СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ
И
ПРИНЦИП НА ЕКСТРЕМАЛНИЯ ЕЛЕМЕНТ

Дипломна работа за придобиване
на образователно-квалификационна степен „Магистър“

Дипломант: Кръстю Йорданов Петров
Специалност: ТОМИ
Фак. № 25819

Научен ръководител:……….
(проф. д-р Иван Тонов)

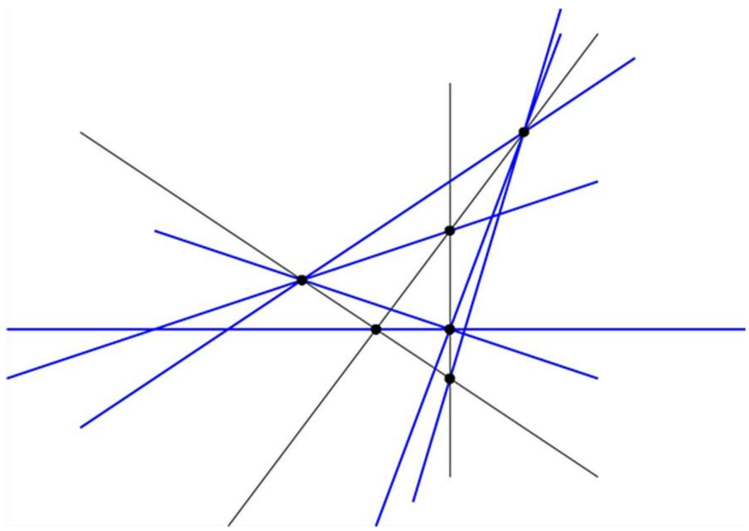
София, юни 2019 г.

Съдържание

Въведение

През 1893 г. Джеймс Силвестър публикувал в Educational Times следната задача:

Нека е дадено множество от ***n*** точки в равнината със следното свойство – правата свързваща кои да е две от тях минава през трета точка от множеството. Лежат ли всичките ***n*** точки на тази права?



Фиг. 1

На фиг. 1 е показана конфигурация от шест точки и девет прави, получени чрез свързване на всеки две точки от дадените. В този пример имаме шест прави, които съдържат точно по две точки от конфигурацията и три прави съдържащи по три точки от конфигурацията. Нека наречем правите, определени от кои да е две точки, свързващи прави, а тези минаващи през точно две точки – стандартни прави.

Тогава проблемът на Силвестър може да бъде преформулиран така:

Всяко крайно множество от точки P в равнината определя поне една стандартна права, или всички точки от P лежат на една и съща права.

Нито едно решение на задачата на Силвестър не било предложено по онова време. Задачата се появила отново 40 години по-късно, когато Paul Erdos изказва предположение, че за всеки $n \geq 3$ неколинеарни точки винаги съществува права минаваща през точно две от тях.

През 1982 г. Erdos пише: „Аз очаквах решението да бъде лесно, но за моя огромна изненада и разочарование не успях да намеря доказателство. Споделих този проблем с Gallai, който много скоро откри оригинално доказателство.“

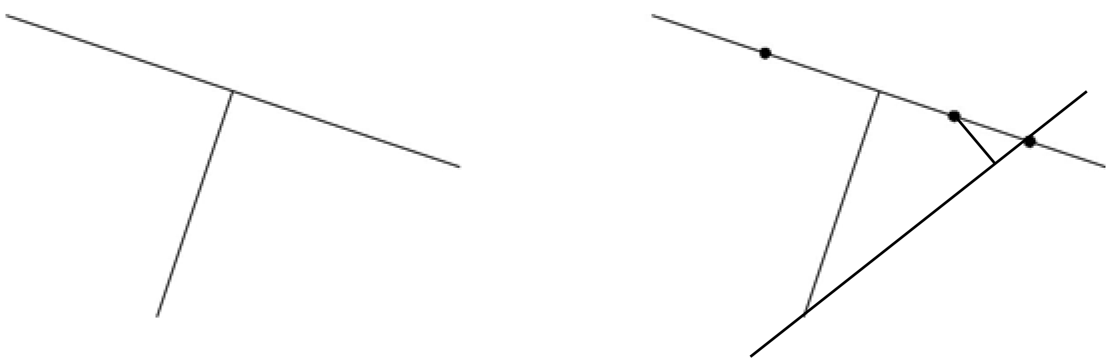
Доказателството на Tibor Gallai е по-скоро трудно и малко по-късно Leroy Milton Kelly предлага следната оригинална идея.

Нека допуснем, че не всички точки от P лежат на една права, и нека L е множеството от свързващите прави. Нека $dist(l, Q)$ е разстоянието между l и Q за всяка свързваща права $l \in L$ и всяка точка $Q \in P$.

Нека X е множеството от положителните реални числа $dist(l, Q)$, където l е свързваща права, а $Q \in P$ е точка, непринадлежаща на l.

Според нашето допускане, X не е празно множество, защото за всяка свързваща права l съществува поне една точка от P, която не принадлежи на l.

Като следствие X е крайно множество от реални числа и има най-малък елемент. Да го наречем d_0. Може да вземем двойка (l, Q), където $l \in L$, $Q \in P$ и $dist(l, Q) = d_0$. (фиг. 2)



фиг. 2

Твърдим, че l е стандартна права (минаваща през точно две точки).

В противен случай тя ще съдържа поне три точки Q_1, Q_2, $Q_3 \in P$. Да допуснем, че е така. Тогава нека Q_2 и Q_3 са от едната страна на перпендикуляра през Q към l и Q_3 е по-далеч от Q_2 спрямо този перпендикуляр. Но така разстоянието между Q_2 и свързващата права l_1, определена от Q и Q_3, е по-малко от d_0, което е невъзможно, защото d_0 беше избрано като най-малкия елемент от X.

Доказахме, че всяко множество от неколинеарни точки определя поне една стандартна (минаваща през точно две точки) права.

Очевидно следващата стъпка е да се запитаме за минималния брой стандартни прави определени от n точки. Този проблем е изследван многократно и все още не е напълно решен.

Тук ще дискутираме принципа на екстремалния елемент, който има наистина универсално приложение, но не е толкова лесно да разпознаем ситуациите, в които можем да го приложим и поради тази причина въпросната стратегия трябва да бъде тренирана и усъвършенствана.

Този принцип се нарича още variational method, и скоро ще разберем защо. Той често води до екстремално кратки доказателства.

Прилагането на евристичните техники е препоръчително, особено ако не е известен пътят към решението на дадена задача. Може да се твърди в този случай, че евристичните техники са единственият път към решаването на задачата. Затова обучението в евристично мислене и запознаването на учениците с различни евристични подходи съществено подобрява резултатите.

Решаването на всяка задача съдържа в себе си две основни части: изследователска (където се ориентираме) и доказателствена, в която убеждаваме другите (а и себе си) в резултатите от нейното решаване. В стратегиите определяме нивото на изследователската част, а в доказателствената част доминират тактиките и инструментите, затова нито една от тези две части не трябва да бъде подценявана.

В математиката често се изучават обекти, които са равноправни по отношение на известната за тях информация, но известните им свойства са недостатъчни. Така например в редица задачи става дума за числа, всяко от които има някакво (едно и също или различно за всички) свойство; за точки от равнината, които са неразличими относно даденото условие, т.е. информацията за тях не е достатъчна. Точно в такива задачи се прилага принципът на екстремалния елемент.

Това не е строго дефиниран математически метод. От групата елементи с общи свойства ние избираме елемента с най-голяма или най-малка стойност (ако става дума за редица от числа), първия или последния елемент.

Този принцип много често не води до пълното решение на дадената задача. Той се комбинира с други идеи, било то по-лесни или по-сложни.

Ние се опитваме да докажем съществуването на обект с точно определени свойства. Принципът на екстремалния елемент ни подсказва да вземем обект, който минимизира или максимизира някое от търсените от нас свойства и след малки вариации, по-нататък тези качества ще растат или намаляват. Ако съществуват няколко оптимални за нас обекта, то тогава няма значение кой от тях ще изберем.

В допълнение, принципът на екстремалния елемент е най-вече конструктивен, давайки ни алгоритъм за конструиране на обекта.

Да припомним три добре известни факта:

- Всяко крайно непразно множество A от реални числа притежава най-малък елемент ($min\ A$) и най-голям елемент ($max\ A$), които са единствени.
- Всяко непразно подмножество от положителни цели числа притежава най-малък елемент. Това се нарича принцип на добрата наредба. Този принцип е еквивалентен на принципа на математическата индукция.
- Едно безкрайно множество A от реални числа може да няма най-голям елемент и най-малък елемент. Ако A е ограничено отдолу, то има най-голяма долна граница: $inf\ A$ ($infimum\ of\ A$), ако A е ограничено отгоре, тогава притежава най-малка горна граница: $sup\ A$ ($supremum\ of\ A$). Ако $sup\ A \in A$, тогава $sup\ A = max\ A$, и ако $inf\ A \in A$, тогава $inf\ A = min\ A$.

Глава 1

Няколко въвеждащи теореми и задачи

Ще започнем прилагането на екстремалния принцип с една задача от студентския конкурс „William Lowell Putnam” от далечната 1965 година.

***Задача* 1:** На едно парти присъствали младежи и девойки. След приключването му се оказало, че нито един от младежите не е танцувал с всички девойки, но всяка девойка е танцувала с поне един младеж. Да се докаже, че могат да се посочат такива две двойки (D_1, M_1) и (D_2, M_2), че нито младежът M_1 да е танцувал с девойката D_2, нито девойката D_1 да е танцувала с младежа M_2. (Разбира се, щом са били двойки, M_1 е танцувал с D_1 и D_2 е танцувала с M_2.)

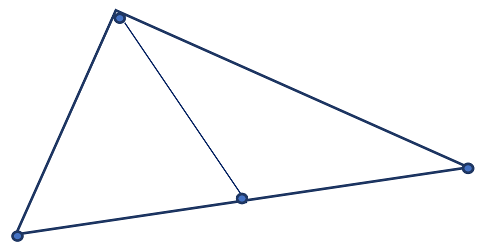
***Решение*:** Ще приложим екстремалния принцип по следния начин:

Избираме младеж M_1, който е танцувал с максимален брой девойки (т. е. би могло да има и друг младеж, танцувал със същия брой девойки, но не и с повече). Нека D_2 е една от девойките, която не е танцувала с M_1 (такива има според условието), а M_2 е младеж, танцувал с D_2 (такъв също има според условието). Измежду танцувалите с M_1 девойки избираме девойка D_1, която не е танцувала с M_2. (Ако няма такава девойка D_1, ще се окаже, че M_2 е танцувал с D_2 и всички партньорки на M_1, т.е. с повече девойки, отколкото M_1. Тук се проявява механизмът на действие на екстремалния принцип). Така двойките (D_1, M_1) и (D_2, M_2) удовлетворяват условието на задачата.

