околното налягане, създавано в атмосферата, въз основа на който е създаден барометъра и дава основа за метеорологичното прогнозиране и измерване на надморската височина. Освен това открива, че при течностите в затворени съдове налягането е равно във всички посоки, затова и единицата за налягане носи неговото име.

Паскал работи в много области на математиката, но едно от забележителните му открития е „Триъгълникът на Паскал“. Въпреки че е бил познат много преди това, Паскал доказва забележителните му свойства. „Триъгълникът на Паскал“ представлява подредба на числа във формата на

триъгълник, като сборът от всеки две съседни числа е равен на числото точно под тях.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Паскал стига до своя триъгълник в опитите за изготвяне на удобна за ползване таблица на биномните коефициенти на $(x + y)^n$. Показва връзката между коефициентите в разложения вид на бинома и числата в съответния ред от триъгълника. [4]

Бином	Разложен вид	Коефициенти
$(x+y)^0$	1	1
$(x+y)^1$	$x + y$	$1, 1$
$(x+y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$	$1, 2, 1$
$(x+y)^3$	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	$1, 3, 3, 1$
$(x+y)^4$	$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$	$1, 4, 6, 4, 1$
$(x+y)^5$	$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$	$1, 5, 10, 10, 5, 1$

Онлайн ресурс по темата може да бъде намерен на адрес: http://ed.ted.com/lessons/the-mathematical-secrets-of-pascal-s-triangle-wajdi-mohamed-ratemi

2.3. Уравнения

2.3.1. Линейни уравнения

- Алгебрата включва математически задачи, при които дадени величини се заменят с букви, за да се свържат в уравнения. Уравненията

приличат на везни: двете им страни трябва да се уравновесяват. Това тяхно свойство се използва за решаването на математически задачи за намиране на неизвестни величини: ако знаем количествения израз на едната страна на уравнението, значи знаем на колко е равна другата му страна. [4]

- Познатата днес форма на алгебрата, при която с букви се означават променливите, се нарича символна алгебра. Тя е сравнително нова – появява се преди около 400 години. Математиците от древността са се занимавали с алгебра, но не са и придавали голямо значение, а са я смятали за клон на геометрията, който се занимава със задачи, включващи неизвестни величини. Например, ако знаем повърхността на дадена правоъгълна нива, че е 12 единици, а дължината на едната и страна – 4 единици, то лесно може да се намери дължината на другата страна. [4]
- Преминаването от чисто практически въпроси към абстрактни принципи, изразени чрез математически символи, се оказва продължителен процес. Запазените до днес текстове на Древен Египет и Месопотамия не си служат със символи или с геометрия при решаването на алгебрични проблеми. При тях алгебрата си остава изцяло „риторична“ – всичко се описва с думи. Тази форма си остава господстваща и в Древна Гърция и елинистическия свят и продължава през западноевропейското Средновековие чак до XV в. Добра илюстрация на този вид боравене в алгебрата е така наречената Палатинска (гръцка) антология, съставена около 500 г. В нея се съдържат 46 задачи от рода на:

Демохар прекарва една четвърт от живота си като момче, една пета като младеж и една трета като зрял мъж, а от 13 години вече е старец. На колко години е той?

или

Трите Грации носят кошници с ябълки, като броят на плодовете във всяка от тях е еднакъв. Деветте музи ги срещат и им искат от ябълките. Грациите дават по равен брой на всяка муза, така че след това всяка от грациите и всяка от музите имат равен брой ябълки. По колко ябълки получават музите и по колко ябълки са имали преди това грациите?

Подобни задачи се решават сравнително лесно с уравнения, но доста по-сложно с описателен метод.

Междинно звено между риторичната (описателната) и символната алгебра е така наречената синкопирана алгебра – съкратено записване на представените описателно алгебрични задачи. За пръв път този метод се прилага от древногръцкия математик Диофант, наричан и „бащата на алгебрата“. Той използва символ за неизвестното и различни знаци за означаване на действията, но съществени недостатъци на неговия метод са: занимава се с отделни казуси и не извежда общи заключения и не стига до абстракция, също не стига до знак за равенство и не използва уравнения.

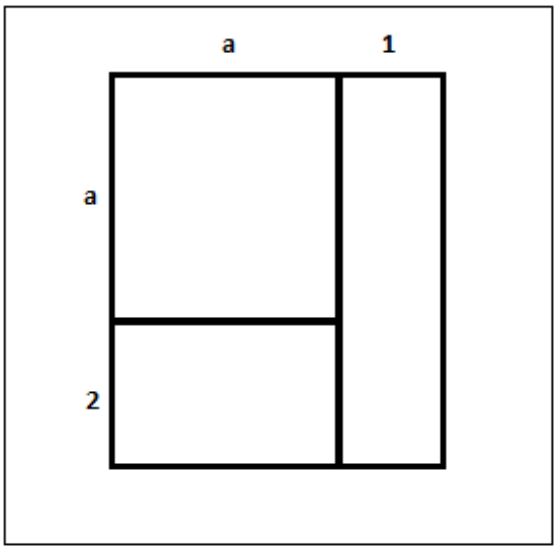
Древноиндийските математици също използват синкопирана алгебра. Чак през XVI в. европейските математици започват да използват математическите символи, с които си служим днес. Франсоа Виет – френски юрист от двора на крал Анри IV е един от първите, представящи числата чрез букви. [4]

- Думата алгебра произлиза от заглавието на книгата на арабския математик Аз Хорезми – „Ал Китаб ал мухтасар фи хисаб ал джабр уал мукабала“ („Кратък справочник по смятане чрез попълване и балансиране“), написан около 825 г. Значението на тази книга се състои в това, че показва стъпка по стъпка как се решават алгебричните задачи с помощта на „обединяване“ (или попълване) и „противопоставяне“ (или балансиране), които днес наричаме разместване и унищожаване. [4]

Уравненията се използват за моделиране на задачата на математически език с цел решаването ѝ, като се използват правилата и законите на математиката.

2.3.2. Квадратни уравнения

- Първите квадратни уравнения са свързани с пресмятане на повърхнини на геометрични фигури и намиране на дължини на елементи на фигурите. Например една типична задача от античен Вавилон би изглеждала така:



За правоъгълна нива с размери на страните, които са частично известни, чрез квадратно уравнение може да се намерят страните, ако е известна повърхнината на нивата.

Брахмагупта – най-големият математик на Средновековна Индия за пръв път доказва, че квадратните уравнения могат да имат за решение и положителни и отрицателни числа. [4]

2.3.3. Уравнения от по-висока степен

- Първите кубични уравнения са свързани с пресмятане на обеми на геометрични тела и намиране на дължини на елементи им. Древните вавилонски текстове се занимават с кубични уравнения в контекста на проблема с изкопаването на подземия, а староиндийските текстове пък засягат същия проблем при строежа на олтари [4]
- Първата голяма крачка в решаването на кубичните уравнения е направена от Шипионе дел Феро през XV в., за когото се казва, че е открил как да бъде решен един, а може би и всички три типа кубични уравнения. Не се знае със сигурност, защото в онова време цари голямо съперничество сред ренесансовите математици и те ревностно пазели тайните на своите занимания. Причината за това са популярните тогава математически състезания, спечелването на които било голяма чест и престиж за всеки

математик. Затова и Шипионе не разкрива своя метод. Неговият ученик Антонио Мария Фиор получава решението на единия вид уравнение:
$ax + x^3 = b.$ Междувременно решението на този тип уравнение е открито по независими пътища и от математика Николо Тарталя (Пелтека). През 1535 г. Тарталя и Фиор се изправят един срещу друг на състезание в Болоня на тема, свързана с прословутите кубични уравнения. Всеки от участниците задава по 30 задачи на другия, като за решаването имат 40-50 дни. Въпросите, които Фиор задал, били свързани изцяло с решаване на кубични уравнения от вида, чиито решаване той наследил от Феро, като си мислел, че само той знае решението им. Но осем дни преди състезанието Тарталя открил решение и на трите типа кубични уравнения. В деня на състезанието той решил всички поставени от Фиор въпроси за два часа и бил радушно поздравен от всички. Разбира се, той не споделя решенията си, но привлича вниманието на Джеролимо Кардано – известен лекар и математик от онова време. Кардано пише на Тарталя с молба да му съобщи тайно решението на кубичното уравнение, но получава отказ. Все пак той успява да примами Тарталя в Милано с обещание за богат покровител. Когато пристига в Милано, Кардано го убеждава да му каже решението като се заклева, че ще го отнесе в гроба, дори го записва с шифър, така че никои да не го разбере дори и да се сдобие с него. А Тарталя пък се застрахова допълнително като го описва в стихове. През 1543 г. Кардано не спазва обещанието си и публикува „Арс Магна“ (Великото изкуство), където представя преработен и усъвършенстван метода на Тарталя за решаване на кубичното уравнение и приложението му за решаване на уравнение от четвърта степен, без обаче да спомене за приноса на Тарталя. Затова и днес този метод се нарича „Метод на Кардано“. [4]

- Древните гърци са схващали алгебрата само чрез геометрията, така че за тях квадратите са били свързани с двуизмерните фигури, а кубичните форми – с триизмерните. В този ред на мисли едно уравнение от четвърта степен би изглеждало безсмислено, тъй като не можели да си представят четириизмерно пространство. [4]

2.4. Системи

- Още в древен Вавилон около 1750 г. пр. н.е. били решавани задачи, които днес бихме решили чрез съставяне на система от уравнения. В

една старовавилонска табличка е включена следната задача: Площ А, състояща се от два квадрата, има повърхност *1000* единици. Страната на единия квадрат е равна на $\frac{2}{3}$ от страната на другия квадрат, намален с *10* единици. Колко са дълги страните на този квадрат?

Древните вавилонци не познавали буквено-символната система, която използваме днес и решавали задачата по описателен метод. [4]

- През 1850 г. в своя доклад „Относно нов клас теореми“ британският математик Джеймс Силвестър за пръв път въвежда думата матрица. Матриците се използват за описание на системи от линейни уравнения и днес се използват в много сфери – криптиране на данни и разкодиране, манипулация на обекти в компютърната графика и др. [6]

2.5. Неравенства

- Предполага се, че нашите далечни праисторически прадеди хоминидите, живели преди повече от 700 хил. години, много преди появата на съвременния човешки вид Homo sapiens, са притежавали умението да сравняват предметите по размер и количество. [4]

2.6. Функции

- През 1817 г. немският математик Фридрих Бесел разработва функции, които носят неговото име, за да ги използва при изследванията си върху движението на планетите под влияние на гравитацията. Днес функциите на Бесел са се превърнали в полезен инструмент с приложения в много области на математиката и инженерните науки – топлопроводимост, хидродинамика, дифузия, обработване на сигнали, акустика, физика на радиовълните, вибрации, трептене, разпространение на вълните, ядрена енергетика. През 2006 г. учени от лабораториите „Акишима“ в Япония и университета в Осака използват функциите на Бесел, за да създадат устройство, което с помощта на вълни може да изписва текст или да рисува изображение върху водна повърхност. Устройството е наречено AMOEBA и може да изобрази букви от цялата латинска азбука. Всяко изображение се появява на водната повърхност само за миг, но може да се показват последователно на няколко секунди. [6]

2.7. Фигури и тела

2.7.1. Фигури

- Древните гърци имат огромна роля в развитието на математиката. През александрийската епоха се поставят основите на математиката като абстрактна наука. До тогава математиците са се занимавали изцяло с практическа математика, въпреки че древните египтяни и вавилонците имат значителен напредък в математическите знания. Те се търсели решения на конкретни проблеми, възникнали от практиката. Елините се интересували основно от геометрия, което било синоним на математиката по онова време, но наред с това постигнали много и в аритметиката и алгебрата. [4]
- Талес е първият известен математик на Елада. Живял около 625 – 547 г. пр. н. е. в град Милет на йонийското крайбрежие на Мала Азия. Той е един от Седмината мислители на Древна Гърция. Неговата популярност идва с това, че пръв формулира твърдения, които могат да бъдат доказани чрез определени аксиоми, което от своя страна е революционната стъпка за превръщането на математиката в наука. На Талес се приписват много открития в областта на геометрията (с която основно се занимавали древните гърци) освен теоремата, която днес носи неговото име, като например твърдението, че всеки кръг се разделя на две половини от своя диаметър или ъглите при основата на равнобедрен триъгълник са равни. Интересното е това, че Талес доказва някои до тогава „очевидни“ твърдения. Популярна е историята как Талес при обучението си в Египет измерил височината на Голямата пирамида край Гиза с помощта на забита в земята пръчка. Легендата гласи, че той смаял своите придружители тъй като използвал съотношението на сянката, която хвърля забитата в земята пръчка и сянката на пирамидата, и само с логически разсъждения определил височината на пирамидата, което било непознато до тогава.

