Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Дипломна работа

на тема

Дидактически системи от задачи за училищния курс по математика, създадени върху избрани частнопредметни технологии

Изготвил: Слави Радостинов Кадиев

Факултетен номер: 25782

Магистърска програма: Технологии за обучение по математика и информатика

Дипломен ръководител: доц. д-р Юлия Нинова

София
2020

Съдържание

1. Увод 5

1.1. Цел и задачи на дипломната работа 6

1.2. Структура на дипломната работа 6

2. Математическите задачи 9

2.1. Същност 9

2.2. Видове математически задачи 11

2.2.1. Видове математически задачи според условието на задачата 11

2.2.2. Видове математически задачи според изискванията 12

2.2.3. Видове математически задачи според структурата на решение 12

2.2.4. Видове математически задачи според принадлежността им към клоновете на математиката 13

2.2.5. Видове математически задачи според дидактическите им цели 14

2.2.6. Видове математически задачи според типа мислене 14

2.2.7. Видове математически задачи според броя на решенията 14

2.3. Функции на задачите 15

3. Системи от задачи 19

3.1. Същност на понятието система 19

3.2. Същност на понятието дидактическа система от задачи 19

3.3. Създаване на системата от задачи 23

3.3.1. Мотивиране на създаването 23

3.3.2. Етапи на проектирането 24

3.3.3. Изисквания при създаването на системата от задачи 24

3.3.4. Структура на системата от задачи 26

4. Технологии. Дидактически технологии 28

4.1. Същност на понятието технология 28

4.2. Същност на понятието образователна технология 30

4.3. Същност на понятието педагогическа технология 32

4.4. Структура на педагогическата технология 35

4.5. Критерии за ефективност на педагогическите технологии 39

4.6. Видове технологии в образованието 41

4.7. Основни задачи на педагогическата технология 44

5. Частнопредметни технологии 47

5.1. Технология за въвеждане на геометрични понятия в 7. и 8. клас и усвояване на определенията им 47

5.1.1. Същност на технологията 47

5.1.2. Компоненти на технологията 48

5.2. Технология за генериране на ирационални уравнения с един радикал с целочислени коефициенти и целочислени корени 49

5.2.1. Същност на технологията 49

5.2.2. Компоненти на технологията 52

6. Дидактически системи от задачи 55

6.1. Дидактическа система от задачи за въвеждане на понятието съседни ъгли и усвояване на определението му 55

6.2. Дидактическа система от задачи за въвеждане на понятието периферен ъгъл и усвояване на определението му 58

6.3. Дидактическа система от задачи за формиране на умения за решаване на ирационални уравнения от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ 63

7. Методически бележки 67

7.1. Методически бележки към дидактическата система от задачи за въвеждане на понятието съседни ъгли и усвояване на определението му 67

7.1.1. Стъпки 1. – 4. от компонентите на технологията 69

7.1.2. Стъпки 5. – 6. от компонентите на технологията 70

7.1.3. Стъпки 7. – 8. от компонентите на технологията 71

7.2. Методически бележки към дидактическата система от задачи за въвеждане на понятието периферен ъгъл и усвояване на определението му 81

7.2.1. Стъпки 1. – 4. от компонентите на технологията 83

7.2.2. Стъпки 5. – 6. от компонентите на технологията 85

7.2.3. Стъпки 7. – 8. от компонентите на технологията 87

7.3. Методически бележки към дидактическата система от задачи за формиране на умения за решаване на ирационални уравнения от вида $\sqrt{ax+b} = cx+d$, $a \neq 0$, $c \neq 0$ 102

8. Заключение 131

8.1. Обобщение на постигнатите резултати 131

8.2. Насоки за бъдещо развитие и усъвършенстване 132

9. Използвана литература 133

1. Увод

Изучаването на математическите задачи винаги е представлявало интерес за методиката на обучение по математика. Систематизирането на задачите според определени критерии при тяхното създаване обаче буди още по-голям интерес. Начинът, условията и редът, по които задачите се конструират в една обща система от задачи, целяща постигането на определена дидактическа цел, са тези фактори, които дават друг, по-различен смисъл на създаването на задачи.

Счита се, че не само производствените дейности, но и всяка социална дейност има своя структура, поради което може да бъде описана поетапно и да бъде реализирано това описание. В обучението, разглеждано като социална дейност, също могат да се разработват технологии. Технологиите са този мощен инструмент, с помощта на който процесът на създаване на система от задачи и обучението посредством нея в бъдеще може да бъде управляван. По този начин генерирането на задачи става целенасочено.

Съвкупността от гореспоменатите три въпроса представлява предметът на настоящата дипломна работа. Тя е насочена към разглеждане на възможности за управляемо създаване на дидактически системи от задачи за училищния курс по математика с помощта на определени частнопредметни технологии.

В дипломната работа са реализирани три дидактически системи от задачи. Те са генерирани чрез две частнопредметни технологии: *технология за въвеждане на геометрични понятия в 7. и 8. клас и усвояване на определенията им* и *технология за генериране на ирационални уравнения за формиране на умения за решаване на ирационални уравнения с един радикал от вида* $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ *с целочислени коефициенти и целочислени корени*.

При конструиране на системите от задачи са следвани нивата, през които преминава изучаването на математическите знания, описани от Н. Аммосова и Г. Краснова, съблюдавана е системата от дидактически понятия според В. Делибалтова и са спазени изискванията при създаване на система от задачи, описани от П. Асенова.

Средствата, които са използвани за реализирането на технологиите при създаването на системите от задачи, са анимации чрез динамичния геометричен софтуер *GeoGebra* и електронна таблица за автоматично изчисляване на коефициентите на ирационалното уравнение от посочения вид с помощта на *Microsoft Excel*.

За подпомагане на процеса на създаване и реализиране на системите от задачи на вниманието на учителя са предоставени детайлно описани методически бележки и специално създадени за него допълнителни задачи.

Разработката в дипломната работа може да бъде използвана от учители по математика и студенти, обучаващи се за учители по математика.

1.1. Цел и задачи на дипломната работа

Целта на дипломната работа е управляемо и целенасочено съставяне на системи от дидактически задачи върху конкретно учебно съдържание по избрани частнопредметни технологии.

Задачите, които се поставят в дипломната работа за постигането на целта ѝ, са:

1. Да се проучи литературата по темата на дипломната работа, която включва следната тематиката:
    - математическите задачи
    - (дидактическа) система от задачи
    - (дидактически) технологии.
2. Да се изберат частнопредметни технологии и:
    - да се опише същността на всяка от технологиите
    - да се опишат компонентите на всяка от технологиите.
3. Да се съставят конкретни дидактически системи от задачи за ученика, като:
    - се избере конкретно учебно съдържание
    - се осъществи изграждането на всяка от системите от задачи чрез конкретизация на някоя от избраните частнопредметни технологии.
4. Да се напишат детайлни методически бележки за учителя към създадените системи от задачи.
5. Да се изберат средства, които спомагат за реализирането на избраните частнопредметни технологии.

1.2. Структура на дипломната работа

Дипломната работа представя йерархично подредено съдържание от няколко глави и подглави.

1. **Увод** Съдържа начални бележки за разглежданата дипломна работа. Представят се целта и произтичащите от нея задачи, които трябва да се решат.
2. **Математическите задачи** В тази глава са поместени различни описания на математическите задачи, техните функции и класификациите им по различни критерии.
3. **Система от задачи** В тази глава са описани понятията система и дидактическа система от задачи. Включена е информация за мотивирането за създаване, етапите, през които преминава създаването, изискванията към системата и структурата на дидактическата система от задачи.
4. **Технологии. Дидактически технологии** Главата съдържа описания на понятията технология, образователна технология и педагогическа технология. Има информация за структурата, критериите за ефективност и основните задачи на педагогическите технологии, както и тяхна класификация според различни критерии.
5. **Частнопредметни технологии** Описани са същността и компонентите на две технологии – технология за въвеждане на геометрични понятия в 7. и 8. клас и усвояване на определенията им и технология за генериране на ирационални уравнения за формиране на умения за решаване на ирационални уравнения с един радикал от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ с целочислени коефициенти и целочислени корени.
6. **Дидактически системи от задачи** Създадени са дидактически системи от задачи на базата на технологиите, описани в глава 5. Конкретизацията на първата от двете технологии е направена върху определенията на понятията съседни ъгли (7. клас) и периферен ъгъл (8. клас). Втората от описаните технологии е конкретизирана върху съдържанието ирационални уравнения (10. клас).
7. **Методически бележки** В главата са дадени подробни методически бележки по създадените системи от задачи и по технологиите, които са използвани за тяхното реализиране. Генерирани са и допълнителни задачи за учителя, които може да използва целесъобразно нуждите на своите ученици.

8. **Заключение** Съдържа описание на постигнатите резултати и възможностите за бъдещо подобряване и развитие на темата на дипломната работа.

2. Математическите задачи

2.1. Същност

От векове наред задачите представляват интерес за човека, но и до ден днешен строго формално описание на понятието **задача** много трудно може да бъде дадено. Учени от различни области на науката се занимават с изучаване на същността на понятието, но все още няма еднозначно разбиране за това какво е задача. В следващите редове ще ви представя няколко различни аспекта на понятието **задача**, които не си противоречат, а по-скоро се допълват един друг.

В своя труд „Евристика – наука, изкуство, занаят“ (Тонов, 2012), посветен на решаването на математически задачи, проф. И. Тонов пише следното за същността на понятието:

Понятието задача не е от областта на математиката. То по–скоро се отнася към психологията, изкуствения интелект и кибернетиката, което на практика за математиците означава, че точно определение за задача, в смисъла на математиката, едва ли може да бъде формулирано. Различни автори, в зависимост от отношението си към процесите на науката и образованието, с които се занимават, дават различни трактовки на понятието задача и съответно влагат различно съдържание на приложението на задачите в образователния процес.

В официалния речник на българския език на Института за български език откриваме две описания на понятието **задача**: „*Нещо зададено, поставено, което трябва да се извърши, да се изпълни или постигне.*“ и *„Нещо, което се решава чрез разсъждения и изчисления.*“.

Друга гледна точка в описанието на понятието **задача** е сравняването ѝ с постигането на определена цел. Такава формулировка откриваме от немския психолог К. Дънкер (Duncker, 1945): „*Задача възниква, когато индивид има цел, за която не му е известен пътят за нейното достигане*“. Този тезис по същество е най-близко до психологическия аспект на понятието задача.

Известният унгарски математик Д. Пойа в книгата си „Математическо откритие“ (Пойа, 1968) пише, че „*да имаме задача означава да търсим съзнателно някое действие, годно за постигане на едно ясно схващане, но не и непосредствено достижима цел*“.

В монографичния си труд Ц. Антипешева достига до обобщението, че практически всяка човешка дейност е задача, тъй като задачата може да се разглежда като „*система от логически, последователни или последователно-паралелни (смесени) дейности, насочени към постигане на конкретен резултат. Той* (*резултатът*) *може да бъде както от света на материалното, така и от областта на идеалното – идея, хипотеза, концепция, теория, закон, принцип.*“.

Още няколко неформални описания на понятието **задача** се споменават и от авторите на книгата „Конструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи“ (Скафа & Милушев, 2009). Ето някои от тях:

- **Задачата** е система от информационни процеси.
- **Задачата** е ситуация, изискваща от субекта някакво действие.
- **Мисловна задача** е ситуация, изискваща от субекта някакво действие, насочено към намиране на неизвестното въз основа на използване на неговите връзки с известното.
- **Проблемна задача** е ситуация, изискваща от субекта някакво действие, насочено към намиране на неизвестното въз основа на използване на неговите връзки с известното в условия, когато субектът не притежава алгоритъм за това действие.

От всичко казано до тук, разбираме, че тези текстове имат по-скоро описателен характер.

Друг, по-различен начин на описване на това понятие, откриваме в книгата на проф. И. Ганчев „За математическите задачи“ (Ганчев И. , 1971). Той описва понятието **математическата задача** по следния начин, като използва теоретико-множествени понятия.

Всяка математическа задача е последователност от изречения или едно изречение, чрез които се задава описателно подмножество R *на дадено множество* M *от математически обекти и се изисква*:

1. R *да се зададе конструктивно* (*явно*)*, ако е крайно*;
2. *да се покаже, че множеството* R *съвпада с някое друго подмножество на* M *, което се счита за известно*;
3. *да се установи, че* R *е подмножество на вече зададено чрез определение подмножество на* M ;

4. *да се покаже, че обектите на R могат да се получат чрез определени построения, характеризиращи някакви чертожни инструменти.*

Казва се, че задачата е определена в множеството M .

С понятието **задача** са свързани и следващите термини: *текст на задача*, *условие на задача*, *заключение на задача*, *решаване на задача*, *отговор на задача* и *решение на задача*. В описанията на тези понятия са използвани означенията, участващи в описанието на понятието математическа задача, дадено по-горе.

Текст на задача се нарича последователността от изречения (в това число и символи), с които се задават множеството M , свойствата на обектите на R и изискването за съответното задаване на R .

Условие на задача се нарича частта от текста на задачата, чрез която се задават R описателно и M описателно или конструктивно.

Заключение на задача се нарича частта от текста на задачата, чрез която се посочва исканото задаване на R .

Решаване на задача се нарича дейността, чрез която от даденото в текста на задачата задаване на R се достига до исканото му задаване.

Отговор на задача се нарича полученото искано задаване на R .

Решение на задача се нарича последователността от начини на задавания на R , чрез които от даденото в задачата задаване на R се достига до исканото му задаване.

В учебника „Методика на наставата по математика“ (Малчески, 2001) авторът използва същото описание на понятието **задача** и всички останали описания, свързани с него, но добавя и още една категория – база (основа) на решението на задача. **База на решението на задачата** се нарича множество от теореми, аксиоми, дефиниции и др., с чиято помощ се стига до решението на задачата. Това всъщност са теоретичните знания (основи), използвани при решаването на задачата.

2.2. Видове математически задачи

Математическите задачи са разнообразни и могат да бъдат класифицирани в зависимост от различни критерии. Ето някои от тях.

2.2.1. *Видове математически задачи според условието на задачата*

- **Определени** Това са такива задачи, в чието условие има достатъчно елементи, за да се намери решение на задачата.
- **Неопределени** Това са такива задачи, в чието условие няма достатъчно елементи, за да се намери решение на задачата.
- **Преопределени** Това са такива задачи, в чието условие има повече от необходимата информация за решаването на задачата. В зависимост от тази информация задачите се делят още на:
  - ✓ <u>непротиворечиви</u> Това са задачи, в които информацията, която е повече от необходимата, е следствие от останалата такава и не противоречи на теорията.
  - ✓ <u>противоречиви</u> Това са задачи, в които информацията, която е повече от необходимата, не е следствие от останалата такава и противоречи на теорията.

2.2.2. *Видове математически задачи според изискванията*

- **Задачи за намиране на неизвестно** Това са задачи, в които се изисква да се намери неизвестно. В зависимост от неизвестното, тези задачи се делят на:
  - ✓ <u>задачи за изчисления</u> Това са задачи, в които трябва да се намери някаква количествена характеристика на дадена величина.
  - ✓ <u>задачи за намиране на *n*-орки от графиката на някаква релация</u> Това са задачи, в които трябва да се намери някаква връзка между обекти.
- **Задачи за доказване** Това са задачи, свързани с установяване на верността на математически твърдения.
- **Задачи за построение** Това са задачи, които са свързани с построяването на геометрични фигури.

2.2.3. *Видове математически задачи според структурата на решение*

- **Прости** Това са такива задачи, които не могат или не е необходимо да се разбиват на други подзадачи.
- **Сложни** Това са такива задачи, които се разбиват на други подзадачи.

Интересно е да се разгледат тези видове задачи при задачите за построение. Една построителна задача се нарича **проста**, ако след нанасянето на дадените елементи върху чертежа се получава построим триъгълник. Една построителна задача се нарича **сложна**, ако дадените елементи не образуват построим триъгълник, а с някакво допълнително построение те трябва да се „сближат“ в построим триъгълник.

2.2.4. *Видове математически задачи според принадлежността им към клоновете на математиката*

- **Аритметични** В тази група задачи са включени задачите за извършване на четирите аритметични действия в множеството на рационалните числа, пропорции, задачи от делимост на числата.
- **Алгебрични** Тук попадат задачите за решаване на уравнения, на неравенства, на системи уравнения и на системи неравенства, както и преобразуване на изрази и доказване на тъждества.
- **Геометрични** Тук спадат задачите за геометричните фигури и тела без значение дали това са задачи за изчисления, доказване или построения. Геометричните задачи от своя страна се делят на два вида:
  - ✓ <u>планиметрични</u> Това са задачи, свързани с равнинните фигури.
  - ✓ <u>стереометрични</u> Това са задачи, свързани с многостените и ротационните тела.
- **Задачи от анализа** Това са задачи, които се решават със средствата на математическия анализ. Изследването на някои видове функции е крайната цел (според държавните образователни стандарти) на този тип задачи за училищния курс по математика.
- **Тригонометрични задачи** Тук са включени всички задачи, свързани с тригонометрията – тригонометрични функции, доказване на тъждества, решаване на тригонометрични уравнения и неравенства, решаване на триъгълник.
- **Задачи от комбинаторика, вероятности и статистика** Тук са включени задачи за намиране на съединения без повторения (пермутации, вариации и комбинации) и на вероятност на събитие.

2.2.5. *Видове математически задачи според дидактическите им цели*

- **Обучаващи** Чрез тези задачи се въвеждат нови знания или се формират умения (нови свойства на обекти, нови закономерности, нови методи за решаване на задачи).
- **Тренировъчни** Чрез тези задачи се формират у учениците рутинни умения.
- **Развиващи** Това са задачи, които се решават с творчески средства, като преформулиране на условието или на заключението на задачата, използване на скрити закономерности, допълнителни построения или други подходи. Повечето такива задачи са нестандартни.

2.2.6. *Видове математически задачи според типа мислене*

- **Алгоритмични (стандартни)** Това са задачи, които се решават с еднозначно определена процедура (формула, твърдение или алгоритъм). Известни са задачите-компоненти, от които се състои тяхното решение и е известна тяхната последователност. Тук попадат тренировъчните задачи от предходната класификация.
- **Полуалгоритмични** Това са задачи, чието решение не е определено със строго определена схема и за решението им трябва допълнителни разсъждения, т.е. това са задачи, които се свеждат до алгоритмични задачи след аналитично-синтетични разсъждения.
- **Евристични (нестандартни)** Това са задачи, при които до решението им се достига след „*Аха*“ преживяване.

2.2.7. *Видове математически задачи според броя на решенията*

- Задачи с единствено решение
- Задачи с повече от едно решение, но не безброй решения
- Задачи с безброй решения
- Задачи, които нямат решение

2.3. Функции на задачите

До миналия век функциите на задачите се свързват само с изучаването на конкретни теми от учебната програма, т.е. те се формулират само от гледна точка на обучението. В последно време все повече започва да се обръща внимание на задачите в дидактиката, психологията, кибернетиката и други науки, с което въпросът за функциите на задачите започва да се разглежда по-особено в методиката на обучението по математика.

В учебника „Методика на наставата по математика“ (Малчески, 2001) авторът въвежда няколко принципа, от които се ръководи при разглеждането на функциите на училищните математически задачи. Те са:

- Практиката на обучението по математика показва, че всяка конкретна задача, която се поставя и решава на един или друг етап от обучението, има разнообразни функции, които в дадени конкретни условия се проявяват явно или неявно. Поради тази причина има смисъл да се говори за една или друга основна (водеща) функция на задачата в дадена конкретна ситуация.
- Функциите на задачите имат динамичен характер. В зависимост от конкретните условия някоя неявна функция на дадена задача може да се превърне във водеща, а нейната декларирана (заявена) водеща функция може да остане нереализирана. В практиката понякога учителят може да не схване основната функция на една задача (според замисъла на авторите на учебника) и затова нейното решаване не постига исканата цел и обратно, не са редки случаите, в които иновативната работа на учителя открива и реализира при решаването на дадена задача по-широки и по-полезни функции от онези, които авторите на учебника са заложили.
- Решаваните математически задачи трябва да съответстват на целите на обучението по математика в училище. Затова всяка отделна задача или система от задачи трябва да е насочена към реализирането на една или друга конкретна цел от обучението.
- Като вземем под внимание, че основните компоненти на обучението по математика са образование, възпитание и развитие, можем да достигнем до извод, че основните функции на задачите трябва да обучават, възпитават и да развиват творческите способности на учениците.

- Всяка от основните функции на задачите практически никога не е изолирана от останалите. Поради това можем да говорим, че тя е основна само при решаването на една задача или система от задачи. Ясно е, че учителят трябва да се стреми първо да реализира основната функция на задачата, но същевременно с това трябва да има предвид, че ненавременното акцентиране на останалите функции на задачата може да се отрази негативно на ефектите от решаването на задачата в рамките на урока.

Образователни функции на задачите се наричат онези функции, които са насочени към формиране на система от математически знания, умения и навици у учениците. Образователните функции могат да бъдат от *общ*, *специфичен* и *конкретен* характер.

Общи образователни функции се наричат тези функции на задачите, които са важни не само в обучението по математика, но и за обучението на всички дисциплини от природоматематическата област.

Специални образователни функции се наричат тези функции с общ характер, които са важни само за обучението по математика.

Заради нивото на значимост ще разгледаме общите образователни функции на задачите, които са:

- повторение на понятията с цел същите да се усвоят правилно и трайно;
- конструиране на връзки между понятията (от род към вид и обратно, вътрешнопредметни и междупредметни връзки);
- усвояване на основните правила за изводи и обучение за правилното им приложение;
- формиране на понятието *математически модел*;
- откриване на дейностите и разбиране на връзките между тях;
- формиране на умения и навици за правилно устно и писмено изразяване;
- формиране на умения и навици за работа с инструменти, използване на литература и други средства.

Известно е, че образованието възпитава предимно чрез съдържание, т.е. чрез фактите и начина на тълкуване. Въпреки това изпълнението на **възпитателната функция** зависи и от това какъв учебен материал се представя пред учениците и от самата организация на работата в часа както с целия клас, така и с всеки ученик индивидуално.

В същината на всяка задача се съдържа една или друга възпитателна функция, а от учителя и авторския колектив на учебника или сборника зависи дали тази функция ще се осъществи и до каква степен. При това изучаваният материал и самият възпитателен процес, което означава и всяка задача, трябва целесъобразно да се използва за:

- подбуждане и развиване на интереса на учениците към математиката;
- възпитаване на отговорно отношение към учебната дейност;
- формиране на навици за непрекъснато и планирано обучение.

Накрая описваме и **развиващите функции** като функции, които развиват творческите способности на учениците, функции, насочени към развитие на мисленето на учениците, към формиране на качества, присъщи на научното мислене, и овладяване на подходи за ефективна умствена дейност. Развиващите функции също се делят на *общи* и *специфични*.

В **общите развиващи функции** на задачите спадат:

- овладяване на методите на научното познание;
- придобиване на компетенции за индуктивни и дедуктивни разсъждения;
- формиране на умения за моделиране, т.е. използване на съществуващи модели или създаване на нови такива за изучаване на свойствата на обектите;
- формиране на умения за класифициране на изучените обекти, за систематизиране на знанията, откриване на причинно-следствените и структурните връзки между обектите на ниво придобитите знания;
- формиране на умения за избор на средства и методи за реализиране на поставена цел в конкретна ситуация;
- формиране на умения за откриване на връзка на изучения материал с практическата дейност на човека;
- овладяване на основните качества, присъщи на научното мислене.