Ето още едно просто приложение на екстремалния принцип.

***Задача* 2:** В равнината са дадени краен брой точки, част от които са оцветени в черно, а останалите – в бяло. Известно е, че всяка отсечка, съединяваща две едноцветни точки, съдържа поне една точка, оцветена в другия цвят. Да се докаже, че всички точки (и белите, и черните) лежат на една права.

Решение: Усещането ни е, че ако точките не са на една права, то те ще са безбройно много. Например бихме могли да проследим някакви системи от сложни конструкции, които да показват, че всеки път ще се „ражда нова точка“, но това едва ли ще е лесно, още повече едва ли ще е убедително. И тук на помощ идва отново принципът на екстремалния елемент.

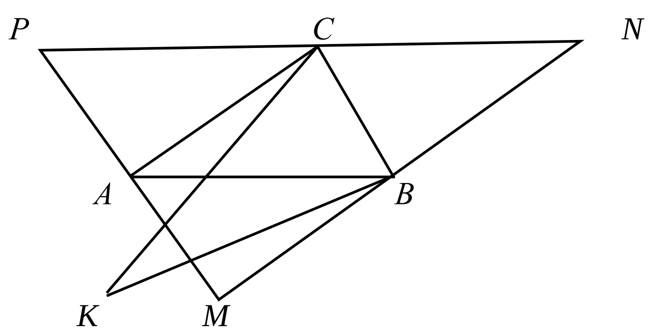


Да приемем, че не всички точки лежат на една права. Тогава те образуват някакви триъгълници. Избираме измежду всички такива триъгълници един с най-малко лице. Два от върховете на този триъгълник са оцветени в един и същи цвят. Следователно страната с краища тези точки съдържа поне една точка от другия цвят. Но сега се появи триъгълник с очевидно по-малко лице от избрания от нас триъгълник с най-малко лице. Стигнахме до противоречие. Следователно всички точки лежат на една права.

Видяхме как екстремалния принцип просто „взриви“ задачата. Структурата на разсъждението е типична: Допускаме противното, т. е. това, което се изисква, не е вярно. Тогава наблюдавайки минимален (максимален) елемент, конструираме по-малък (или по-голям) елемент, което ни осигурява противоречието.

***Задача* 3:** (Олимпиада в Ю. Корея, 1995 г.) Дадено е крайно множество от точки в равнината, такива че всеки три от тях са върхове на триъгълник с лице, ненадминаващо 1. Да се докаже, че всичките точки от множеството лежат във вътрешността или по страните на триъгълник с лице 4.

***Решение*:** Измежду всички възможни триъгълници с върхове в точките от даденото множество нека ΔABC да е този с най-голямо лице.



Нека MNP е триъгълникът, на който точките A, B и C са среди на страните му. Тогава лицето на ΔMNP не надминава 4. Ще докажем, че всички точки от даденото множество са в ΔMNP.

Наистина, нека K е точка, която е извън ΔMNP. Тя ще лежи в поне една полуравнина, определена от правите MN, NP и MP, която не съдържа ΔABC. Но тогава лицето на ΔKBC ще е по-голямо от лицето на ΔABC, което противоречи на нашето допускане.

Станахме свидетели на едно великолепно съчетание на екстремалния принцип с хитро геометрично построение.

До сега срещнахме някои изяви на принципа на екстремалния елемент, които носеха комбинаторно-геометричен характер. Но принципът може да ни е от полза и при решаване на задачи от алгебрата, теорията на числата, както и от чистата комбинаторика и геометрия. Важното е как да се организира „монотонизирането“ (подреждането) на обектите, които разработва задачата.

Сега ще докажем две математически теореми, популярните доказателства на които са изключително красиви и по думите на английския математик Г. Х. Харди („Апология на математиката“) са образец на математическо мислене. Тук обаче ще постъпим по друг начин.

***Теорема* 1.** (Основна теорема на аритметиката) Всяко естествено число, по-голямо от 1, има единствено разлагане на прости множители.

***Доказателство*:** (Цермело) Допускаме, че твърдението не е вярно. Следователно има естествено число с две различни разлагания на прости множители и нека n да е най-малкото такова число. Следователно имаме $n = p_1p_2\dots p_s = q_1q_2\dots q_t$.

Очевидно никое просто число p_i не съвпада с никое от числата q_j (в противен случай, след съкращаване на общ множител, ще получим по-малко естествено число с различни разлагания на прости множители).

Измежду всички прости числа $p_1, p_2, \dots , p_s$ и $q_1, q_2, \dots, q_t$ нека p_1 да е най-малкото. Да разгледаме сега числото $n_0 = n - p_1q_2\dots q_t$. За него ще имаме следните две представяния: $n_0 = p_1(p_2p_3\dots p_s - q_2q_3\dots q_t) = (q_1 - p_1)q_2\dots q_t$.

Но $1 < n_0 < n$ и следователно числото n_0 ще се разлага на произведение от прости множители еднозначно. Понеже p_1 дели n_0 (от първото представяне), ще следва, че p_1 дели $q_1 - p_1$ (поради еднозначността на разлагането), откъдето следва, че p_1 дели q_1, което е противоречие.

***Теорема* 2.** (Питагор) Числото $\sqrt{2}$ е ирационално.

Доказателство: Допускаме, че числото $\sqrt{2}$ е рационално. Следователно има такова естествено число n, че $n\sqrt{2}$ е също естествено число. Нека с n означим най-малкото естествено число с това свойство. Тогава числото $n\sqrt{2}-n$ е очевидно естествено, защото $0 < n\sqrt{2}-n$, а от друга страна $(n\sqrt{2}-n)\sqrt{2} = 2n - n\sqrt{2}$ също ще е естествено, което противоречи на $n\sqrt{2}-n < n$.

След тези не толкова популярни доказателства на тези популярни математически теореми, ще разгледаме няколко задачи, които се решават с помощта на екстремалния принцип.

***Задача* 4:** (Квант, М477) Даден е такъв полином $P(x)$ с цели коефициенти, че за всяко естествено число x е в сила $P(x) > x$. Редицата $\{b_n\}$ е дефинирана по следното правило: $b_1 = 1$; $b_{n+1} = P(b_n)$, за всяко $n \geq 1$. Известно е, че за всяко естествено число d съществува член на редицата, който се дели на d. Да се докаже, че $P(x) = x + 1$.

***Решение*:** Ще опитаме отново да подходим по типичната вече процедура.

Допускаме, че полиномите $P(x)$ и $(x + 1)$ не са равни.

Тъй като $b_{n+1} > b_n$, то за някое естествено число n (нека то е най-малкото) ще е в сила $b_{n+1} > b_n + 1$, т.е. $b_1 = 1$, $b_2 = 2, \ldots, b_n = n$, но $b_{n+1} > n + 1$.

Нека $d = b_{n+1} - 1$. Разглеждаме редицата от остатъците при делението на числата от редицата $\{b_n\}$ с делителя d. Първите n от тези остатъци са 1, 2, …, n, а за следващия ще имаме $b_{n+1} = P(b_n) \equiv P(n) \equiv 1(mod\ d)$, защото $b_{n+1} \equiv 1(mod\ d)$. Оттук следва, че разглежданата редица от остатъци по $mod\ d$ е периодична. Следователно не може да има член на редицата, който да се дели на d, т.е. $P(x) = x + 1$.

***Задача* 5:** (XXVIII МОМ, 1987 г.) Нека $n \geq 2$ е естествено число. Да се докаже, че ако числата $k^2 + k + n$ са прости за всяко цяло число $k \in \left[0; \sqrt{\frac{n}{3}}\right]$, то числата $k^2 + k + n$ са прости за всяко цяло число $k \in [0; n-2]$.

***Решение*:** Полиномите от вида $x^2 + x + a$, които приемат „много“ стойности, които са прости числа, са били винаги в полезрението на математиците. Още Ойлер е разглеждал такива полиноми.

Например, стойностите на полинома $x^2 + x + 11$ при $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ са съответно 11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101, всяка от които е просто число.

Подобно свойство има и полиномът $x^2 + x + 41$, чиито стойности са прости числа за $x \in \{0, 1, 2, 3, ..., 39\}$.

Ойлер е открил и други полиноми с подобни свойства.

Ние обаче ще се върнем към решаването на предложената задача, като използваме екстремалния принцип и отново ще приложим описаната за случая процедура.

Допускаме противното и нека y е най-малкото естествено число $y \le n - 2$, за което $y^2 + y + n$ е съставно, т. е. $x^2 + x + n$ е просто за всяко $x \in \{0, 1, 2, ..., y-1\}$.

Разглеждаме разликите $(y^2 + y + n) - (x^2 + x + n)$ за $x \in \{0, 1, 2, ..., y-1\}$.

Имаме $(y^2 + y + n) - (x^2 + x + n) = (y - x)(y + x + 1)$, където множителят $y - x$ приема стойностите $1, 2, \ldots, y$, а тези на множителя $y + x + 1$ са съответно $y + 1, y + 2, \ldots, 2y$.

Нека p е най-малкият прост делител на $y^2 + y + n$. Очевидно е, че $p \le \sqrt{y^2 + y + n}$. Ще докажем, че $p > 2y$.

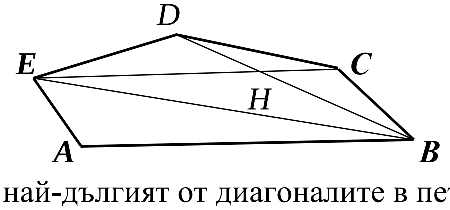
Наистина, ако допуснем, че $p \le 2y$, от горното представяне ще следва, че p е делител на разликата $(y^2 + y + n) - (x^2 + x + n)$ за някое $x \in \{0, 1, 2, ..., y-1\}$. Тогава p ще е делител на $x^2 + x + n$ и следователно $x^2 + x + n = p$.