Въпреки революционния принос на Талес за „баща на математиката“ се смята друг древногръцки математик – Питагор. Той живял около 610 – 546 г. пр. н. е. и учил при ученик на Талес и въпреки многото легенди, обаче, почти няма категорични сведения за живота му. Смята се, че се установява в град Кротон в днешна Южна Италия, където имало много гръцки колонии. Там

именно основава своята прочута школа. Цялата личност на Питагор е обвита в много мистерия. Например, смята се, че освен с математика и философия, той имал и магически способности – можел да се появява на две места едновременно и че си спомнял предишни животи. Носят се много легенди за Питагор и неговата школа, която била обвита в мистерия. Това било нещо като братство със строги, и според легендите, доста абсурдни правила. Приемането на нови членове ставало само след полагане на клетва над свещен триъгълник, наречен „тетрактис“, преотстъпване на цялото имущество на общността и приемане на петгодишен обет за мълчание. През този период кандидатите били „акузматикой“ (слушатели) и дори им се разрешавало да слушат преподаването на Питагор през завеса. Чак след това те бивали приемани във вътрешния кръг на питагорейците и ставали „математикой“ (ученици). В своето затворено общество освен с математика питагорейците се занимавали и с философия. В тази школа се поставят основите на геометрията, но парадоксалното е, че това, с което е най-известен Питагор – теоремата, носеща неговото име, всъщност е позната много преди това, но той представя доказателство, което всъщност е и най-ранното писмено доказателство в историята на математиката. Древните египтяни познавали твърдението на Питагоровата теорема и макар и да не го доказали, го използвали много в строителството за построяване на прав ъгъл. Те взимали въже и връзвали *12* възела на него през равни разстояния. След което сгъвали въжето така, че да образува триъгълник със страни *3, 4* и *5* (Питагорова тройка) и така получавали прав ъгъл. [4]

- Към 300 г. пр. н. е. в Александрия бил съставен един трактат по математика, озаглавен „Елементи на геометрията“. За негов автор се счита Евклид – древногръцки математик от IV в. пр. н. е. Спорен е факта дали Евклид е автор на „Елементи“, както и дали той самият е реална личност. Факт е обаче, че това е най-издаваната и най-изучаваната книга в целия Западен свят след Библията. В своите „Елементи“ Евклид включва всички големи постижения на древногръцките математици преди него, като формулира блестящо построени логически съждения. „Елементи“ се счита за най-великия учебник по

математика за всички времена, по който се е учело геометрия чак до XX в. Съдържа 13 глави, 465 теореми, като изложението започва с няколко основни твърдения, които се приемат за аксиомите на геометрията, дефиниции и математически закони. Легендата гласи, че Птолемей – цар на Александрия по времето когато живял Евклид, се затруднявал с „Елементи“ и попитал Евклид няма ли по лесен начин за навлизане в тайните на геометрията, на което той отговорил, че няма царски път към геометрията. [4]

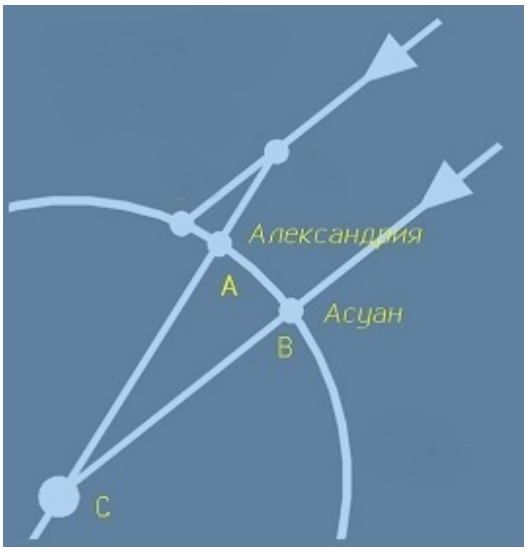
- Числото π е привличало вниманието на математиците още от древността. Още от момента, в който човечеството било в състояние да възприеме пропорциите, дробите и делението, то забелязало, че съотношението на диаметъра и дължината на окръжността е едно и също, независимо от размерите на окръжността. Също така се установило, че число е малко над 3, като изчисляването на точната стойност се превърнало в истинско предизвикателство и много математици се опитват да изчислят възможно най-точно стойността му. В най-ранните запазени математически текстове като папироса на Ринд, се споменава за π. В древноегипетски и вавилонски текстове (където между точни и приблизителни изчисления не се прави особена разлика) стойността 3 се използвала при груби изчисления, въпреки че са били познати и много по-точни стойности като $3\frac{1}{6}$ и $3\frac{1}{8}$. [4]
- Първият, който систематично се занимава с въпроса за изчисляване на стойността на числото π с по-голяма точност, е древногръцкия математик Архимед от Сиракуза. Той използва метода на изчерпването, които се състои в изчисляване на повърхнината на двойки правилни многоъгълници, единият вписан, а другият описан около окръжността. Колкото по-голям е броят на страните на тези многоъгълници, толкова техните лица са по-близо до лицето на кръга. Архимед стига до многоъгълници с 96 страни.

Този метод се използва много години след това, като през 1596 г. холандския математик Лудолф ван Цойлен използва многоъгълник с 262 страни и записва стойността на π с точност до 34 знак след десетичната запетая.

Днес компютрите изчисляват числото π с точност до няколко трилиона десетични знака. Реално обаче в практиката такава точност не е необходима.

За сравнение, ако се използва стойност на π с десет знака след десетичната запетая, ще се изчисли обиколката на Земята с точност до 0,02 мм. [4]

- Направен е интересен експеримент от музиканта Дейвид Макдоналд, който номерира нотите от една октава от 1 до 8. После изсвирил номерираните ноти, съответстващи на числото π. [14]
https://www.youtube.com/watch?v=OMq9he-5HUU
- Ератостен от Кирена (съвременник на Архимед, живял 276 – 194 г. пр. н. е.) бил библиотекар в Музейона на Александрия, но се прочул със своите математически и географски постижения. Сред най-забележителните му научни постижение е изчисляване обиколката на Земята с помощта само на една пръчка и познанията си по геометрия. Той използвал факта, че в Сиена (днешен Асуан), близо до Александрия, в деня на лятното слънцестоене по пладне Слънцето се намира точно над главите на хората. Тогава забита в земята пръчка в Александрия ще хвърля някаква сянка, макар и минимална. Използвал Теорема № 19 от „Елементи“ на Евклид, че перпендикулярът, построен през точката, в която тангентата докосва окръжността, минава през центъра на окръжността. Така той приема пръчката за перпендикуляр, а окръжността за земната повърхност. С други думи, ако мислено се продължи пръчката, тя ще премине през центъра на Земята. Ако с A се обозначи Александрия, с B и C – съответно Сиена (Асуан) и центъра на Земята, тогава двете перпендикулярни линии през A и B ще минават през центъра на Земята B и ще образуват сектор ACB. Знаейки, че слънчевите лъчи са естествено успоредни и Теорема № 29 от Евклидовите „Елементи“, която гласи, че ако права линия пресича две успоредни прави, то кръстните ъгли са равни. Тогава е достатъчно да се измери ъгъла между сянката и самата пръчка, който ще е равен на < ACB. А знаейки този ъгъл и разстоянието между Александрия и Сиена може да се определи какво разстояние от земната повърхност съответства на един градус.

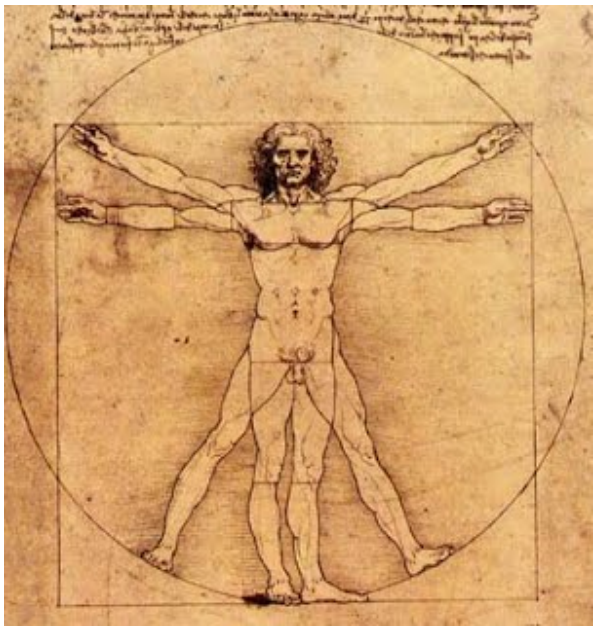


Ератостен измерил този ъгъл, който сянката на пръчката и самата пръчка (наричан зенитен ъгъл) сключват директно, по всяка вероятност със скафа (полусферичен слънчев часовник) и той бил равен на 7^0 или около $\frac{1}{50}$. Разстоянието между Александрия и Сиена е 5 000 стадия (основна мярка за дължина в древността). Така Ератостен изчислил, че дължината на Земята е между 39 690 и 46 620 км, което е доста близо до днешните измервания – 40 075 км. през Екватора и 40 008 през полюсите. [4]

- Окръжността е интересувала хората още от древността тъй като се среща често в природата и едновременно с това с необикновените си свойства.

Една от най-популярните илюстрации на приложенията ѝ, свързана с пропорциите на човешкото тяло, е така наречения Витрувианския човек от популярната илюстрация на Леонардо да Винчи. Рисунката представлява мъж с едновременно разтворени и прибрани крака, чиито ръце са представени също в две позиции – разтворени на равнището на раменете и на главата. Така крайниците му опират в окръжност в първата позиция и в четирите страни на частично описан около кръга квадрат във втората позиция. С тази своя композиция Леонардо илюстрира знаменития пасаж от книгата на прочутия римски архитект Марк Витрувий Полион (живял през I в пр. н. е.) – „Десет книги за архитектурата“ (De architectura libri decem). Това съчинение е оказало дълбоко въздействие върху концепцията за свещените съотношения и числа.

Във въпросния пасаж Витрувий пише: „Ако човек легне по гръб и разпери ръце и крака, около краищата на неговите пръсти може да се опише окръжност с център пъпа на човека. Човешкото тяло впрочем може да се впише и в квадрат, както това е възможно да стане в окръжност.“



Според бележките на Леонардо в придружаващия текст, написан огледално, картината е нарисувана като опит за изучаване на пропорциите на (мъжкото) човешко тяло, както са описани от древноримския архитект Витрувий, който пише:

Четири пръста са равни на една длан

Четири длани са равни на една стъпка

Шест длани правят един лакът

Четири лакътя са един човешки ръст

Широчината на разперените ръце е равна на височината на човек

Разстоянието от корените на косата до долния край на брадичката е равно на една десета от ръста

Разстоянието от долния край на брадичката до темето е равно на една осма от ръста

Максималната широчина на раменете е равна на една четвърт от ръста Разстоянието от лакътя до края на дланта е равно на една пета от човешкия ръст

Разстоянието от лакътя до ъгъла на подмишницата е една осма от ръста

Дължината на дланта е една десета от ръста

Разстоянието от долния край на брадичката до носа е една трета от дължината на лицето

Разстоянието от корените на косата до веждите е една трета от дължината на лицето

Дължината на ухото е равна на една трета от лицето

В действителност антропометрията – науката изучаваща пропорциите в човешкото тяло отчита индивидуалните изменения от установеното от Витрувий, но написаното от него може да се разглежда като описание на оптималните пропорции или като описание на идеалната човешка форма.

Важно е да се отбележи, че скицата на Леонардо комбинира внимателно прочетения древен текст и собствените наблюдения на художника за човешкото тяло. При рисуването на окръжността и квадрата, той правилно е забелязал, че квадратът не може да има същия център, както и кръгът - пъпът, неговият център е малко по-надолу. Това уточнение е иновативната част на картината на Леонардо, която я различава от по-ранните илюстрации. Леонардо рисува ръцете, вдигнати в положение, в което върховете на пръстите са на нивото на главата, вместо по-големият ъгъл, описан от Витрувий, чрез който ръцете образуват линии, минаващи през пъпа.

Предполага се, че рисунката на да Винчи е направена в опит да се реши проблема с лицето на кръга – да се открие принцип за начертаване на кръг и квадрат с едно и също лице само с линийка и пергел. [4]

- Неолитният паметник край Стоунхендж показва ясно, че неговите строители са познавали основните принципи на геометрията. Той и други подобни мегалитни структури доказват, че математическите познания по онова време са съществували и извън големите центрове на древните цивилизации. Това дава повод за различни интригуващи предположения

относно природата на тази традиция и влиянието на математическите познания на неолитните хора върху развитието на Западна Европа.

Стоунхедж се намира в равнината на Солсбъри в Уилтшир, Англия. Останките от мегалитния паметник днес представляват кръг от високи изправени пясъчни блокове (наричани сарсънс), наредени около подковообразна група от други такива блокове и вписани в частично запазен пръстен от по-малки сини каменни блокове (наричани блустоунс). Тези каменни паметници са оградени с няколко концентрични кръга от ровове и дупки, няколко погребални могили и групата на т. нар. Стейшън Стоунс, образуващи квадрат и също заобиколени от кръгъл ров с вал.

Строителството на Стоунхендж продължило около 500 години (от 2950 г. пр. н. е. до 2450 г. пр. н. е. – в периода на неолита). В съседство на Стоунхендж има други землени съоръжения, датиращи от 7500г. пр. н. е., което показва, че мястото е било важно за древните хора. Още повече, че населението на района от късната бронзова епоха продължило да почита свещеното място и се предполага, че племенните вождове са били погребвани в могилите в близост. Предполага се, че тази традиция е продължила и през желязната епоха, когато новите народи на Острова – келтите са използвали каменните блокове за религиозни цели. През XVIII век се е смятало, че именно те са изградили Стоунхендж, което археолозите опровергават.