Към **специфичните развиващи функции** на задачите спадат:

- формиране на умения за дедуктивно доказване или отхвърляне на математическите твърдения;

- развитие на уменията за планиране на дейностите, свързани с откриването на решението на дадена задача – изключване на ненужната информация от условието, допълване на условието с информацията, която липсва, избиране на методи и средства за решаването на задачата и проверяване на верността на полученото решение;
- формиране на ясна представа за логическата структура на училищния курс по математика, както и за абстрактния характер на математиката като наука. Това е основната причина за нейната връзка с останалите науки и нейното приложения в техниката, технологиите и въобще в живота;
- формиране на умения за дефиниране на математическите понятия;
- развиване и усъвършенстване на уменията за бързо и точно извършване на различни пресмятания със или без помощта на техника и/или помагала;
- усъвършенстване на уменията да се използва математическата символика.

3. Системи от задачи

3.1. Същност на понятието система

В различните области на знанието в зависимост от обекта и целите на изследването изследователите използват различни описания на понятието **система**. Инвариантното в тези описания е, че **системата** се разглежда като съвкупност (множество) от обекти и връзките между тях, които взети заедно представляват едно цяло. Всеки елемент на системата действа като неразделим неин компонент. Една връзка може да се осъществи между два или повече обекта. Съвкупността от връзките в системата определя нейната структура. Освен структурно, обектите на системата са свързани и функционално. И двата вида връзки подчертават обособяването на подсистеми на различни нива.

От малкото написано за системите дотук ясно се открояват нейните най-важните характеристики, а именно:

- наличие на елементи (компоненти, части), които съставляват системата;
- наличие на структура, която се определя от връзките между елементите;
- наличие на интегративни качества, т.е. такива качества, които дават основание да се разглеждат избраните елементи и отношения между тях като едно цяло;
- наличие на функционални характеристики на системата и нейните компоненти;
- наличие на комуникативните свойства на системата, проявени под формата на вътрешносистемни и междусистемни взаимодействия.

3.2. Същност на понятието дидактическа система от задачи

Разработването на системите от задачи присъства в изследванията на математиците от руската школа по методика на обучението по математика. Такива са работите на В. Далингер (Далингер, 1982), Ю. Колягин (Колягин, 1977), Г. Саранцев (Саранцев, 1982) и други. Под **система от задачи** те имат предвид *набор от обекти, взаимодействието на които "причинява" появата на нови, интегративни качества, които не са присъщи за отделните компоненти на системата*.

В България по темата са работили П. Асенова (Асенова, 1990), Д. Дурева (Дурева, 2001) и К. Гъров (Гъров К. , 2004), (Гъров & Тодорова, 2006), (Гъров К. , 2010). В статията си „Система от задачи в обучението по математика“ П. Асенова и М. Маринов пишат, че **системата от задачи** е *„методически обоснована съвкупност от задачи, която осигурява постигане на планирани резултати в обучението*“.

В руския сайт „Словари и энциклопедии на Академике“ (СИСТЕМА ЗАДАЧ, 2019) (линк към сайта) за понятия и термини откриваме по-обстойно и конкретно за математиката описание на понятието система от задачи. То е предложено от руския учен, доктор на педагогическите науки В. В. Гузеев.

Система от задачи се нарича набор от задачи към група от уроци по определена тема от учебното съдържание, които отговарят на следните изисквания (критерии):

1. **Пълнота** Наличие на задачи за всички изучавани понятия.
2. **Наличие на „ключови задачи“**, т.е. задачи, които са „ключове“ за решаването на други. Това са т. нар. *задачи-компоненти*.
3. **Последователност** Задачите да се подредени в определен ред, като системата започва с въвеждащи задачи и завършва с обобщаващи задачи.
4. **Повишаване на трудността** (сложността на решение на задачата – б.а.) Задачите в системата се подреждат по принципа от просто към сложно.
5. **Целева ориентация** За всяка задача се определя място и цел в системата от задачи.
6. **Достатъчност** Броят на задачите трябва да бъде достатъчен за постигане на целта, като има както задачи за работата в клас, така и за самостоятелната работа у дома.
7. **Психологически комфорт** Да се отчита темперамента, типа мислене и вида памет.

Когато системата от задачи е **дидактическа**, към характеристиките на системата, написани в точка 3.1 от настоящата дипломна работа, трябва да се добавят и такива:

- Системата трябва да бъде цялостна, т.е. тя трябва да съдържа предметно-съдържателни и дидактически връзки;
- Системата трябва да бъде дидактически завършена (да има функционална достатъчност), което означава, че системата трябва да дава възможност за изпълнение на стимулиращите, преподавателските, развиващите,

възпитателните, оценяващите, прогностичните и комуникационните функции на задачите;

- Системата трябва да има предметна и съдържателна завършеност във връзка с изискванията за нивата на усвояване на знанията, изразена в присъствието на задачи с различна степен на сложност.

Интересен прочит на **системата от приложни задачи** откриваме в статията „Система задач как средство реализации прикладной направленности курса алгебры“ (Новикова, 2017). В основата на систематизацията се поставят **математически модели**, които се използват в процеса на решаване на задачите. Този подход позволява:

1. да се определи от коя образователна област е всяка задача;
2. да се установи нивото на нейната сложност;
3. да се определи в коя сфера на жизнената дейност могат да се приложат знанията, получени в процеса на решаване.

В следващите редове разкриваме по-подробно изискванията за системата от приложни задачи.

Едно от изискванията е **валидността на сюжета**. Сюжетът е семантичната обвивка на задачата, в която се показва реалният обект, неговите свойства, демонстрират се връзките на математиката с други науки и области на дейност. Сюжетът на задачата трябва да е достъпен за ученика, за да го разбере. Сюжетът трябва да е съобразен с възрастовите характеристики и умственото развитие на ученика, както и с неговите интереси. Освен това той трябва да бъде модерен. В зависимост от сюжета, който е описан в задачата, се разграничават три типа приложни задачи:

- **Задачи с битово съдържание** Това са задачи, които отразяват процесите от ежедневието или съдържат информация за обичайните домакински дейности.
- **Задачи с професионално съдържание** Сюжетът на такава задача е моделирането на някаква професионална дейност, описание на условията на технологичния процес или изисквания за умения, необходими за извършването на трудова дейност.
- **Задачи с интердисциплинарно съдържание** Решаването на задачи от този тип включва изследването и описанието на процеси и явления от физиката, биологията, химията, екологията и други области на науката,

както и откриване на тяхната връзка помежду им и начините им на взаимодействие.

Друго изискване за системата от приложени задачи е **спазването на дидактическите цели**, тъй като всяка задача, която използва учителят, има своя собствена дидактическа цел. В зависимост от това изискване задачите биват:

- задачи, използвани при въвеждането на нови понятия;
- задачи за затвърдяване на формираните знания;
- задачи за формиране на умения;
- задачи за повторение;
- задачи като средство за контролиране на усвояването на знанията.

Следващото изискване е най-важното. То е **изборът на математически модел**. Тук разграничаваме три типа приложни задачи:

- **Задачи от тип А** Това са задачи, в които математическият модел е посочен явно и ученикът само трябва да го следва.
- **Задачи от тип В** В тези задачи математическият модел не е посочен явно и ученикът трябва да го създаде въз основа на първоначалните данни.
- **Задачи от тип С** При задачите от този тип математическият модел не е определен. За описаната ситуация могат да се изградят няколко математически модела, като ученикът трябва сам да избере кой от тях е най-подходящ за конкретната задача.

Системата от приложните задачи може да се състои от затворени или отворени задачи в зависимост от условията, описани в задачите. Изискването, спрямо което се прави това разделение на задачите в системата, е **пълнотата на данните в задачите**. Затворените задачи се характеризират с ясно и недвусмислено условие, като решението им се прави по конкретен метод. Отворените задачи съдържат допълнителни данни или изобщо не съдържат конкретни данни (те трябва да бъдат установени чрез провеждане на изследвания). Това означава, че те могат да имат няколко решения или да нямат решение. Задачите от отворен тип привличат учениците към изследователски и творчески дейности.

Възприемаме следното описание на понятието система от задачи.

Под **система от задачи** ще разбираме множество от задачи и връзките между тях.

Всяка задача от системата от задачи има отношение към цялата система от задачи, но най-силно е изразена връзката ѝ с предходната и със следващата такава. Тя съдържа основна информация за системата, заради която тя принадлежи към нея. Едновременно с това има специфична информация, с която тя се различава от останалите задачи в системата.

3.3. Създаване на системата от задачи

3.3.1. *Мотивиране на създаването*

В своя труд „Конструирование системы задач по алгебре и началам математического анализа в соответствии с этапами усвоения учащимися знаний“ (Аммосова & Краснова, 2015) Н. А. Аммосова и Г. Г. Краснова въвеждат три нива на усвояване на математическите знания от учениците и начини на действие, като се позовават на теорията на преподаването на В. В. Краевски и И. Я. Лернер (Лернер, 1978). Етапите са следните:

- **Начален (базов)** Той е предназначен за формиране на основите на училищния курс по математика – за въвеждане на ново учебно съдържание, като се разкрива неговата същност; за въвеждане на понятия и разкриване на характеристичните им свойства; за запознаване с нова концепция, основаваща се на изучен материал и проучване на неговите свойства, както и открояване на последователност от стъпки за бъдещо действие в теоретичен и операционален план. Този аспект се отнася до описание на теоретичните и/или психологическите основи на съответната дидактическа технология.
- **Основен (фундаментален)** Този етап е за обобщение на видово-родовата връзка на понятията (тя е двустранна), както и изучаването и систематизирането на техните признаци и свойства. Освен това този етап е предназначен за разбирането на изучавания материал, като се извършват стандартни операции, които осигуряват осъзнатост и трайност на въведените знания, използват се познати методи за решаване на нови задачи и се запознават с нови методи.

- **Творчески** Етапът е предназначен за прилагане на придобитите знанията по математика в живота и в нестандартни ситуации, както и за използване на вътрешнопредметни и междупредметни връзки.

Както знаем, в учебниците по математика се предлага набор от задачи за всяка тема. Тези задачи и подредбата им обаче не винаги съответстват на етапите, споменати по-горе, и на конкретните потребности на ученици. Следователно е необходимо учителят да си създава системи от задачи, които да отговарят на трите нива на усвояване на знанията.

3.3.2. *Етапи на проектирането*

Според П. Асенова (Асенова, 1990) при проектиране на системата от задачи се открояват следните етапи:

- задаване на целта за създаването на системата от задачи;
- определяне на очакваните резултати, които ще формира системата;
- подсигуряване на условията за ползване на системата и постигането на очакваните резултатите;
- осъществяване на подбор на подходящи задачи, като се съблюдават различните принципи;
- осмисляне на методическите похвати за използване на системата от задачи – организация, използвани методи и средства за обучение.

Към гореспоменатите етапи добавяме и още един:

- осъществяване на подбор от задачи, отговарящи на нивата, през които преминава изучаването на математическите знания, описани от Н. А. Аммосова и Г. Г. Краснова (Аммосова & Краснова, 2015).

3.3.3. *Изисквания при създаването на системата от задачи*

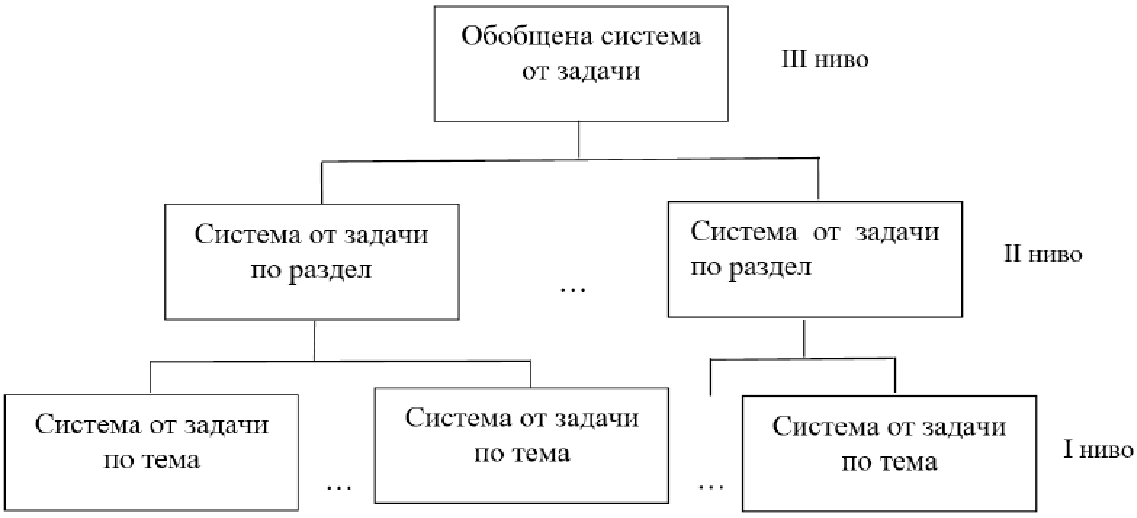
Създаването на система от задачи трябва да се подчинява на определени изисквания. Те са формирани под различни форми от Ю. Колягин (Колягин, 1977), В. Далингер (Далингер, 1982) и П. Асенова (Асенова, 1990). Ето част от тях:

- Системата, която се създава, трябва да е подсистема на система от математически задачи, които се разглеждат в училищния курс по математика (УКМ). Системата от задачи трябва да включва определено учебното съдържание и да не го надхвърля.

- Подреждането на задачите да се осъществи чрез спираловиден подход, т.е. системата да започва с лесни задачи и да завършва с по-сложни по структура на решение такива. При този подход всяка следваща задача „стъпва“ на нещо познато и едновременно с това съдържа нещо ново.
- Системата задължително трябва да съдържа задачи, които изискват умствени усилия, а не само репродуктивни действия. Обикновено това е свързано с откриването на зависимости между величините в задачата и превеждането им на математически език чрез числови изрази, уравнения или неравенства.
- Системата от задачи трябва да дава възможности за стимулиране на творческото мислене на учениците. Това може да се постигне чрез решаването на една задача по два или повече начина. Творческото мислене може да се развива и чрез промяна на дадена задача по такъв начин, че да отговаря на нови условия. Системата трябва да съдържа различни по тип задачи като задачи за допълване, задачи за коригиране на грешки, задачи за откриване на обекти от обема на понятие, построителни задачи и други.
- В системата трябва да се включат задачи с възможности за вариации на отговорите. Подходящи в това отношение са комбинаторните задачи. Съобразно възрастта на учениците може да се изчерпват всички възможности или може да се посочат само няколко примера.
- Системата трябва да съдържа задачи в пряка и косвена форма (прави и обратни задачи).
- Да се предвидят задачи, които се решават чрез инверсия, т.е. такива, в които се изисква обратен ход на мисленето. За тези задачи са необходими логическо мислене, съобразителност и находчивост.
- Системата трябва бъде отворена, за да може да се допълва с нови задачи. Нейното създаване не е еднократен акт. Тя трябва да се усъвършенства непрекъснато според обратната връзка от нейното използване и нивото на учениците, за които е предназначена. Освен това актуализиране на системата се налага и след промяна в учебното съдържание.

3.3.4. *Структура на системата от задачи*

Структура на системата от задачи е представена на *Фигура* 1. Тя е предложена от П. Асенова през 1990 година. Авторът разглежда системите от задачи като тематични, обобщаващи за тематичен раздел и обобщаващи по предмета. Това разделение е естествено за структурата на учебното съдържание по даден предмет.

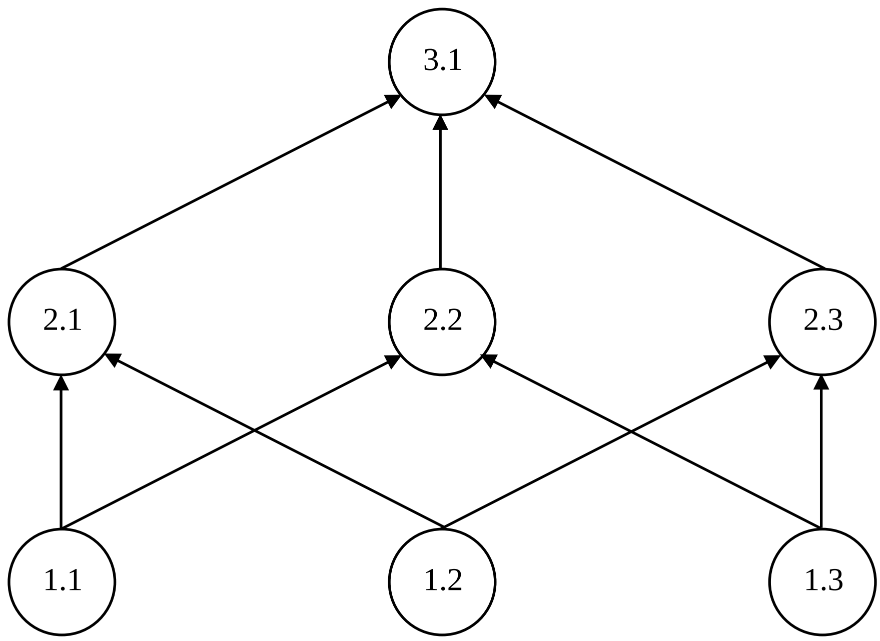


Фигура 1

Използваната терминология в представената схема на *Фигура* 1 не съответства на приетата според държавните документи (стандарти и учебни програми) терминология на настоящия етап.

Подобна, но по-подробна, структура на системите от задачи намираме в автореферата на дисертационния труд на М. Алексеевич „Многоуровневая система задач как средство обучения учащихся средней школы алгебре и началам математического анализа“ (Алексеевич, 2007). Според него при проектиране на система от задачи за определена тема и сравняване на системи от задачи от различни теми подходящото средство за тяхното представяне е визуализация под формата на ориентиран мултиграф. Като се използват степените на върховете на ориентирания граф, лесно може да се определи броя на ключовите задачи на темата. Основните задачи от първо ниво се изобразяват в ориентирания граф като източници. Ако след това изтрием всички източници в ориентирания граф и ребрата, които излизат от тях, тогава върховете-източници в останалия подграф ще интерпретират ключовите задачи от второто ниво. Наборът от задачи, решаването на които директно следва от ключовите задачи от първо ниво, естествено се определя като подсистема от задачи от първо ниво, както и набор от задачи, за решаването на които е необходимо допълнително да се използват резултатите от ключови задачи от второ ниво – чрез подсистема от задачи от второ ниво. Основните задачи и подсистемите на задачите от по-високо ниво са дефинирани по подобен начин.

На *Фигура* 2 е представена примерна структура на система от задачи на три нива, генерирана чрез мултиграф. В мултиграфа задачите-компоненти са изобразени с кръгчета. В кръгчетата са записани номерата на задачите-компоненти, участващи в системата. Номерът на всяка от задачите се състои от две числа, разделени с точка. Първото число показва нивото, на което се намира задачата, а второто – номерът на задачата в съответното ниво.



Фигура 2

Използването на ориентирания мултиграф ни позволява:

- да се визуализира наличието на различни начини за решаване на една и съща задача;
- да се види сложността на решение на задачата;
- да се обособят основните задачи;
- да се групират задачите по нива;
- да се оцени обхвата на системата;
- да се сравняват различни системите от задачи, които са създадени върху едно и също учебно съдържание.

4. Технологии. Дидактически технологии

4.1. Същност на понятието технология

Както разглежданите до този момент понятия, така и понятието **технология** няма еднозначно описание. В гръцко–българския речник откриваме, че то е представено като словосъчетание от думите *τέχνη* (tehno), което означава изкуство, майсторство, умение, и *λόγος* (logos), което означава знание, наука, изучаване. Подобно представяне има и в латинско-българския речник. Там понятието **технология** се разглежда като словосъчетание на думите *techno* (tehno) – мога, и *logus* (logos) – наука. В българския тълковен речник пък са поместени следните два аспекта на понятието: „***Технология*** *се нарича система от последователни процеси, чрез които от суровия материал се получава готов продукт*.“ и „***Технологията*** *представлява съвкупност от средства и начини за по-ефективно и по-качествено извършване на определена дейност*“. Подобно тълкуване на понятието е поместено и в „Технология обучения и ее место в педагогической теории“ (Талызина Н. Ф., 1997).

По-голяма конкретизация на значението на разглежданото понятие е направена в речника на чуждите думи в българския език. Там пише, че **технологичната структура** обхваща следните взаимосвързаните елементи:

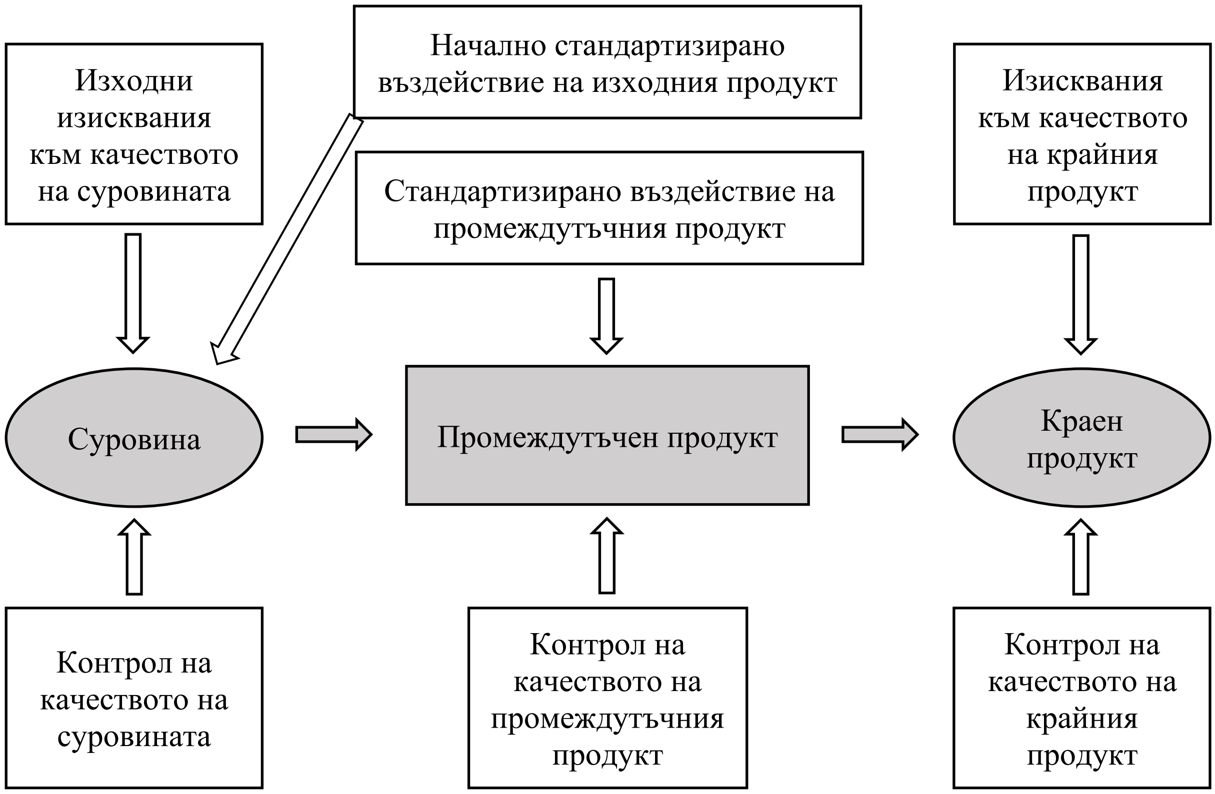
- *процедури* (латински произход от *prosedo*) – официално приет ред от последователни действия при изпълнение на нещо;
- *операции* – отделна завършена част от технологическия процес;
- *стъпки* – конкретни действия, които са минималният структурен елемент на операциите.