Но от неравенствата

$y - x \le n - 2 \le n + x + x^2 = p$, $y + x + 1 \le n + x + x^2 = p$ и $y + x + 1 \le n + x - 1 \le n + x + x^2 = p$, следва, че p не може да дели израза $(y - x)(y + x + 1)$.

Тогава $p \ge 2y + 1$. Следователно за y получаваме $y^2 + y + n \ge p^2 \ge 4y^2 + 4y + 1$, т. е. $n \ge 3y^2 + 3y + 1 > 3y^2$, откъдето $y < \sqrt{\dfrac{n}{3}}$, което противоречи на условието.

***Задача* 6:** Да се докаже, че във всеки изпъкнал петоъгълник можем да изберем три диагонала, от които може да бъде построен триъгълник.



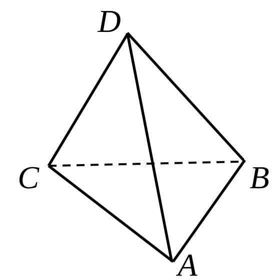
Решение: Нека BE да е най-дългият от диагоналите в петоъгълника $ABCDE$.

От неравенството на триъгълника в ΔEBH имаме $EH + BH > BE$, а в ΔDHC – съответно $DH + CH > DC$.

Следователно $EH + BH + DH + CH > BE + DC$ и $BD + CE > BE + CD > BE$, т.е. можем да построим триъгълник от отсечките BE, BD и CE.

***Задача 7*:** Да се докаже, че във всеки тетраедър съществуват три ръба с общ връх, от които може да бъде построен триъгълник.

Решение: Нека AB да е най-дългият ръб в тетраедъра $ABCD$.



От неравенството на триъгълника следва

$(AC + AD - AB) + (BC + BD - BA) = (AD + BD - AB) + (AC + BC - AB) > 0.$

Тогава или $AC + AD - AB > 0$, или $BC + BD - BA > 0$, или и двата сбора са по-големи от 0. Следователно съществуват поне три ръба с общ връх, от които можем да построим триъгълник.

***Задача* 8:** В полетата на безкрайна шахматна дъска са написани естествени числа, така че всяко число е равно на средното аритметично от четирите му съседни числа – горното, долното, лявото и дясното. Да се докаже, че всички числа са равни помежду си.

***Решение*:** Да припомним, че всяко множество от естествени числа е ограничено отдолу. Следователно съществува точна долна граница m. Да изберем поле с числото m. Съседните му числа да означим с a, b, c, d. Тогава $m = \frac{a+b+c+d}{4}$ или $a + b + c + d = 4m$ и $a \geq m, b \geq m, c \geq m, d \geq m$. Ако някое от тези неравенства е строго, то $a + b + c + d > 4m$, което е в противоречие с $a + b + c + d = 4m$. Следователно $a = b = c = d = m$.

Разсъждавайки аналогично за съседните полета стигаме до извода, че във всички полета е написано едно и също число m.

Коментар: Това е доста лесна задача. Ако заменим естествените числа с положителни реални числа ще се получи много сложна за доказване задача. Проблемът е, че положителните реални числа нямат най-малък елемент.

Помощно твърдение: Ако a и b са естествени числа, то $3 \mid a^2 + b^2$ тогава и само тогава, когато $3 \mid a$ и $3 \mid b$.

Доказателство: Ако $x = 3k$ или $x = 3k + 1$, или $x = 3k – 1$, следва че $x^2 = 9k^2$ или $x^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$. Следователно квадратът на всяко число се дели на 3, когато числото се дели на 3, или дава остатък 1 при деление на 3(във всички останали случаи). От тук следва, че $x^2 + y^2$ се дели на 3, когато x и y се делят на 3; $x^2 + y^2$ дава остатък 1 при делене на 3, когато само едно от числата x и y се дели на 3; $x^2 + y^2$ дава остатък 2 при делене на 3, когато и двете числа x и y не се делят на 3.

Задача 9: Да се докаже, че не съществуват четири естествени числа a, b, c и d, за които е в сила равенството:

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2) \quad (1)$$

***Решение*:** Допускаме обратното, т.е. че съществуват четири числа a, b, c и d, за който е в сила (1). Избираме такива четири числа, за които сумата $a^2 + b^2$ е минимална. Ако има повече от една четворка числа a, b, c и d, за които $a^2 + b^2$ има една и съща стойност и тя е най-малка, избираме коя да е от тези четворки числа.

От $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ следва $3 \mid a^2 + b^2$, т.е. $a = 3k$ и $3 = 2u$.

Заместваме в (1) и получаваме $9k^2 + 9u^2 = 3(c^2 + d^2)$, т.е. $c^2 + d^2 = 3(k^2 + u^2)$ и следователно $c = 3p$ и $d = 3q$.

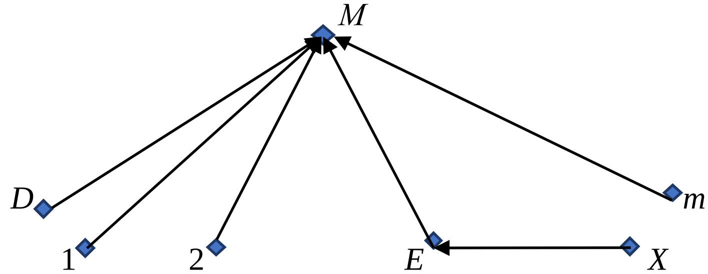
Така намерихме четири числа p, q, k и u, удовлетворяващи (1) и $k^2 + u^2 < a^2 + b^2$.

Това противоречи на минималния избор на $a^2 + b^2$.

Следователно не съществуват четири естествени числа удовлетворяващи (1).

***Задача* 10:** В една държава всички пътища са еднопосочни. Всяка двойка градове е свързана точно с един директен път. Да се докаже, че съществува град, до който може да се стигне директно от всеки друг град или най-много през един от другите градове.

Решение:



Нека m е максималният брой на директните пътища водещи до някой град, и нека M е градът, за който този максимум е достигнат. Нека D е множеството от градовете с директна връзка с M. Нека R е множеството от градовете без градовете в D и град M. Ако R е празно множество, задачата е решена.

Ако $X \in R$, тогава съществува град $E \in D$ с връзка $X \to E \to M$. Ако не съществува такъв град E, тогава X може да бъде достигнат директно от всички градове в D и от град M. И така m+1 пътища биха водили до X, което противоречи на допускането за M.

И така, всеки град с максимален брой влизащи в него пътища удовлетворява условието на задачата.

***Задача* 11:** (Олимпиада 8. клас, 1977 г.) Седем джуджета седят около кръгла маса. Пред всяко от тях има чаша. В някои от чашите има мляко. Млякото във всички чаши общо е 3 L. Едно от джуджетата разделя неговото мляко по равно в другите чаши. Следвайки посоката на часовниковата стрелка всяко от другите джуджета прави същото. След като седмото джудже разпределя неговото мляко, началното количество мляко във всяка чаша е възстановено. Да се намери началното количество мляко във всяка чаша.

***Решение*:** Да допуснем, че джудже с номер i има количество мляко x_i преди да го сподели с другите. Нека джуджето Макс има максимално количество мляко x, а другите в дясно от него да имат количества $x_1, x_2, \dots, x_6$. Макс получава $\frac{x_i}{6}$ от джудже с номер i.

Така имаме $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6}$, където $x_i \le x$ за $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Ако неравенството $x_i \le x$ бъде строго дори само веднъж, то няма да имаме равенство. Така $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x$, т.е. всяко джудже разпределя еднакво количество мляко. Началното разпределение на млякото е 0, $\frac{x}{6}, \frac{2x}{6}, \frac{3x}{6}, \frac{4x}{6}, \frac{5x}{6}, \frac{6x}{6}$.

От общото количество (3 L) получаваме $x = \frac{6}{7}$. И така началното количество във всяка чаша е $\frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$, 0.

***Задача* 12:** (ИМО, 1983 г.) Да се изберат 1983 двойки различни положителни цели числа по-малки от 100 000, така че никои три от тях да не образуват аритметична прогресия.

Решение: Няма нищо, което да ни подскаже как да подходим към тази задача. Нуждаем се от някаква стратегия за да направим първата стъпка към решението. Нека конструираме редица от числа, като никои три от членовете на редицата да не образуват аритметична прогресия. По този начин ще търсим някакъв алгоритъм. Започваме с най-малкото неотрицателно цяло число 0. Със всяка стъпка добавяме следващ по големина член, който да не образува аритметична прогресия с двете числа преди него.

- 0, 1, 3
- 0, 1, 3, 4
- 0, 1, 3, 4, 6, 9
- 0, 1, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 13, 27
- 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, 28, 30, 31, 36, 37, 39, 40, 81

Получихме редица с някои закономерности. Степените на 3 ни подсказват, че можем да използваме троичната бройна система. Така, ще запишем същата редица в троична бройна система: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000,…

Горната редица ни подсказва, че можем да използваме двоичната бройна система. Предполагаме, че нашата редица се състои от тези троични числа, при които липсва цифрата 2, т.е. те са написани в двоична бройна система. Нашето следващо предположение е, че ако прочетем членовете на редицата a_n в двоична система, ще получим n. Ако ги прочетем в троична, ще получим a_n.

Решението на нашата задача е $a_{1983} = a_{11110111111}$, където $1983 = 11110111111_{(2)}$ и $11110111111_{(3)} = 87844$.

***Задача* 13:** Да се докаже, че $n\sqrt{2}$ не е цяло число за всяко положително цяло число n.

***Решение*:** Нека S е множеството от тези цели положителни числа n, за които $n\sqrt{2}$ е цяло число. Ако S не е празно множество, то би съдържало най-малък елемент k. От $\left(\sqrt{2}-1\right)k\sqrt{2} = 2k-k\sqrt{2}$ и $k \in S$ следва, че $2k-k\sqrt{2}$ и $\left(\sqrt{2}-1\right)k\sqrt{2}$ са положителни цели числа. По дефиниция $\left(\sqrt{2}-1\right)k \in S$. Но $\left(\sqrt{2}-1\right)k < k$, което противоречи на допускането, че k е най-малкият елемент от S. Следователно S е празно множество.