Още първите изследователи на Стоунхендж забелязват, че неолитният комплекс трябва да е бил свързан с някои важни небесни явления като изгрева на Слънцето и деня на лятното слънцестоене. Впоследствие е изказано предположение, че основната функция на светилището е била в обратна посока – шествието, подхождащо към паметника по главния път, трябва да е наблюдавало залеза на Слънцето в деня на зимното слънцестоене, когато слънчевия диск се намира точно върху олтара (център на кръга от по-малки блокове - блустоунс).

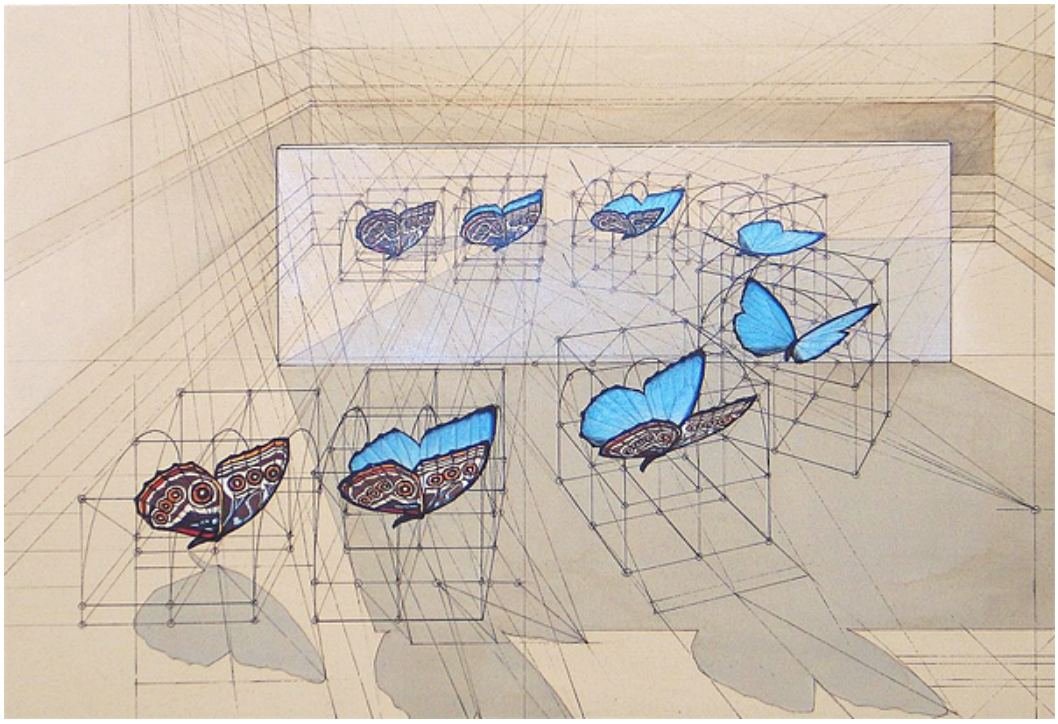
Освен във връзка с движението на Слънцето Стоунхендж вероятно е бил построен така, че да се свърже и с някои лунни феномени. Стейшън Стоунс

маркира правоъгълното пространство, заобикалящо вписания в него свещен кръг. Късите страни на този правоъгълник са равнени по зимното и лятното слънцестоене, а дългите – с най-южната точка, от която Луната изгрява през осемнадесетгодишният си цикъл на преместване по хоризонта. Посоката на този лунен изгрев и точката на слънчевия залез по време на зимното слънцестоене се пресичат под 90^{o} при югоизточния ъгъл на Стейшън Стоунс.

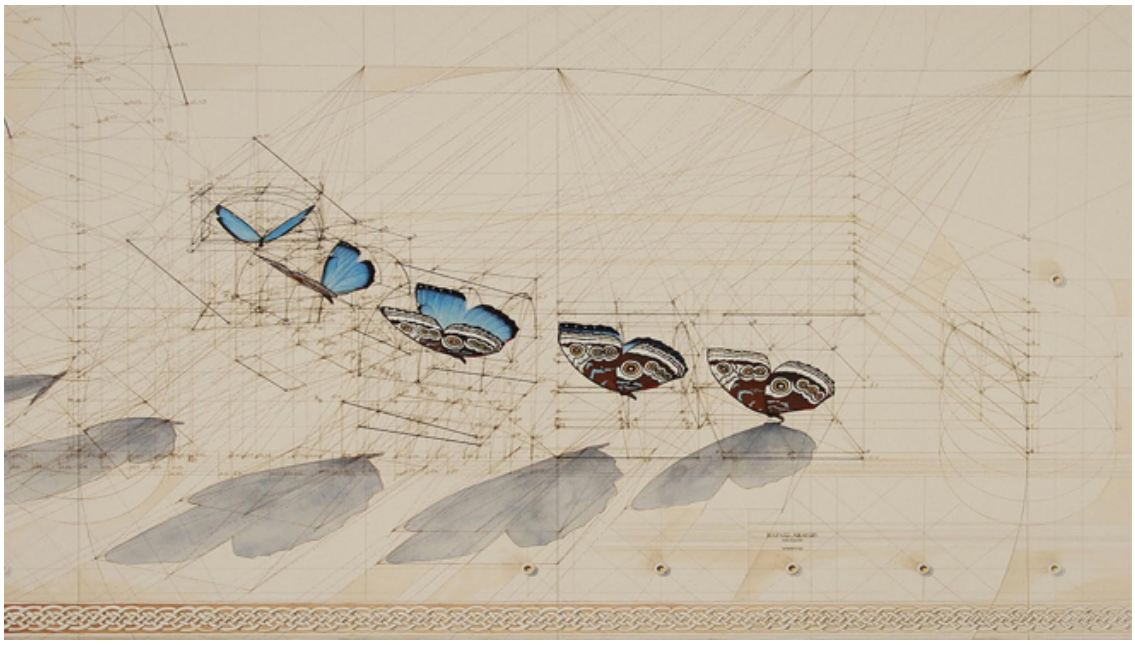
Макар и все още да остава загадка предназначението на Стоунхендж и истинската причина за построяването му да е забулена в мистерии, забележителното от геометрична гледна точка подреждане на каменните блокове е накарало оксфордския преподавател Антъни Джонсън да предположи как е бил построен чрез използване на свойствата на геометрията. Според него каменните блокове първоначално са образували кръг, описан около четирите върха на квадрат. След това в кръга бил вписан втори квадрат, за да се получи правилен осмоъгълник. След това с помощта на въжета, привързани към колове (пергел), забити по върховете на осмоъгълника, били очертани дъги, пресичащи кръга и генериращи нови, по-сложни многоъгълници. Според компютърен анализ с помощта на геометричните свойства на окръжността и квадрата само с едно парче въже може да бъде очертан многоъгълник с 56 страни и ъгли. Тази фигура Джонсън свързва с 56-те дупки от някогашните дървени колове, опасващи паметника. Професорът открива и други следи от многоъгълници в района на комплекса, като смята, че кръгът от големи каменни блокове в дълбока древност е очертавал един тридесетоъгълник. Всичко това показва, че строителите на Стоунхендж са имали задълбочени, макар и емпирични познания по геометрия, 2000 години преди самия Питагор да бъде роден. [4]

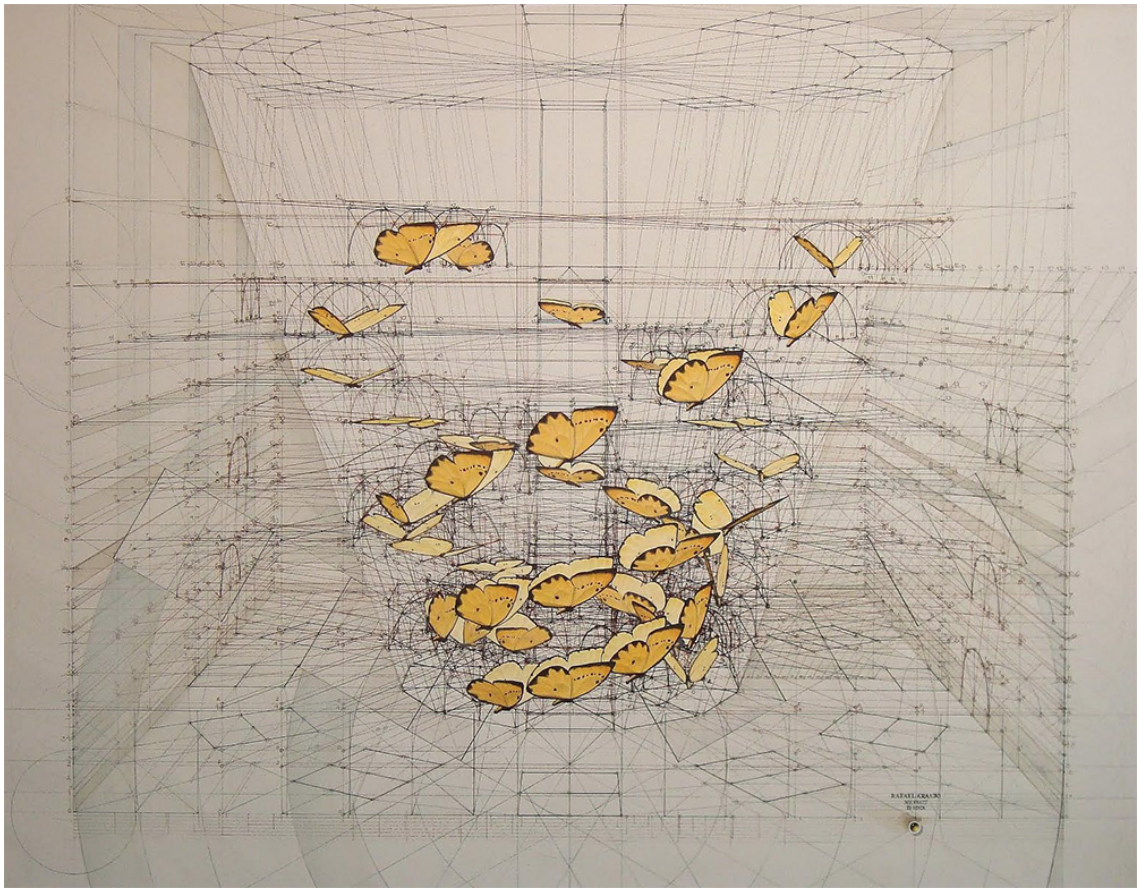
- В „Елементи“ на Евклид се описва съотношението между дължините на две отсечки: „Разделете една отсечка на две части така, че съотношението между цялата и по-голямата част да е равна на съотношението между по-голямата и по-малката чат.“ С други думи, ако дължината на отсечката е 1, се търси дължината на отсечка x, за която $\frac{1}{x} = \frac{X}{1-x}$, т. е. да се реши квадратното уравнение $x^2 + x + 1 = 0$. Търсим положително решение, защото е дължина на отсечка или x = $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ или приблизително 1,6180339… Това съотношение се нарича златно или божествена пропорция. Златното сечение се среща често в природата и в много произведения на изкуството и архитектурата. Смята се, че златния правоъгълник (със страни в съотношение равно на златното сечение) създава най-голямо удоволствие у зрителя и се използва за екрани и фото рамки. Размерите на кредитната карта също са почти идеален златен правоъгълник. [4]

➢ Италианският художник, писател и историк Джорджо Вазари в книгата си „Животописи на художниците“ от 1550 г. обръща специално внимание на подготовката по геометрия на много от ренесансовите художници, които изучавали перспективата. [4]