Конкретните технологични операции и стъпки образуват процедура, която определя тяхното изпълнение. Процесът на трансформиране на абстрактно-теоретичните положения в тези практически значими и ефективни действия, процедури и операции, се нарича **технологизация**. Той обикновено се характеризира с:

1. наличие на определена цел;
2. структуриране на дейността на етапи и операции за осъществяване на определената цел;
3. наличие на програма, която определя последователността в извършването на операциите;

4. обратна връзка за осъществяване на поетапен мониторинг и корекция при необходимост.

За М. Бершадский (Бершадский, 2002) най-общата схема на този процес може да бъде представена така, както е направено на *Фигура* 3.



Фигура 3

Един от българските учени, които се занимава с понятието технология, е проф. Д. Павлов. В своята книга „Образователни информационни технологии“ (Павлов, 2001) той пише, че „*всяка дейност, насочена към постигане на конкретен резултат в процеса на формиране и развитие на човека, и която има технологичен характер, може да се нарече един или друг вид технология*“. Той допълва още, че **технологията** е система от логически, последователни, паралелни и смесени дейности, които са насочени към постигане на конкретния резултат. Тя се характеризира с качества като резултатност, оптимално качество и ефективност.

Понятието се интерпретира и от J. Galbraith (Galbraith, 1967) като „*системно приложение на науката или всяко друго познание, ориентирано към и организирано от практически задачи*“, т.е. **технологията** се явява свързващо звено между науката и практиката. Това описание се подкрепя от факта, че теорията и практиката се намират в непрекъснат процес на взаимодействие и, че ценността на една научна теория се определя от това доколко тя може да се операционализира и технологизира в съответните човешките потребности.

Според проф. П. Петров и доц. М. Атанасова (Петров & Атанасова, 2001) „*всяка човешка дейност, независимо от какъв вид е тя, има своя технологична страна, т.е. извършва се в една или друга форма, протича по един или друг начин, има свои етапи, провежда се в съответствие с едни или други методи и средства.* […] Т*ехнологията като форма на съзнателна целенасочена дейност на социалния субект означава набор от начини за действие както с човешки, така и с материални инструменти, които се прилагат за сигурно осъществяване на предварително набелязана цел*“.

Разгледаните описания на понятието технология не си противоречат, а по-скоро се допълват едно друго и ако трябва да ги обобщим, то във всяко от тях откриваме идеята, че технологията представлява система от последователни стъпки (процедури, операции), чрез които се постига определена цел.

4.2. Същност на понятието образователна технология

Според група философи основните причини за възникването на **образователните технологии** са *информационната революция* и *ключовите промени в образованието*, които зависят от еволюцията на информационните средства. Тези средства от своя страна съответстват на шестте еволюционни етапа на човечеството:

1. ръчна технология;
2. механична технология;
3. електрическа технология;
4. електронна технология;
5. компютърна технология;
6. мрежова технология.

Понятието **информационна революция** е въведено за първи път от A. Toffler през 1980 година и означава радикална промяна в инструменталната база, начините за създаване, предаване и съхраняване на информацията, достъпна до активната част от населението.

Ключовите промени в образованието, описани от E. Ashby през 1967 година, са:

- отговорността за образованието на младите отчасти е пренасочена от родителите към учителите и от дома към училището;
- приемането на писменото слово като инструмент на образованието;
- изобретяването на печатната преса и книги;
- появата на електрониката и развитието в комуникацията.

Терминът **образователна технология** за първи път е определен като *теория* през 1963 година, като *научна област* – през 1972 година и като *процес* – през 1977 година.

A. Januszewski и K. A. Persichitte (Januszewski & Persichitte, 2008) дефинират термина образователна технология върху основата на развитието и трансформирането на технологиите. Според тях **образователната технология** е изучаването и етичната практика за улесняване на живота и подобряване на работата чрез създаване, използване и управление на подходящи технологични процеси и ресурси.

Според М. Михова (Михова, 2003) **образователната технология** обединява различни технологии – обучаващи, възпитателни, учебни, управленски и други с цел вземане на научнообосновани педагогически решения за подготовката, осъществяването и оценката на процеса на образование на човека. Проф. Д. Павлов също употребява понятието като обобщаващ термин за всички видове технологии в сферата на образователната практика.

Според В. Делибалтова (Чавдарова-Костова, Делибалтова, & Господинов, 2012) терминът **образователна технология** в повечето случаи е чиста заемка от англоезичната литература, без опит да се намери съответният еквивалент в дидактическата систематика, тъй като в англоезичните страни термините „педагогика“ и особено „дидактика“ почти не се използват до 90-те години, а използването на „education“ по-често има смисъл на обучението в неговата цялост, а не само в технологичен аспект (instruction).

Според други учени образователната технология може да се разглежда като синоним на понятието **педагогическа технология**, което е представено в следващата точка от настоящата дипломна работа. Според Г. К. Селевко (Селевко, 1998) основна причина за това са различните позиции при превода на научната литература по тази тематика. Той отбелязва, че двете технологии обхващат едни и същи направления, но образователната технология е с по–широк обхват, отколкото педагогическата технология. В руската научна литература образователните и педагогическите технологии служат за рамка при изграждане на цялостния образователен процес на високо психолого–педагогическо ниво. В българската научна литература терминът на понятието често се заменя с **дидактически технологии**.

От всичко написано дотук за образователната технология можем да направим извод, че нейната основната роля е свързана с повишаване ефективността на образователния процес.

4.3. Същност на понятието педагогическа технология

Най-общо **педагогическата технология** може да бъде разгледана като вид социална технология, която преработва, модифицира, моделира и конструира едни или други теории, принципи, подходи и методи, интегрира знания от различни области на науката и практиката, за да осигури оптимално-ефективно решаване на образователни и възпитателни цели.

В научната литература се използват следните синоними на понятието **педагогическа технология**: *педагогическа техника, технология на обучението, технология на образованието, образователна технология, технология на учебния процес, технология на учебно-възпитателния проц*ес, *дидактическа технология, методическа технология, технология на възпитанието, възпитателна технология, технология за управление на образованието* и други. Едни от авторите предпочитат да говорят само за технологичен подход в обучението, образованието или възпитанието.

Разглеждането на учебно-възпитателния процес в технологичен план води началото си още от Я. А. Коменски (Коменски, 1957). Той изтъква, че е необходимо да се създаде „дидактическа машина“ за ръководство на усвояването и приложението на социалния опит. Той обосновава принципа за нагледност, а след това формулира доста технологически изисквания за рационалното онагледяване. Неговото „златно правило“ в педагогиката по отношение на този принцип гласи: „*Всичко, доколкото е възможно, да се представи на сетивата, а именно: което се вижда – на зрението, което се чува – на слуха, което мирише – на мириса, което се вкусва – на вкуса, което се пипа – на осезанието, а което може да се възприеме едновременно с няколко сетива, то да се поднесе едновременно на няколко*“.

В книгата си „Образователни технологии и стратегии на учене“ проф. П. Петров и доц. М. Атанасова пишат следното за понятието:

Педагогическата технология в сценичен план е съвременна интегративна теоретико-приложна наука, която използва теоретични обобщения и приложни знания от областта на педагогиката и психологията, а също и от други области и науки за постигане на образователно-възпитателни цели. Нейното предназначение е да обедини всички релевантни на педагогическата дейност знания с цел практическата ѝ оптимизация. Важна задача на педагогическата технология е да създава най-благоприятни организационни, методически, технически и други условия за ефективното използване на методите и формите на обучение и възпитание, на дидактическите материали, на техническите средства за обучение.

По-различен начин за описание на понятието **педагогическа технология** е предложен от М. Стефанова (Стефанова, 1999). Тя я определя като „*съвкупност от последователно и динамично редуване на конкретни цели, съдържание, процедури* (*методи*)*, средства* (*техники*)*, организационни форми, контролно-оценъчни механизми и критерии за сравнимост на цели и резултати.*“.

Описания за понятието могат да бъдат намерени и в трудовете на други учени. Безспорно е обаче, че особен интерес представлява опитът на Г. К. Селевко (Селевко, 1998) да систематизира по-важните съвременни гледни точки за **педагогическата технология**:

- Педагогическата технология е съвкупност от психолого-педагогически установки, определящи специалния набор и компоненти от форми, методи, способи, прийоми на обучение и възпитателни средства; тя е организационно-методически инструментариум на педагогическия процес (Б. Т. Лихачов).
- Педагогическата технология е съдържателна техника за реализиране на учебния процес (В. П. Беспалко).
- Педагогическата технология е описание на процеса на постигане на планираните резултати на обучението (И. П. Волков).
- Педагогическата технология е обмислен във всички детайли модел на съвременната педагогическа действителност по проектиране, организиране и провеждане на учебния процес с безусловно осигуряване на комфортни условия за учащите се и за учителя (В. М. Монахов).

- Педагогическата технология е системен подход за създаване, приложение и определяне на целия процес на преподаване и усвояване на знанията с отчитане на техническите и човешките ресурси и тяхното взаимодействие, с цел оптимизиране на формите на образованието (ЮНЕСКО).
- Педагогическата технология означава системна съвкупност и подреденост на функционирането на всички личностни, инструментални и методически средства, използвани за постигането на педагогическите цели (М. В. Кларин).

Авторът (Г. К. Селевко) разглежда педагогическата технология като съдържателно обобщение, синтезиращо всички аспекти на посочените описания. Според него анализът на понятието **педагогическа технология** предполага представянето му в три аспекта:

- **Научен** Педагогическите технологии са част от педагогическата наука, която изучава и разработва целите, съдържанието и методите на обучение и проектиране на педагогическите процеси.
- **Процесуално-описателен** Този аспект се отнася до описанието на процеса (алгоритъма) и представлява съвкупността от целите, съдържанието, методите и средствата за постигане на резултати от обучението.
- **Процесуално-действен** Отнася се до осъществяване на технологическия (педагогическия) процес, функциониране на всички личностни, инструментални и методологически педагогически средства.

На практиката обаче понятието се използва на три равнища:

- **Общопедагогическо** Общопедагогическата (общодидактическата, общовъзпитателната) технология характеризира цялостния образователен процес в даден регион, учебно заведение, на определена степен на обучение. Тук педагогическата технология е система на педагогическата система: в нея се включва съвкупността от цели, съдържание, средства и методи на обучение, алгоритмите на дейността на субектите и обектите на процеса.
- **Частнометодическо (предметно)** Частнопредметната технология се употребява в значението на „частна методика“, т.е. като съвкупност от

методи и средства за реализация на определено съдържание на обучението и възпитанието в рамките на един предмет, клас, учител (методика на преподаване на предметите, методика на компенсиращото обучение, методика на работа на учителя, възпитателя).

- **Локално (модулно)** Локалната технология е технология на отделните части на учебно-възпитателния процес, решение на частни дидактически и възпитателни задачи (технология на отделните видове дейност, формиране на понятия, формиране на отделни личностни качества, технология на урока, усвояване на нови знания, технология на повторението и контрола на учебния материал, технология на самостоятелната работа и други.).

По този начин **педагогическата технология** може да се разглежда и като наука, изследваща най-рационалните пътища за обучение, и като система от способи, принципи и регулативи, прилагани в образованието, и като реален процес на обучение.

В обобщение може да се каже, че в педагогиката съществува реален технологичен процес. Педагогическата дейност има творчески характер, който обуславя спецификата на нейната технология. Педагогическата действителност също спомага за това, тъй като тя е многостранна, сложна и зависи от голям брой фактори. Нейните субекти и „нейните продукти“ са нестандартни, уникални.

Важно е да се направи следното уточнение, че в педагогическата технология условно могат да се разграничат няколко основни направления:

1. технология на обучението (дидактически технологии);
2. технология на възпитанието;
3. технология на педагогическата диагностика;
4. технология на управление на образованието.

Предмет на разглеждане на настоящата дипломна работа са някои конкретни дидактически технологии, с помощта на които могат да се генерират дидактически системи от задачи в училищния курс по математика.

4.4. Структура на педагогическата технология

Технологията е свързана в максимална степен с учебния процес, с дейностите на учителя и на ученика, със средства, с методи и с форми на обучение. На базата на описанията на педагогическата технология от Г. К. Селевко в теоретичен и практичен план от точка 4.3 може да бъде създадена следната структура на педагогическата технология:

- Създаване на концептуална рамка (използване на теория).
- Определяне на съдържанието на обучението, което включва:
  - ✓ <u>цели на обучението</u>, които са:
    - ❖ общи
    - ❖ специфични
  - ✓ <u>съдържание на учебния материали</u>
  - ✓ <u>очаквани резултати</u>.
- Описване на процедурната част (технологичния процес), която включва:
  - ✓ <u>организация на образователния процес</u>
  - ✓ <u>методи и форми на образователна дейност на ученици</u>
  - ✓ <u>методи и форми на работа на учителя</u>:
    - ❖ по управление на процеса за овладяване на материала
    - ❖ за диагностика на учебния процес.

Представената структура на педагогическата технология много наподобява съдържателно системата от педагогически понятия, за които В. Делибалтова пише в книгата си „Педагогика“ (Чавдарова-Костова, Делибалтова, & Господинов, 2012). Представянето на системата от педагогически понятия е направено в *Таблица* 1. В нея са поместени важни въпроси, на които трябва да се даде отговор по отношение на обучението. Към тях трябва да се добави и още един съществен въпрос, а именно: „*За кого е предназначено обучението*?“.

Таблица 1

Понятие	Описание	Въпрос, на който отговаря
цел	Целта на образованието и обучението се свързва с образователния идеал на времето и мястото и се обуславя от влиянието на много фактори – социално-икономически, политически, религиозни, национални и други.	Защо?

съдържание	Съдържанието на образованието и обучението е педагогически модел на социалната поръчка, в която намират израз изискванията на обществото към подготовката и развитието на младото поколение. Следователно то (съдържанието) непрекъснато се изменя под влияние на обществения прогрес и промяната в целите и задачите на образованието и обучението.	Какво?
принципи	Принципите на обучение са система от основни положения, водещи идеи или общи изисквания, които определят цялостната дейност на учителя и учениците в процеса на обучението. Те се отнасят към категорията на нормативните знания, които предписват какво трябва да бъде обучението и по този начин регулират дейността на учителя и учениците.	Какво?
технологии	В педагогическата литература и образователната практика се обособяват четири големи групи на употреба на технологиите: • като алтернатива на понятието „методика“; • в смисъла на „педагогическо изкуство“; • като технология в производствения смисъл, с което се признава възможността за управляване на образователния процес; • като алгоритмично представяне на процеса.	Как?
стратегии	Стратегиите се определят като идеализирани представи за това как обучението би могло (или би трябвало) да се осъществи.	Как?

методи	Методът на обучение е система от дидактически похвати, чрез която се осъществява взаимодействието между преподаване, учене и учебно съдържание, конструирана въз основа на дидактически правила и норми, чрез които се определят последователността и взаимната връзка на тези похвати в рамките на споменатото взаимодействие, насочено към постигане на конкретните цели на обучение. Методите изграждат процесуалната страна на технологиите на обучение.	Как?
средства	Под средства за обучение се разбират всички обекти, които служат като източник на учебна информация и като инструменти за усвояване на съдържанието на учебния материал.	Как?
форми	Формата е начин на организиране на определена система или дейност. Формите на организация на обучението са конкретен израз на организационно-функционалното единство между преподаването (ръководство на учителя) и ученето (дейност на ученика).	Как?
оценяване	Оценяването предполага сравняване, свързано с измерване в широк смисъл. Тъй като всяко оценяване в социалната сфера, вкл. в образованието, съдържа елементи на субективизъм, характеристиките на съвременното образователно оценяване се търсят по отношение на външно зададени стандарти. В българската образователна система оценяването на обучението се разглежда в няколко аспекта:	С какъв резултат?

	• оценяване на продукта; • оценяване на резултатите от обучението; • оценяване на процеса, който води до този резултат; • оценяване на системата; • оценяване на ресурсите на системата; • оценяване на организационно-функционалните отношения между компонентите на системата.	

От *Таблица* 1 ясно проличава взаимосвързаността на технологията с всички останали понятия. Може да направим извод, че когато се използва едно от понятията в системата, то това неминуемо води до използването и определянето на другите понятия в конкретната ситуация.

4.5. Критерии за ефективност на педагогическите технологии

В руския сайт за педагогика[1] (Васильева, н.д.) (линк към сайта) откриваме, че за да бъде ефективна, всяка педагогическа технология трябва да отговаря на някои основни методологически изисквания (критерии за технологичност). Ето част от тях:

- **Концептуалност** Педагогическата технология трябва да се основава на определена научна концепция (теория), без значение дали е философска, психологическа, дидактическа или социално-педагогическа, тъй като тя спомага за постигане на образователните цели.
- **Съвместимост** Всяка педагогическа технология трябва да има всички характеристики на системата: *логиката на процеса, взаимосвързаността на всичките ѝ части, цялостност* (*завършеност*).
- **Контролируемост** Педагогическата технология трябва да предостави (осигури) възможност за планиране и проектиране на учебния процес, за

[1] В сайта са събрани лекции, четени от И. Т. Зайцева - старши преподавател по педагогика в Гомельский государственный университет „Ф. Скорины“.

поетапна диагностика на поставените цели, както и за различни средства и методи за коригиране на резултатите след извършената диагностика.

- **Ефективност** Съвременните педагогически технологии съществуват в конкурентна среда и те трябва да бъдат ефективни по отношение на резултатите и оптимални по отношение на разходите, чрез които се гарантира постигането на определените цели.
- **Възпроизводимост** Това изискване се отнася до възможността за прилагане на педагогическа технология по други учебни предмети или за повторното ѝ използване по същия предмет.
- **Технология и съдържание на образованието** В педагогически план трябва да се постигне идеята за единството между съдържателните и процедурните компоненти на образователната система: цели, съдържание, методи, форми и средства на обучение. Освен това не трябва да се пренебрегва най-основният дидактически инструмент – учебникът, който играе важна роля за определяне на съдържанието на образованието, процедурната част на технологията и за реализиране на тяхното единство. През последните години се създадоха голям брой учебници, което в комбинация с разнообразието от избор на педагогически технологии дава възможност за по-нататъшно подобряване на качеството на образованието.
- **Технологии и изработка** Една и съща технология може да бъде разработена от различни хора, които да спазят определени инструкции или да подходят творчески към този процес. В това изпълнение неизбежно всеки автор оставя своя почерк (отпечатък) върху конкретната технология и нейната специфика. Разбира се, това ще доведе до различни резултати след изпълнението на технологията, но те трябва да бъдат близки до някаква средна стойност, характерна за тази технология.
- **Източници и компоненти на нови педагогически технологии** Всяка съвременна педагогическа технология синтезира постиженията на педагогическата наука и практика. Тя е и комбинация на елементи от минали технологии и нови творчески идеи. Последното изискване се отнася точно до това технологията да има възможност да се превърне в

източник на нова такава. Източниците и съставните елементи на бъдещите технологии могат да бъдат:

- ✓ социалните трансформации и новото педагогическо мислене;
- ✓ науката – педагогическите, психологическите, социалните науки;
- ✓ преподавателският опит;
- ✓ опитът от миналото (както собственият, така и чуждият);
- ✓ народна педагогика (етнопедагогика).

4.6. Видове технологии в образованието

В съвременната педагогическа литература съществуват редица опити за класификация на училищните педагогически технологии. Те отразяват различните схващания и подходи на учените по проблемите на технологизация на учебно-възпитателния процес в училище. Според проф. П. Петров и доц. М. Атанасова (Петров & Атанасова, 2001), както и според В. Делибалтова (Чавдарова-Костова, Делибалтова, & Господинов, 2012) в последните години най-широко разпространение и признание е получила класификацията на Г. К. Селевко (Селевко, 1998) . Авторът на класификацията посочва, че съществуват много варианти за провеждане на учебно-възпитателни процес както в теоретичен, така и в практико-приложен план. По същностните и инструментално значимите свойства той обосновава следните класове педагогически технологии:

1. според **степента на използване**:
    - общопедагогически
    - частнометодически (предметни)
    - локални (модулни)
2. според **философската основа**:
    - материалистически и идеалистически
    - диалектически и метафизически
    - научни (сциентистки) и религиозни
    - хуманистични и антихуманни
    - антропософски и теософски
    - прагматични и екзистенциалистки
    - на свободно възпитание и на принуда

- природосъобразни и други разновидности

3. според **основния фактор** на психично развитие:
    - биологични
    - социологизаторски
    - психологични
    - идеалистични
4. според **научната концепцията** за усвояване на опита:
    - асоциативно-релекторни
    - бихевиористични
    - гещалтпсихологически
    - интериоризаторски
    - развиващи
    - невролингвистични
    - сугестивни
5. според **ориентацията на личностните структури**:
    - информационни технологии – ЗУН[2]
    - операционни – СУД[3]
    - емоционално художествени и емоционално-нравствени – СЕН[4]
    - технологии на саморазвитието – СУМ[5]
    - евристични (развитие на творческите способности)
    - приложни – СДП[6]
6. според **характера на съдържанието и структурата**:
    - обучаващи и възпитаващи
    - светски и религиозни
    - общообразователни и професионално-ориентирани
    - хуманитарни и технократски
    - отраслови и частнопредметни

[2] ЗУН – знания, умения, навици
[3] СУД – способи за умствени дейности
[4] СЕН – сфера на естетическите и нравствените качества на личността
[5] СУМ – самоуправляващи механизми на личността
[6] СДП – действено-практическа сфера

- монотехнологии, комплексни и проникващи (превръщащи се в катализатор за други технологии)

7. според **типа на организационните форми**:
    - класно-урочни и алтернативни
    - академични и по клубове
    - индивидуални и групови
    - колективно обучение и диференцирано обучение
8. според **типа на управление на познавателната дейност**:
    - класическо лекционно обучение
    - обучение с помощта на аудиовизуални технически средства
    - системата „консултант“
    - обучение чрез книгата
    - система „малки групи“
    - компютърно обучение
    - системата „репетитор“
    - програмно (адаптивно) обучение
9. според **подхода към детето**:
    - авторитарни
    - дидактоцентрични
    - личностно-ориентирани
    - хуманно-личностни
    - технологии на сътрудничеството
    - свободно възпитание
    - екзотерични
10. според **доминиращия метод**:
    - репродуктивни
    - обяснимо-илюстративни
    - развиващо обучение
    - проблемно обучение
    - програмирано обучение
    - саморазвиващо обучение
    - диалогични

- комуникативни
- игрови
- компютърни (информационни)

11. според **модернизациите на съществуващата традиционна система на обучение**:
    - технологии на основата на хуманизацията и демократизацията на педагогическите отношения
    - технологии на основата на активизацията и интензификацията на дейността на учащите се
    - технологии на основата на ефективната организация и управление на процеса на обучение
    - технологии на основата на методическото усъвършенстване и дидактическото реконструиране на учебния материал
    - природосъобразни, използващи методите на народната педагогика;
    - алтернативни
    - цялостни технологии на авторски училища
12. според **категорията на обучаваните**:
    - масова (традиционна)
    - технологии на повишеното (по-задълбоченото) равнище
    - технологии на компенсиращото обучение
    - различните виктомологични технологии
    - технологии за работа с изоставащи ученици
    - технологии за работа с изявени (надарени) ученици

4.7. Основни задачи на педагогическата технология

Основните задачи на педагогическата технологии са описателно разгърнати в „Проблемы эффективности в технологии обучения" на К. Денек и Я. Гнитецки (Денек & Гнитецки, 1983). Според тях основните задачи, които трябва да решава съвременната технология на обучение, са:

1. Да се изучи влиянието на отделните моделни решения в областта на технологията на обучението върху резултатите от обучението.