***Задача* 14:** (ИМО, 1988): Нека a и b са положителни цели числа, такива че $ab + 1$ дели $a^2 + b^2$. Докажете, че $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е точен квадрат.

Решение: Да допуснем, че съществуват положителни цели числа (a, b), за които $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ не е квадрат на цяло число.

Нека (A, B) да са положителни цели числа, за които $k = \frac{A^2+B^2}{AB+1}$, $A \geq B$ и сумата $A^2 + B^2$ има минимална стойност.

Фиксираме B, заместваме A с променливата x и получаваме

$$x^2 - (kB)x + (B^2 - k) = 0.$$

Знаем, че един корен на това уравнение е $x_1 = A$.

От формулите на Виет знаем, че другият корен удовлетворява

$$x_2 = kB - A \text{ и } x_2 = \frac{B^2-k}{A}.$$

Първият израз показва, че x_2 е цяло число, докато вторият израз показва, че $x_2 \neq 0$, т.к. k не е точен квадрат.

От $\frac{x_2^2+B^2}{x_2B+1} = k > 0$ следва, че x_2 е положително цяло число.

От $A \geq B$ следва, че $x_2 = \frac{B^2-k}{A} < A$, откъдето $x_2 + B < A + B$, което противоречи на минималната стойност на сумата $A + B$, която избрахме.

Получихме противоречие на нашето допускане, че съществуват положителни цели числа (a, b), за които $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ не е квадрат на цяло число. Следователно ако a и b са положителни цели числа, такива че $ab + 1$ дели $a^2 + b^2$, то $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е точен квадрат.

Глава 2

Задачи за ученици от 5. и 6. клас

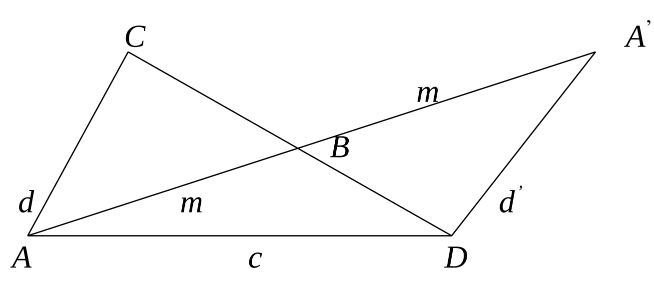
***Задача* 15:** (сп. Квант, брой 8, 1976) В равнината имаме множество от точки *M*, такова че всяка точка от *M* е среда на отсечката, свързваща кои да е две точки от това множество. Да се докаже, че *M* съдържа безкрайно много точки.

Много често ключът към решението на дадена задача се намира като решим „по-елементарна“ аналогична задача. Затова първо ще решим следната задача:

***Задача* 16:** Върху права е зададено множество от точки *M*, такова че всяка точка от *M* е среда на отсечката, свързваща други две точки от *M*. Докажете, че множеството *M* е безкрайно.

***Решение*:** Да допуснем, че множеството *M* не е безкрайно. Тогава измежду всички негови точки съществуват две крайни точки – най-лявата и най- дясната. Да разгледаме една от тях, например най-лявата и да я означим с буквата *A*. Точка *A* е крайна и поради това не може да лежи на отсечка съединяваща две други точки. Значи тя не принадлежи на *M*. Полученото противоречие доказва, че *M* не е крайно множество.

***Решение на задача* 15:** Допускаме, че множеството *M* е крайно. Да изберем най-лявата точка от *M*, а ако „най-левите“ точки са повече, ще изберем най-нискостоящата от тях спрямо равнината. Означаваме тази точка с буквата *A*. Вече е лесно да се убедим, че *A* не може да лежи върху отсечка, съединяваща две точки от множеството *M*. Ако съществуваше такава отсечка, то единият ѝ край би лежал или по-наляво от *A*, или по-ниско от *A*. Ако множеството *M* е крайно, то и междуточковите разстояния са крайни числа и сред тях можем да изберем най-голямото. Нека това е разстоянието между точките *A* и *B*. Но точка *B* се явява среда за някоя отсечка *CD*, чиито краища по условие принадлежат на множеството *M*. Тогава както *AD* така и *AC* са по-големи от *AB*.



***Задача* 17:** При компютърна игра се стреля по цевите на 6 оръдия, за точно определено време. На екрана излизат няколко оръдия с три цеви, няколко с четири цеви, а останалите с пет. В игра Петър улучил цевите на всяко от шестте оръдия и то така, че улучените цеви на едно от оръдията са общо 4 пъти по-малко, отколкото улучените цеви на всички останали. Общо колко цеви е улучил Петър за определеното време?

***Решение*:** Решаваме задачата на два етапа:

• Отделяне на възможно решение

• Показване, че има такава възможност

На екрана има от всеки вид оръдие.

Най-малкият брой цеви на екрана, които може да вижда Петър е

$$4 . 3 + 1 . 4 + 1 . 5 = 21.$$

Най-големият брой цеви на екрана, които може да вижда Петър е

$$1 . 3 + 1 . 4 + 4 . 5 = 27.$$

Тогава улучените цеви са: 21, 22, 23, 24, 25, 26 или 27.

От второто условие – ако едно оръдие има x улучени цеви, то останалите четири ще имат $4x$ улучени цеви, т.е. общо $5x$ цеви. От всички случаи само 25 се дели на 5.

Възможно ли е такова решение?

Пример: 3 . 2 + 4 . 1 + 5 . 3 = 25

Коментар: При решаването на тази задача определихме най-малкия и най-големия брой на цевите на екрана. По този начин показахме, че решението на задачата е в определен интервал. После с даденото допълнително условие лесно открихме търсеното решение – 25.

Названието на този вид задачи произлиза от гръцката дума *EXTREMUM*, която в превод означава краен.

Ще разгледаме задачи в които, решението се открива по-лесно, като първо определим крайните стойности – най-малка или най-голяма при числа, най - къса или най-дълга при отсечки, най-лява или най-дясна при точки и така нататък, и после от допълнителните условия в задачата ще намерим търсеното решение. В някои от задачите ще оценяваме средните стойности за да достигнем до най-малките или най-големите възможности. Ще разгледаме и задачи, в които всички елементи притежават общи свойства, така че те са равноправни.

***Задача* 18:** Горска пътека водеща към поле от диви ягоди се разделя на три пътечки – лява, дясна и средна. Група планинари от 1000 човека потеглили към полето от диви ягоди, като се разделили на три групи по трите пътечки. Знаем, че предпочелите средната пътечката са повече от тръгналите вляво и дясно заедно, а разликата между тръгналите по средната и тези, тръгнали по лявата и дясната пътечки взети заедно, е 96. Колко туристи са тръгнали по средната пътека?

Решение: От това, че тръгналите по средната пътека са повече от тръгналите вляво и вдясно взети заедно, правим извода, че те са повече от 500. В противен случай броят на всички ще е по-малък от 1000.

(Например 499 + 498 = 997 < 1000).

Тогава тръгналите по средната пътека могат да са: 501, 502, 503,......,997, 998.

Следователно сборът на туристите от другите две групи може да е съответно:

499, 498, 497, ..., 2.

Така разликата между броя на туристите в групите може да е съответно: 2, 4, 6, ..., 996, т.е. (1 . 2, 2 . 2, 3 . 2, 4 . 2, 5 . 2, 6 . 2 .....)

Ще търсим разлика равна на 96. Това е четиридесет и осмата възможност за групите. Тогава туристите са съответно: 548 и 452.

Отговор: 548 туристи са тръгнали по средната пътека.

***Задача* 19:** Сборът на три естествени числа е 36. Сборът на две от тях е по-малък от най-голямото от трите числа и е кратен на 8, а разликата на тези две числа е 2. Кое е най-малкото от трите числа от възможните решения?

***Решение*:** Сборът на две от числата може да е 8, 16, 24 или 32. Разликата им е винаги 2.

Ако сборът е 8, а разликата – 2: числата са 5, 3 и 28.

Ако сборът е 16, а разликата – 2: числата са 9, 7 и 20.

Ако сборът е 24 или 32, то той ще е по-голям от най-голямото число.

Най-малко число от двете решения получаваме при тройката числа 28, 5 и 3 и това е числото 3.

***Задача* 20**: Три приятелки хвърлили едновременно три стандартни зара. И трите зара показвали различни числа. Ако сборът на трите числа е 12, опишете всички възможни числа на трите зара.

***Решение*:** От това, че сборът на три различни числа е 12 следва, че най-малкото от тях, е не по-голямо от 3. Действително ако най-малкото е 4, следващите по големина са числата 5 и 6, но сборът е $4 + 5 + 6 = 15 > 12$.

От това, че сборът на три различни числа е 12 следва, че най-голямото от тях е по-голямо от 4. (Ако е 4, за сбор 12 има само една възможност и тя е $4 + 4 + 4 = 12$.)

Нека най-голямото число е 5. Тогава $5 + 4 + 3 = 12$ и друга възможност няма.

Нека най-голямото е 6. Тогава $6 + 5 + 1 = 12$ и $6 + 4 + 2 = 12$. Възможностите са три: (5, 4 и 3), (6, 5 и 1) и (6, 4 и 2).

***Задача* 21:** В гимнастически салон има следните уреди: обръчи, топки и ленти. Те са общо 30. Лентите са с 11 по-малко, отколкото обръчите, а топките са повече, отколкото лентите и обръчите взети заедно. Колко са топките?

Решение: От това, че топките са повече, отколкото лентите и обръчите взети заедно, правим извода, че топките са най-малко 16. В противен случай уредите ще са по-малко от 30 (ако са 15, няма да са повече от лентите и обръчите заедно).

Нека топките са 16. Тогава лентите и обръчите са $30 - 16 = 14$, но те имат разлика 11, което не е възможно.

Нека топките са 17. Тогава лентите и обръчите са 13 с разлика 11. Следователно лентите са 12, обръчът е един, топките са 17.

Нека топките са 18. Тогава лентите и обръчите са 12 с разлика 11, което също е невъзможно.

Ако топките са 19 или повече, то разликата между лентите и обръчите ще е по-малка от 11.

Отговор: 17 топки, 12 ленти и 1 обръч.