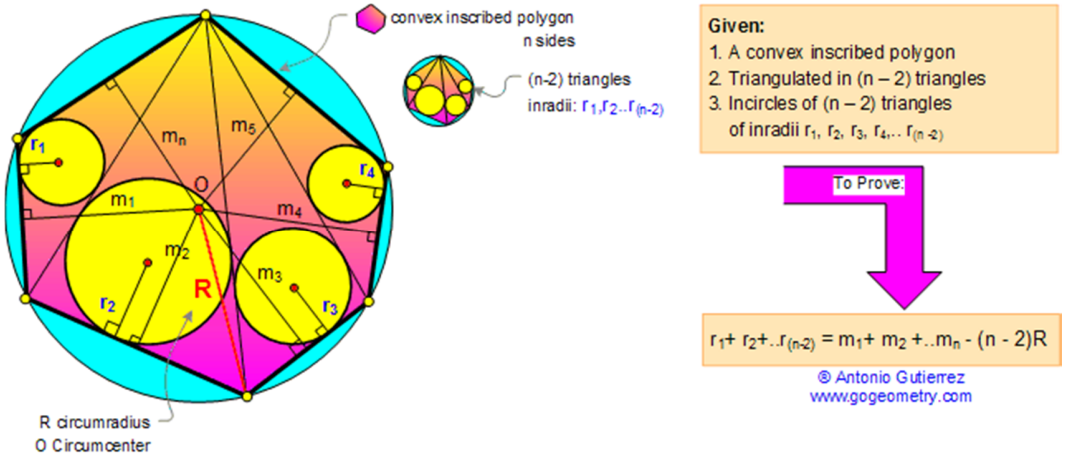
Рая Иванова – ф. н. 21745

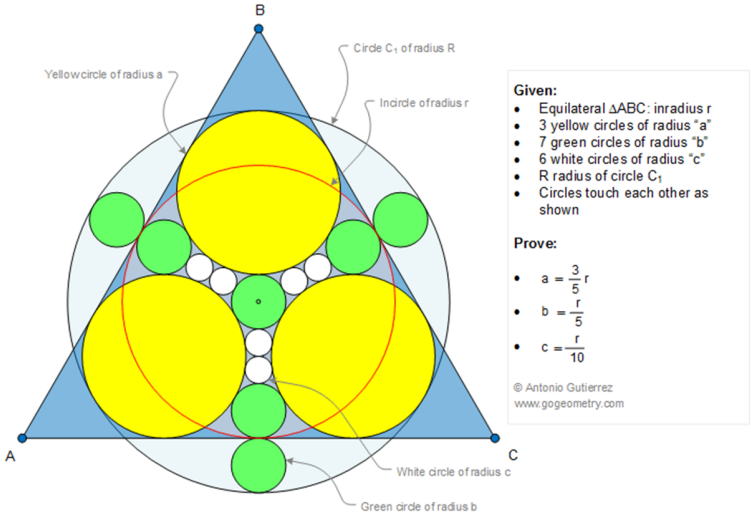


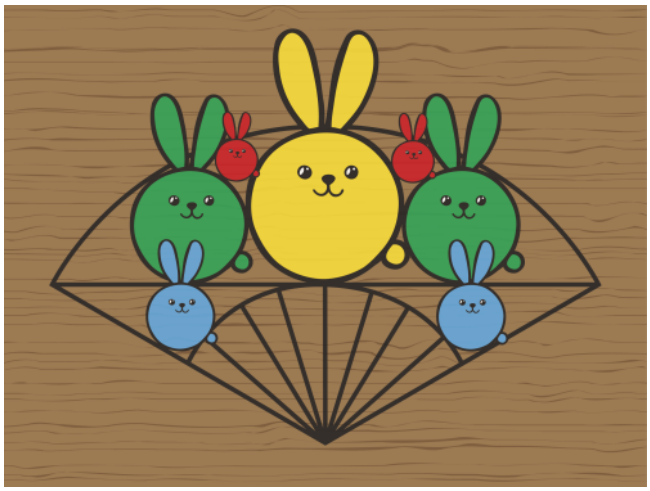


Рая Иванова – ф. н. 21745

➢ Традицията, известна като Сангаку, или „Японска храмова геометрия“, се появява в Япония по време на изолацията ѝ от Западния свят в периода 1639 – 1854 г. Математици, земеделци, самураи, жени и деца решавали сложни геометрични задачи и записвали решенията на цветни плочки, които окачвали под покривите на храмовете. Оцелели са над 800 плочки и много от тях са със задачи за допиращи се кръгове и се различават съществено от типичните задачи от учебниците по математика. Някои от задачите са сравнително лесни и дори деца могат да ги решат, докато други са изключително трудни. Затова вероятно не е изненада, че Судоку е придобил популярност първо в Япония. [6]







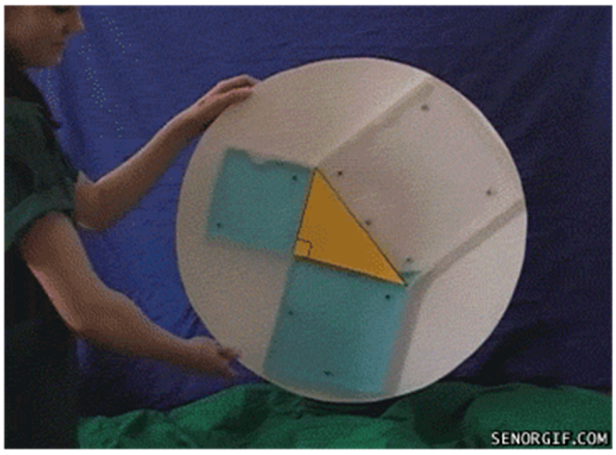
- През 1801 г. английският мореплавател капитан Джоузеф Хударт изобретява трираменния транспортир като средство за определяне позицията на кораб на картата. Този инструмент има две подвижни рамена, които се движат спрямо централно, неподвижно рамо. Подвижните рамена могат да се застопоряват под нужния ъгъл. Този инструмент става широко популярен в корабоплаването за определяне на позицията на кораб върху карта. [6]
- Интересно приложение на шестоъгълника е в пчелните кошери. Пчелите използват именно тази форма за пчелните пити. [11] Онлайн ресурс по темата може да се намери на адрес: http://ed.ted.com/lessons/why-do-honeybees-love-hexagons-zack-patterson-and-andy-peterson

2.7.2. Тела

- Един от трите класически математически проблема, които стояли пред древногръцките математици е удвояването на куб. Другите два са: квадратура на кръг и трисекция на ъгъл. Според легендата казусът възникнал по време на страшната чумна епидемия в Атина около 430 г. пр. н. е., когато Делфийският оракул посъветвал жителите на Делос да умилостивят Аполон (който се смятал за причинител на чумата), като му построят олтар, два пъти по-голям от съществуващия по онова време. Според друга легенда проблемът възникнал по времето на митичния цар Минос, който наредил една царска гробница да бъде построена двойно по-голяма от друга. Строителите допуснали класическа грешка като просто удвоили размерите на оригинала, но така конструираната сграда не е два, а осем пъти пъти по-голяма.

Решаването на трите класически математически проблема – начертаването на квадрат с равно лице на това на даден кръг, удвояване обема на куб и разделянето на ъгъл на три равни части само с линийка и пергел, занимавало математиците хилядолетия наред. Едва през XIX в. е доказано, че и трите задачи нямат решение. [4]

- Интересна илюстрация на Питагоровата теорема е изобразена по-долу.



- Друга важна фигура за развитието на математиката в Древна Гърция е Платон. Подобно на Питагор той също създава своя школа през 387 г. пр. н. е. в Атина, наречена Академията. На вратата имало надпис „Забранено за непознаващи геометрията“. Платон както и другите древногръцки математици се занимавал основно с геометрия, като я смятал, че в геометрията се крият свещените истина за естеството на природата. В Академията се изучавала и философия и други науки, но математиката заемала основна част - първите 10 – 15 години от в обучението били посветени на изучаването на основните двуизмерни и триизмерни фигури. В математиката Платон е запомнен с изследванията си върху триизмерните тела. Той определя петте правилни изпъкнали многостена, които днес носят неговото име – Платонови тела. Тези фигури са в основата на Платоновата

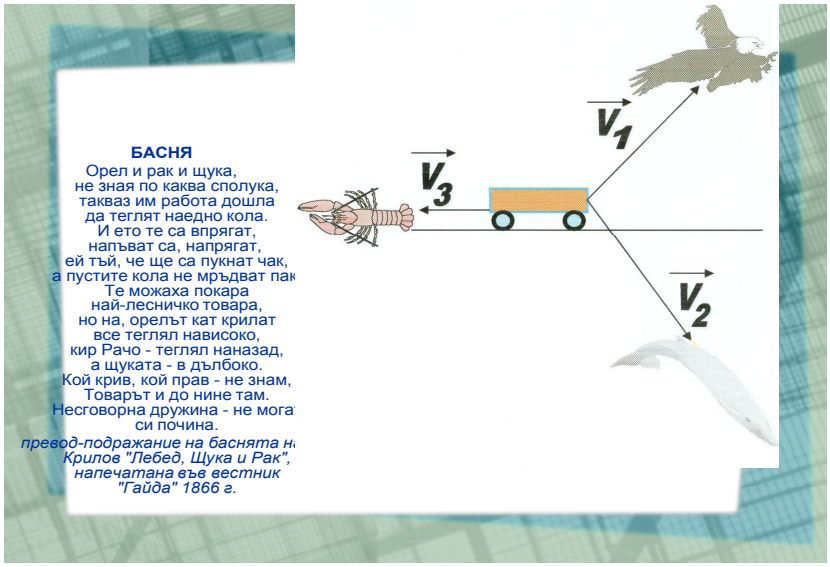
философия – той ги идентифицира като петте елемента, от които е изградена Вселената. [4]

- Вдъхновен от Платон и неговите идеи за божествените пропорции на космоса, германският астроном Йоханес Кеплер се опитва да докаже, че небесните сфери са свързани на принципа по-малко с по-голямо, в която по-големите влияят върху орбитите на по-малките. В своите опити да докаже това, той обаче установява, че тази теория не отговаря на истината и си поставя за задача да открие нов математически модел на планетите и тяхното движение. Така с математически изчисления достига до извода за елипсовидните орбити на планетите и доказва хелиоцентричната система на Николай Коперник. [4]
- Геодезичният купол е тяло, създадено от триангулацията (разделянето на триъгълници) на платонови тела или други многостени, така че да има плоски триъгълни стени и да наподобява сфера. Тези конструкции са изключително стабилни и здрави, защото триъгълните стени разпределят натиска върху цялата структура. Освен със здравинати си куполите са предпочитани и заради големия обем при малка повърхностна площ, което ги прави много икономични при разходи за материали и загуба на топлина. Първият геодезичен купол е създаден от немския инженер Валтер Бауерсфелд за планетариума в Йена, Германия през 1922 г. През 40-те години на XX в. американският архитект Ричард Бъкминстър Фулър открива независимо от Бауерсфелд геодезичния купол и получва американски патент за него. Фулър живее известно време в такъв купол и отбелязва, че ниското въздушно съпротивление помага на сградата да устои на урагани. Той изгражда доста амбициозен план да построи геодезичен купол с диаметър 3, 2 км. и височина 1,6 км., който да обхване целия център на Ню Йорк, така ще се контролират метереологичните условия и жителите ще бъдат предпазени от дъжд и сняг. Армията на САЩ използва геодезичния купол за военни цели. [6]

➢ Около 1965 г. датският учен, дизайнер и изобретател Пит Хейн представя един обект, известен като суперяйце или суперелипсоид, образуван от суперелипса. Този обект се отличава с това, че стои стабилно. Тази форма става популярна и се използва в играчки, мебели и др. Приложение суперелипсата намира в построяването на околовръстното шосе на Стокхолм, тъй като елипсата не била подходяща, защото „по-острите“ краища биха затруднили трафика, а мястото било с правоъгълна форма. Тогава Хейн предлага формата на суперелипса. [6]

2.8. Вектор

➢ Илюстрацията и резултатът от сбора $(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) + \overrightarrow{v_3}$ обяснява последните редове от баснята на Крилов.

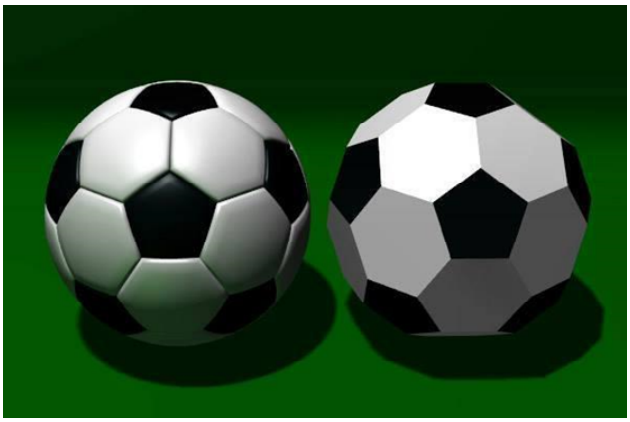


2.9. Еднаквост, подобие, симетрия, ротация, транслация

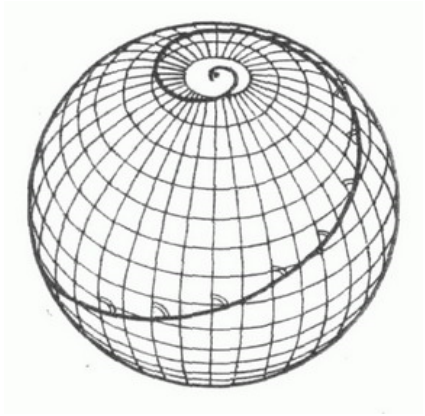
- Абу Арайхан Мухамад ибн Ахмад ал Бируни един от най-известните ислямски учени на XX в. е известен с неговия необикновен метод за измерване на обиколката на Земята, различаващ се от похватите на средновековните математици дотогава. В своето съчинение „Определяне координатите на градовете“, той първо анализира метода на Ератостен и неговото приложение от астрономите, а след това излага своя нов подход. Той се изкачил на един планински връх в днешен Пакистан. Първо определил височината на върха, а след това измерил ъгъла между върхната точка и линията на хоризонта. Използвал свойството на подобните триъгълници, че страните са пропорционални и заедно с познанията си по тригонометрия изчислява радиуса на земята, който след това умножава по удвоеното число π**.** Така получената дължина на Земята се различава с по-малко от един процент спрямо днешните изчисления. [4]
- Кристалографски групи е начин за подредба на плочки върху плоскост, така че да се получат безкрайно повтарящи се мотиви. Съществуват 17 кристалографски шаблона, които включват три типа операции върху един основен мотив – плъзгане, завъртане или огледален образ (транслация, ротация или осева симетрия). Тези мотиви са открити и категоризирани от руския кристалограф Федоров през 1891 г. Независимо от него немския математик Шюнфлис и английския кристалограф Уилям Барлоу също правят проучвания по темата за кристалографските групи. Запълването на равнината с повтарящ се мотив се ползва за украса. Това изкуство достига своя връх през XIII в. в Испания, където маврите използват всичките 17 групи при красивите декорации на двореца-крепост Алхамбра. Тъй като някои от обичаите им не позволяват употребата на образи на хора в творби на изкуството, кристалографските групи стават особено предпочитани за декорация. [6]