2. Да се използват възможностите, съдържащи се в съвременните технически средства, за процеса и за резултатите от ученето.
3. Да се усъвършенства системата за овладяване на новите знания чрез техния анализ и структуриране.
4. Да се формират у учащите се съответните структури на мислене и дейност при използване на проблемно обучение, програмирано обучение, технически средства и изчислителна техника.
5. Да се съблюдават изискванията на системния подход при оценка на годността на техническите средства и пакети от дидактически материали в процеса на обучението.
6. Да се внедряват нови методически решения в областта на ученето и усвояването при практическото проектиране на учебно-възпитателните ситуации.
7. Да се определи правилна от методическа гледна точка дейност на преподавателя с цел да се изработят у учащия се мотивация и заинтересованост от успешната работа.
8. Да се определят най-ефективни начини за организация и структуриране на знанията с цел да се усъвършенства процесът на тяхното овладяване.
9. Да се анализират изучаваните предмети, техните взаимни връзки с цел да се разкрият методическите и методологическите основи на съдържанието на обучението.
10. Да се съблюдават научните принципи, отговарящи на стратегията на обучението.
11. Да се осъществява проверка на получените в хода на обучението резултати чрез системен анализ на ефективността на отделните варианти на съвременната технология на обучение.
12. Да се усъвършенства системата за получаване на информация за процеса на обучението и за резултатите от него.
13. Да се повишава качеството на обучението и на възпитанието за сметка на усъвършенстване на дидактическите оценки.
14. Да се определят оптималните средства за въздействие върху личността.

15. Да се използват принципите на другите науки, постиженията на които могат да оказват влияние върху развитието на съвременната технология на обучение.
16. Да се разработят методи за подбор на съдържанието на обучението, осигуряващи съвременно изменение на учебните планове и програми.
17. Да се използва такива система за планиране и управление на процеса на обучение, която позволява да се намали натовареността на преподавателите и на учащите се.
18. Да се конструират дидактически устройства и да се разработи методика на тяхното използване в съответствие с принципите на дидактическото програмиране с цел да се повиши ефективността на обучението.
19. Да се ускорят темповете на еволюция на системата на обучение в съответствие с възможностите на съвременната технология на обучение.
20. Да се работи за пропагандиране на постиженията на съвременната технология на обучение и свързаните с нея науки за целите на тяхното използване.

Можем да обобщим, че основните задачи на педагогическата технология са насочени към постигане на по-висока ефективност на учебно-възпитателния процес и на гарантиране на оптимални резултати от обучението и от възпитанието.

5. Частнопредметни технологии

Според класификацията на Г. К. Селевко частнопредметните технологии са един от видовете педагогически технологии, получени според критерия **характер на съдържанието и структурата**. Тяхната цялост се определя от научното съдържание на учебния предмет, както и от изпълнението на технологичните критерии за ефективност в учебния процес, споменати в 4.5. Частнопредметните технологии могат да бъдат както независими, така и част от други такива, с които имат обща теоретична основа.

В тази глава от дипломната работа ще разгледаме две частнопредметни технологии.

5.1. Технология за въвеждане на геометрични понятия в 7. и 8. клас и усвояване на определенията им

5.1.1. *Същност на технологията*

По-надолу представяме теоретичните основи на разглежданата технология. Същността и компонентите на технологията са описани в дисертацията на доц. д-р Ю. Нинова „Модели и дидактически технологии за решаване на дидактически задачи, свързани с изучаване на математическите понятия“ (Нинова, 2004).

Тази технология се реализира на базата на формите на проявление на една дейност, а те са:

- материална;
- перцептивна;
- външно-речева;
- умствена.

Според Н. Ф. Талызина до умствената форма на проявление на една дейност се достига след преминаване на предходните три, т.е. трябва да са на лице всички форми, за да бъде успешна дадена дейност.

Като материална опора в случая се използва чертежът. Той улеснява изучаването на понятието, защото представлява „геометричен запис“ на неговото определение.

Учениците възприемат характеристичните свойствата от определението на понятието чрез слушане и гледане, т.е. участват две перцептивни системи. Разкриването на логическите връзки между тези свойства става най-добре чрез последователно им натрупване (като анимация).

Външно-речевата форма на проявление на дейността се изразява в устното изказване на определението на понятието. Това е последвано от записването му в тетрадките на учениците. Първичното запомняне и неговото словесно възпроизвеждане се очаква да са максимално точни.

След формулирането на определението на понятието се пристъпва към упражнения за неговото усвояване, като това най-често се случва със задачи-готов чертеж. Задачите за тези упражнения се генерират по моделите $x_0 \in V \Leftrightarrow P(x_0)$ и $x_0 \notin V \Leftrightarrow \overline{P(x_0)}$. (Тук с V е означен обемът на понятието, а с $P(x)$ са означени характеристичните свойства от определението на понятието, без явно да е посочена логическата им връзка.).

5.1.2. *Компоненти на технологията*

1. Уточняване на елементите знание, необходими за въвеждане на новото понятие.
2. Изграждане на правилен образ (еталон) за обекта или за елементите на n-орката върху материалната опора (чертежа) чрез активно използване на зрителната и слуховата перцептивна система.
3. Уточняване на характеристичните свойства от определението на понятието.
4. Разкриване на логическите връзки между свойствата.
5. Изказване устно на определението на понятието.
6. Записване на определението на понятието в тетрадките.
7. Генериране на примери и контрапримери за усвояване на определението, т.е. решаване на задачи за кодиране и декодиране.
8. Извършване на разсъждения по схемите $\dfrac{p \leftrightarrow q,\, p}{q}$ и $\dfrac{p \leftrightarrow q,\, \overline{q}}{\overline{p}}$. (В тези правила за извод предпоставката $p \leftrightarrow q$ е модел на определение и по уговорка приемаме да означим с p определяемата част на определението, а с q – определящата му част.)

5.2. Технология за генериране на ирационални уравнения с един радикал с целочислени коефициенти и целочислени корени

5.2.1. *Същност на технологията*

По-надолу представяме теоретичните основи на разглежданата технология. Те се опират на резултатите на П. В. Семенов, описани в статията му „Как составлять уравнения $\sqrt{ax+b}=cx+d$ “ в списанието „Математика в школе“ (Семенов, 2000).

Нека е дадено ирационалното уравнение

$$\sqrt{ax+b}=cx+d\,,\ a\neq 0,\ c\neq 0.\ (1)$$

След като повдигнем двете страни на уравнение (1) на втора степен, получаваме уравнението

$$ax+b=c^2x^2+2cdx+d^2.$$

След еквивалентни преобразования достигаме до квадратното уравнение

$$c^2x^2+(2cd-a)x+d^2-b=0.\ (2)$$

Всяко решение на уравнение (1) е решение на уравнение (2), но обратното твърдение не е вярно. Ако обаче уравнение (2) няма решение, то и уравнение (1) няма решение. Не е трудно да се изчисли дискриминантата на уравнение (2) и да се определи на какво условие трябва да отговарят коефициентите a, b, c, d, за да бъде тя отрицателна. Това условие се формулира чрез следната теорема.

Теорема 1. Квадратното уравнение (2), до което се свежда уравнение (1), няма решение тогава и само тогава, когато $b<\dfrac{ad}{c}-\left(\dfrac{a}{2c}\right)^2$.

Доказателство. Дискриминантата на уравнение (2) е

$$D=(2cd-a)^2-4c^2\left(d^2-b\right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$D=\cancel{4c^2d^2}-4cda+a^2-\cancel{4c^2d^2}+4c^2b \quad \Leftrightarrow$$

$$D=-4cda+a^2+4c^2b.$$

За да няма решение уравнение (2), дискриминантата му трябва да е отрицателна. Следователно

$$-4cda + a^2 + 4c^2b < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4c^2b < 4cda - a^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$b < \frac{ad}{c} - \left(\frac{a}{2c}\right)^2. \qquad \blacksquare$$

Ясно е, че при тези ограничения на a, b, c и d уравнение (1) също няма решение. На практика можем да изберем произволни цели числа за коефициентите a, c и d, а след това да подберем някое цяло число за коефициента b, което удовлетворява неравенството от **Теорема 1**. При така зададените цели стойности на a, b, c и d можем да генерираме уравнения от вида $\sqrt{ax+b} = cx + d$, които нямат решение.

По-интересен е случаят, когато дискриминантата на уравнение (2) е неотрицателно число. Оказва се, че е възможно за всеки цели c и d да се подберат такива цели числа за коефициентите a и b, че корените на квадратното уравнение (2) да са предварително зададени цели числа. Тези условия се формулират чрез следната теорема.

Теорема 2. За всеки четири цели числа c, d, x_1 и x_2 определяме целите числа a и b по следните формули: $a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$ и $b = d^2 - c^2x_1x_2$. Тогава:

а) решенията на уравнение (1) са от множеството $\{x_1; x_2\}$;

б) числата x_1 и x_2 са от дефиниционното множество на уравнение (1);

в) числото x_i $(i = 1; 2)$ е решение на уравнение (1), ако числото $cx_i + d$ е неотрицателно.

Доказателство. Достатъчно условие уравнение (1) да има реални корени е дискриминантата на уравнение (2) да бъде неотрицателно число. Сега заместваме коефициентите a и b във формулата за дискриминантата и получаваме

$$D = (2cd - a)^2 - 4c^2(d^2 - b) \quad \Leftrightarrow$$

$$D=\left[2cd-\left(2cd+c^2\left(x_1+x_2\right)\right)\right]^2-4c^2\left(d^2-\left(d^2-c^2x_1x_2\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$D=\left[\cancel{2cd}-\cancel{2cd}-c^2\left(x_1+x_2\right)\right]^2-4c^2\left(\cancel{d^2}-\cancel{d^2}+c^2x_1x_2\right)\Leftrightarrow$$

$$D=\left[-c^2\left(x_1+x_2\right)\right]^2-4c^4x_1x_2\Leftrightarrow$$

$$D=c^4\left(x_1+x_2\right)^2-4c^4x_1x_2\Leftrightarrow$$

$$D=c^4\left(\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right)\Leftrightarrow$$

$$D=c^4\left(x_1^{\ 2}+2x_1x_2+x_2^{\ 2}-4x_1x_2\right)\Leftrightarrow$$

$$D=c^4\left(x_1^{\ 2}-2x_1x_2+x_2^{\ 2}\right)\Leftrightarrow$$

$$D=c^4\left(x_1-x_2\right)^2.$$

Следователно $D\geq 0$.

Сега ще покажем, че решенията на уравнение (1) са от множеството $\{x_1;x_2\}$. Отново използваме формулите за a и b, но този път ги заместваме в уравнение (2) и получаваме

$$c^2x^2+\left(2cd-a\right)x+d^2-b=0\Leftrightarrow$$

$$c^2x^2+\left[2cd-\left(2cd+c^2\left(x_1+x_2\right)\right)\right]x+d^2-\left(d^2-c^2x_1x_2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$c^2x^2+\left[\cancel{2cd}-\cancel{2cd}-c^2\left(x_1+x_2\right)\right]x+\cancel{d^2}-\cancel{d^2}+c^2x_1x_2=0\Leftrightarrow$$

$$c^2x^2-c^2\left(x_1+x_2\right)x+c^2x_1x_2=0\ \ /:c^2\neq 0\Leftrightarrow$$

$$x^2-\left(x_1+x_2\right)x+x_1x_2=0\Leftrightarrow$$

$$x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=0\Leftrightarrow$$

$$x\left(x-x_1\right)-x_2\left(x-x_1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=0\Leftrightarrow$$

$x=x_1$ или $x=x_2$.

С това а) е доказана.

Числата x_1 и x_2 са от дефиниционното множество на (1), ако изразът $M = ax_i + b$ е неотрицателен.

$$M = ax_i + b \quad \Leftrightarrow$$

$$M = \left(2cd + c^2\left(x_1 + x_2\right)\right)x_i + d^2 - c^2x_1x_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$M = 2cdx_i + c^2x_1x_i + c^2x_2x_i + d^2 - c^2x_1x_2$$

Нека $i = 1$. Тогава получаваме

$$M = 2cdx_1 + c^2x_1x_1 + \cancel{c^2x_2x_1} + d^2 - \cancel{c^2x_2x_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$M = c^2x_1^2 + 2cx_1d + d^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$M = \left(cx_1 + d\right)^2.$$

Следователно $M \geq 0$. Когато $i = 2$, разсъжденията за израза M са същите. С това б) е доказана.

Числата x_1 и x_2 са решения на (1), ако $cx_i + d$ $\left(i = 1; 2\right)$ е неотрицателно число. Проверката на условие в) може да се направи предварително. ■

С помощта на тази теорема може да се съставят уравнения от вида (1), за които уравнение (2) има два предварително определени корена и освен това уравнение (1) има съответно същите две решения, точно едно от двете решения или изобщо да няма решение.

<u>*Забележка*</u>: Ако коефициентът b се замени с d^2 или с $-d^2$, то разглежданото уравнението добива вида $\sqrt{ax + d^2} = cx + d$ или $\sqrt{ax - d^2} = cx + d$. Това са два случая, при които един от предварително избраните корени е 0. Освен това за първото уравнение числото 0 е решение, а за второто – не е решение.

5.2.2. *Компоненти на технологията*

1. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е пълно квадратно уравнение, да има два реални корена и те да са корени на уравнението (1).

2. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е пълно квадратно уравнение, да има два реални корена и точно един от тях да е корен на уравнението (1).
3. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е пълно квадратно уравнение, да има два реални корена и нито един от тях да е корен на уравнението (1).
4. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е пълно квадратно уравнение, да има двукратен реален корен и той да е корен и на уравнението (1).
5. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е пълно квадратно уравнение, да има двукратен реален корен и той да не е корен на уравнението (1).
6. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е пълно квадратно уравнение и да няма реални корени.
7. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2+qx=0$ $(p\in\mathbb{Z};\ q\in\mathbb{Z})$, да има два реални корена и те да са корени на уравнението (1).
8. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2+qx=0$ $(p\in\mathbb{Z};\ q\in\mathbb{Z})$, да има два реални корена и точно един от тях да е корен на уравнението (1).
9. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2+qx=0$ $(p\in\mathbb{Z};\ q\in\mathbb{Z})$, да има два реални корена и нито един от тях да е корен на уравнението (1).
10. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2+r=0$ $(p\in\mathbb{Z};\ r\in\mathbb{Z})$, да има два реални корена и те да са корени на уравнението (1).

11. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2 + r = 0$ $(p \in \mathbb{Z};\ r \in \mathbb{Z})$, да има два реални корена и точно един от тях да е корен на уравнението (1).
12. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2 + r = 0$ $(p \in \mathbb{Z};\ r \in \mathbb{Z})$, да има два реални корена и нито един от тях да е корен на уравнението (1).
13. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2 + r = 0$ $(p \in \mathbb{Z};\ r \in \mathbb{Z})$ и да няма реални корени.
14. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2 = 0$ $(p \in \mathbb{Z})$, да има двукратен реален корен и той да е корен и на уравнението (1).
15. Избираме целите числа c, d, x_1 и x_2 така, че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2 = 0$ $(p \in \mathbb{Z})$, да има двукратен реален корен и той да не корен на уравнението (1).

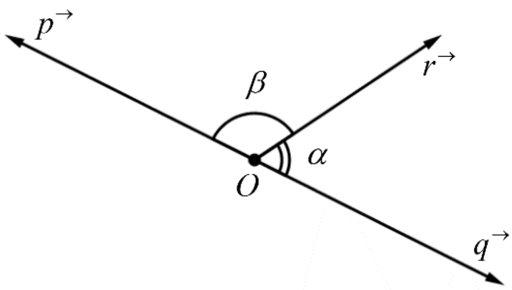
6. Дидактически системи от задачи

В тази глава от дипломната работа са поместени три дидактически системи от задачи. Те са генерирани за учениците чрез двете частнопредметните технологии, които са разгледани в предходната глава. Системите от задачи в 6.1 и 6.2 са съставени на базата на технологията, описана в 5.1, а системата от задачи в 6.3 е създадена на базата на технологията, описана в 5.2.

6.1. Дидактическа система от задачи за въвеждане на понятието съседни ъгли и усвояване на определението му

За въвеждане на понятието **съседни ъгли** може да се използва електронният ресурс.

Определение: Два ъгъла се наричат **съседни**, ако имат общо рамо, а другите им рамене са противоположни лъчи.



Коментар към чертежа:

1. $Or^{\to}$ е общото рамо на ъглите α и β.
2. $Op^{\to}$ и $Oq^{\to}$ са противоположни лъчи. Те са другите рамене на α и β.
3. Ъглите α и β се наричат **съседни ъгли**.

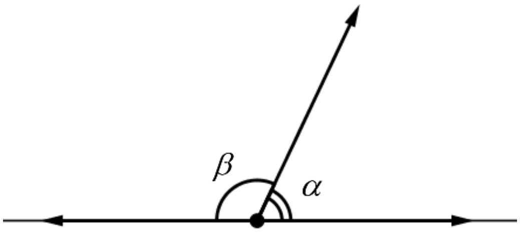
Задача 1. Попълнете пропуснатото в текста така, че полученото да е вярно.

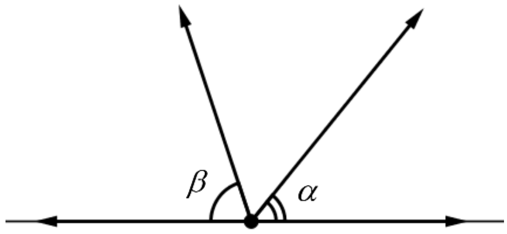
а) Два ъгъла, които имат общо рамо, а другите им рамене са противоположни лъчи, се наричат ……………… ъгли.

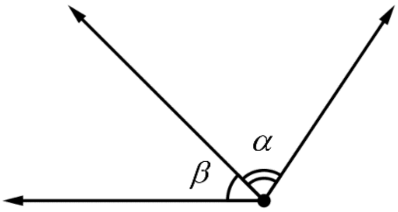
б) Два ъгъла, които имат общо рамо, а другите им рамене са ……………… лъчи, се наричат съседни ъгли.

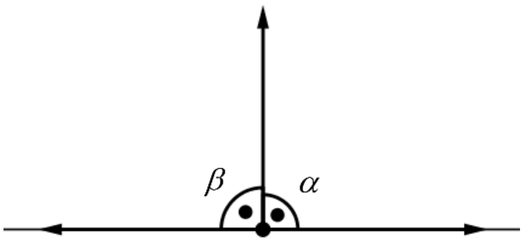
в) Два ъгъла, които имат общо ……………… , а другите им рамене са противоположни лъчи, се наричат съседни ъгли.

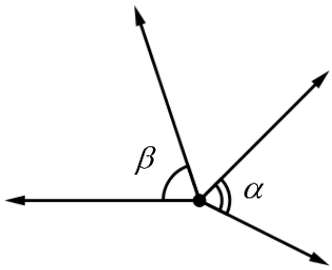
<u>*Задача* 2.</u> На кои от чертежите са изобразени двойка съседни ъгли и кои са те?

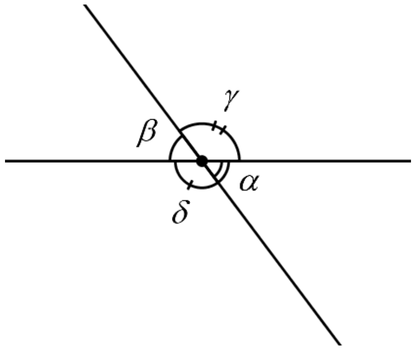


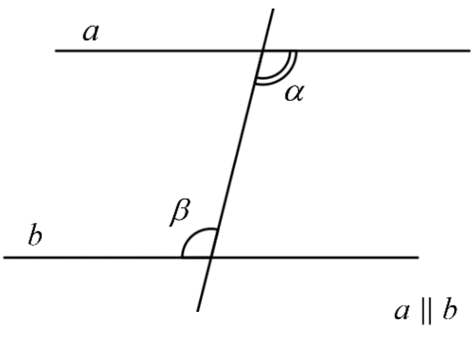


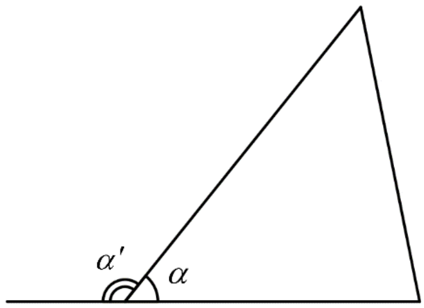




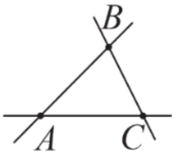




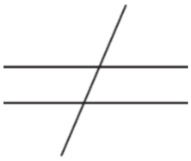




<u>*Задача* 3.</u> На кой от чертежите **НЕ** може да се посочат двойки съседни ъгли? [7]

А) 

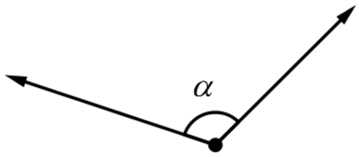
Б) 

В) 

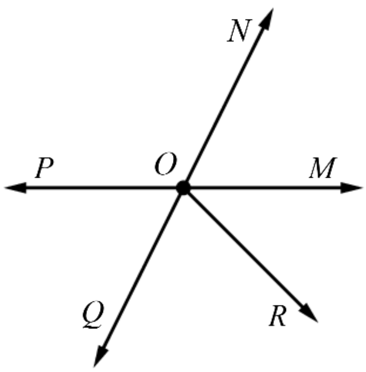
Г) 

<u>*Задача* 4.</u> а) По чертежа постройте един съседен ъгъл на дадения ъгъл α .

б) Колко на брой са всичките съседни ъгли на ъгъла α ?



<u>*Задача* 5.</u> На чертежа $\sphericalangle POM$ и $\sphericalangle NOQ$ са изправени. Попълнете пропуснатото в текста така, че полученото да е вярно.



[7] Задачата е от учебника по математика за 7. клас на издателство „Просвета плюс“ с автори Юлия Нинова, Снежинка Матакиева и др., стр.130

а) Лъчът ……………… е общо рамо за съседните ъгли $\sphericalangle NOM$ и $\sphericalangle PON$.

б) Противоположните лъчите ……………… и ……………… са рамене на съседните ъгли $\sphericalangle POQ$ и $\sphericalangle NOP$.

в) На чертежа $\sphericalangle MOR$ е съседен ъгъл за $\sphericalangle$ ……………… .

г) На чертежа $\sphericalangle POQ$ е съседен ъгъл за $\sphericalangle$ ……………… и за $\sphericalangle$ ……………… .

д) Лъчът $OM^{\rightarrow}$ е общо рамо за съседните ъгли $\sphericalangle$ …………… и $\sphericalangle$ …………… .

е) Лъчът $OR^{\rightarrow}$ е общо рамо за двойките съседни ъгли:

- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… ;
- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… .

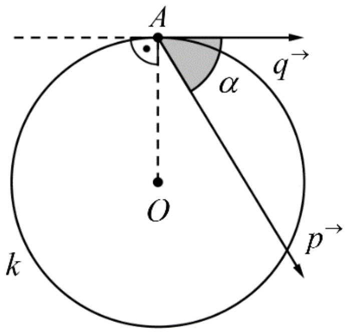
ж) Противоположните лъчите $OQ^{\rightarrow}$ и $ON^{\rightarrow}$ са рамене на двойките съседните ъгли:

- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… ;
- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… ;
- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… .