***Задача* 22:** Ако умножа годините на по-голямата ми сестра с 5 и прибавя моите, ще получа 50. Колко са моите години?

***Решение*:** Нека моите години са x, а на сестра ми – y. Тогава $x < y$ и $5y + x = 50$. Годините на сестра ми са най-много 9, т.к. $5y < 50$. Ако са 9, то тогава моите са 5. Ако годините на сестра ми са 8 (или по-малко от 8), то моите са 10, което не е възможно, т.к. аз съм по-малък).

Отговор: Аз съм на 5 години.

***Задача* 23:** Пет отбора от шестите класове провеждат турнир по математика. Известно е, че всички отбори в крайното класиране имат различен брой точки и сборът от всички точки е 414. Ако класиралият се отбор на първо място е с 85 точки, то колко са точките на отбора класирал се на последно място?

***Решение*:** Т.к. 85 + 84 + 83 + 82 + 81 = 415 > 414, отборът класирал се на последно място е получил по-малко от 81 точки.

Т.к. 85 + 84 + 83 + 82 + 79 = 413 < 414, отборът е получил повече от 79.

Тогава отборът класирал се на последно място е получил 80 точки.

***Задача* 24:** Четиринайсет различни естествени числа имат сбор 118. Колко може да е възможно най-голямата разлика на две от тези числа.

***Решение*:** Ако сред числата няма 1, то най-малкият сбор от 14 различни естествени числа е: 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 119 > 118. Следователно едно от числата е 1. Тогава най-голяма разлика на две числа измежду тези 14 числа ще получим, като разлика от най-малкото и най-голямото от тези числа. Най-малкото е 1. Търсим възможно най-голямото.

От това, че 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 105 < 118, то 14-тото число е най-голямо, ако е 27. Следователно търсената разлика е 27 – 1 = 26.

***Задача* 25:** Сборът на 14 нечетни естествени числа е 40. Коя е най-голямата възможна разлика между най-голямото и най-малкото от тези числа?

Решение: По няколко начина можем да получим сума 40 от 14 нечетни естествени числа, но ние трябва да открием кога тази разлика е най-голяма. От това, че най-малкото нечетно число е 1, то ще търсим 13 нечетни числа със сума 39.

Нека най-голямото нечетно число е 29, тогава до 39 остава сума 10, която можем да получим само от единици, общо 11 числа. В този случай обаче, получаваме сбор от 12 числа.

Нека най-голямото нечетно е 27, до 39 остава сума 12 и тя може да се получи само от 12 единици.

$$27 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 40$$

Тогава най-голямата разлика между най-голямото и най-малкото от тези числа е

$$27 – 1 = 26$$

Забележка: Това са други възможности за образуване на сбор 40 от 14 нечетни числа, но разликите между най-голямото и най-малкото число са по-малки от 26:

$1+1+1+1+1+1+1+5+5+5+5+3+3+7$ или $5+5+5+5+3+1+1+1+1+1+1+1+1+9$.

***Задача* 26:** (Математически турнир „Акад. Кирил Попов“ – Шумен, май 2016, отборно състезание, 5. клас)

СЛУЧКИ В КВАРТАЛА

В квартала живеят 14 младежи. Всички те са обединени в различни клубове. По правило, всеки клуб е длъжен да има не по-малко от трима младежи, и два клуба се считат за различни, ако не се състоят от едни и същи членове. Освен това, всеки младеж може да бъде член на не повече от два клуба. Колко най-много клубове може да има в квартала?

***Решение*:** Нека в квартала има x клуба и всеки клуб издава членска карта. Тъй като всеки клуб има не по-малко от трима члена, то броят на картите е не по-малък от $3x$. Но всеки младеж има 1 или 2 карти.

Следователно всички членски карти са не повече от $2 \,.\, 14 = 28$. Получаваме $28 > 3x$, т.е. $x < 9$ (x е цяло число). Това означава, че в квартала може да има най-много 9 клуба.

Остава да дадем пример за членуването на 14 младежи в 9 клуба така, че:

(1) Всеки клуб да има поне трима членове;

(2) Всеки младеж да членува в не повече от 2 клуба;

Пример: Ако номерираме децата с 1, 2, 3, 4, ..., 15, то едно примерно разпределение в 9 клуба е: (1, 2, 3); (1, 2, 4); (3, 4, 5); (5, 6, 7); (6, 7, 8); (8, 9, 10); (9, 10, 11); (11, 12, 13); (12, 13, 14); добавяме 15-тото дете в някой произволен клуб.

***Задача* 27:** (Зимни математически състезания, 2011 г.) Учителката записва на дъската няколко различни естествени числа, а учениците трябва да запишат в тетрадките си всички възможни сборове на числата по двойки. При това, ако един сбор се получи повече от един път, то той трябва да се запише в тетрадките само веднъж. Например, ако на дъската са записани числата 1, 2, 6 и 7, учениците трябва да запишат в тетрадките си по веднъж числата 3, 7, 8, 9 и 13.

а) Учителката записала на дъската 5 числа. Колко най-малко и колко най-много числа могат да запишат учениците в тетрадките си?

б) Колко най-малко числа трябва да запише учителката на дъската, за да могат учениците да запишат в тетрадките си точно 11 числа?

Решение: а) Нека записаните числа на дъската са: $a < b < c < d < e$. Тогава седемте суми $a + b$, $a + c$, $a + d$, $a + e$, $b + e$, $c + e$ и $d+e$ са различни, защото са наредени по големина. Следователно учениците трябва да запишат в тетрадките си поне 7 числа. Ако на дъската са записани например числата 1, 2, 3, 4 и 5, лесно може да се провери, че учениците трябва да запишат точно 7 суми – числата от 3 до 9 включително.

Най-голям брой числа, които учениците могат да запишат в тетрадките си, ще се получи, ако всички двойки суми са различни. Т.к. всички двойки суми са $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, то най-големият възможен брой числа, които могат да се запишат в тетрадките, е 10. Това може да се случи, ако на дъската са записани например числата 1, 2, 4, 8 и 16.

б) От решението на а) следва, че на дъската трябва да бъдат записани поне 6 числа. Това е търсеният най-малък брой, защото примерът със записани числа 1, 2, 3, 4, 5 и 8 дава точно 11 различни суми – всички числа от 3 до 13 включително.

***Задача* 28:** Двадесет петици са записани една след друга: 5 5 5 ... 5 5. Напишете между някои от цифрите знака „+", така че полученият сбор да е равен на 1000. (За цифрите, между които не е написан знак, считаме, че образуват едно число.)

***Решение*:**

1. Ако всички събираеми са едноцифрени числа, получаваме $(5 + 5 +...+ 5) = 100$, което е по-малко от 1000.

2. Ако всички събираеми са едноцифрени или двуцифрени числа, получаваме най-много $55 + 55 + ... + 55 = 550 < 1000$ (защото $5 + 5 < 55$)

3. Ясно е, че има поне едно трицифрено число 555. Не може да има две трицифрени числа, защото $555 + 555 = 1110 > 1000$.

4. Останалите седемнайсет петици са двуцифрени и едноцифрени числа със сбор $1000 – 555 = 445$. Т.к. $8 . 55 = 440$, то 8 от числата са двуцифрени и останалата петица е едноцифреното число.

Окончателно $555 + 55 + 55 + ...+ 55 + 5 = 1000$

***Задача* 29:** В шестите класове в едно училище има 143 ученици, разпределени в 5 паралелки. Най-малкият брой ученици в една паралелка е 25, а най-големият е 34. Колко са различните възможности за разпределяне на учениците в тези пет паралелки, ако има само една паралелка с 25 ученици и само една с 34 ученици.

***Решение*:** От това, че най-малкият брой е 25, а най-големият е 34, то остава да разпределим 143 – 59 = 84 ученици в три паралелки.

Подреждаме паралелките по големина: $a < b < c$ (с a, b и c сме означили броя на учениците в тези паралелки).

Тогава $3 \, . \, c \geq 84$ и следователно в паралелката с най-много ученици има не по-малко от 28 ученици, т.е. $28 < c < 33$.

Ако са 28, за другите две остават 84 – 28=56 и възможността е 28, 28.

Ако са 29, за другите две остават 84 – 29=55 и възможностите са 29, 26 или 28, 27.

Ако са 30, то възможностите са 30, 28, 26 и 30, 27, 27.

Ако са 31, то възможностите са 31, 27 и 26.

Ако са 32, то възможностите са 32, 26, 26.

Получихме 7 възможности за разпределяне на учениците по паралелки.

***Задача* 30:** Сумата на пет естествени различни числа е кратна на 6. Намерете тази сума, ако е известно, че сумата на всеки четири от тях е не по-малка от 46, а сумата на всеки три е не по-голяма от 36.

***Решение*:** Нека числата, подредени по големина, са $a < b < c < d < e$ и нека S е тяхната сума.

Т.к. от условието на задачата всеки 4 от тези числа имат сбор не по-малък от 46, да образуваме всички четворки от тези пет числа – те са точно 5 и всяко от числата a, b, c, d и e участва точно 4 пъти в четворките. Като съберем всички четворки, ще получим $4S$. Следователно $4S > 5.46$ и $S > 55$.

От друга страна сумата на всеки три числа е не по-голяма от 36. Всички суми по тройки са $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ и всяко от числата a, b, c, d и e участва точно по 6 пъти във всички тройки. Ако съберем всички тройки, ще получим $6S$. Тогава $6S < 36.10$ и $S < 60$. Така S може да е: 56, 57, 58, 59, 60 и е кратно на 6.

Отговор: 60.

Глава 3

ЗАДАЧИ ЗА УЧЕНИЦИ ОТ 6. И 7. КЛАС

***Задача* 31:** В равнината са дадени краен брой точки. Измежду всеки 3 от тях могат да се изберат две, които са на разстояние не по-голямо от 1 *cm*. Да се докаже, че съществуват два кръга с радиус 1 *cm*, които съдържат всички дадени точки.

Решение: Точките са краен брой, тогава отсечките, които ги свързват са също краен брой и измежду всички отсечки има отсечка с най-голяма дължина. Нека това е отсечката AB.

Нека $AB < 1$ *cm* и точка C е произволна точка от дадените. От това, че AB е с най-голяма дължина, следва $AC < AB < 1$. Тогава точка C е вътрешна за кръг с център точка A и радиус AB. Но C е произволна точка от дадените по условие. Тогава и всички точки се съдържат в този кръг.