2.10. Стереометрия

➢ Освен Платоновите тела съществуват и други тела, които са обект на изследване от математиците и намират приложение в съвременния свят. Полуправилните полиедри на Архимед са изпъкнали многостенни, съставени от правилни многоъгълници, които имат равни страни и многостенни ъгли, но не е задължително стените да са от един вид. Архимед описва 12 такива тела, като едно от тях полиедърът, образуван от 12 петоъгълника и 20 шестоъгълника, наподобява формата на футболната топка. [6]



➢ Локсодромата е крива линия, която пресича земните меридиани под еднакъв ъгъл. Проектирана върху сфера, има формата на спирала, която сякаш се извива около Земята. Локсодромата се използва в навигацията. [6]



- Проективната геометрия разглежда връзките между фигурите и техните изображения върху равнина. Италианският архитект Леон Батиста Алберти е един от първите, които работят по темата. Той заедно с други ренесансови архитекти и художници се интересували как да представят триизмерните обекти върху двуизмерното платно. Алберти поставял стъкло между себе си и пейзажа, затварял едното си око и отбелязвал върху стъклото определени точки. След това пренасял тези точки върху платно и рисувал образа. Така се получавало реалистично представяне на обектите в перспектива. Французинът Жерар Дезарг е първият математик, който формализира в математични термини проективната геометрия в книгата си „Пример за един от универсалните методи на г-н Жерар Дезарг Лионе по отношение на перспективата“. В текста се изследват свойствата на фигурите, които се запазват при проекция. Този подход се използва активно от художниците в техните творби. [6]
- Лентата на Мьобиус – първата едностранна повърхност днес се използва като знак за рециклиране. [6]

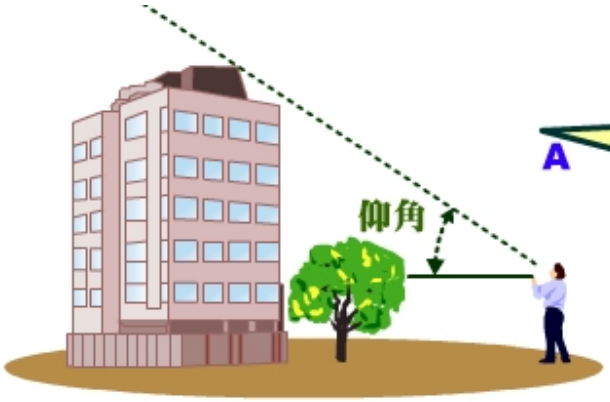
Вдъхновен от лентата на Мьобиус, архитектът Vincent Callebaut е проектирал уникална сграда за Тайванския парк. Елипсовидната сграда следваща принципа на едностранната отворена повърхнина е с форма наподобяваща лястовиче гнездо.

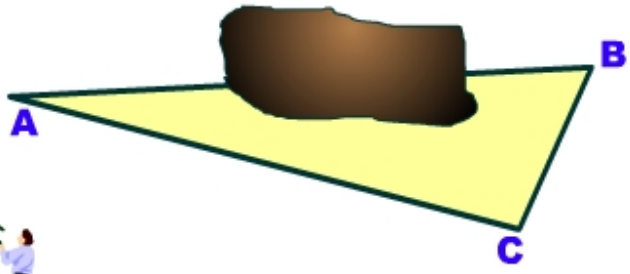
Други приложения на лентата на Мьобиус:

2.11. Тригонометрия

➢ В геодезията често се използват математически методи за определяне на разстоянията. В случаите когато е невъзможно линейно измерване се използват ъглови измервания и търсената дължина се получава чрез тригонометрични методи. Най-често в тези случаи се използват синусовата или косинусова теореми.

Например, използва се за да се определи разстоянието между т. A и B, ако между тях няма видимост. Избира се т. C, така че да се виждат двете крайни точки A и B. Измерват се ъгъл $<ABC$ и разстоянията AC и BC. Търсеното разстояние AB се определя по косинусова теорема. [6]





2.12. Графика

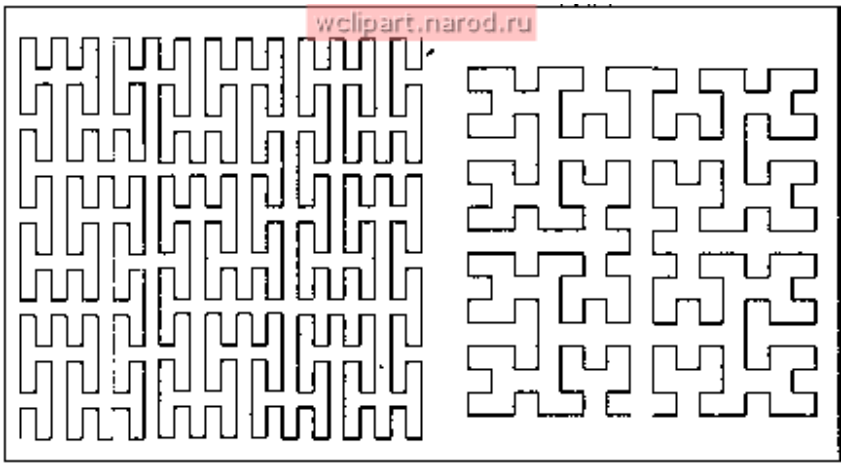
➢ Астролабията се основава на стереографската проекция на небето – проекция на небесната сфера върху равна повърхност. Както сферичното земно кълбо се представя върху географска карта, разграфена на паралели и меридиани, така и небосводът с неговите съзвездия и планети може да бъде проектиран върху малък диск, върху който са нанесени сферични линии. Някога хората са чертаели тези проекции върху хартия и дърво, но най-ранните запазени до днес астролаби са от метал, най-често бронз, по които са гравирани небесните съзвездия. Стереографските проекции на звездното небе и теорията за астролабията датират още от древността, но първите подобни уреди вероятно са изработени чак към 600 г. В средата на VIII в. астролабиите навлизат и в ислямския свят и достигат върх в стила на оформление и в техническото си съвършенство. Те се превръщат в едни от най-ценните и търсени предмети на изкуството, служещи както за украса, така и като образци на високо технологично майсторство. През VIII в. се заражда една нова сила на историческата карта, а именно Арабския халифат, който се простира от Индия и Китай, до Испания. Тогава мюсюлманите са изправени пред сериозен проблем. „Кибла“ означава посока, а проблемът, носещ това име, е свързан с необходимостта мюсюлманинът да знае винаги посоката на свещения град Мека. Така едно религиозно вярване става причина за задълбочаване на математическите знания в ислямския свят. Това е и причината за усъвършенстването на астролабията –уред за измерване на ъгъла на небесните тела спрямо хоризонта. Тази информация е преработвана с помощта на циферблата и надписите върху уреда, за да се определят точните

координати (географска дължина и ширина) на мястото, откъдето се прави наблюдението. Това помага за изчисляването на кибла и на часовете на деня, тъй като мюсюлманите отправят молитва, обърнати към Мека, в определени часове на деня. [4]

- През времето на Средновековието в Европа, определено като „тъмни векове“ на ниска обща грамотност, липса на книги и ниска образованост, в Толедо се оформя един център на науката, където се превеждат книги от продължаващия да се развива ислямски свят по онова време, наричан Толедска преводаческа школа. Там се превеждали книги от латински и арабски и се утвърждава като център на развитие на науката, събирайки учени от различни страни. Най-забележителният продукт на Толедската преводаческа школа в сферата на математиката са така наречените Алфонсови таблици. Те представляват подробни карти с координатите на небесните тела. С тяхна помощ се определя положението на Луната, планетите и съзвездията. Тези знания се използват и днес за изчисляване на хороскопите.

Знанията в книгите, превеждани от Толедската школа, били сложни и неразбираеми за повечето хора и затова били възприемани като магически, а хората, които се занимавали с тях, често били обвинявани в изучаване на черна магия, което понякога коствало живота им. Това чувствително забавило разпространението и развитието на нови математически идеи в Средновековна Европа. [4]

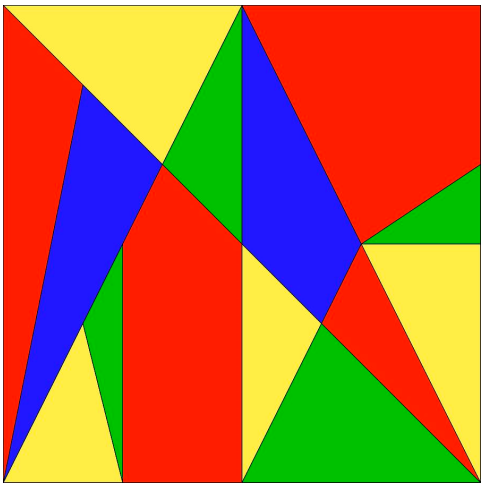
- Кривите на Пеано са криви, които изпълват пространството и могат да бъдат създадени чрез повтарящ се процес и води до зигзагообразна линия. Намират приложение в определяне на оптимални маршрути. Например Джон Бартолди, професор в Школата по системно и индустриално инженерство към Технологичния институт в Джорджия, използва криви на Пеано за маршрутна система за организация, която доставя храна за бедните в различни градове; за определяне на оптимален маршрут за доставките на кръв от Американския червен кръст до болниците. Също така кривите на Пеано се използват за насочващи оръжия. [6]



2.13. Вероятност и статистика

2.13.1. Комбинаторика

- През 2003 г. историците откриват изгубена информация от трактата на Архимед „Стомахион“. В стар пергамент, върху който монаси били писали повторно преди около хиляда години, се описва Стомахион – специален комбинаторен пъзел, измислен от Архимед. Целта на Стомахион е да се определи по колко начина могат да се подредят показаните 14 парчета, за да се образува квадрат. През 2003 г. математици доказват, че броя конбинации е 17 152. [6]



➢ Френският математик от VIII в. Жорж-Луи Льоклерк дьо Бюфон предложил забележителен начин за изчисляване на числото π, наречен „Иглата на Бюфон“. Според него хвърлянето на игла на произволно място на неограничена по площ равнина, покрита с успоредни дъски, може да се използва за определяне стойността на π. Това е така, защото дължината на иглата при всяко положение е по-малка от ширината на дъските и вероятността да падне във фугите между дъските е равна на два пъти нейната дължина (l), разделена на ширината на дъската (d) и умножена по числото π. С други думи, ако се хвърля игли на случайни места върху дъските и ако се отбелязват случаите, в които иглата пресече някоя фуга между дъските, ще може да се изчисли стойността на числото π. През 1901 г. италианският математик Марио Лазарини заявява, че е хвърлял игла по метода на Бюфон цели 3408 пъти и е получил стойност на π 3,14155929…, което е много близо до истинската стойност на π. През 2000 г. в едно изследване е установено, че мравките от вида Leptothorax Albipennis докато търсели място за гнездото си, оставяли специални ароматни следи и след това „броят“ колко пъти тези следи се пресичат и така определяли площта, необходима за новото гнездо, което на практика представлява метода на Бюфон в реална житейска ситуация. [4]

➢ Хората обичат игрите на късмета още от праисторически времена, но едва през XVII в. принципите на теорията на вероятностите са разкрити от двама от великите математици на епохата – Пиер дьо Ферма и Блез Паскал. В прочутата кореспонденция между тях те намират решение на един от вечните проблеми на комарджиите – проблемът с точките.