6.2. Дидактическа система от задачи за въвеждане на понятието периферен ъгъл и усвояване на определението му

За въвеждане на понятието периферен ъгъл може да се използва електронният ресурс.

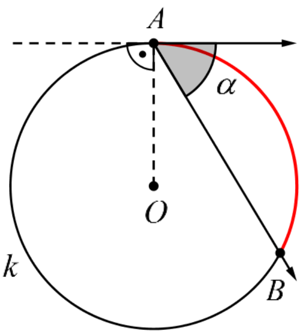
Определение: **Периферен ъгъл** се нарича ъгъл, чийто връх лежи на окръжност, едното му рамо е секуща за тази окръжност, а другото му рамо е допирателна за тази окръжност.



Коментар към чертежа:

1. Точката A е от окръжността k; $A \in k$.
2. Лъчът $Ap^{\rightarrow}$ е секуща за k. Той е едното рамо на ъгъла α.
3. Лъчът $Aq^{\rightarrow}$ е допирателна за k. Той е другото рамо на ъгъла α.
4. Ъгълът $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle p^{\rightarrow}Aq^{\rightarrow}$ се нарича **периферен ъгъл** за k.

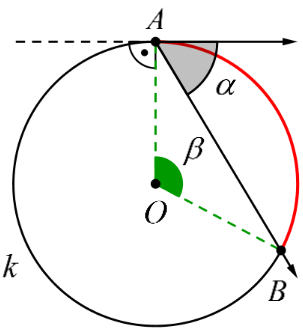
Определение: Дъгата от окръжността, вътрешна за един периферен ъгъл, се нарича **съответна (принадлежаща) дъга** на периферния ъгъл.



Коментар към чертежа:

1. Ъгълът α е периферен ъгъл за окръжността k.
2. Оцветената дъга $\overset{\frown}{AB}$ от k се намира във вътрешността на ъгъла α.
3. Дъгата $\overset{\frown}{AB}$, оцветена в червено, се нарича **съответна дъга** на ъгъла α.

Определение: **Съответен централен ъгъл** на периферен ъгъл се нарича този централен ъгъл, който се измерва със съответната дъга на периферия ъгъл.

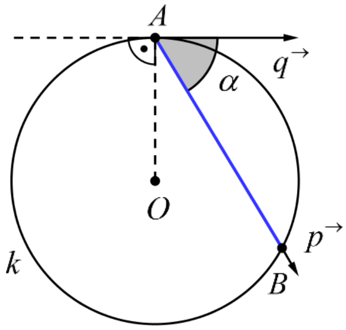


Коментар към чертежа:

1. Ъгълът α е периферен ъгъл за окръжността k.
2. Оцветената дъга $\overset{\frown}{AB}$ от k е съответната дъга на ъгъла α.
3. Централният ъгъл β се измерва с дъгата $\overset{\frown}{AB}$, оцветена в червено.

4. Ъгълът β, оцветен в зелено, се нарича **съответен централен ъгъл** на ъгъла α.

Определение: **Съответна хорда** на периферен ъгъл се нарича тази хорда от окръжността, чиито краища са върхът на ъгъла и пресечната точка на окръжността с едното му рамо.



Коментар към чертежа:

1. Ъгълът α е периферен ъгъл за окръжността k.
2. Точката A е върхът на ъгъла α.
3. Лъчът $Ap^{\rightarrow}$ е едно от раменете на ъгъла α.
4. Точката B е пресечната точка на k с $Ap^{\rightarrow}$.
5. Отсечката AB, оцветена в синьо, се нарича **съответна хорда** на ъгъла α.

<u>*Задача* 1.</u> Попълнете пропуснатото в текста така, че полученото да е вярно.

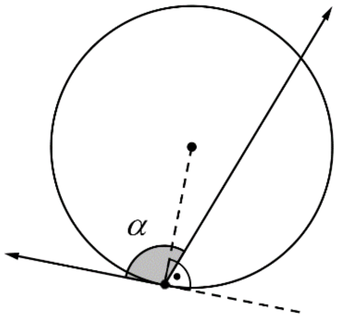
а) Ъгъл, чийто връх лежи на окръжност, едното му рамо е секуща за тази окръжност, а другото му рамо е допирателна за тази окръжност, се нарича ……………… за тази окръжност.

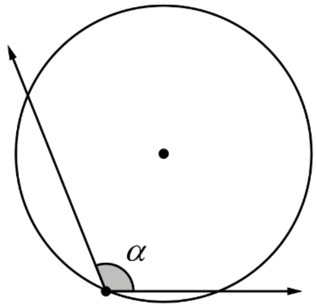
б) Периферен ъгъл за окръжност се нарича ъгъл, чийто връх лежи на окръжността, едното му рамо е секуща за тази окръжността, а другото му рамо е ……………… за окръжността.

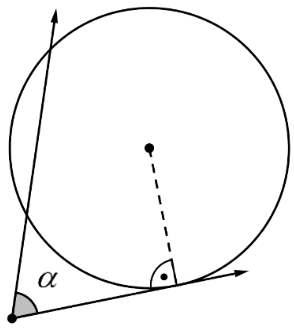
в) Периферен ъгъл за окръжност се нарича ъгъл, чийто връх лежи на окръжността, едното му рамо е допирателна за тази окръжността, а другото му рамо е ……………… за окръжността.

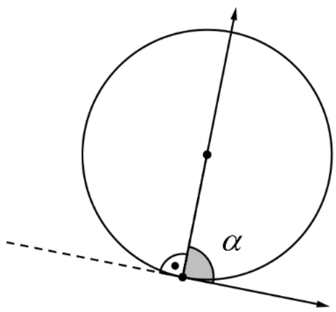
г) Периферен ъгъл за окръжност се нарича ъгъл, едното рамо на което е секуща за тази окръжност, другото му рамо е допирателна за окръжността, а върхът му ……………… на окръжността.

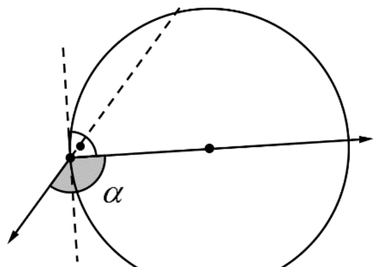
<u>*Задача* 2.</u> На кои от чертежите ъгълът α е периферен за окръжността?

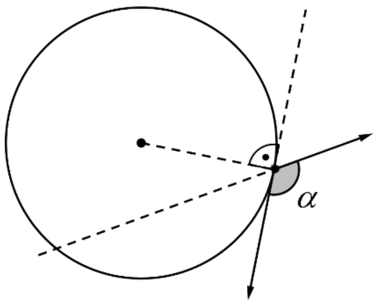


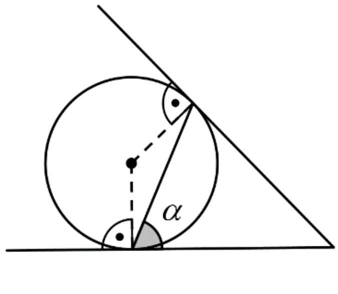


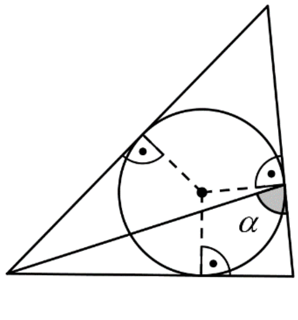






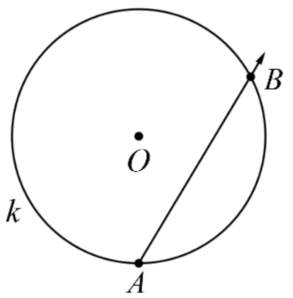






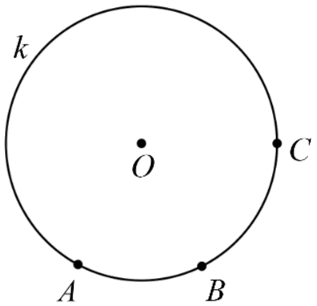
<u>*Задача* 3.</u> а) По чертежа постройте един периферен ъгъл за k, като едно от раменете му е лъчът $AB^{\rightarrow}$.

б) Колко на брой са всичките периферни ъгли за k, които могат да се построят според а) ?

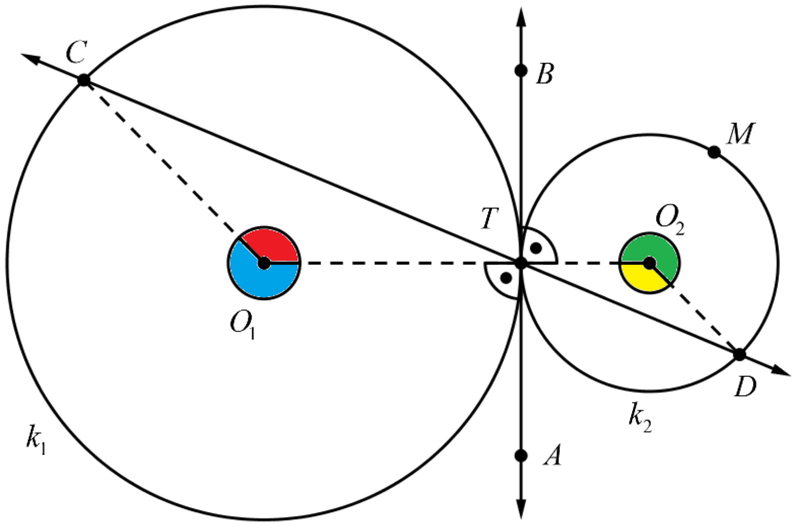


<u>*Задача* 4.</u> а) По чертежа постройте един периферен ъгъл за k, чиято принадлежаща дъга е $\widehat{ABC}$.

б) Колко на брой са всичките периферни ъгли за k, които могат да се построят според а)?



<u>*Задача* 5.</u> Като използвате информацията от чертежа, попълнете пропуснатото така, че полученото да е вярно.



а) На чертежа $\measuredangle ATC$ е периферен ъгъл за окръжността ……………… .

б) Ъглите $\measuredangle$……………… и $\measuredangle$……………… са периферни ъгли за окръжността k_2.

в) На чертежа $\measuredangle BTC$ е периферен ъгъл за окръжността ……………… , а неговият противоположен ъгъл е периферен ъгъл за окръжността ……………… .

г) Рамото ……………… на периферния $\measuredangle ATD$ за окръжността k_2 е секуща за същата окръжност.

д) Рамото $TB^{\rightarrow}$ на периферния $\measuredangle BTC$ за окръжността k_1 е ……………… за същата окръжност.

е) Съответната дъга на периферния $\measuredangle BTD$ за окръжността k_2 е ……………… .

ж) Малката дъга $\widehat{TC}$ от k_1 е съответната дъга на периферния $\measuredangle$……………… за същата окръжност.

з) Периферният $\measuredangle BTC$ за окръжността k_1 има общо рамо, което е допирателна за тази окръжност, с периферния $\measuredangle$……………… за окръжността ……………… .

и) Отсечката TD е обща съответна хорда за периферните ъгли $\measuredangle$……………… и $\measuredangle$……………… за окръжността ……………… .

й) Оцветеният в червено $\measuredangle CO_1T$ е съответен централен ъгъл на периферния $\measuredangle$……………… за окръжността ……………… .

к) На чертежа $\measuredangle$……………… , който е оцветен в ……………… , е съответен централен ъгъл на периферния $\measuredangle ATD$ за окръжността ……………… .

6.3. Дидактическа система от задачи за формиране на умения за решаване на ирационални уравнения от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$

1. Да се реши уравнението $\sqrt{-8x+1}=-x+2$.

Решение:

1) Определяме множеството от допустимите стойности.

$$-8x+1\geq 0 \Leftrightarrow -8x\geq -1 \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{8}$$

2) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен.

$$\left(\sqrt{-8x+1}\right)^2=\left(-x+2\right)^2$$

3) Разкриваме скобите.

$$-8x+1=x^2-4x+4$$

4) Прехвърляме всички едночлени от едната страна на уравнението и след приведение получаваме следното квадратно уравнение.

$$x^2+4x+3=0$$

5) Определяме коефициентите пред съответните степени на променливата x.

$$a=1;\ b=4;\ c=3$$

6) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение.

$$D=b^2-4ac=4^2-4.1.3=16-12=4$$

7) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{4}}{2.1}=\frac{-4+2}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{4}}{2.1}=\frac{-4-2}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

8) Проверяваме дали получените числа принадлежат на допустимите стойности:

- Проверка за $x_1=-1$: $-1\leq\frac{1}{8}$. Следователно x_1 принадлежи на дефиниционното множество на уравнението.

- Проверка за $x_2 = -3$: $-3 \leq \frac{1}{8}$. Следователно x_2 принадлежи на дефиниционното множество на уравнението.

9) Проверяваме дали получените корени са решения и на дадената задача, като проверката правим в даденото уравнение:

- Проверка за $x_1 = -1$:

$$\sqrt{-8.(-1)+1} \stackrel{?}{=} -(-1)+2$$

$$\sqrt{8+1} \stackrel{?}{=} 1+2$$

$$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 = 3$$

Следователно правим извод, че $x_1 = -1$ е едно решение на задачата.

- Проверка за $x_2 = -3$:

$$\sqrt{-8.(-3)+1} \stackrel{?}{=} -(-3)+2$$

$$\sqrt{24+1} \stackrel{?}{=} 3+2$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 5$$

$$5 = 5$$

Следователно правим извод, че $x_2 = -3$ е друго решение на задачата.

10) Записваме отговор на задачата.

Числата $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$ са решения на задачата. ■

Алгоритъм за решаване на ирационални уравнения с един радикал от вида $\sqrt{ax+b} = cx+d$, $a \neq 0$, $c \neq 0$:

1. Определяме допустимите стойности в задачата.
2. Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен.
3. Прехвърляме всички едночлени от едната страна на уравнението.
4. Решаваме полученото квадратно уравнение.

5. Проверяваме дали получените корени на квадратното уравнение са от дефиниционното множество на даденото уравнение и са негови корени, като проверката се извършва в даденото уравнение.

Да се решат ирационалните уравненията (2. – 15.):

2. $\sqrt{-x+10} = x+2$
3. $\sqrt{3x-5} = -x+1$
4. $\sqrt{2x-3} = x-1$
5. $\sqrt{2x-5} = -x+2$
6. $\sqrt{3x-2} = x+1$
7. $\sqrt{-8x+1} = -2x+1$
8. $\sqrt{3x+1} = x-1$
9. $\sqrt{-6x+1} = x-1$
10. $\sqrt{4x+8} = x+2$
11. $\sqrt{-2x+10} = x-1$
12. $\sqrt{4x+5} = -x-2$
13. $\sqrt{4x+1} = x+2$
14. $\sqrt{2x+1} = x+1$
15. $\sqrt{-2x+1} = x-1$
16. Намислих число, умножих го по (-2) и полученото произведение събрах с 3. Новото число коренувах и получих противоположното число на намисленото число. Кое е намисленото число?

7. Методически бележки

В тази глава от дипломната работа са поместени методически бележки, които са предназначени за учителя. Създаването и на трите дидактически системи от задачи е осъществено чрез следване на компонентите на двете частнопредметни технологии, разгледани в глава 5. от дипломната работа. Към всяка от задачите в системите са написани нужните коментари. Към системите от задачи за учениците от глава 6. са добавени още задачи, които учителят може да използва допълнително целесъобразно потребностите на учениците си.

7.1. Методически бележки към дидактическата система от задачи за въвеждане на понятието съседни ъгли и усвояване на определението му

В основата на следващата технология за съставяне на система от задачи стои логическата структура на определението на понятието.

При проектирането на тази система от задачи минаваме през следните нива на усвояване на математическите знания (според Н. Аммосова и Г. Краснова):

1. **Първи етап (базов)** Уточнява се новото знание, с което трябва да се запознаят учениците, неговите елементи и структура. В случая новото знание е въвеждането на понятието съседни ъгли, уточняване на характеристичните свойства от определението на понятието, неговата логическа структура и формирането на правилен зрителен образ-еталон в съзнанието на учениците.
2. **Втори етап (основен)** На този етап се извършват упражнения върху задачи с пропуски в текста или върху задачи готов-чертеж, създадени на базата на логическата структура на определението на понятието. С това се цели осъзнаване и трайно запаметяване на определението на понятието съседни ъгли и формиране на умения за разпознаване и за конструиране на обекти от обема на понятието в стандартни (настоящи и бъдещи) ситуации. Решават се и други задачи с репродуктивен характер.
3. **Трети етап (творчески)** Той е предназначен за прилагане на знанията за съседни ъгли в нестандартни ситуации (извършване на допълнителни

построения, описване на даден чертеж, съставяне на задача по чертеж, съставяне на задача по конкретно теоретично знание).

При проектирането на системата от задачи е съблюдавана системата от педагогически понятия (според В. Делибалтова) и са спазени следните изисквания (според П. Асенова):

1. **Целта** на дидактическата система от задачи е въвеждането на понятието съседни ъгли и усвояване на определението му.
2. **Очакваният резултат** е формирането на умения за разпознаване и за конструиране на обекти от обема на понятието съседни ъгли.
3. **Условията за ползване на системата** се осигуряват чрез припомняне на необходимите елементи знание (*ъгъл, връх на ъгъл, рамене на ъгъл, лъч, противоположни лъчи*), а **условията за постигането на очаквания резултат** се състоят в създаване на динамичен електронен ресурс за въвеждане на понятието и в създаване на система от задачи с различен формат (задачи с пропуски в текста, задачи готов-чертеж, задачи с избираем отговор, задачи със свободен отговор) на базата на логическата структура на определението на понятието за усвояването на определението на понятието съседни ъгли.
4. В системата от задачи са включени **различни типове задачи** като:
   - задачи за извършване на репродуктивни дейности – задачи с пропуски в текста или задачи готов-чертеж (задачи 1., 2., 3. и 4.)
   - задачи за построяване на обекти от обема на понятието (задачи 5. и 6.)
   - задачи за коригиране на грешки (задача 7.)
   - задачи за контекстуално отъждествяване и прекодиране (задача 8.)
   - задачи с творчески характер (задача 9.)
5. Задачите в системата са подредени в **определен ред**. Системата „започва“ с репродуктивни задачи и „завършва“ с творческа задача.
6. Като **средство** за онагледяване и натрупване на характеристичните свойства на понятието съседни ъгли е създадена анимация чрез динамичния геометричен софтуер *GeoGebra*.

7. **Методите/дейностите**, които могат да се използват/извършват при реализиране на системата, са:
    - *устно изложение* (*обяснение*) при въвеждането и усвояването на определението на понятието съседни ъгли;
    - *демонстрация* под формата на анимация, чрез която се цели правилното изграждане на първоначалния образ за двойка съседни ъгли;
    - *наблюдение* при натрупването на характеристичните свойства от определението на понятието съседни ъгли и разкриване на логическата му структура;
    - *упражнение* за усвояване на определението на понятието съседни ъгли чрез решаването на различни задачи по тип и формат.

Следва реализацията на технологията по стъпки.

7.1.1. *Стъпки 1. – 4. от компонентите на технологията*

Понятието **съседни ъгли** е понятие-релация, за което е необходимо припомнянето на следните понятия-обекти *ъгъл, връх на ъгъл, рамене на ъгъл, лъч* и понятието-релация *противоположни лъчи*.

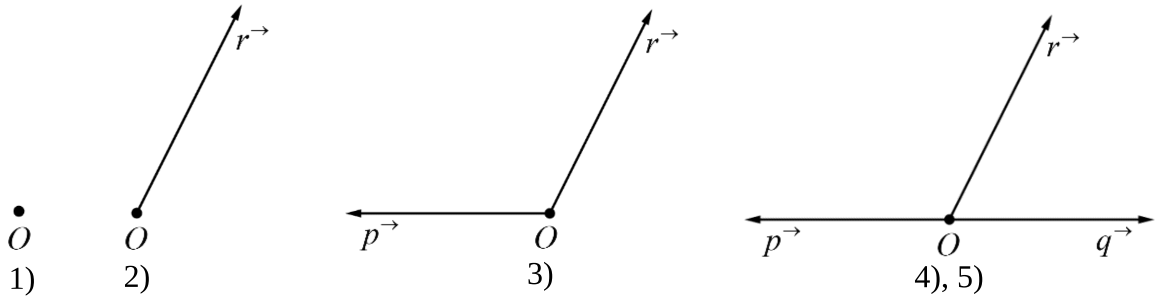
В *Таблица* 2 са поместени характеристиките и логическата структура на определението на понятието **съседни ъгли**.

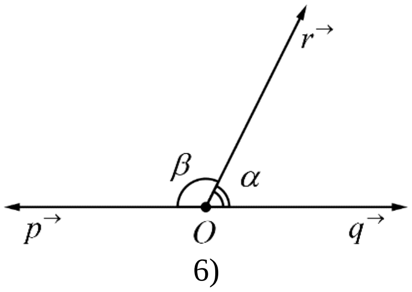
Таблица 2

Определението е	$\underbrace{\text{Два ъгъла се наричат съседни}}_{p}$, ако $\underbrace{\text{имат общо рамо}}_{p_1}$, а $\underbrace{\text{другите им рамене са противоположни лъчи}}_{p_2}$.
Терминът е	p е „съседни ъгли“.
Съдържанието е	p_1 е „ъглите имат общо рамо“. p_2 е „другите рамене на ъглите са противоположни лъчи“ .

Обемът е	Декартовият квадрат на множеството на ъгли в равнината, чиято градусна мярка е в интервала $(0°;180°)$.
Логическата структура е	$p \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2$

На *Чертеж* 1 е показано последователното натрупването на характеристичните свойства от определението на понятието. То е реализирано в следния електронен ресурс. Анимацията служи като материална опора за разкриване на характеристичните свойства от определението на понятието и на логическите връзки между тях $(p \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2)$. Анимацията се съпровожда с последователно посочване на обектите, които се появяват, и техните характеристики.





1) Точка O – общият връх

2) Лъч $Or^{\to}$ – общото рамо

3) Лъч $Op^{\to}$ – другото рамо на единия от ъглите

4) Лъч $Oq^{\to}$ – второто рамо на другия от ъглите

5) Лъчите $Op^{\to}$ и $Oq^{\to}$ са противоположни лъчи.

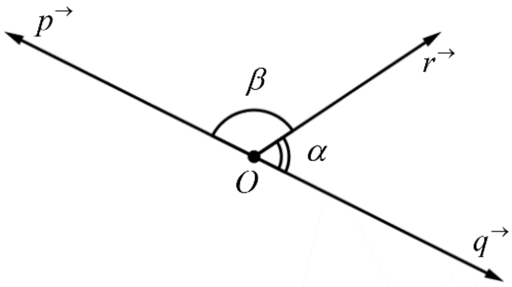
6) Ъглите α и β се наричат **съседни ъгли**.

Чертеж 1

7.1.2. *Стъпки 5. – 6. от компонентите на технологията*

След разкриване на характеристичните свойства от определението на понятието **съседни ъгли** и тяхната логическа връзка следва формулирането на определението на понятието и неговото записване. Това го изисква външно-речевата форма на проявление на дейността, съгласно описаната технология.

Определение: Два ъгъла се наричат **съседни**, ако имат общо рамо, а другите им рамене са противоположни лъчи.



Чертеж 2

Коментар към *чертеж* 2:

1. $O\vec{r}$ е общото рамо на ъглите α и β.
2. $O\vec{p}$ и $O\vec{q}$ са противоположни лъчи. Те са другите рамене на α и β.
3. Ъглите α и β се наричат **съседни ъгли**.