Нека $AB > 1$ *cm*. Да разгледаме двата кръга с центрове точките A и B и радиус 1 *cm* и C е произволна точка. По условие за всеки три точки A, B и C съществува отсечка с дължина не по-голяма от един сантиметър. Това може да е една от отсечките AC или BC. Тогава и в този случай точката C принадлежи на един от двата кръга.

Това е вярно и за всяка точка от дадените по условие.

***Задача* 32:** Числата от 1 до 19 са написани в някакъв ред по окръжност k. Да се докаже, че съществува поне една дъга от k, която съдържа 6 от числата и сумата на тези числа е не по-малка от 63.

***Решение*:** Отделяме най-малкото от числата – числото 1. Обхождайки окръжността в една от двете възможни посоки, разделяме останалите 18 числа на три групи по 6 числа.

Нека сумите им са S_1, S_2 и S_3.

Т.к. $S_1 + S_2 + S_3 = 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 19 = 189$, а ако допуснем, че и трите суми са по-малки от 63 сборът $S_1 + S_2 + S_3 < 3 \,.\, 63 = 189$, стигаме до противоречие. Ето защо съществува дъга от k, съдържаща 6 числа, сумата на които, е не по-малка от 63.

***Задача* 33:** Във футболен турнир участвали 7 отбора, като всеки два са се срещнали точно по веднъж. При победа отборите печелят 3 точки, при равенство – по 1 точка, при загуба – не се присъждат точки. В крайното класиране има три отбора на първо място, един на второ и три на трето място. Известно е, че сборът от точките на класиралите се на първо място е равен на сбора от точките на класиралите се на второ и трето място. Намерете максималният брой точки, които могат да получат трите отбора на първо място в крайното класиране и броя на победите и равните срещи за тази максимална стойност.

Решение: Нека точките на всеки отбор са съответно: на първо място – a, на второ място – b и на трето място – c.

От това, че отборите са изиграли 21 срещи (от формулата за комбинации без повторение на n елемента от k-ти клас $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$), то за общия брой точки е изпълнено $42 < 3a + b + 3c < 63$.

От това, че $3a = b + 3c$, то $42 < 6a < 63$ и $14 < 2a < 21$.

Търсим максималната възможна стойност за a.

Ако $2a = 20$, то $a = 10$. Тогава $30 = 3c + b$ и $b \in \{3, 6, 9, ..., 30\}$

Единствената възможна стойност за b е 9. Тогава $c = 7$.

Нека да означим броя на победите с x, а броя на равенствата – с y. Тогава е вярно, че $x + y = 21$ и $3x + 2y = 60$, откъдето намираме, че $x = 18$, $y = 3$.

Примерна таблица на резултатите от срещите:

противник	A	B	C	D	E	F	G
A	×	1	0	3	3	0	3
B	1	×	3	0	0	3	3
C	3	0	×	3	1	3	0
D	0	3	0	×	3	0	3
E	0	3	1	0	×	3	0
F	3	0	0	3	0	×	1
G	0	0	3	0	3	1	×

Следователно $a = 10$ е възможно решение и това е максималният брой точки. В този случай победите са 18, а равните срещи 3.

***Задача* 34:** В шахматен турнир участвали 8 шахматисти и всички набрали различен брой точки. На турнира всеки играл срещу всеки точно по веднъж. При победа се присъждала по 1 точка, при равенство – по 0,5 точки, а при загуба – 0 точки. Шахматистът заел второ място набрал толкова точки, колкото последните четирима заедно. Как е завършила партията между шахматистите, класирали се на трето и на седмо място?

Решение: Нека получените от шахматистите точки са

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6 > x_7 > x_8.$$

Всеки участник е играл по 7 партии с останалите и всяка партия носи по 1 точка (0 и 1 или 0,5 и 0,5).

Тогава точките x_1 на класиралия се на първо място са най-много 7, а точките x_2 на класиралия се на второ място са най-много 6,5.

Четиримата шахматисти, класирани на последните четири места са изиграли помежду си 6 партии и точките от тези срещи са 6. Тогава минималният брой точки на четиримата от всички срещи е 6.

Така получаваме, че x_2 е едно от числата 6 или 6,5.

Ако x_2 = 6,5, то вторият няма загуба (6 победи и 1 равен мач). Следователно първият не е победил втория и има най-много 6,5 точки, което противоречи на даденото, че точките в крайното класиране са различни числа.

Следователно единствената възможност е $x_2 = 6$.

Тогава точките на последните четирима от всички срещи са също 6 и те са загубили всички срещи с останалите четирима.

Следователно партията между шахматистите, класирали се на трето и седмо място е спечелена от този, който е на трето място?

Глава 4

Задачи за ученици от 8. и 9. клас

***Задача* 35:** Да се докаже, че множеството на простите числа от вида $4m + 3$ е безкрайно.

***Решение*:** Да предположим противното, т.е. че множеството на простите числа от вида $4m + 3$ е крайно. Нека $p_1,\ldots, p_n$ да са неговите елементи.

Да разгледаме случая когато n е четно число, тогава

$$p_1 p_2 \ldots p_n + 2 \equiv (-1)^n + 2 \equiv 3(mod\ 4),$$

т.е. $p_1 p_2 \ldots p_n + 2 = 4m + 3$, където $m \in N$.

Следователно това число има прост делител $p = 4k + 3$.

Но нито едно от числата $p_1,\ldots, p_n$ не е делител на числото $p_1 p_2 \ldots p_n + 2$. Следователно $p \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$. Получихме противоречие с допускането че всички прости числа от вида $4m + 3$ се съдържат в множеството $\{p_1,\ldots, p_n\}$.

Ако n е нечетно число, то $p_1 p_2 \ldots p_n + 4 \equiv (-1)^n + 4 \equiv 3(mod\ 4)$.

С аналогични разсъждения се доказва съществуването на просто число $p=4k + 3$ не принадлежащо на множеството $\{p_1,\ldots, p_n\}$. И отново получаваме противоречие с предположението, че множеството на простите числа от вида $4m+ 3$ е крайно.

***Задача* 36**: Седем ученици събрали общо 100 точки на едно математическо състезание, като няма двама, които да са с равен брой точки. Да се докаже, че има трима ученици, които са събрали общо не по-малко от 50 точки.

***Решение*:** За нас крайният елемент ще бъде сумата от точките на четиримата състезатели, които са се представили най-слабо.

Ако тази сума е по-малка от 50 точки, то сумата от точките на най-добре представилите се трима ученика ще е по-голяма от 50.

Нека разглежданата сума е равна на 50. Тогава и сумата на останалите трима е равна на 50.

Да допуснем, че тази сума е по-голяма от 50 и да разгледаме точките, които е получил четвъртия в класирането. Това означава, че разглеждаме максималното събираемо от сумата на четиримата най-слабо представили се, т.е. отново прилагаме принципа на крайния елемент.

Ако допуснем, че той има 14 точки, т.к. 14 + 13 + 12 + 11 = 50, получаваме противоречие с това, че сумата от точките на четиримата е по-голяма от 50.

Ако допуснем, че той има 15 или повече от 15 точки, то сумата от точките на първите трима ще е най-малко 16 + 17 + 18 = 51, а това противоречи с условието, че общият сбор е 100 точки. Следователно най-слабо представилите се четирима имат обща сума, не надвишаваща 50 точки, откъдето следва, че най-добре представилите се трима ученици имат общо не по-малко от 50 точки.

***Задача* 37:** От числата 1, 2, 3, 4, 5, ..., 199, 200 са избрани произволно 101 числа. Да се докаже, че две от избраните числа се делят едно на друго.

***Решение*:** Да разгледаме най-големите нечетни делители на избраните числа. За числата от 1 до 200 съществуват точно 100 различни най-големи нечетни делители, а именно 1, 3, 5, ..., 199. Тъй като избраните числа са 101, то две от тях имат еднакви най-големи нечетни делители. Това означава, че две от избраните числа се различават само по степента на множителя 2 и по-голямото се дели на по-малкото.

Глава 5

Екстремални задачи в геометрията

***Задача* 38:** В опитно поле всеки клас има своя леха с обиколка в цели числа, равна на 2400 m. Всеки от класовете има леха с различно лице. Ако класовете засеят лехите с един и същ сорт пшеница, то намерете размерите на тази леха, от която ще се получи най-голям добив.

***Решение*:** Най-голям добив ще се получи при най-голямо лице на лехата. Нека размерите на лехите са a и b. Тогава $a + b = 1200$. Търсим кога $S=a\ .\ b$ ще е най-голямо. От това, че $a + b = 1200$ възможностите за комбиниране по двойки са:

$$(1, 1199), (2, 1198), (3, 1197),\dots\dots\dots (600, 600).$$

Ще покажем, че 600 . 600 е най-голямото лице. За съседното произведение е вярно, че 599 . 601 = (600 – 1).(600 + 1) = 600 . 600 – 1 < 600 . 600.

По същият начин ще покажем, че всяко съседно има по-малко произведение от предходното. Подредени по големина за лицата на възможните лехи ще получим:

$$1\ .\ 1199 < 2\ .\ 1198 < 3\ .\ 1197 <\dots < 600\ .\ 600.$$

Следователно показахме, че най-голямо лице ще има лехата с размери 600 на 600.

Извод: От всички правоъгълници с размери естествени числа с полупериметър, който е четно число, най-голямо лице има квадратът.

Извод: От всички правоъгълници с размери естествени числа с полупериметър, който е нечетно число, най-голямо лице има правоъгълникът с размери последователни естествени числа, които намираме по правилото: Един от размерите е най-голямата възможна стойност на най-малкото от двете измерения.

Пример: P = 246 cm, тогава $\frac{P}{2} = 123\ cm$ и размерите са x и y. Нека x е по-малкото число. Тогава x е най-много 61 cm. Тогава $y = 62\ cm$ и $S_{max} = 61.62$.

Извод: От всички правоъгълници с периметър 2p най-малко лице има квадратът със страна $\frac{1}{2}p$.

Задача **39:** От всички правоъгълни паралелепипеди с дължини на страните естествените числа x, y и z, за които $x+y+z = 2013$ cm намерете този с най -голям обем.

Решение: Най-малкото от трите измерения е най-много 671 cm. От изводите от предходната задача и от това, че 2013 : 3 = 671 cm следва, че най-голям обем ще получим, ако размерите са 671 cm, 671 cm и 671 cm.