Да си представим, че Ферма и Паскал играят на „Ези или тура“, като всеки от тях е заложил 50 франка. Паскал избира ези, а Ферма – тура. Който пръв достигне 10 печеливши хвърляния, печели всичките 100 франка. След 15 хвърляния ези се е паднало осем пъти, а тура – само седем. Преди обаче да довършат играта Паскал е извикан по спешност и двамата трябва да разделят по някакъв начин залозите. Възможните варианти за изход от играта в случая са няколко: да обявят Паскал за победител, тъй като той води в играта до момента или пък да си разделят парите в отношение 8 към 7, тъй като играта не е довършена. Въпросът, който си задали е: Кое е по-вероятното да се случи, ако биха продължили играта? Ферма предлага на Паскал следното решение: след максимум още 4 хвърляния играта е щяла да свърши. Той разиграва всички 16 възможни продължения на играта, в 11 от случаите Паскал е щял да спечели, срещу 5 – за Ферма. Тогава стигат до извода, да разделят залозите в отношение 11:5 в полза на Паскал. Тази история дава тласък за развитието на една нова непозната дотогава сфера от математиката – теорията на вероятностите. [4]

- В своята недовършена книга „Мисли“ Паскал излага своя знаменит аргумент в полза на вярата в Бог. Ако Бог не съществува, вярващият в него не губи кой знае какво, но ако Той съществува, вярващия печели „безкраен и безкрайно щастлив живот“, поради което си заслужава риска човек да вярва в Бог. По повод на тези думи са изказани много възражения и критики, но на практика представлява любопитно начало на теорията на игрите, според която най-добрата стратегия за разумните участници е да играят, ако съотношението риск-печалба е сравнително благоприятно за тях. [4]
- Теорията на игрите е сравнително нов раздел на математиката, развива се през XX в. и представлява математически анализ на вземаните решения по време на ситуации на съперничество или конфликти. Тези ситуации се срещат често при игрите, но се отнасят до по-широк кръг житейски проблеми, като сключването на мирни договори, борсови операции, и дори стратегиите за оцеляване при животните.

Паскал поставя началото с аргументите си за и против вярата в Бог, но основна роля за развитието на теорията на игрите има американския

математик от унгарски произход Джон фон Нойман, който през 1928 г. лансира своята „теория на популярните игри“. В своята статия той анализира математическите основания за анализ при игри, в които единият от играчите печели всичко за сметка на загубата на другия, и извежда един от основните принципи на теорията на игрите – минимаксната процедура – стратегия, която минимизира максималната загуба и максимизира минималната печалба.

През 1948 г. младият Джон Неш постъпва в университета в Принстън, за да подготви докторат по математика, където по това време ръководител е Джон фон Нойман, който вече е започнал своите открития в теорията на игрите. Неш се заинтригува от теорията, но възприема противоположен на интуицията подход към проблема, разглеждайки ефекта от груповата динамика по време на играта върху индивидуалното вземане на решения. Така достига до концепцията за своеобразно равновесие, при което всеки от играчите се ограничава до някаква избрана от него стратегия заради стратегиите, избрани от другите играчи, и това положение остава стабилно по време на цялата игра, независимо че може избраната от всеки стратегия да не максимизира индивидуалните резултати. Неш успява да докаже по математически път, че подобно равновесие съществува в значителна степен при широк спектър от игри и днес се нарича „равновесие на Неш“. Постигнатото от Неш оказва влияние в развитието на икономиката и обществените науки, и през 1994 г. той получава Нобелова награда за икономика. Биографичният филм "Красив ум", посветен на живота на Джон Неш, получава отличието за най-добър филм на годината на Американската филмова академия през 2002 г.

Класическа илюстрация на теорията на игрите е така наречената „затворническа дилема“. В нейния сценарий участват двама души – Дик Търпин и Бъгси Малоун, които са арестувани по подозрение в убийство и ги разпитват в отделни стаи. Ако двамата признаят, че са извършили престъплението, ги очакват по 10 години затвор. Ако и двамата отрекат деянието, могат да бъдат обвинени само за дребни провинения и да останат

до 2 години в затвора. Но ако само един от двамата признае, тогава той ще бъде пуснат на свобода, а другият ще получи 20-годишна присъда. Каква е най-рационалната стратегия за всеки от двамата заподозрени?

Основните елементи на играта са:

Играчи – участници, за които се смята, че ще действат напълно рационално, т.е. единствено по разумния в конкретната ситуация начин.

Стратегия за действие – ходовете, които всеки играч прави.

Полза – резултатите, наградите или наказанията, които следват от стратегията на действие на играчите.

Като се приеме, че играчите са разумни и действат според рационалните стратегии, които трябва да очакват и от своите противници в играта, в таблицата са представени възможните стратегии за всеки от заподозрените и последиците от техните ходове.

		Бъгси Малоун (БМ)	
		Признава	Отрича
Дик Търпин (ДТ)	Признава	ДТ 10 години / БМ 10 години	ДТ 0 години / БМ 20 години
	Отрича	ДТ 20 години / БМ 0 години	ДТ 2 години / БМ 2 години

На пръв поглед изглежда, че за двамата мъже е най-добре да отричат и да се измъкнат сравнително леко от обвинението, но според теорията на игрите това не е най-добрата стратегия за разумните играчи. Ако Дик Търпин анализира рационално своите възможности ще установи, че стратегията на отричането е печеливша за него само в един от четирите възможни изхода от ситуацията, докато признаването – ще му донесе повече полза и със сигурност ще избегне максималното наказание от 20 години. Бъгси Малоун трябва да разсъждава по същия начин, така че и двамата би трябвало да признаят извършеното престъпление и да получат наказание от 10 години затвор. Това е типичен пример на „равновесие на Неш“. Теорията на игрите показва, че рационалното поведение често може да се различава от нашата интуиция.

Друг типичен пример за „равновесие на Неш“: 20 фермера се обединили в кооператив, за да купят 20 нови трактора – по един за всеки от тях. На пазара се предлагат два модела – единият е „делукс“ и струва 20 000, а другият е

„икономичен“ на цена от 10 000. Фермерите се договорили да си поделят разноските поравно. Макар индивидуално всеки да би предпочел икономичния модел, всеки от фермерите разсъждава като разумен играч, че дори той да спести от парите за луксозния модел, ако всички останали го предпочетат, той лично ще спести само 500 (19 . 20 000 + 1. 10 000 = 390 000, 390 000 : 20 = 19 500), като при това ще получи трактор с по-малки възможности в сравнение с останалите. Затова рационалната стратегия за всеки от участниците е да предпочете по-скъпия модел. Така в случая оптималната индивидуална стратегия на всеки от участниците в кооператива води до най-неблагоприятния резултат за групата. [4]

- Седемте моста на Кьонигсберг (дн. Калининград в Русия), свързващи два острова с континента, стават сюжет на едно от прочутите математически предизвикателства през XVIII в.: как да минеш през всичките седем моста и отново да се върнеш в изходната точка, без при това да минеш повече от един път по всеки от мостовете. Ойлер ограничава проблема до абстрактна фигура, наречена „граф“ (различна от познатия до тогава тип графики с координатна система), който се състои от точки, наричани „върхове“ или „възли“, свързани помежду си с линии, носещи името „ръбове“ или „ребра“. С помощта на графа той доказва, че няма решение на задачата, но по-важното е, че поставя началото на математическата топология. Това е сравнително нов клон на математиката, които намира широко приложение в транспортните мрежи, компютърните мрежи и маршрутизация, родословните дървета, намиране на път в лабиринт. [4] Онлайн ресурс може да бъде намерен на адрес:
http://ed.ted.com/lessons/how-the-konigsberg-bridge-problem-changed-mathematics-dan-van-der-vieren

2.13.2. Статистика

- Джон Граунт – търговец на галантерийни стоки в Лондон, живял през XVII в. имал хоби да събира данни за годината на раждане и на смърт на хората. С помощта на тях той съставя прогноза за продължителността на живота в града. Той представя данните в таблица и показва колко от 100 души биха доживели до 10-, 20-, 30-,…, 100-годишна възраст. Така чрез своето хоби

поставя основите на научното изчисляване на риска – едно от най-полезните практически приложения на математиката - статистиката. Това всъщност са първите статистически таблици. Днес такива таблици се използват при изчисляването на застрахователните премии, например.

Математѝкът и астроном Едмънд Халей използва направеното от Джон Граунт за основа в неговата статия от 1693 г. „Пресмятане на смъртността на човешкия вид, базиращо се на любопитни таблици с ражданията и умиранията в град Бреслау, с притурка, отнасяща се до годишната рента при застраховките живот“. Както подсказва името това е първото от дълга поредица статистически изследвания в нововъзникващото тогава застраховане. [4]

- През 1925 г. британският статистик Р. А. Фишър публикува своята книга „Статистически методи за научни работници“, в която споменава публикация на британския математик от XVIII в. Томас Бейс „Есе, посветено на решаването на един проблем в доктрината за вероятностите“, в която Бейс обяснява как да се изчислява условна вероятност – вероятност едно събитие да се случи, ако преди това се е случило друго събитие. Фишър определя идеите на Бейс като „първия опит за използването на теорията на вероятностите като средство за индуктивни разсъждения, т.е. за извличане на аргументи от частното, които могат да бъдат приложени спрямо общото или от конкретния индивид към цялото население“.

В началото на XIX в. методът на Бейс се превръща в основа за разцвета на научната статистика. Намира голямо приложение в астрономията, където по това време астрономите се сблъскват с проблема за неточността на наблюденията през телескоп поради несъвършенството на инструментите и субективното възприятие на човешките сетива. Така за нуждите на астрономията теорията се доразвива, като се достига до идеята за разпределение на грешката от английския статистик Томас Симпсън. [4]

- Британските биометрици Фенсис Галтън и Карл Пиърсън свързват статистиката с техники, като корелация (степента, до която две променливи се променят заедно) и множествената регресия (начин за определяне на отношението между няколко независими една от друга променливи и една зависима такава).

В същото време Фишър популяризира идеята за теста за статистическа значимост – метод за определяне на вероятността даден резултат да бъде постигнат само благодарение на случайността.

Френско-английският математик Абрахам дьо Моавр, който често бил съветник на комарджии, открива нормалното разпределение – крива на разпределение на данните за едно явление.

Статистиката е едно от най-влиятелните и широко разпространени приложения на математиката. Тя играе ключова роля в много направления – от научноизследователската работа, инженерството, изкуствения интелект, компютърните и информационни технологии до бизнеса, образованието, здравеопазването, политиката. [4]

- През 1795 г. немският математик Карл Фридрих Гаус, който тогава е на 18 години, започва да разработва анализа чрез метода на най-малките квадрати. Той демонстрира подхода си през 1801 г., когато предсказва бъдещата позиция на астероида Церера. Небесното тяло е наблюдавано през 1800 г. от италианския астроном Джузепе Пиаци, по-късно изчезва зад Слънцето и не се вижда. Методът на най-малките квадрати описва процедура за откриване на „най-добрата“ крива, описваща даден набор от данни, чрез минимизиране сумата от квадратите на отклоненията на точките спрямо кривата. Днес методът на най-малките квадрати е част от повечето статистически компютърни програми. [6]
- Статистиката се използва в определяне автентичността на писмени произведения, за които не е известен със сигурност автора. Онлайн ресурс по темата може да бъде намерен на следния адрес: **http://ed.ted.com/lessons/did-shakespeare-write-his-plays-natalya-st-clair-and-aaron-williams#review**
- През 1812 г. излиза първата значима монография, която комбинира теория на вероятностите и математическия анализ. Това е „Аналитична теория на вероятностите“ на френския математик и астроном Пиер-Симон Лаплас. Той анализира така наречените случайни събития и доказва, че съществуват определени статистически зависимости. С други думи обяснява как могат да се предвидят резултатите от вероятностни събития и че

случайните събития всъщност са „предвидими“ и следват определено поведение. [4]

- Законът на Бенфорд гласи, че в различни списъци от числа цифрата 1 се появява в най-лява позиция с вероятност от около 30%, вместо очакваните 11,1%. Този феномен се наблюдава при статистическите данни за численост на населението, смъртност, цени на акциите на борсите, площта на водните басейни и за всеки тип данни, които следват степенен закон. Този ефект е описан от д-р Франк Бенфорд, физик от Националната електрическа компания през 1938 г., въпреки че е открит още през 1881 г. от математѝка и астроном Саймън Нюкомб. [6]
- Теорията на катастрофите е математическа теория на драматичните промени. Разработена е от френския математик Рене Том през 60-те години на XX в. и е доразвита от Кристофър Зийман. Разглеждат се динамични системи и зависимостта на дадена величина от времето, като се определят така наречените „критични точки“, при които продължителни действия могат внезапно да се нарушат. Използва се при изследване на поведението на биологични популации, както и поведение на масите (затворнически бунтове, война). [6]

2.14. Математически анализ

- Още в Древна Гърция философът Зенон от Елея (490 – 425 г. пр. н. е.) използва идеята за безкрайността със своите прочути парадокси. Най-известният е този за Ахил и костенурката. Ахил и костенурката участвали в състезание по надбягване. Ахил бил известен с бързината си и затова дава преднина на костенурката, като стартира по-късно от нея. На въпроса кога Ахил ще стигне костенурката, Зенон дава отговор – никога. Ето и обяснението - ако се приеме, че костенурката стартира от точка А, докато Ахил стигне в точка А, костенурката вече ще се е придвижила напред до точка В, но докато Ахил стихне до точка В, тя вече ще е още по-напред и т. н. По-бавната костенурка никога няма да бъде изпреварена от по-бързия Ахил. [4]
- Друг парадокс на Зенон е така наречената дихотомия, която може да се илюстрира с отварянето на врата – преди човек да отвори вратата напълно, той първо трябва да я отвори наполовина, а преди да я отвори наполовина, трябва да я отвори на една четвърт, но преди да я отвори на една

четвърт, трябва да я е отворил на една осма и т. н. Чрез този парадокс Зенон твърди, че човек никога не може да отвори една врата. Аналогично същия парадокс може да се илюстрира и с пътуване към някаква цел.