7.1.3. *Стъпки 7. – 8. от компонентите на технологията*

В последните стъпки от компонентите на технологията се създават и използват задачи с цел усвояването на определението на понятието чрез колективно или самостоятелното им решаване.

Задача 1. Да се попълни пропуснатото в текста така, че полученото да е вярно.

а) Два ъгъла, които имат общо рамо, а другите им рамене са противоположни лъчи, се наричат ……………… ъгли.

б) Два ъгъла, които имат общо рамо, а другите им рамене са ……………… лъчи, се наричат съседни ъгли.

в) Два ъгъла, които имат общо ……………… , а другите им рамене са противоположни лъчи, се наричат съседни ъгли.

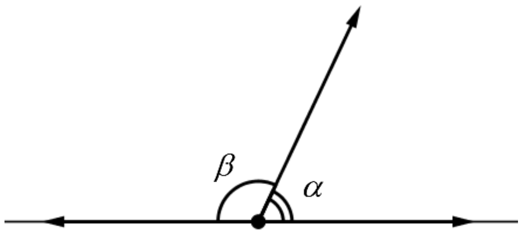
Коментар към задача 1.

Първата задача е свързана с определението на понятието **съседни ъгли**. В различните случаи е пропуснато или терминът на понятието, или част от някое от характеристичните свойства от определението на понятието. Тази задача спомага за:

1. усвояване на определението на понятието;
2. затвърждаване на характеристичните свойства от определението на понятието;
3. разкриване на логическата връзка между характеристичните свойства;

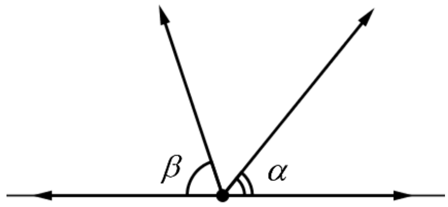
4. запомняне на термина на понятието и разкриване на връзката на новото понятие с другите понятия, използвани в определението.

<u>*Задача* 2.</u> На кои от чертежите са изобразени двойка съседни ъгли и кои са те?



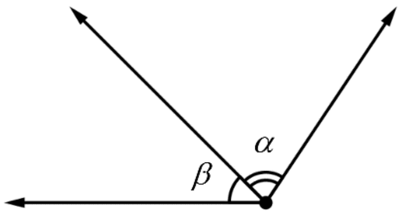
$p_1 \wedge p_2$

Чертеж 3



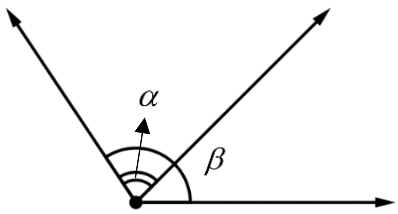
$\overline{p_1} \wedge p_2$

Чертеж 4



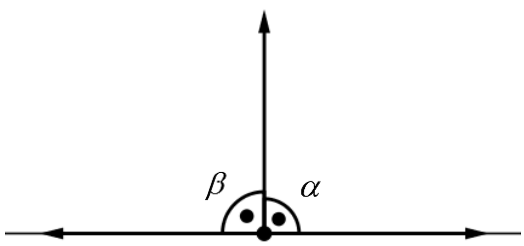
$p_1 \wedge \overline{p_2}$

Чертеж 5



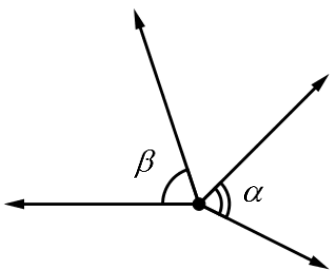
$p_1 \wedge \overline{p_2}$

Чертеж 6



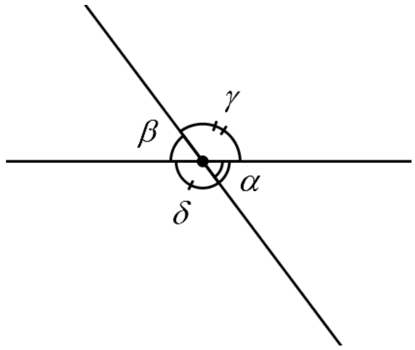
$p_1 \wedge p_2$

Чертеж 7



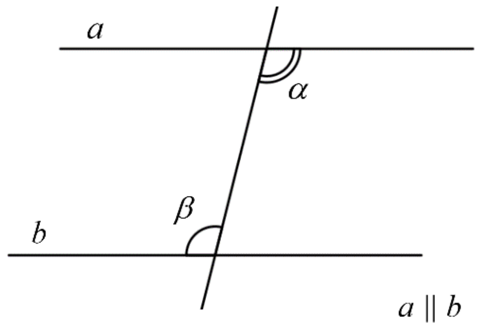
$\overline{p_1} \wedge \overline{p_2}$

Чертеж 8



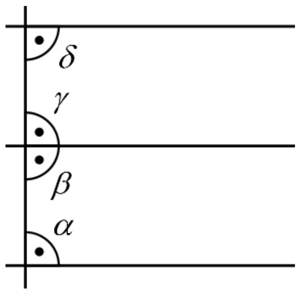
$p_1 \wedge p_2$ или $\overline{p_1} \wedge p_2$

Чертеж 9



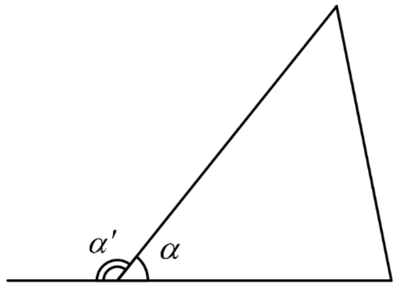
$\overline{p_1} \wedge \overline{p_2}$

Чертеж 10



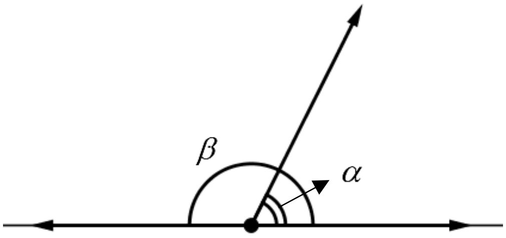
$p_1 \wedge p_2$ или $\overline{p_1} \wedge \overline{p_2}$

Чертеж 11



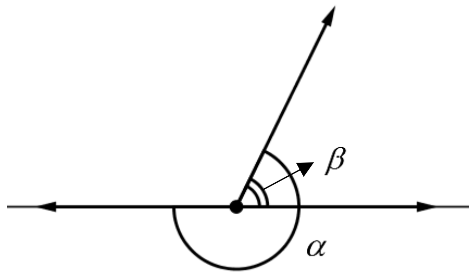
$p_1 \wedge p_2$

Чертеж 12



извън обема на родовото понятие

Чертеж 13



извън обема на родовото понятие

Чертеж 14

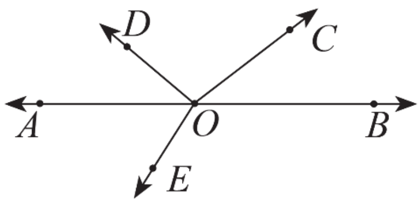
Задача 3. Ако $\measuredangle AOB$ от *Чертеж* 15 е изправен, то коя от двойките ъглите **НЕ** са съседни? [8]

А) $\measuredangle AOD$ и $\measuredangle BOD$

Б) $\measuredangle AOE$ и $\measuredangle BOE$

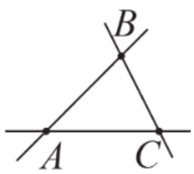
В) $\measuredangle DOC$ и $\measuredangle BOC$

Г) $\measuredangle AOC$ и $\measuredangle BOC$

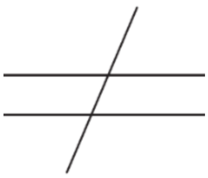


Чертеж 15

Задача 4. На кой от чертежите **НЕ** може да се посочат двойки съседни ъгли? [9]

А) 

Б) 

В) 

Г) 

[8] Задачата е от учебника по математика за 7. клас на издателство „Просвета основано 1945“ с автори Пенка Нинкова, Ирина Шаркова и др., стр.127. Забележка: *Задачата е коригирана поради некоректност*.

[9] Задачата е от учебника по математика за 7. клас на издателство „Просвета плюс“ с автори Юлия Нинова, Снежинка Матакиева и др., стр.130

Коментар към задачи 2*.,* 3*. и* 4*.*

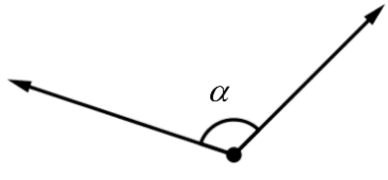
Задачите от 2. до 4. са чисто репродуктивни и са насочени към използване на определението на понятието **съседни ъгли** в различни ситуации за разпознаване на обекти от обема на понятието.

Форматът на генерираните примери в задача 2. е от т. нар. задачи-готов чертеж. Този формат на задачите е особено удобен за усвояване на определенията на геометричните понятия, защото може да се използва визуализация. Чрез тях учениците могат да разграничат обектите, които са от обема на понятието, от обектите, които не са от обема на понятието. В основата на създаването на примерите и контрапримерите стои логическата структура на определението на понятието. Символичният запис под всеки чертеж показва кои от характеристичните свойства от определението на понятието удовлетворяват и кои не удовлетворяват съответната двойка ъгли. От *чертеж* 3. до *чертеж* 8. включително са стандартни примери и контрапримери, докато от *чертеж* 9. до *чертеж* 12. включително са такива, в които съседните ъгли се откриват в по-сложни ситуации, в които по-късно учениците ще изучават понятията противоположни ъгли, ще дефинират прав ъгъл или външен ъгъл на триъгълник, ще изучават признаци за успоредност на прави и свойства на успоредни прави. На последните *чертежи* 13*. и* 14. са представени два контрапримера за съседни ъгли. Те са особени с това, че обектите (двойката ъгли) притежават характеристичните свойства от определението на понятието, но са извън обема на родовото понятие.

Задачите 3. и 4. са по-различни от предходните поради две причини. Първо, защото в условието си съдържат отрицание, и второ, защото са свързани с едновременното разглеждане на няколко геометрични фигури. Форматът на тези задачи е задачи с избираем отговор.

<u>*Задача* 5.</u> а) По *чертеж* 16 постройте един съседен ъгъл на дадения ъгъл α .

б) Колко на брой са всичките съседни ъгли на α ?



Чертеж 16

<u>*Задача* 6.</u> а) На *чертеж* 17 :

1. начертайте лъч $OB^{\rightarrow}$, който да бъде противоположен на $OA^{\rightarrow}$;
2. начертайте лъч $OC^{\rightarrow}$, който да бъде различен от лъчите $OA^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$.

б) Как се наричат получените ъгли $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle COB$?

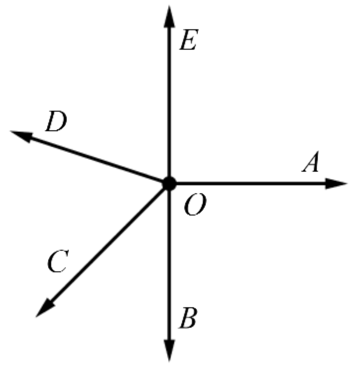
в) Колко на брой са всичките двойки ъгли $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle COB$, за които градусните мерки на тези ъгли са цели числа?

Чертеж 17

Коментар към задачи 5. *и* 6.

Този тип задачи е свързан с построяването на обекти от обема на понятието **съседни ъгли** и спомага за затвърждаването на техните характеристичните свойства и логическата структура на определението му.

<u>*Задача* 7.</u> На *Чертеж* 18 $\sphericalangle BOE$ е изправен. Коригирайте изреченията така, че полученото да е вярно.



Чертеж 18

а) Лъчът $OE^{\rightarrow}$ е общо рамо за съседните ъгли $\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle COE$.

б) Лъчът $OD^{\rightarrow}$ е общо рамо за съседните ъгли $\sphericalangle BOD$ и $\sphericalangle AOD$.

в) Противоположните лъчите $OB^{\rightarrow}$ и $OD^{\rightarrow}$ са рамене на съседните ъгли $\sphericalangle BOD$ и $\sphericalangle DOE$.

г) Противоположните лъчите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ са рамене на съседните ъгли $\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle AOE$.

д) На чертежа $\sphericalangle BOC$ е съседен ъгъл за $\sphericalangle DOE$.

е) На чертежа $\sphericalangle COD$ и $\sphericalangle AOC$ са съседни.

ж) Противоположните лъчите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ са рамене на четири двойки съседните ъгли.

Коментар към задача 7.

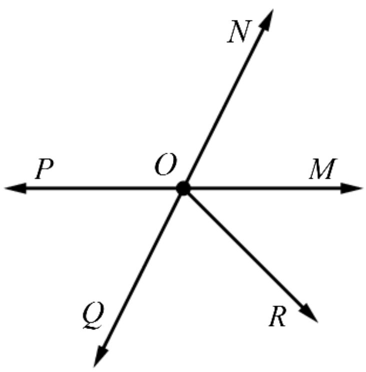
Задачата е от типа задачи за коригиране на грешки. В *Таблица* 3 са поместени верните твърдения и коментар за направените корекции. Коментарите по тази задача, които предоставяме на учителя, са толкова детайлни, тъй като подобен тип задачи не се срещат в действащите към този момент учебници.

Таблица 3

	Вярно твърдение	Коментар
а)	Лъчът $\overrightarrow{OC}$ е общо рамо за съседните ъгли $\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle COE$.	Поправя се лъчът, който е общото рамо за съседните ъгли.
б)	Лъчът $\overrightarrow{OD}$ е общо рамо за съседните ъгли $\sphericalangle BOD$ и $\sphericalangle EOD$.	Поправя се единият от съседните ъгли.
в)	Противоположните лъчите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ са рамене на съседните ъгли $\sphericalangle BOA$ и $\sphericalangle AOE$.	Поправя се единият от двата противоположни лъча, които са рамене на съседните ъгли.
г)	**I начин:** Противоположните лъчите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ са рамене на съседните ъгли $\sphericalangle BOA$ и $\sphericalangle AOE$.	Поправя се единият от съседните ъгли.
	II начин: Противоположните лъчите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ са рамене на съседните ъгли $\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle COE$.	Поправя се другият от съседните ъгли.

д)	**I начин:** На чертежа $\sphericalangle BOD$ е съседен ъгъл за $\sphericalangle DOE$.	Поправя се единият от съседните ъгли.
	II начин: На чертежа $\sphericalangle BOC$ е съседен ъгъл за $\sphericalangle COE$.	Поправя се другият от съседните ъгли.
е)	На чертежа $\sphericalangle COD$ и $\sphericalangle AOC$ НЕ са съседни.	Формулира се отрицанието на даденото твърдение.
ж)	Противоположните лъчите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ са рамене на три двойки съседните ъгли.	Коригира се броят на двойките съседни ъгли.

<u>*Задача* 8.</u> На *чертеж* 19 $\sphericalangle POM$ и $\sphericalangle NOQ$ са изправени. Попълнете пропуснатото в текста така, че полученото да е вярно.



Чертеж 19

а) Лъчът ……………… е общо рамо за съседните ъгли $\sphericalangle NOM$ и $\sphericalangle PON$.

б) Противоположните лъчите ……………… и ……………… са рамене на съседните ъгли $\sphericalangle POQ$ и $\sphericalangle NOP$.

в) На чертежа $\sphericalangle MOR$ е съседен ъгъл за $\sphericalangle$ ……………… .

г) На чертежа $\sphericalangle POQ$ е съседен ъгъл за $\sphericalangle$ ……………… и за $\sphericalangle$ ……………… .

д) Лъчът $\overrightarrow{OM}$ е общо рамо за съседните ъгли $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… .

е) Лъчът $OR^{\rightarrow}$ е общо рамо за двойките съседни ъгли:

- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… ;
- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… .

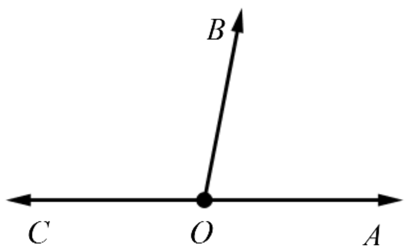
ж) Противоположните лъчите $OQ^{\rightarrow}$ и $ON^{\rightarrow}$ са рамене на двойките съседните ъгли:

- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… ;
- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… ;
- $\sphericalangle$ ……………… и $\sphericalangle$ ……………… .

Коментар към задача 8.

Тази задача формира умения за контекстуално прекодиране на обекти или n-орки от обема на понятие. Този тип задачи е описан от доц. д-р Ю. Нинова (Нинова, 2004). Дейностите, които се извършват не са чисто репродуктивни, но търсенето е теоретично локализирано, защото са подсказани обектите, които трябва да се кооперират. Ученикът трябва да прекодира елемента, като го свърже с посочената фигура или прекодираният елемент да свърже с подходяща комбинация от фигури. В задачата има примери, при които един и същи елемент от чертежа се включва като елемент на различни фигури, и примери, в които трябва да се намерят общите елементи на различните геометрични фигури.

<u>*Задача* 9.</u> На *Чертеж* 20 $\sphericalangle AOC$ е изправен. На какво условие трябва да отговаря точка D, така че след построяването ѝ на чертежа:



Чертеж 20

а) $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle AOD$ ще бъдат съседни ъгли?

б) $\sphericalangle COB$ и $\sphericalangle AOD$ ще бъдат съседни ъгли?

в) ще има точно една двойка съседни ъгли?

г) ще има точно четири двойки съседни ъгли?

д) ще има точно две двойки съседни ъгли?

Коментар към задача 9.

Дейностите, които се извършват в последната задача в системата, имат творчески характер. При решаването на тази задача се изисква конкретизиране на условията, при които се удовлетворяват дадените ситуации. По този начин обектът, който трябва да се построи, се свързва с обекти от обема на друго понятие. За решаването ѝ е нужно добро владеене на характеристичните свойства от определението на понятието и обема на понятието **съседни ъгли**. Тъй като задачата е творческа, предоставяме на учителя и нейното решение. То е представено в *Таблица* 4.

Таблица 4

	Решение	Коментар
а)	Точката D трябва да се построи така, че лъчите $OD^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$ да бъдат противоположни.	Построената **точка** се свързва с обект от обема на *понятието-релация* **противоположни лъчи**.
б)	Точката D трябва да се построи така, че лъчите $OD^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$ да съвпадат.	Построената **точка** се свързва с обект от обема на *понятието-релация* **съвпадащи лъчи**.
в)	Точката D трябва да се построи така, че лъчите $OD^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$ да съвпадат.	Построената **точка** се свързва с обект от обема на *понятието-релация* **съвпадащи лъчи**.
г)	Точката D трябва да се построи така, че лъчите $OD^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$ да бъдат противоположни.	Построената **точка** се свързва с обект от обема на *понятието-релация* **противоположни лъчи**.
д)	Точката D трябва да се построи така, че лъчите $OD^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$ да НЕ бъдат противоположни.	Построената **точка** не бива да свързва с обект от обема на *понятието-релация* **противоположни лъчи**.

Обобщен коментар към системата от задачи

От предоставените 9 задачи за урока са избрани задачите 1., 2., 4., 5. и 8. Останалите задачи са допълнителни и учителят може да ги използва по своя преценка, но целта им е същата – усвояване на определението на понятието **съседни ъгли**.

Ако ученикът среща затруднения на определено ниво от реализирането на системата от задачи, то може да се използва следната методика на работа. Ако ученикът среща затруднения при изпълнение на упражненията в умствен план (т.е. разпознаване на обект от обема на понятието), то упражненията за корекция могат да го върнат на ниво – външно-речева форма на проявление на дейността (т.е. да повтори определението на понятието или да изобрази обекта). А ако и това упражнение не се изпълнява правилно, то упражненията за корекция трябва да го върнат на материалната опора.

7.2. Методически бележки към дидактическата система от задачи за въвеждане на понятието периферен ъгъл и усвояване на определението му

В основата и на тази технология за съставяне на система от задачи стои логическата структура на определението на понятието.

При проектирането на тази система от задачи минаваме през следните нива на усвояване на математическите знания (според Н. Аммосова и Г. Краснова):

1. **Първи етап (базов)** Уточнява се новото знание, с което трябва да се запознаят учениците, неговите елементи и структура. В случая новото знание е въвеждането на понятието периферен ъгъл, уточняване на характеристичните свойства от определението на понятието, неговата логическа структура и формирането на правилен зрителен образ-еталон в съзнанието на учениците.
2. **Втори етап (основен)** На този етап се извършват упражнения върху задачи с пропуски в текста или върху задачи готов-чертеж, създадени на базата на логическата структура на определението на понятието. С това се цели осъзнаване и трайно запаметяване на определението на понятието периферен ъгъл и формиране на умения за разпознаване и за конструиране на обекти от обема на понятието в стандартни (настоящи и бъдещи) ситуации. Решават се и други задачи с репродуктивен характер.

3. **Трети етап (творчески)** Той е предназначен за прилагане на знанията за периферен ъгъл в нестандартни ситуации (извършване на допълнителни построения, описване на даден чертеж, съставяне на задача по чертеж, съставяне на задача по конкретно теоретично знание).

При проектирането на системата от задачи е съблюдавана системата от педагогически понятия (според В. Делибалтова) и са спазени следните изисквания (според П. Асенова):

1. **Целта** на система от задачи е въвеждането на определението на понятието периферен ъгъл и усвояване на определението му.
2. **Очакваният резултат** е формирането на умения за разпознаване и за конструиране на обекти от обема на понятието периферен ъгъл.
3. **Условията за ползване на системата** се осигуряват чрез припомняне на необходимите елементи знание (*ъгъл*, *връх на ъгъл*, *рамене на ъгъл, лъч, окръжност, взаимни положения на точка и окръжност*, *взаимни положения на лъч и окръжност*), а **условията за постигането на очаквания резултат** се състоят в създаване на динамичен електронен ресурс за въвеждане на понятието и в създаване на система от задачи с различен формат (задачи с пропуски в текста, задачи готов-чертеж, задачи с избираем отговор, задачи със свободен отговор) на базата на логическата структура на определението на понятието периферен ъгъл.
4. В системата от задачи са включени **различни типове задачи** като:
    - задачи за извършване на репродуктивни дейност – задачи с пропуски в текста или задачи готов-чертеж (задачи 1., 2., 3. и 4.)
    - задачи за построяване на обекти от обема на понятието (задачи 5., 6., 7., 8., 9. и 10.)
    - задачи за коригиране на грешки (задача 11.)
    - задачи за контекстуално отъждествяване и прекодиране (задача 12.)
    - задачи с творчески характер (задача 13.)
5. Задачите в системата са подредени в **определен ред**. Системата „започва“ с репродуктивни задачи и „завършва“ с творческа задача.

6. Като **средство** за онагледяване и натрупване на характеристичните свойства от определението на понятието периферен ъгъл е създадена анимация чрез динамичния геометричен софтуер *GeoGebra*.
7. **Методите/дейностите**, които могат да се използват/извършват при реализиране на системата, са:
   - *устно изложение* (*обяснение*) при въвеждането и усвояването на определението на понятието периферен ъгъл;
   - *демонстрация* под формата на анимация, чрез която се цели правилното изграждане на първоначалния образ за периферен ъгъл;
   - *наблюдение* при натрупването на характеристичните свойства от определението на понятието периферен ъгъл и разкриване на логическата му структура;
   - *упражнение* за усвояване на определението на понятието периферен ъгъл чрез решаването на различни задачи по тип и формат.