Задача **40:** От всички правоъгълни паралелепипеди с дължини на страните естествените числа x, y и z, за които $x + y + z = 2014$ cm, намерете този с най-голям обем.

Решение: Най-малкото от трите измерения е най-много 671 cm. Другите две ще имат най-голямо произведение, когато са равни или съседни с 671 cm с разлика 1. Тогава

$$V = 671\ .\ 671\ .\ 672\ cm^3.$$

Задача **41:** Докажете, че от всички правоъгълници с дадено лице S, най-малък периметър има квадратът.

Решение: Нека лицето на правоъгълника е $S = a\ .\ b$, а периметърът $P = 2.(a + b)$, където a и b са размерите на правоъгълника.

Знаем, че $(a-b)^2 \geq 0$, като равенството е възможно при $a = b$.

От това следва ,че $a^2 - 2a.b + b^2 \geq 0$, т.е. $a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0$ и $(a + b)^2 \geq 4ab$.

Заместваме в последното неравенство и получаваме следната оценка за лицето и периметъра на правоъгълника $\left(\frac{P}{2}\right)^2 \geq 4S$ и от тук $P^2 \geq 16S$.

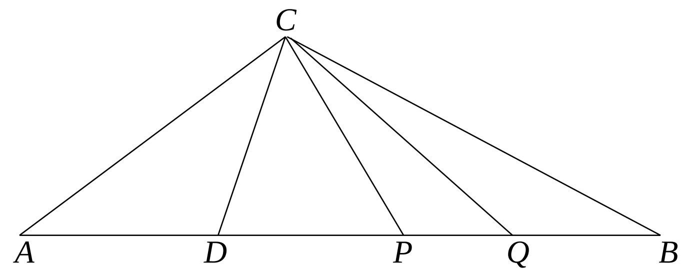
Неравенството $P^2 \geq 16S$ означава, че за всеки произволен правоъгълник най-малката стойност на P^2 е $16S$ и се достига когато $a = b$.

Задача **42:** Да се докаже, че всеки триъгълник с периметър 12 cm и лице 6 cm^2 може да се нареже на 100 триъгълника, всеки от които има периметър, по-голям от 6 cm.

Решение: Нека AB е най-малката страна. Тогава $3.\ AB < AB + AC + CB = 12$ и $AB < 4$. Нека h е височината към страната AB.

Ще докажем, че $h > 3$.

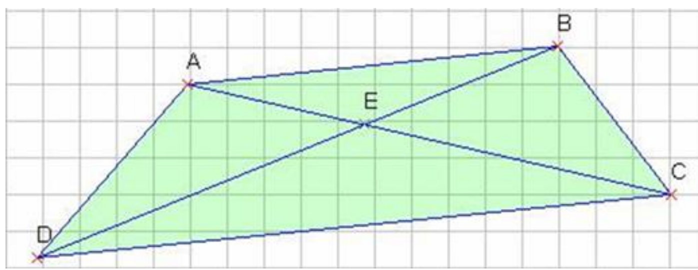
От $S = 6\ cm^2 = (AB.h) : 2$ следва $AB\ .\ h = 12$. Но от $AB < 4$, следва $h > 3$. Разделяме страната AB на сто равни части. Съединяваме с върха C и получаваме 100 триъгълника. Ще покажем, че всеки от тях е с периметър по-голям от 6 cm.



Нека Q и P са две произволни точки с които сме разделили отсечката AB на 100 равни части, а CD е височината h. От това, че перпендикулярът е винаги по-малък от наклонената, то $h < CP$ и $h < CQ$. Тогава: $P_{PQC} = CP + CQ + PQ > 2h + PQ > 2h > 6$.

***Задача* 43:** Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Нека E е произволна точка, а сумата $S = AE + EC + BE + ED$. Докажете, че сумата S е най-малка, когато E е пресечната точка на диагоналите на четириъгълника.

Решение: Нека E е произволна точка.



Да приложим за точките A, C и E неравенството на триъгълника:

1) $AE + EC > AC$, като равенство е възможно ако точка E лежи на отсечката AC.

Прилагаме неравенството и за точките B , D и E.

2) $BE + DE > BD$, като равенство е възможно ако точка E лежи на отсечката BD.

Следователно за произволна точка E от равнината на четириъгълника е изпълнено:

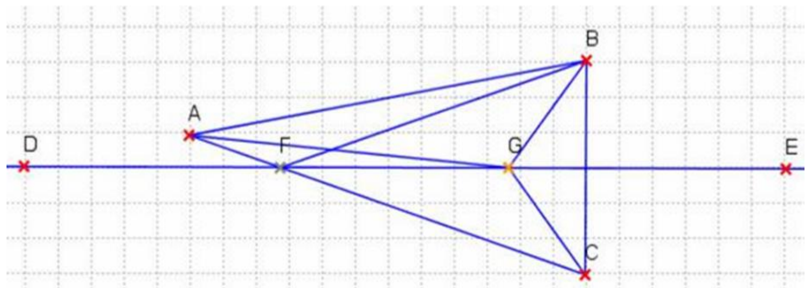
3) $AE + EC + BE + ED > AC + BD$, като равенство се достига единствено когато точка E принадлежи на двата диагонала на четириъгълника. Съществено използваме, че четириъгълникът е изпъкнал.

***Задача* 44:** Дадени са права DE и две различни точки A и B, които са от една и съща страна на правата DE. Да се намери точка F от правата DE , за която сумата $AF + FB$ да е най-малка.

Решение: Нека точка C е симетрична на B относно DE. Отсечката AC пресича правата ED в точка F. Ще докажем, че F е търсената точка.

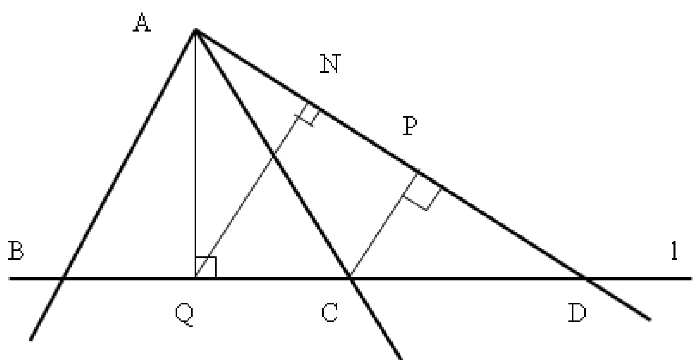
По построение $AF + FC = AF + FB$, защото триъгълниците FOB и FOC са еднакви (точка O е пресечна точка на BC с правата DE).

Нека точка G е произволна точка от правата DE. От неравенството на триъгълника, приложено за точките A, G и C, следва $AC < AG + GC = AG + GB$, но $AC = AF + FB$.



***Задача* 45:** В равнината са дадени краен брой, две по две не успоредни прави. През пресечната точка на всеки две от тях минава още една от дадените прави. Да се докаже, че всичките прави се пресичат в една точка.

***Решение*:**



Да предположим, че не всичките прави минават през една точка. Да разгледаме точките на пресичане на правите и да изберем най-малкото ненулево разстояние от тези точки до дадените прави. Нека най-малко да бъде разстоянието от т. A до правата l – AQ. По условие през т. A минават три от дадените прави и пресичат l в точките B, C и D.

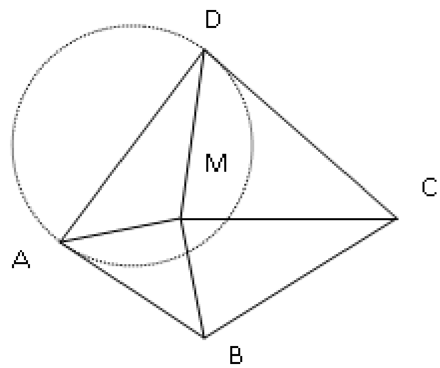
Отсечката AQ е перпендикулярна на l и е най-малкото ненулево разстояние.

Две от точките B, C и D лежат от едната страна на Q, например C и D и $CQ < DQ$. $AQ > QN$, QN е перпендикулярна на AD (хипотенуза в правоъгълния триъгълник AQN) и $QN \geq CP$, следователно $AQ > CP$, което противоречи на избора на AQ – най-малко разстояние.

Най-малък или най-голям ъгъл

***Задача* 46:** Даден е четириъгълникът *ABCD* и четири кръга със съответни диаметри *AB*, *BC*, *CD* и *DA*. Да се докаже, че четирите кръга напълно покриват четириъгълника.

***Решение*:**



Да означим дадения четириъгълник с *ABCD*. Избираме произволна точка *M*, вътрешна за четириъгълника. Нека $\angle AMD$ е най-големия от ъглите $\angle AMD$, $\angle DMC$, $\angle CMB$ и $\angle BMA$. Тогава $\angle AMD \geq 90^\circ$. В противен случай

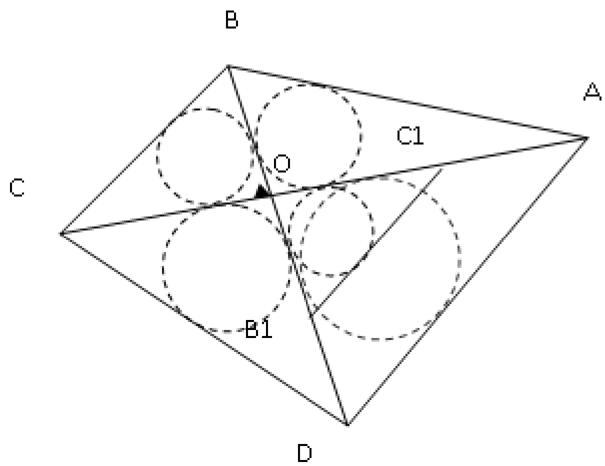
$$\angle AMD + \angle DMC + \angle CMB + \angle BMA < 4.90^\circ = 360^\circ .$$

Следователно т. *M* се покрива от кръга с диаметър отсечката *AB*. Следователно произволна точка в четириъгълника винаги може да се покрие от някой от дадените четири кръга.