Разбира се тези твърдения не са верни, защото в разсъжденията е изключен фактора време, но е революционно мислене за разделянето на цялото на безкрайно много малки части. На практика още в Древна Гърция възниква идеята за безкрайността и прилагането и в математиката, което може да се счита за начало на математическия анализ. [6]

- Архимед е древногръцки математик, живял в Сиракуза през III в. пр. н. е. Той е известен с много открития в областта на механиката и хидростатиката, но има и редица постижения в математиката, свързани с обемите на телата и най-вече с изучаването на сферата и цилиндъра. Най-важно обаче в неговата работа остават първите стъпки в диференциалното смятане. Архимед приел, че площта, затворена от крива линия, се състои от много на брой все по-малки правоъгълници, чийто брой клони към безкрайност. След това доказал, че приближението при изчислението на лицата на тези правоъгълници фактически е равно на лицето на самата площ, очертана от кривите. Адхимед съпоставил лицето на фигура с успоредни прави, което може да се намери точно с лицето, получено по посочения начин. Така той показал, че лицето не е нито по-голямо, нито по-малко от действителното, следователно е равно. Тази идея не е негова, но била отхвърляна дотогава като неприложима в математиката. [4]
- Освен със своите открития в областта на астрономията Кеплер прави и други открития в областта на математиката, оптиката и природните науки, като, както той самият казва, някои от тях го осеняват съвсем случайно. Например, две години след като първата му съпруга умира при трагични обстоятелства, той се жени повторно, като сватбеното тържество става повод за нови математически прозрения – откриването на лесен начин за изчисляване на съдържанието на вино в буре с овални стени. В публикуваната през 1615 г. негова книга „Нова стереометрия долиорум“ (Нова стереометрия на винените бурета) той обяснява метод за определяне на обема по пътя на разделяне на бурето на безброй успоредни плоски парчета и събиране на техните повърхнини. Това е опит да бъде изчислена повърхнина, ограничена

от крива – проблем, който тормози математиците още от времето на Архимед и който след време ще доведе до откриване на диференциалното и интегрално смятане от Нютон и Лайбниц. [4]

- През XVI – XVII в. се извършва научна революция в Европа. Започва бурно развитие на науката и в частност на математиката, като на дневен ред са нови въпроси, свързани с тайните на движението – траекториите на оръжейните гюллета, ускорението на телата под въздействие на гравитацията, елиптичните орбити на планетите… Решаването на тези въпроси изискват нови математически методи за справяне с проблема на кривите. Още древногръцките математици Евдокс и Архимед прилагат метода на изчерпването и достигат до идеята за интегриране при опитите за изчисляване на пространство, ограничено от крива. [4]
- През 1665 г. много от големите математици са дали своя принос за развитието на методите на диференциалното и интегрално смятане. Кеплер и Галилей дават някои идеи в това направление, а ученикът на Галилей – Бонавентура Кавалиери (1598 – 1647), разработва теорията, включвайки материали, заимствани и от двамата. Ферма изчислява производните на някои определени видове криви (някои смятат него за баща на математическия анализ), а професорът по математика в университета в Кеймбридж – Исак Бароу (1630 - 1677), описва метод за изчисляване на производни чрез прекарването на тангенти към кривите. Проблемът обаче е окончателно решен от един от неговите ученици, който обобщава отделните специфични постижения на своите предшественици – Исак Нютон. Както той сам казва: „Аз получих насока за разработването на новия метод от начина, по който Ферма прекарвал тангенти, като използвах това по отношение на абстрактните уравнения – директно и косвено, и така превърнах този метод в общоприложим.“ Ученият нарича с термина „флуксия“ моментната стойност на изменение на кривата в дадена точка (нейната производна), а координатите на кривата – „променливи“. Използвайки своя метод, наречен „метод на флуксиите“, той пресмята производната на функция, с която може да се определи стръмността на кривата във всяка нейна точка. Не много след като Нютон прави своето знаменито откритие в областта на математическия анализ (без да ги публикува обаче), по независим път Готфрид Вилхелм фон Лайбниц (1646 - 1716) – германски енциклопедист, юрист и дипломат, стига до

същата концепция. Лайбниц изгражда своята теория за безкрайните числови редове и безкрайно малките стойности, при това полага големи усилия да създаде единна система за ясно записване, така че методът му да бъде по-лесен за разбиране и използване от останалите математици. Докато Нютон не прави никакви усилия да направи своя трудноразбираем метод на флуксиите по-достъпен за другите. Според Лайбниц: „Символите са начин хората да извлекат полза от дадено откритие и ползата за тях е толкова по-голяма, колкото по-точно изразяват същността на нещата и по-кратко и ясно ги изобразяват; това наистина драстично намалява степента на умствено напрежение за разбиране на откритието.“ Мълвата за откритието на Лайбниц бързо се разпространява и Нютон е принуден набързо да публикува своята версия, за да докаже, че е пръв. Пълната версия обаче на неговия метод на математически анализ е публикуван по-късно в притурка на книгата му „Оптика“ през 1704 г. (Освен в математиката Нютон има и много други открития, като най-известен е закона на Нютон за гравитацията). Единственото, което Нютон прави, обаче, е да изпрати шифровано заявление на Лайбниц през 1676 г., в което казва, че сега не може да даде повече разяснения върху метода на флуксиите, и предпочита да го замаскира със следния шифър: 6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx. Шифърът съдържа номерата на буквите, образуващи латинската фраза, която в превод звучи: „Ако имаме дадено уравнение с определен брой променливи, можем да изчислим флуксиите, както и обратното.“ Лайбниц обаче не се поколебава и през 1684 г. публикува своя метод на математически анализ, без да споменава Нютон. Вторият приема това като лична вражда и предизвиква скандал с Лайбниц, като използва и своето влияние в Британското кралското дружество, за да очерни репутацията му. [6]

- Един пример за използването на граници в практиката: Представете си, че управителят на банка ви оставя един ден да го замествате, като ви обяснява подробно за нов депозит, който банката предлага. Възвръщаемостта R за една година на направена инвестиция x се изчислява по формулата $R = \frac{x^2-1}{x-1}$. Малко след като управителя си тръгва идва нов клиент и ви пита каква ще е възвръщаемостта, ако внесе 1 долар. Заместваме във формулата x с 1 и се получава $R = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$, обаче както е известно $\frac{0}{0}$ не е

определено в математиката. Тогава какъв отговор да дадем на клиента, все пак той внася някаква сума, макар и минимална и не може да му кажем, че няма да има възвръщаемост, от друга страна не можем да кажем и че е неопределена. Тогава ако заместим единица с нещо много близо до нея, ще получим много близък отговор. Например:

x	R
0.9	1.90000
0.99	1.99000
0.999	1.99900
0.9999	1.99990
0.99999	1.99999
0.99999…	1.99999…

С други думи, колкото повече се приближаваме към 1, стойността на инвестицията се приближава към 2 без да го надвишава, т.е. границата на функцията, изразяваща възвръщаемостта е 2 при инвестиция *x* клоняща към 1. Можем да отговорим на клиента, че за една година инвестицията му от един долар ще му донесе 2 долара. [4]

- Ойлеровото число (или число на Непер) е едно от наименованията на ирационалното число e, записано за пръв път от Ойлер, който вероятно го е взаимствал от първата буква на думата „експоненциален“ (показателен). Стойността на числото ***e*** е границата на функцията $y= (1 + \frac{1}{n})^n$ при *n* клонящо към безкрайност, или около 2,7182818284... Това число има важно значение освен в математиката и в природата, например за изчисляване ритъма на нарастване на населението на Земята, размножаването на туморните клетки, радиоактивния полуразпад или изчисляване на лихва с натрупване. [4]
- Преди френският математик Йозеф Фурие да откие прочутите си редове, той придружава Наполеон до Египет през 1789 г. Там в продължение на няколко години изучава древни артефакти. Фурие започва работата си по математичната теория на топлообмена през 1804 г., когато се завръща във Франция. Той представя тригонометрични редове, с които се описва топлинната дифузия при различните форми на телата. Днес редовете на Фурие

имат много приложения - от анализ на вибрациите до обработка на изображения. [6]

2.15. Аналитична геометрия

➢ Рене Декарт (1596 – 1650 г.) е роден в благородническо семейство и от малък проявява интерес към математиката и в колежа е бил любим предмет „заради сигурността на доказателствата и логиката на разсъжденията, посредством които се достига до тях.“ Първоначално Декарт е военен инженер, но през 1619 г. сънува, че получава откровение, според което физиката може да бъде сведена до геометрия и че всички природни науки могат да бъдат свързани с математиката. Тогава решава, че ще посвети живота си в опити да изгради изцяло нова унифицирана система на познанието, в основата на която поставя математиката. През 1637 г. Декарт публикува философския трактат „Разсъждение за метода“, в който разглежда въпроса за това как да се борави с философията. Като притурка на трактата ученият прилага на практика своя нов метод по отношение на геометрията. Притурката, озаглавена „Ла Геометри“, се смята за основополагащия текст на аналитичната геометрия. С нея започва интегрирането на геометрията и алгебрата, което по-късно довежда до диференциалното смятане. Декарт е бил убеден, че всяко алгебрично уравнение може да бъде решено със средствата на геометрията, стига участващите в него величини да бъдат представени като координати на дадени точки. Разработената от Декарт координатна геометрия е революционен модел за онова време и поставя началото на аналитична геометрия. Днес неговите идеи са се доразвили, например, той не е продължавал осите на координатната система по посока на отрицателните стойности. Освен това при Декарт абсцисата и ординатата не винаги сключвали прав ъгъл. Въвеждането на координатните оси в днешния вид става доста по-късно от времето на Декарт, това е, защото много дълго време философи и математици не приемали отрицателните числа като равнопоставени на положителните. Те смятали например, че не може да има по-малко от нищо. Числовите оси се появяват в един труд на английския математик Джон Уолис от 1685 г. Самият той не възприемал безусловно отрицателните числа, обаче в един пасаж пише: „отрицателните стойности не са нито безполезни, нито абсурдни, когато се схващат подобаващо.“ Уолис

дава за пример задача за човек, който изминал 5 ярда напред от точка А, а след това 8 ярда назад. На въпроса на колко ярда се намира човека от изходната точка, Уолис дава отговор – на минус 3 ярда, като го илюстрира с числова ос. Това дава идея на Нютон да използва още една числова ос, вертикална на първата, и така се получава известната днес декартова координатна система. [4]

2.16. Логика

Чрез математическите знания се формира логическото мислене у ученика. В учебните програми на МОН в очаквани резултати от обучението по математика, така наречените стандарти пише: *Умее да преценява вярност и рационалност в конкретна ситуация. Умее да преценява целесъобразност при избор в конкретна ситуация. Умее да използва логически знания в конкретна ситуация. Анализира ситуация с цел избор на метод. Умее да обвързва логическите знания със ситуации, свързани с темата. Аргументира умозаключенията си с използване на логически знания. Оценява съдържателно получен резултат.*

- „Органон“ (в превод инструмент) е сборник от шест съчинения на Аристотел върху логиката: „Категории“, „За тълкуването“, „Първа Аналитика“, „Втора Аналитика“, „Топика“ и „Софистически опровержения“. Този сборник представлява първото систематизирано представяне на логиката и е в основата на западното научно мислене през следващите 2 хил. години. В този труд се представят методи за изследване и търсене на истината. Основният инструмент на Аристотел е така наречения силогизъм. Това е аргумент, съставен от три стъпки. Ако първите два постулата са верни, то и третият следва да е верен. Популярният пример, описващ силогизъм е: „Всички жени са смъртни. Клеопатра е жена. Следователно Клеопатра е смъртна.“ Основа на съвременната математическа логика е методиката на Аристотел. [6]
- Въпреки своите безспорно големи открития в математиката, Рене Декарт е по-известен с философските си трудове, като поставял математиката в ролята на последна инстанция на истините на този свят. Една от най-популярните му философски идеи е мисловният експеримент, наречен „Злия гений на Декарт“ („Декартовият демон“ или „Мозъкът в колба“). Декарт си

задава въпроса: „Откъде можем да сме сигурни, че правдиво усещаме и възприемаме външния свят? Дали пък нашите сетива не ни предоставят само някакво мнимо изображение, родено от всемогъщ зъл гений, целящ да ни заблуди?“ Днешният вариант на този мисловен експеримент се нарича „мозък в колба“. Да си представим, че даден мозък плува в колба с подходяща течност, към която е включен суперкомпютър, създаващ за мозъка една напълно убедителна виртуална реалност. Откъде човек може да бъде сигурен дали възприема околния свят със собствения си мозък, или всичко това не е измамна действителност, създадена от компютри за мозъка в колбата? Тази философска идея е залегнала в основата на сценария на много филми, като например „Матрицата“. За Декарт това твърдение е израз на краен скептицизъм като философска позиция: можем ли да бъдем абсолютно сигурни в нещо? Неговият отговор на този въпрос е да се започне от най-простото съждение, което можем да направим за действителността, която възприемаме: „когито ерго сум“ – „Мисля, следователно съществувам“. Той сочи математиката като средство за излизане от безизходицата на крайния скептицизъм, защото математическите истини са неоспорими и неотменни. [4]