Следва реализацията на технологията по стъпки.

7.2.1. *Стъпки 1. – 4. от компонентите на технологията*

Понятието **периферен ъгъл** е понятие-релация, за което е необходимо припомнянето на следните понятия-обекти: *ъгъл*, *връх на ъгъл*, *рамене на ъгъл*, *лъч*, *окръжност* и следните понятия-релации: *взаимни положения на точка и окръжност* и *взаимни положения на лъч и окръжност*.

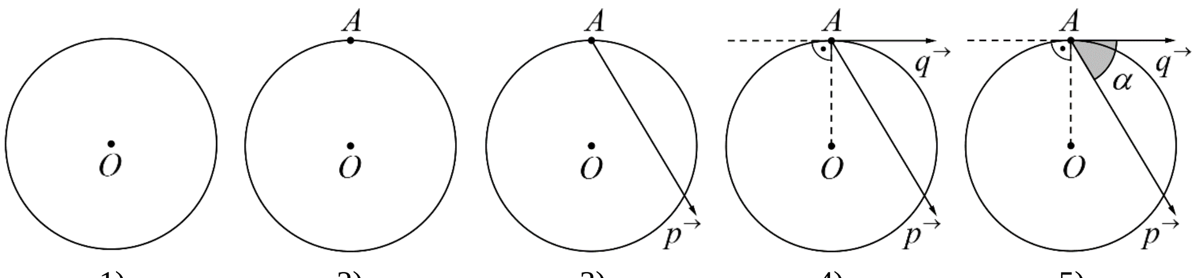
В *Таблица* 5 са поместени характеристиките и логическата структура на определението на понятието **периферен ъгъл**.

Таблица 5

Определението е	$\underbrace{\text{Периферен ъгъл се нарича}}_{p}\ \underbrace{\text{ъгъл, чийто връх лежи на окръжност}}_{p_1}$, $\underbrace{\text{едното му рамо е секуща за тази окръжност}}_{p_2}$, а $\underbrace{\text{другото му рамо е допирателна за тази окръжност}}_{p_3}$.

Терминът е	p е „периферен ъгъл“.
Съдържанието е	p_1 е „върхът на ъгъла лежи на окръжност“. p_2 е „едното рамо на ъгъла е секуща за тази окръжност“ . p_3 е „другото рамо на ъгъла е допирателна за тази окръжност“ .
Обемът е	Декартовото произведение на множеството на ъглите в равнината, чиято градусна мярка е в интервала $(0°;180°)$, и множеството на окръжностите.
Логическата структура е	$p \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

На *Чертеж* 21 е показано последователното натрупването на характеристичните свойства от определението на понятието. То е реализирано в следния електронен ресурс. Анимацията служи като материална опора за разкриване на характеристичните свойства от определението на понятието и на логическите връзки между тях $(p \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$. Анимацията се съпровожда с последователно посочване на обектите, които се появяват, и техните характеристики.



1) 2) 3) 4) 5)

1) Окръжност

2) Точка A от окръжността – върхът на ъгъла

3) Лъч $A\vec{p}$ – рамото, което е секуща за окръжността

Чертеж 21

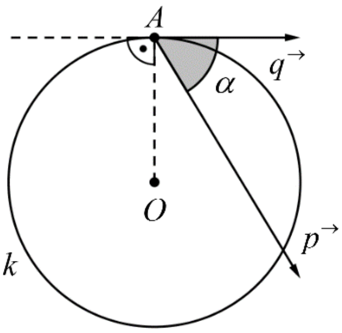
4) Лъч $A\vec{q}$ – рамото, което е допирателна за окръжността

5) Ъгълът α се нарича **периферен ъгъл** за окръжността.

7.2.2. *Стъпки 5. – 6. от компонентите на технологията*

След разкриване на свойствата от определението на понятието **периферен ъгъл** и тяхната логическа връзка следва формулирането на определението на понятието и неговото записване. Това го изисква външно-речевата форма на проявление на дейността, съгласно описаната технология. Освен това се добавят и определенията на съпътстващите го понятия: *съответна дъга на периферен ъгъл*, *съответен централен ъгъл на периферен ъгъл* и *съответна хорда на периферен ъгъл*.

Определение: **Периферен ъгъл** се нарича ъгъл, чийто връх лежи на окръжност, едното му рамо е секуща за тази окръжност, а другото му рамо е допирателна за тази окръжност.

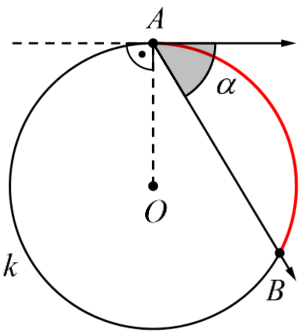


Чертеж 22

Коментар към *чертеж* 22:

1. Точката A е от окръжността k; $A \in k$.
2. Лъчът $Ap^{\rightarrow}$ е секуща за k. Той е едното рамо на ъгъла α.
3. Лъчът $Aq^{\rightarrow}$ е допирателна за k. Той е другото рамо на ъгъла α.
4. Ъгълът $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle p^{\rightarrow}Aq^{\rightarrow}$ се нарича **периферен ъгъл** за k.

Определение: Дъгата от окръжността, вътрешна за един периферен ъгъл, се нарича **съответна (принадлежаща) дъга** на периферния ъгъл.

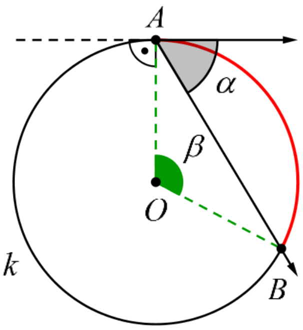


Чертеж 23

Коментар към *чертеж* 23:

1. Ъгълът α е периферен ъгъл за окръжността k.
2. Оцветената дъга $\overset{\frown}{AB}$ от k се намира във вътрешността на ъгъла α.
3. Дъгата $\overset{\frown}{AB}$, оцветена в червено, се нарича **съответна дъга** на ъгъла α.

Определение: **Съответен централен ъгъл** на периферен ъгъл се нарича този централен ъгъл, който се измерва със съответната дъга на периферия ъгъл.

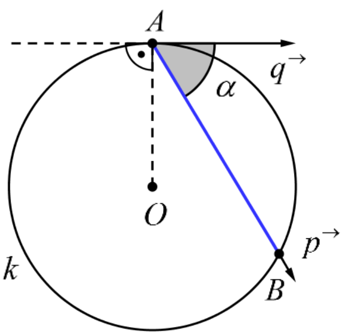


Чертеж 24

Коментар към *чертеж* 24:

1. Ъгълът α е периферен ъгъл за окръжността k.
2. Оцветената дъга $\overset{\frown}{AB}$ от k е съответната дъга на ъгъла α.
3. Централният ъгъл β се измерва с дъгата $\overset{\frown}{AB}$, оцветена в червено.
4. Ъгълът β, оцветен в зелено, се нарича **съответен централен ъгъл** на ъгъла α.

Определение: **Съответна хорда** на периферен ъгъл се нарича тази хорда от окръжността, чиито краища са върхът на ъгъла и пресечната точка на окръжността с едното му рамо.



Чертеж 25

Коментар към *чертеж* 25:

1. Ъгълът α е периферен ъгъл за окръжността k.
2. Точката A е върхът на ъгъла α.
3. Лъчът $Ap^{\rightarrow}$ е едно от раменете на ъгъла α.
4. Точката B е пресечната точка на k с $Ap^{\rightarrow}$.
5. Отсечката AB, оцветена в синьо, се нарича **съответна хорда** на ъгъла α.

7.2.3. *Стъпки 7. – 8. от компонентите на технологията*

В последните стъпки от компонентите на технологията се създават и използват задачи с цел усвояването на определението на понятието чрез колективно или самостоятелното им решаване.

Задача 1. Попълнете пропуснатото в текста така, че полученото да е вярно.

а) Ъгъл, чийто връх лежи на окръжност, едното му рамо е секуща за тази окръжност, а другото му рамо е допирателна за тази окръжност, се нарича ……………… за тази окръжност.

б) Периферен ъгъл за окръжност се нарича ъгъл, чийто връх лежи на окръжността, едното му рамо е секуща за тази окръжността, а другото му рамо е ……………… за окръжността.

в) Периферен ъгъл за окръжност се нарича ъгъл, чийто връх лежи на окръжността, едното му рамо е допирателна за тази окръжността, а другото му рамо е ……………… за окръжността.

г) Периферен ъгъл за окръжност се нарича ъгъл, едното рамо на което е секуща за тази окръжност, другото му рамо е допирателна за окръжността, а върхът му ……………… на окръжността.

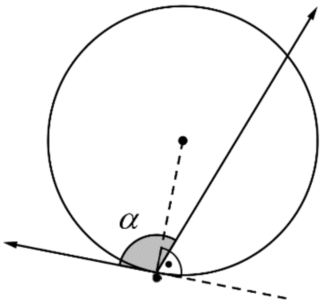
Коментар към задача 1.

Първата задача е свързана с определението на понятието **периферен ъгъл**. В различните случаи е пропуснато или терминът на понятието, или част от някое от характеристичните свойства от определението на понятието. Тази задача способства за:

1. усвояване на определението на понятието;
2. затвърждаване на характеристичните свойства от определението на понятието;

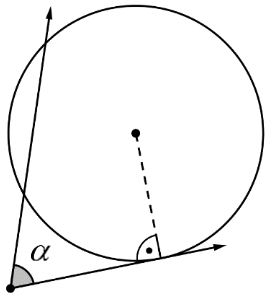
3. разкриване на логическата връзка между характеристичните свойства;
4. запаметяване на термина на понятието и разкриване на връзката на новото понятие с другите понятия, използвани в определението.

<u>*Задача* 2.</u> На кои от чертежите ъгълът α е периферен за окръжността?



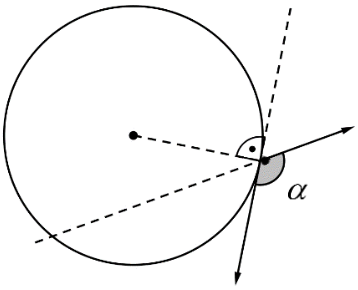
$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

Чертеж 26



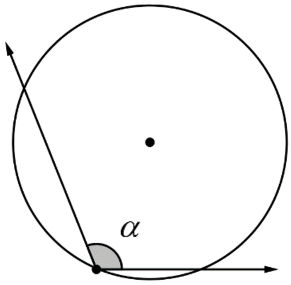
$\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge p_3$

Чертеж 27



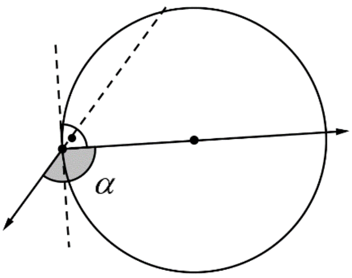
$p_1 \wedge \overline{p_2} \wedge p_3$

Чертеж 28



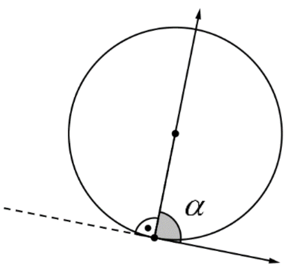
$p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}$

Чертеж 29



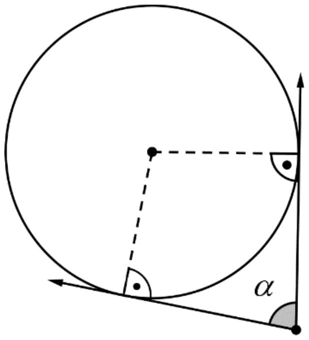
$p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}$

Чертеж 30



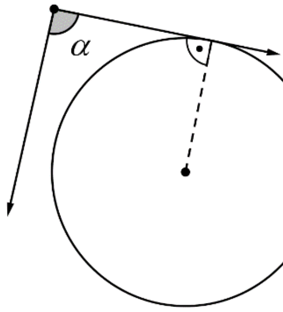
$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

Чертеж 31



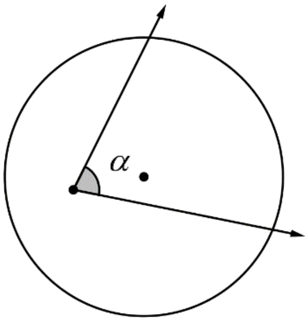
$\overline{p_1} \wedge \overline{p_2} \wedge p_3$

Чертеж 32



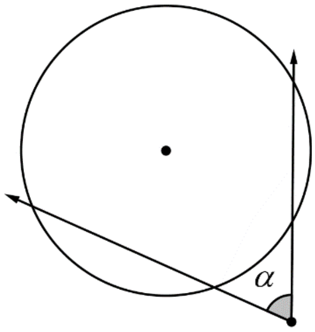
$\overline{p_1} \wedge \overline{p_2} \wedge p_3$

Чертеж 33



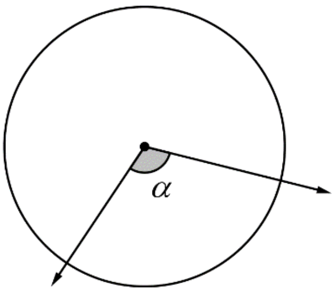
$\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}$

Чертеж 34



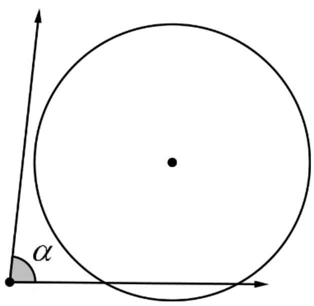
$\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}$

Чертеж 35



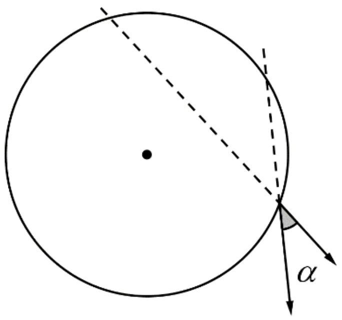
$\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}$

Чертеж 36



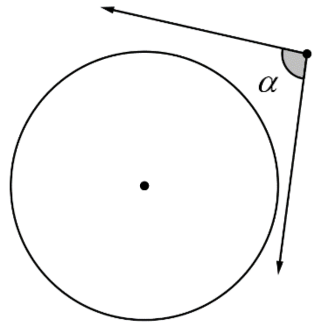
$\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}$

Чертеж 37



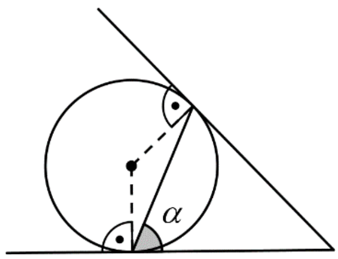
$p_1 \wedge \overline{p_2} \wedge \overline{p_3}$

Чертеж 38



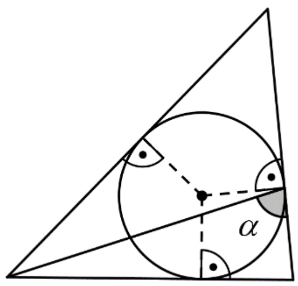
$\overline{p_1} \wedge \overline{p_2} \wedge \overline{p_3}$

Чертеж 39



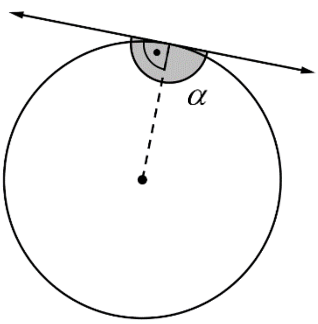
$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

Чертеж 40



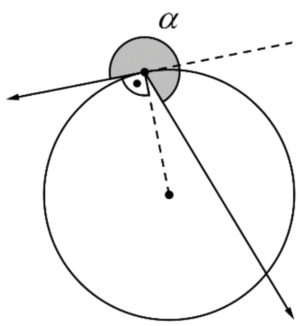
$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

Чертеж 41



извън обема на родовото понятие

Чертеж 42



извън обема на родовото понятие

Чертеж 43

<u>*Задача* 3.</u> Кой от ъглите на *чертеж* 44 **НЕ** е периферен ъгъл за окръжността k ?

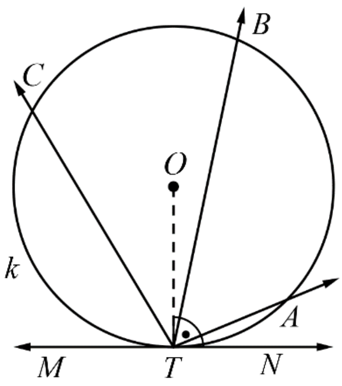
А) $\sphericalangle ATN$

Б) $\sphericalangle ATC$

В) $\sphericalangle BTM$

Г) $\sphericalangle CTN$

Д) $\sphericalangle CTM$



Чертеж 44

<u>*Задача* 4.</u> За коя от окръжностите на *чертеж* 45 $\sphericalangle PO_1Q$ е периферен?

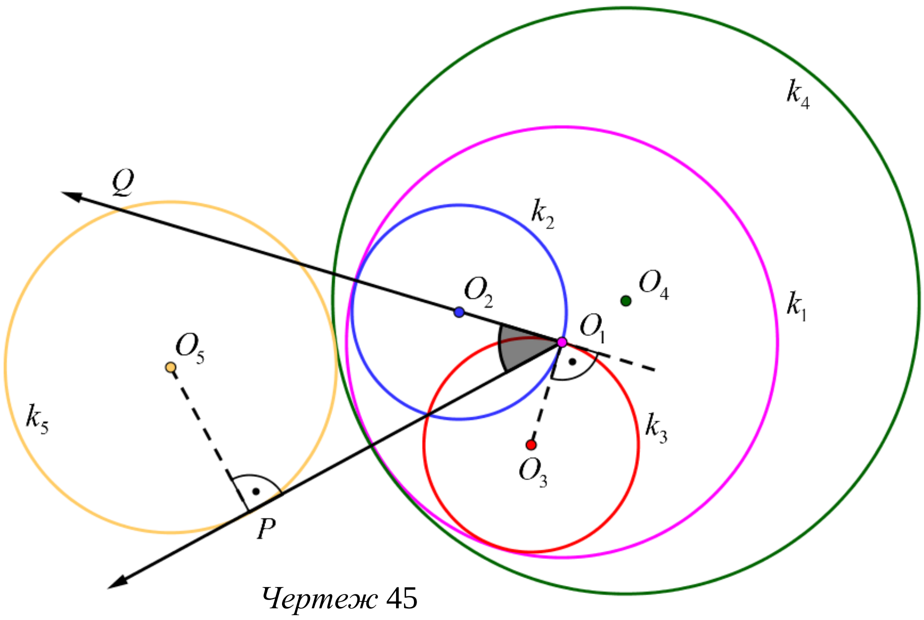
А) k_1

Б) k_2

В) k_3

Г) k_4

Д) k_5



Чертеж 45

Коментар към задачи 2.*,* 3. *и* 4.

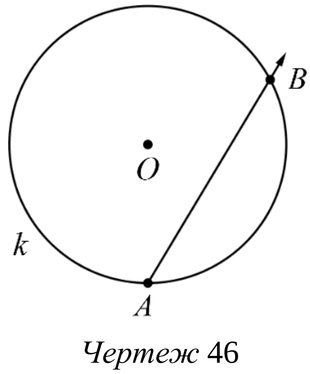
Задачите от 2. до 4. са чисто репродуктивни и са насочени към използване на определението на понятието **периферен ъгъл** и неговото прилагане в различни ситуации за разпознаване на обекти от обема на понятието.

Форматът на генерираните примери в задача 2. е т. нар. задачи-готов чертеж. Този формат на задачите е особено удобен за усвояване на определенията на геометрични понятия, защото може да се използва визуализация. Чрез тях учениците могат да разграничат обектите, които са от обема на понятието, от обектите, които не са от обема на понятието. В основата на създаването на примерите и контрапримерите стои логическата структура на определението на понятието. Символичният запис под всеки чертеж показва кои от характеристичните свойства от определението на понятието удовлетворяват и кои не удовлетворяват съответната двойка ъгъл и окръжност. От *чертеж* 26. до *чертеж* 39. включително са стандартни примери и контрапримери, докато на *чертеж* 40. и *чертеж* 41. са такива, в които периферният ъгъл се откриват в по-сложни ситуации, в които учениците ще срещат вписана в триъгълник/четириъгълник окръжност. На последните *чертежи* 42. *и* 43. са представени два контрапримера за периферен ъгъл. Те са особени с това, че обектите (двойка ъгъл и окръжност) притежават характеристичните свойства от определението на понятието, но са извън обема на родовото понятие.

Задачите 3. и 4. са по-различни, защото са свързани с едновременното разглеждане на няколко геометрични фигури. В задача 3. се разглежда една окръжност с няколко ъгъла, докато в задача 4. е обратното – един ъгъл се свързва с няколко окръжности. Освен това в условието на задача 3. се съдържа отрицание. Тези две задачи целят основно да покажат, че понятието **периферен ъгъл** е понятие-релация, т.е. че **периферен ъгъл** не съществува, ако една от двете геометрични фигури (ъгъл или окръжност) липсва. Форматът на тези задачи е задачи с избираем отговор.

Задача 5. а) По *чертеж* 46 постройте един периферен ъгъл за k, като едно от раменете му е лъчът $AB^{\rightarrow}$.

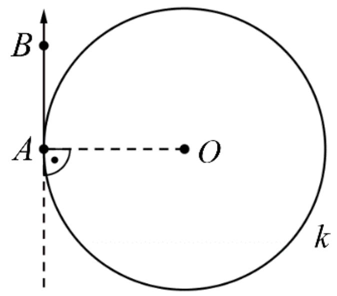
б) Колко на брой са всичките периферни ъгли за k, които могат да се построят според а) ?



Чертеж 46

Задача 6. а) По *чертеж* 47 постройте един периферен ъгъл за k, като едно от раменете му е лъчът $AB^{\rightarrow}$.

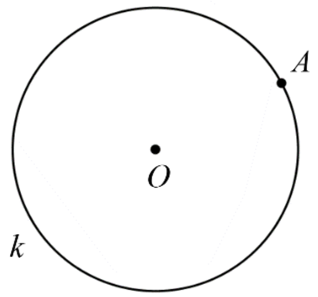
б) Колко на брой са всичките периферни ъгли за k, които могат да се построят според а), ако градусните им мерки са цели числа?



Чертеж 47

<u>*Задача* 7.</u> а) По *чертеж* 48 постройте един периферен ъгъл за k, чийто връх е точката A.

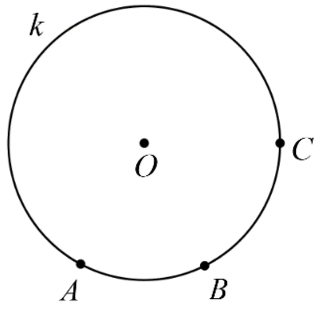
б) Колко на брой са всичките периферни ъгли за k, които могат да се построят според а), ако градусните им мерки са цели числа?



Чертеж 48

<u>*Задача* 8.</u> а) По *чертеж* 49 постройте един периферен ъгъл за k, чиято принадлежаща дъга е $\overset{\frown}{ABC}$.

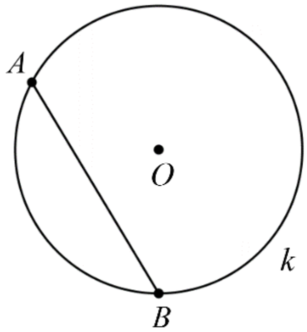
б) Колко на брой са всичките периферни ъгли за k, които могат да се построят според а)?