Най-голям триъгълник

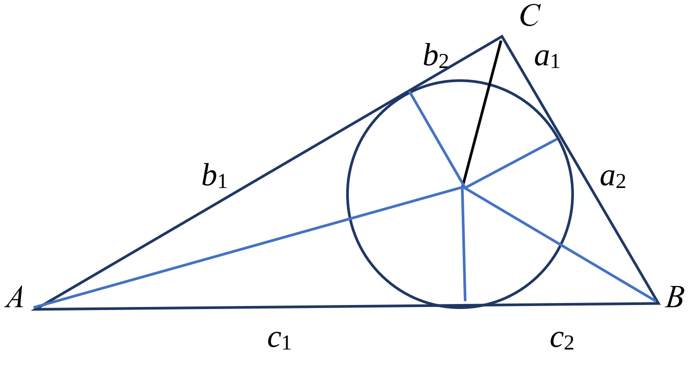
***Задача* 47:** Нека O е пресечната точка на диагоналите на изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Докажете, че ако радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците ABO, BCO, CDO и DAO са равни, то четириъгълникът е ромб.

Решение: Да допуснем, че диагоналите не се разполовяват и за определеност да приемем $AO \geq CO$ и $DO \geq BO$.



Нека точките B_1 и C_1 са построени симетрично на B и C спрямо т. O т.е. $BO = BO_1$ и $CO = OC_1$. Следователно ΔB_1OC_1 лежи в ΔAOD и вписаната в него окръжност S лежи в ΔAOD. Да предположим, че отсечката AD не съвпада с отсечката C_1B_1. Тогава радиусът на вписаната в ΔAOD окръжност $r_{AOD} > r_{B_1OC_1} = r_{COB}$. Получихме противоречие с условието – равни радиуси на вписаните окръжности в триъгълниците ABO, BCO, CDO и DAO. Следователно $A \equiv C_1$ и $D \equiv B_1$, с което доказваме, че диагоналите се разполовяват и следователно четириъгълникът е успоредник.

Известно е, че във всеки успоредник лицата на триъгълниците, на които той се разделя от диагоналите са равни – $S_{AOB} = S_{BOC}$.



Лицето на триъгълника може да бъде изразено чрез радиуса на вписаната окръжност и полупериметъра му:

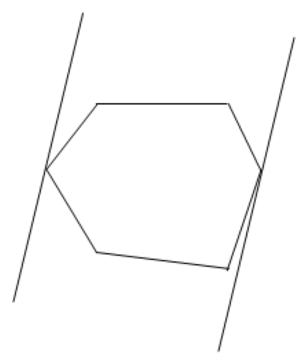
$$S = \frac{1}{2}[(c_1r + c_2r) + (a_1r + a_2r) + (b_1r + b_2r)] = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

$\Rightarrow P_{AOB} = P_{BOC}$, но $CO = OA$ и OB е обща страна.

Следователно $AB = BC$, т.е. $ABCD$ е ромб.

Изпъкнала обвивна крива и опорни прави

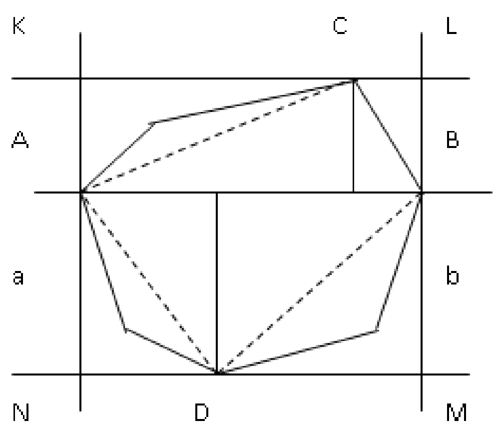
Изпъкнала обвивна крива на краен брой точки се нарича най-малкия изпъкнал многоъгълник, обхващащ всички тези точки (под най-малък многоъгълник се разбира, че той не се съдържа в никакъв друг такъв многоъгълник). За всяко крайно множество от точки съществува единствена изпъкнала обвивна затворена крива.



Опорна права на изпъкнал многоъгълник се нарича правата минаваща през връх, като многоъгълника лежи изцяло от едната и страна. За всеки изпъкнал многоъгълник съществуват точно две опорни прави успоредни на дадена права.

***Задача* 48:** Да се докаже, че произволен изпъкнал многоъгълник с лице $S = 1$ може да бъде разположен в правоъгълник с лице $S_1 = 2$.

***Решение*:** Нека AB е най-големия диагонал или страна на многоъгълника. Да построим през точките A и B прави a и b, перпендикулярни на правата AB.



Ако с X означим кой да е връх на многоъгълника, то $AX \leq AB$ и $XB \leq AB$, тъй като AB е най-голямата страна в триъгълника. Построяваме опорните прави на многоъгълника, които са успоредни на AB. Нека тези прави, както е показано на чертежа минават през върховете C и D и с правите a и b образуват правоъгълника $KLMN$.

$$S_{KLMN} = 2S_{ABC} + 2S_{ABD} = S_{ACBL}$$

Тъй като четириъгълникът $ABCD$ е в дадения многоъгълник с $S = 1$, то $S_{KLMN} \leq 2$.

Глава 6

Малко история

Джеймс Джоузеф Силвестър (1814–1897) се ражда в семейството на търговеца Абрахам Джоузеф. Силвестър сменя няколко училища и колежи, а след това учи в Университета Кеймбридж. Там той е втори по резултати на финалния изпит по математика, което му дава правото да получи едновременно степените „бакалавър“ и „магистър“. Но Силвестър не получава тези степени, тъй като отказва необходимата формална процедура, включваща признаване на каноните на англиканската църква. Той получава научните степени чак след четири години, когато е вече професор по физика в Лондонския университет.

Веднага след това Силвестър пристига в САЩ за да преподава математика в университета във Вирджиния. Но поради неразбирателство с колеги се задържа там за по-малко от пет месеца. След неуспешно търсене на работа в САЩ, той се завръща в Англия и работи като специалист по финансова оценка на риска в застрахователни компании. Чак през 1855 г. (т.е. когато е на 40 години) Силвестър има шанса да получи академична длъжност в Кралската военна академия във Уулуич, Лондон.

Получава се така, че разцветът на математическата кариера идва при Силвестър на пенсионна възраст. През 1877 – 1883 г. той ръководи факултета по математика в Университета „Джонс Хопкинс“ и създава „Американско математическо списание“. От 1883 г. до края на живота си ръководи катедрата по геометрия в Оксфорд. Задачата на Силвестър се появява през този период от живота му.

С популяризирането на задачата на Силвестър е свързано и името на Пол Ердьош (Paul Erdos, 1913 – 1996), един от най-влиятелните и известни математици на 20. в. Ердьош публикува 1475 математически статии, което е абсолютен рекорд сред математиците за всички времена.

Тибор Галай (Tibor Gallai, 1912 – 1992) е близък приятел на Ердьош. Дълго преди да се срещнат очи в очи те се познавали задочно като най-активните участници в конкурса за математически задачи, провеждащ се чрез Унгарското математическо списание. Галай става победител в престижната математическа олимпиада Йотвьош, и като такъв е приет без изпит в университета.

Олимпиадата Йотвьош е най-старата математическа олимпиада в света. Тя се провежда от 1894 г. и носи името на барон Лоранд Йотвьош, по чиято инициатива е създадена. Много от победителите в тази олимпиада стават впоследствие велики математици и физици.

Заключение

Решението на задачата на Силвестър е красива илюстрация на широко прилаганата евристична стратегия, наречена принцип на екстремалния елемент.

Ако искаме да докажем, че в множество от обекти трябва да има един с определени свойства, тогава често е практично и ползотворно да вземем обект, който е екстремален в някое си качество и да използваме тази екстремност за да покажем, че обектът притежава търсените свойства.

В задачата на Силвестър ние искахме да покажем, че измежду всички свързващи прави съществува една стандартна. Ние взехме двойка (l, p) с екстремалното свойство – минимално разстояние, и тогава стана по-скоро лесно и „елегантно“ да покажем, че тази права е стандартна.

Успешните, търсещи математици са усъвършенствали няколко основни евристични стратегии с голям обхват и простота, които те прилагат постоянно в решението на даден математически проблем. По-известните от тях са: методът на пробите и грешките или пълното изчерпване; разглеждане на случаи; допускане на противното; принцип на математическата индукция; междинна стъпка и др. Тези принципи и стратегии не са свързани с точно определени задачи, а се прилагат във всички области на математиката. Обикновено един математик при решаването на дадена задача не мисли за тях, но той ги знае и използва на подсъзнателно ниво.

Колкото и да са важни процесите на наблюдение, концентрация, търсене на закономерности, изграждане на хипотези, не без значение са и процесите на подобряване на доказателствата и аргументациите при решаването на математическите задачи. В края на краищата, една математическа задача се счита за решена, когато преодоляването на пътя от първоначалното състояние до крайната цел е извършено чрез математически средства, т. е. чрез средствата на логическите правила за изводи.

Повечето математически доказателства стартират посредством предположения и заключения и завършват със словосъчетанието „което трябваше да се докаже“, обикновено записано чрез съкращението QED (от латинското quad erat demonstrandum).

Някои английско говорещи автори считат, че то означава quite elegantly done, т. е. толкова елегантно завършено.

За да достигнем обаче така желаното QED, както вече сме казали, се нуждаем от стратегии, тактики, инструменти и стилове на доказателства.

Използвани източници

1. Проф. Тонов, Иван К., Евристиката – наука, изкуство, занаят, монографичен труд, СУ „СВ. Климент Охридски”, ФМИ, София, 2012 г.
2. Engel, Arthur, Problem - Solving Strategies, Springer, New York, 1997.
3. Сп. Математика, брой 5, София, 2005 г.
4. Сп. Математика, брой 6, София, 2005 г.
5. Сп. Квант, брой 8, изд. „Наука“, СССР, 1976 г.
6. Сп. Квант, брой 5, ООО НПП ОО, Русия, 2009 г.
7. https://en.m.wikipedia.org/wiki/Vieta_jumping?fbclid=IwAR16xhUeIzDVN3ejSZ1dPe07p0CTyj7OZb4dMGSnELi7umMI_EwUa7TkDj0
8. https://www.une.edu.au/__data/assets/pdf_file/0009/204678/extremal_principle.pdf
9. https://dauchimmatematika.alle.bg
10. http://www.referati.org/princip-na-krainiq-element/69135/ref
11. https://brilliant.org/wiki/extremal-principle/
12. https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Extreme_principle
13. https://www.une.edu.au/__data/assets/pdf_file/0007/230389/extremal_principle_solutions.pdf