- През 1854 г. ирландският професор по математика Джордж Бул публикува своята книга „Изследване на законите на мисленето, върху които се основават математическите теории на логиката и вероятностите“. В нея Бул обединява логиката с математиката, свеждайки първата до прости алгебрични формули. Представеният от него метод по-късно приема неговото име и се нарича Булева алгебра. Булева математическа логика заляга в основата на цифровото смятане и по-късно се използва при създаването на първите компютри. Булевата логика е ценно откритие, защото по същество представлява така наречения ефективен метод, чрез който изпълнението на набор от точно определени стъпки превръща входящата информация в изходяща. Така в края на XIX и началото на XX в. се наемат чиновници за оптимизиране на работата, които извършват определен тип изчисления без видима за тях цел, като дори не било нужно да са много компетентни по математика, а просто да следват определени стъпки. Алан Матисън Тюринг (1912 - 1954) стига до заключението, че този ефективен метод може да бъде следван и от машина. Така когато е едва на 22 години той изобретява своята универсална машина – устройство, разполагащо със сканираща глава,

способна да чете и пише по безконечна лента като разчита дали на лентата пише 0 или 1, и реагира според определен предварително зададен начин. Благодарение на това се счита за баща на информатиката и изкуствения интелект. След избухването на Втората световна война Тюринг е мобилизиран в строго секретна база на учени и изследователи в Бенчли Парк, където изиграва важна роля за проектирането и построяването на машини за разбиване на вражески кодове. Тези устройства, наречени „бомби“, помагат за разшифроването на германските кодове, генерирани от кодиращата машина „Енигма“. Неговите заслуги по разгадаването на кода на германското главно командване -„Риба“, според експерти е съкратило войната с около две години. За своите заслуги Тюринг е удостоен с Ордена на Британската империя, част от постиженията му обаче остават засекретени. След войната Тюринг се включва в надпреварата за създаването на първия електронен цифров компютър с качена в паметта операционна система. За целта създава високотехнологичен за времето си проект, наречен Автоматична изчислителна машина, който е трябвало да се реализира в Националната физическа лаборатория в Лондон. Оказва се обаче, че проектът изпреварва времето и за реализирането му са необходими технологии, които са измислени по-късно. Въпреки това Булевата алгебра стои в основата на Дигиталната ера. [6]

- През 1879 г. Джеймс Рити изобретява първия касов апарат. Малко преди това той отваря своя първи бар в Дейтън, Охайо, рекламирайки се като „Продавач на чисто уиски, добри вина и пури“. Но Рити бил недоволен от служителите си, защото понякога тайно прибирали част от оборота. Докато е на пътешествие с параход, той изучава механизъм, който можел да брои оборотите, правени от витлото на кораба. Рити започнал да обмисля механизъм, който да брои паричните транзакции. Така създава апарат, който имал два реда клавиши, които съответствали на паричната стойност от 5 цента до 1 долар. При натискане на клавиш се задвижвал брояч. Това е първия касов апарат, наречен „Непоквареният касиер на Рити“. [6]
- През 1950 г. Тюринг пише една фундаментална статия върху изкуствения интелект, за да отговори на въпроса може ли машина да притежава интелигентност. Той свежда въпроса до това, може ли машина да прояви интелигентност, като за целта представя своя версия на игра, при която питащият чете отговорите на списък от въпроси и се опитва да отгатне кои са

дадени от мъж и кои от жена. Във версията на Тюринг единия отговарящ е човек, а другия – машина. Целта е чрез задълбочен разговор, покриващ различни области, да се установи, дали „съдията“ (човек) ще може да отсъди правилно кои от отговорите са дадени от човек и кои от машина. Учредителят на годишната Льобнерова премия предлага парична награда за компютърна програма, с помощта на която компютрите да могат да изкарат теста на Тюринг (т.е. да заблудят съдията, че са хора). Тюринг смята, че докъм 2000 г. машините ще могат да минават успешно теста в 70% от случаите, но се оказва, че досега няма нито един такъв успешен опит.[4]

- През 1961 г. американският математик Едуард Лоренц (1917 - 2008) тества компютърна симулация на метеорологичните процеси и забелязва нещо странно. Когато изпробва два пъти програмата с едни и същи резултати, получава два различни резултати. След задълбочен анализ ученият установява, че създадения от него модел запазва изходящите данни за втория опит само до третия знак след десетичната запетая, а не до шестия. На това се дължат коренно различните резултати от теста, т.е. съвсем малка промяна може да доведе до коренно различни резултати. Това кара Лоренц да се замисли над принципа за детерминизма, на които се основават математиката и физиката до тогава, а именно, ако знаел изходните позиции за даден процес, можем със сигурност да предвидим какъв ще бъде резултатът от него. Така ученият стига до популярния „ефект на пеперудата“ – ако бразилска пеперуда размаха криле, това може да предизвика торнадо в Тексас. Така се поставя начало на ново направление в математиката – Теория на хаоса. Всъщност идеята не е нова, още през 1900 г. Анри Поанкаре открива явлението динамична нестабилност. Например, за движението на планетите от Слънчевата система до тогава учените са смятали, че колкото по-точно са определени изходните позиции и орбитите на небесните тела, толкова по-точно може да се прогнозира тяхното бъдещо положение. Поанкаре открива така наречения „проблем на трите тела“. Когато три тела обикалят едно около друго, дори и най-малката промяна ще доведе до огромни промени в движението, което пък от своя страна ще доведе до твърде големи разминавания в предвижданията. Това поведение е означено с термина „хаос“.

Първоначално теорията на Поанкаре не е приемана безрезервно, но днес Теорията на хаоса се счита за едно от най-големите открития на XX в. Терминът „хаос“ в математиката в никакъв случай не означава случайност или безредие. В действителност множество хаотични системи проявяват устойчиви повтарящи се характеристики и цикли. Те могат да бъдат визуализирани с помощта на графика в така нареченото „фазово пространство“, при която голям набор от променливи (в случая с метеорологията това могат да бъдат температура, атмосферно налягане, влажност, валежи, скорост на вятъра) могат да бъдат представени като отделни точки. Всяка от тези точки представя състоянието на системата в даден момент. Доказано е, че подобни системи се стремят да достигнат състояние на равновесие, независимо от изходните позиции. При фазовото пространство силата на привличане е аналогична на гравитацията и се нарича атрактор. Всеки формиращ се в неговия обсег на действие набор от обстоятелства в крайна сметка се стреми към състояние на равновесие. Подредените системи имат атрактори с неподвижно местоположение или такива с ограничена цикличност, или периодичност. Например, махалото е подредена система с фиксиран атрактор, докато системата хищник-плячка е също подредена система, но с атрактор, който притежава ограничена цикличност. За разлика от тях, хаотичните системи притежават необичайни, или хаотични атрактори, поради което състоянието на системата никога не се повтаря, защото се колебае около различни състояния на равновесие.

Една от характеристиките на фазовото пространство на хаотичните системи се състои в това, че колкото и задълбочено да бъде анализирана, тя всеки път показва едно и също състояние на голямо разнообразие и непредвидимост (казва се, че такива системи са фрактални по природа), въпреки че като цяло системата притежава някакъв модел. Например, Лорен моделира поведението на газ в проста система, като състоянието на системата във всеки един момент зависи от състоянието и преди това. Ученият открива, че поведението на системата е хаотично, а когато резултатите от

наблюденията са разположени върху графика във фазовото пространство, се получава характерна двуспирална фигура, която прилича на крилете на пеперуда. Този модел днес се нарича „атракрор на Лоренц“. [4]

- През 1948 г. американският математик Клод Шанън публикува „Математическа теория на комуникациите“, с което поставя началото на нов клон на математиката – теорията на информацията. Тя е част от приложната математика, която включва количествено определяне на данни и помага да се определи капацитетът на различни системи за съхранение, предаване и обработване на информация, участва в компресирането на данните и методите за намаляване на шума и грешките при предаване на информация. [6]
- Класическата логика приема условия, при които едно твърдение е вярно или не е вярно. Размитата логика, от друга страна, разглежда случаи, в които се допускат няколко стойности за истина. Това е нова теория, развита от Лотфи Заде – компютърен специалист през 70-те години на миналия век. Днес приложенията на размитата логика са много, например при устройства за следене на температурата. В зависимост от температурата се определят три състояния – студено, топло и горещо, в зависимост от които да се процедира по определен начин. Приложенията са: в управление на инсталации в стоманодобивната промишленост, ферментационни процеси, самофокусиращи се камери, перални, системи за управление на автомобили, антиблокиращи спирачни системи, контрол върху процесите при пречистване на водата и др. [6]

2.17. Моделиране

Освен чрез чисто практическото приложение в останалите науки, математиката изгражда много ценни качества, които се използват несъзнателно и рядко се отчита, че до голяма степен се дължат на нея. В учебните програми на МОН в очаквани резултати от обучението по математика, така наречените стандарти пише: *Оценява съдържателно получен резултат. Предвижда в определени рамки очакван резултат. Умее*

да използва уравнения като средство за моделиране. Умее да моделира геометрични ситуации. Умее да моделира житейски ситуации.

Извадени от контекста на математиката, това са необходимите знания и умения за успешното справяне с предизвикателствата на живота. Така на практика, изучавайки математика, младият човек се подготвя за бъдещия му живот в непрекъснато развиващия се и променящ се свят. Веднъж изградени навиците за моделиране на проблеми и търсене на методи за решаването им, могат да бъдат приложени във всяка ситуация, независимо дали е изразена на математически или на естествен език. Рядко си даваме сметка, че разрешаването на един житейски проблем, много прилича на решаването на математическа задача – на лице са определени обстоятелства (условието на задачата) и се търси начин, по който да се постигне желан резултат (решаване на задачата) или пък да се вземе най-благоприятното решение, взимайки под внимание всички фактори на ситуацията (достигане до отговора на задачата). Тук думата „проблем“ не е задължително да носи негативен заряд, има се предвид многобройните ситуации и казуси, с които се сблъскваме ежедневно – от това по кой път да минем за работа/училище, какво да обядваме, до сложни дилеми и решения, определящи съдбата на хора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бъдещото развитие на идеята, изложена в настоящата дипломна работа, се предвижда представените ресурси да бъдат публично достъпни в електронен вариант. Тъй като представените примери обхващат само малка част от приложенията на математиката, се предвижда форма, която позволява допълване с нови предложения, включително предоставени от учители. Интересно би било да се направи оценка на ефекта от такъв подход за обучение върху учениците. За целта се предвижда да бъдат привлечени училища и учители-доброволци, които да участват в изследването. В първа фаза да се отчетат резултати след една година, във втора фаза - след цял курс на обучение, в трета фаза - развитието на учениците 5 години след завършване на обучението в училище и в четвърта фаза - реализацията на учениците 10 години след завършване на обучението. Показателите, които следва да бъдат изследвани са:

- оценка на интереса и мотивацията на учениците според учителя;
- самооценка на интереса и мотивацията според учениците;
- представяне на учениците в образователния процес;
- среден успех;
- в трета и четвърта фаза реализация на учениците след приключване курса на обучение.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Ганчев, Иван - Математиката в системата на учебните предмети и практиката, Благоевград, Университетско издателство "Неофит Рилски", 2006
2. Гедж, Дени – Математиката – диалог с дъщеря ми, София, РИВА, 2008
3. Изард, Карол – Психология на емоциите, София, Здраве и щастие ЕООД, 2017
4. Леви, Джоъл – Необикновената история на математиката, София, Книгомания ЕООД, 2014
5. Маслоу, Ейбрахам – Мотивация и личност, София, Кибеа, 2010
6. Пиковър, Клифърд – Книгата за математиката, София, Книгомания ЕООД, 2016
7. Шмидт, В. Р. - Говорим на языке математики, Москва, Творческий центр Сфера, 2007
8. Lewin, Kurt - A Dynamic Theory of Personality, Selected Papers, New York and London, McGraw Hill Book Company, Incorporated, 1935
9. Lewin, Kurt - Principles of Topological Psychology, McGraw-Hill Book Company, Incorporated, 1936
10. Сайт на фондация “Дигиталните деца” - http://digitalkidz.eu/
11. Образователен сайт – http://ed.ted.com/series/math-in-real-life
12. Статия в портал MediaCafe - http://mediacafe.bg/novini/savremeno-izkustvo/Matematicheskite-chertezhi-i-izchislenija-syzdavat-khudozhestveni-proizvedenija-4975
13. Сайт на Министерството на образованието и науката – http://www.mon.bg/
14. Статия в Списание 8 - https://www.spisanie8.bg/%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D0%BD%D0%B8/%D0%BD%D0%B0%D1%83%D0%BA%D0%B0/4667-%D0%B1%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5

%D0%BD%D0%B0-
%D0%BC%D1%83%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0-
%D0%BF%D0%BE-
%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0%D1%82
%D0%B0-%D0%BF%D0%B8-%D1%85-2.html

15. Сайт на център по класическа сугестопедия „Виховения“ - http://vihrovenia.bg/pages/7-zakona-na-sugestopediata
16. Статия във вестник „24 часа“ – https://www.24chasa.bg/Article/932250/