Чертеж 49

<u>*Задача* 9.</u> а) По *чертеж* 50 постройте един периферен ъгъл за k, чиято съответна хорда е AB.

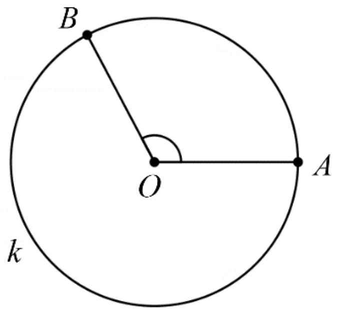
б) Колко на брой са всичките периферни ъгли за k, които могат да се построят според а)?



Чертеж 50

<u>*Задача* 10.</u> а) По *чертеж* 51 постройте един периферен ъгъл за k, чийто съответен централен ъгъл е $\sphericalangle AOB$.

б) Колко на брой са всичките периферни ъгли за k, които могат да се построят според а)?



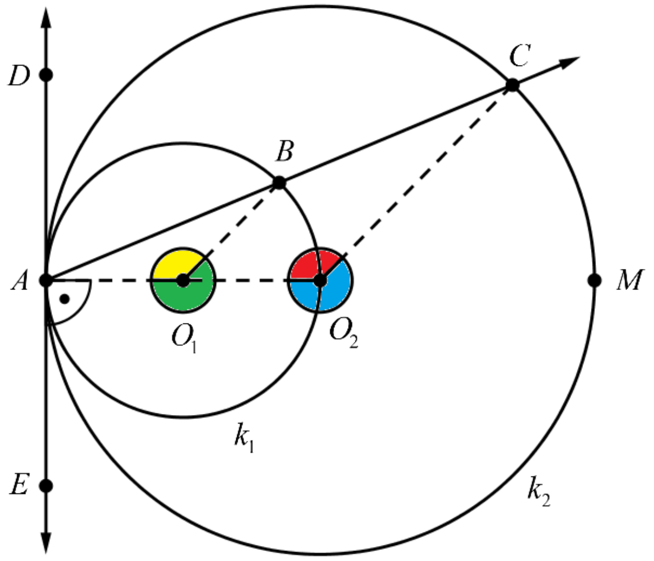
Чертеж 51

Коментар към задачи 5.*,* 6.*,* 7.*,* 8.*,* 9. *и* 10.

Този тип задачи е свързан с построяването на обекти от обема на понятието **периферен ъгъл** и спомага за затвърждаването на неговите характеристичните свойства, логическата структура на определението му и за затвърждаване на свързаните с него понятия − съответна дъга, съответен централен ъгъл, съответна хорда.

<u>*Задача* 11.</u> На *чертеж* 52 DE е общата допирателна за окръжностите $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$.

Коригирайте изреченията така, че полученото да е вярно.



Чертеж 52

а) Лъчът $\overrightarrow{AB}$, който е рамо на периферния $\sphericalangle DAB$ за окръжността k_1, е допирателна за същата окръжност.

б) Лъчът $\overrightarrow{AE}$, който е рамо на периферния $\sphericalangle EAC$ за окръжността k_2, е секуща за същата окръжност.

в) Дъгата $\overset{\frown}{AMC}$ е съответна дъга на периферния $\sphericalangle DAC$ за окръжността k_2.

г) Дъгата $\overset{\frown}{AB}$, която НЕ съдържа точката O_2, е съответната дъга на периферния $\sphericalangle EAC$ за окръжността k_1.

д) Оцветеният в зелено $\sphericalangle AO_1B$ е съответен централен ъгъл на периферния $\sphericalangle DAB$ за окръжността k_1.

е) Оцветеният в червено $\sphericalangle AO_2C$ е съответен централен ъгъл на периферния $\sphericalangle DAC$ за окръжността k_1.

ж) Отсечката AB е съответна хорда на периферния $\sphericalangle EAB$ за окръжността k_2.

з) Периферните ъгли $\sphericalangle DAC$ и $\sphericalangle EAC$ за окръжността k_2 имат различни съответни хорди.

и) На чертежа $\sphericalangle DAC$ е периферен ъгъл само за окръжността k_1.

й) Лъчът $AC^{\to}$ е общо рамо за общо два периферни ъгъла за окръжностите k_1 и k_2.

Коментар към задача 11.

Задачата е от типа задачи за коригиране на грешки. Тази задачи отново цели да покаже, че понятието **периферен ъгъл** е понятие-релация. В *Таблица* 6 са поместени верните твърдения и коментар за направените корекции. Коментарите по тази задача, които предоставяме на учителя, са подробни, защото подобен тип задачи не се срещат в действащите към този момент учебници.

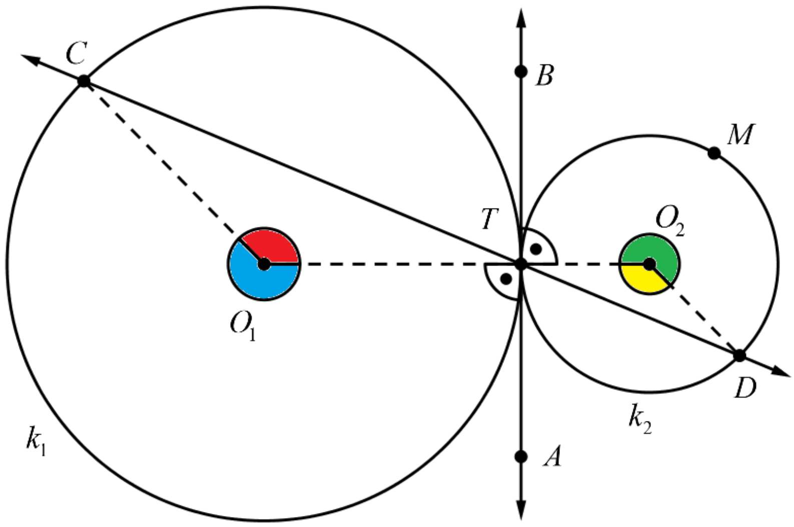
Таблица 6

	Вярно твърдение	Коментар
а)	**I начин:** Лъчът $AD^{\to}$, който е рамо на периферния $\sphericalangle DAB$ за окръжността k_1, е допирателна за същата окръжност.	Поправя се лъчът, който е допирателна за окръжността.
	II начин: Лъчът $AB^{\to}$, който е рамо на периферния $\sphericalangle DAB$ за окръжността k_1, е секуща за същата окръжност.	Заменя се думата „допирателна“ с думата „секуща“, т.е. отчита се отношението на дадения лъч към дадената окръжност.
б)	**I начин:** Лъчът $AC^{\to}$, който е рамо на периферния $\sphericalangle EAC$ за окръжността k_2, е секуща за същата окръжност.	Поправя се лъчът, който е секуща за окръжността.
	II начин:	Заменя се думата „секуща“ с думата „допирателна“, т.е. отчита

	Лъчът $\overrightarrow{AE}$, който е рамо на периферния $\sphericalangle EAC$ за окръжността k_2, е допирателна за същата окръжност.	се отношението на дадения лъч към дадената окръжност.
в)	Дъгата $\overset{\frown}{AMC}$ е съответна дъга на периферния $\sphericalangle EAC$ за окръжността k_2.	Поправя се периферният ъгъл за окръжността.
г)	**I начин:** Дъгата $\overset{\frown}{AB}$, която съдържа точката O_2, е съответната дъга на периферния $\sphericalangle EAC$ за окръжността k_1.	Поправя се описанието на съответната дъга на периферния ъгъл.
	II начин: Дъгата $\overset{\frown}{AB}$, която НЕ съдържа точката O_2, е съответната дъга на периферния $\sphericalangle DAC$ за окръжността k_1.	Поправя се периферния ъгъл за окръжността.
д)	**I начин:** Оцветеният в жълто $\sphericalangle AO_1B$ е съответен централен ъгъл на периферния $\sphericalangle DAB$ за окръжността k_1.	Поправя се описанието на съответния централен ъгъл на периферния ъгъл.
	II начин: Оцветеният в зелено $\sphericalangle AO_1B$ е съответен централен ъгъл на периферния $\sphericalangle EAB$ за окръжността k_1.	Поправя се периферния ъгъл за окръжността.
е)	Оцветеният в червено $\sphericalangle AO_2C$ е съответен централен ъгъл на периферния $\sphericalangle DAC$ за окръжността k_2.	Поправя се окръжността.

ж)	**I начин:** Отсечката AB е съответна хорда на периферния $\sphericalangle EAB$ за окръжността k_1.	Поправя се окръжността.
	II начин: Отсечката AC е съответна хорда на периферния $\sphericalangle EAB$ за окръжността k_2.	Поправя се съответната хорда на периферния ъгъл.
з)	Периферните ъгли $\sphericalangle DAC$ и $\sphericalangle EAC$ за окръжността k_2. имат една и съща съответна хорда.	Хордата AC е обща хорда за дадената двойка съседни ъгли, които са периферни ъгли спрямо една и съща окръжност.
и)	На чертежа $\sphericalangle DAC$ е периферен ъгъл НЕ само за окръжността k_1.	Формулира се отрицанието на даденото твърдение.
й)	Лъчът $AC^{\rightarrow}$ е общо рамо за общо четири периферни ъгъла за окръжностите k_1 и k_2.	Поправя се броят на периферните ъгли за дадените окръжности.

<u>*Задача* 12.</u> Като използвате информацията от *чертеж* 53, попълнете пропуснатото така, че полученото да е вярно.



Чертеж 53

а) На чертежа $\sphericalangle ATC$ е периферен ъгъл за окръжността ……………… .

б) Ъглите $\sphericalangle$……………… и $\sphericalangle$……………… са периферни ъгли за окръжността k_2.

в) На чертежа $\sphericalangle BTC$ е периферен ъгъл за окръжността ……………… , а неговият противоположен ъгъл е периферен ъгъл за окръжността ……………… .

г) Рамото ……………… на периферния $\sphericalangle ATD$ за окръжността k_2 е секуща за същата окръжност.

д) Рамото $TB^{\rightarrow}$ на периферния $\sphericalangle BTC$ за окръжността k_1 е ……………… за същата окръжност.

е) Съответната дъга на периферния $\sphericalangle BTD$ за окръжността k_2 е ……………… .

ж) Малката дъга $\widehat{TC}$ от k_1 е съответната дъга на периферния $\sphericalangle$……………… за същата окръжност.

з) Периферният $\sphericalangle BTC$ за окръжността k_1 има общо рамо, което е допирателна за тази окръжност, с периферния $\sphericalangle$……………… за окръжността ……………… .

и) Отсечката TD е обща съответна хорда за периферните ъгли $\sphericalangle$……………… и $\sphericalangle$……………… за окръжността ……………… .

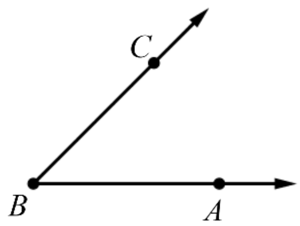
й) Оцветеният в червено $\sphericalangle CO_1T$ е съответен централен ъгъл на периферния $\sphericalangle$……………… за окръжността ……………… .

к) На чертежа $\sphericalangle$……………… , който е оцветен в ……………… , е съответен централен ъгъл на периферния $\sphericalangle ATD$ за окръжността ……………… .

Коментар към задача 12.

Тази задача е задача за формиране на умения за контекстуално прекодиране на обекти или n-орки от обема на понятие. Този тип задачи е описан от доц. д-р Ю. Нинова (Нинова, 2004). Дейностите, които се извършват, не са чисто репродуктивни, но търсенето е теоретично локализирано, защото са подсказани обектите, които трябва да се кооперират. Ученикът трябва да прекодира елемента, като го свърже с посочената фигура или прекодирания елемент да свърже с подходяща комбинация от фигури. В задачата има примери, при които един и същи елемент от чертежа се включва като елемент на различни фигури, и примери, в които трябва да се намерят общите елементи на различните геометрични фигури.

Задача 13. На какво условие трябва да отговаря точка O, така че след построяването ѝ на *чертеж* 54 тя да бъде център на окръжност, за която дадения ъгъл е периферен?



Чертеж 54

Коментар към задача 13.

Дейностите, които се извършват в последната задача в системата, имат творчески характер. При решаването на тази задача се изисква конкретизиране на условията, при които се удовлетворява дадената ситуация. По този начин обектът, който трябва да се построи, се свързва с обекти от обема на други понятия. За решаването ѝ е нужно добро владеене на характеристичните свойства от определението на понятието и обема на понятието **периферен ъгъл**. Тъй като задачата е творческа, предоставяме на учителя и нейно примерно решение. То е представено в *Таблица* 7.

Таблица 7

Решение	Точка O трябва да лежи на един от двата лъча $BM^{\rightarrow}$ или $BN^{\rightarrow}$. Лъчът $BM^{\rightarrow}$ трябва да удовлетворява следните условия: • началото му трябва да бъде точка B; • $BM^{\rightarrow}$ и $BA^{\rightarrow}$ трябва да са перпендикулярни лъчи; • $BM^{\rightarrow}$ и $BC^{\rightarrow}$ трябва да лежат в една и съща полуравнина относно правата, определена от точките A и B.

	Лъчът $\overrightarrow{BN}$ трябва да удовлетворява следните условия: • началото му трябва да бъде точка B; • $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{BC}$ трябва да са перпендикулярни лъчи; • $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{BA}$ трябва да лежат в една и съща полуравнина относно правата, определена от точките B и C.
Коментар	1. Когато точката O лежи на лъча $\overrightarrow{BM}$, лъчът $\overrightarrow{BA}$ е допирателна, а лъчът $\overrightarrow{BC}$ е секуща за окръжността с център точката O и радиус OB. 2. Когато точката O лежи на лъча $\overrightarrow{BN}$, лъчът $\overrightarrow{BC}$ е допирателна, а лъчът $\overrightarrow{BA}$ е секуща за окръжността с център точката O и радиус OB. 3. И в двата случая построената **точка** се свързва с обекти от обема на: • *понятието-обект* **лъч** • *първичното понятие* **права** • *понятието-обект* **полуравнина** • *понятието-релация* **перпендикулярни лъчи**

Обобщен коментар към системата от задачи

От тези 13 задачи за урока са избрани 1., 2., 5., 8. и 12., а останалите са допълнителни, които учителят може да използва по своя преценка, но целта им е същата – усвояване на определението на понятието **периферен ъгъл**.

Ако ученикът среща затруднения на определено ниво от реализирането на системата от задачи, то може да се използва следната методика на работа. Ако ученикът среща затруднения при изпълнение на упражненията в умствен план (т.е. разпознаване на обект от обема на понятието), то упражненията за корекция могат да го върнат на ниво – външно-речева форма на проявление на дейността (т.е. да повтори определението на понятието или да изобрази обекта). А ако и това упражнение не се изпълнява правилно, то упражненията за корекция трябва да го върнат на материалната опора.

7.3. Методически бележки към дидактическата система от задачи за формиране на умения за решаване на ирационални уравнения от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$

Последната системата от задачи е генерирана на базата на общия метод за решаване на ирационални уравнения и на общия метод за съставяне на ирационални уравнения от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ с целочислени коефициенти и целочислени корени, описан в 5.2.

При проектирането на тази система от задачи минаваме през следните нива на усвояване на математическите знания (според Н. Аммосова и Г. Краснова):

1. **Първи етап (начален)** На този етап учителят определя новото знание за учениците. В случая това е методът на нееквивалентните преобразувания за решаване на ирационални уравнения с един радикал.
2. **Втори етап (основен)** На този етап учениците трябва да извършват стандартни операции, които осигуряват съзнателно и трайно усвояване на новото знание. . В случая на това ниво у учениците трябва да се формират умения да решават този вид уравнения по посочения метод, а също така да се осигури управляемо и целенасочено поддържане на стари знания. За целта учителят трябва да състави система от съзнателно и целенасочено подбрани примери на ирационални уравнения с един радикал, така че да може да осигури формирането на тези умения у учениците и поддържането на старите знания и умения.
3. **Трети етап (творчески)** Той е предназначен за прилагане на знанията за ирационални уравнения в нестандартни ситуации. За целта като последни примери предлагаме решаване на две задачи чрез моделиране с ирационални уравнения с един радикал.

При проектирането на системата от задачи е съблюдавана системата от педагогически понятия (според В. Делибалтова) и са спазени следните изисквания (според П. Асенова):

1. **Целта** е създаване на дидактическа система от ирационалните уравнения с един радикал от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ с целочислени коефициенти и целочислени корени.

2. **Очакваният резултат** е формирането на умения за решаване на ирационални умения от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ с целочислени коефициенти и целочислени корени по метода на нееквивалентните преобразования и поддържане на стари знания (решаване на пълни и непълни квадратни уравнения, прилагане на формули за съкратено умножение).
3. **Условията за ползване на системата** се осигуряват чрез извеждане на алгоритъма за решаване на ирационални уравнения с един радикал, а **условията за постигането на очаквания резултат** се състоят в прилагането на този алгоритъм при решаване на целенасочено генерираните задачи от системата.
4. В системата от задачи са включени **различни типове задачи**. Тяхната сравнителна характеристика е поместена в *Таблица* 8. В *Таблица* 9 са генерирани 34 ирационални уравнения от посочения вид, като са изчерпани всички възможности за зависимостта (описана в *Таблица* 8) на вида и броя на корените на даденото ирационално уравнение (1) и на уравнението-следствие (2). От тях 15 са включени в системата от задачи за ученика. Останалите 19 задачи са допълнителни задачи за учителя, които дублират идейно и структурно задачите от системата задачи за ученика. В *Таблица* 8 е посочено кои от тези уравнения са подбрани в системата от задачи за упражнение с учениците. Последните две задачи от системата са за моделиране с ирационални уравнения с един радикал. Тяхната сравнителна характеристика е поместена в *Таблица* 10. Задача 35. е включена в системата от задачи за ученика, а задача 36. е за учителя.
5. Задачите в системата са подредени в **определен ред**. Започва се с решаване на ирационални уравнения от посочения вид, при които уравнението-следствие е пълно квадратно уравнение. След това се решават ирационални уравнения от посочения вид, при които уравнението-следствие е непълно квадратно уравнение. Освен това при съставяне на системата от задачи целенасочено е проследена зависимостта за вида и броя на корените на даденото ирационално уравнение и на уравнението-

следствие. Накрая се решават задачи, в които се моделира с ирационални уравнения.

6. Като **средство** за автоматично пресмятане на коефициентите a и b на уравнението $\sqrt{ax+b}=cx+d$ и проверката на корените му е създадена електронна таблица (линк) чрез *Microsoft Excel*. Тя е от изключителна полза за учителя, който ще съставя система от задачи чрез тази технология.
7. **Методите/дейностите**, които могат да се използват/извършват при реализиране на системата, са:
    - Върху първата задача от дадената система задачи *учителят запознава учениците с метода* на нееквивалентните преобразувания за решаване на ирационални уравнения с един радикал. В този случай функцията на тази задача е общо обучаваща.
    - *Извършване на упражнения* за прилагане и усвояване на алгоритъма за решаване на ирационални уравнения по метода на нееквивалентните преобразувания. За целта се използват следващите задачи от системата, като в този случай доминиращата им функция е специфична или конкретно обучаваща. Останалите задачи от системата могат да се използват за контрол на знанията на учениците, т.е. да се реализират контролните им функции. Това трябва да стане в аналогична среда на средата, в която учениците са обучавани. Затова идейно и структурно тези задачи не се различават от задачите, които са определени за работа в клас.
    - *Управляемо* осъществяване на *поддържане* на стари знания или умения.

Легенда към Таблица 8

Уравнението, означено с (1), е от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, а уравнението, означено с (2), е неговото уравнение-следствие $c^2x^2+(2cd-a)x+d^2-b=0$.

Видът на уравнение (2) може да бъде:

I. пълно квадратно уравнение;
II. непълно квадратно уравнение със свободен член, равен на 0;

III. непълно квадратно уравнение с коефициент пред първата степен на x, равен на 0;

IV. непълно квадратно уравнение със свободен член, равен на 0, и с коефициент пред първата степен на x, равен на 0.

Задачите, които са включени в системата от задачи за ученика, са означени със символа $(*)$. Останалите примери са допълнителни и са предназначени за ползване от учителя целесъобразно нуждите на неговите ученици. Тези задачи са означени със символа $(**)$.

Компонентите на технологията в *Таблица* 8 са записани във вида #.), където # е съответният номер на компонента от технологията, описана в теоретичната част в 5.2.2. Това се налага поради разграничаване на номера на компонентите на технологията от номера на задачите в *Таблица* 9.

Таблица 8

№ по ред	1	2	3	4	5
Компонент от технологията	1.)	1.)	1.)	2.)	2.)
Вид на уравнение (2)	I	I	I	I	I
Корени на уравнение (2)	$x_1 < 0$	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$	$x_1 < 0$	$x_1 < 0$
	$x_2 < 0$	$x_2 > 0$	$x_2 > 0$	$x_2 > 0$	$x_2 > 0$
	$x_1 \neq x_2$	$x_1 < x_2$	$x_1 \neq x_2$	$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$
Корени на уравнение (1)	x_1 е корен	x_1 е корен	x_1 е корен	x_1 е корен	x_1 е „чужд“ корен
	x_2 е корен	x_2 е корен	x_2 е корен	x_2 е „чужд“ корен	x_2 е корен
Задача № в *Таблица* 9	1.	2.	3.	4.	5.
Задача за ученика или за учителя	$(*)$	$(**)$	$(**)$	$(**)$	$(*)$

№ по ред	6	7	8	9	10
Компонент от технологията	3.)	3.)	3.)	4.)	4.)
Вид на уравнение (2)	I	I	I	I	I
Корени на уравнение (2)	$x_1 < 0$	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$
	$x_2 < 0$	$x_2 > 0$	$x_2 > 0$	$x_2 < 0$	$x_2 > 0$
	$x_1 \neq x_2$	$x_1 < x_2$	$x_1 \neq x_2$	$x_1 = x_2$	$x_1 = x_2$
Корени на уравнение (1)	x_1 е „чужд“ корен	x_1 е „чужд“ корен	x_1 е „чужд“ корен	x_1 е корен	x_1 е корен
	x_2 е „чужд“ корен	x_2 е „чужд“ корен	x_2 е „чужд“ корен	x_2 е корен	x_2 е корен
Задача № в *Таблица* 9	6.	7.	8.	9.	10.
Задача за ученика или за учителя	$(**)$	$(**)$	$(*)$	$(**)$	$(*)$

№ по ред	11	12	13	14	15
Компонент от технологията	5.)	5.)	6.)	7.)	7.)
Вид на уравнение (2)	I	I	I	II	II
Корени на уравнение (2)	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$	–	$x_1 < 0$	$x_1 = 0$
	$x_2 < 0$	$x_2 > 0$	–	$x_2 = 0$	$x_2 > 0$
	$x_1 = x_2$	$x_1 = x_2$	–	$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$
Корени на уравнение (1)	x_1 е „чужд“ корен	x_1 е „чужд“ корен	–	x_1 е корен	x_1 е корен
	x_2 е „чужд“ корен	x_2 е „чужд“ корен	–	x_2 е корен	x_2 е корен
Задача № в *Таблица* 9	11.	12.	13. и 14.	15.	16.
Задача за ученика или за учителя	$(**)$	$(*)$	13. – $(*)$ 14. – $(**)$	$(*)$	$(**)$

№ по ред	16	17	18	19	20
Компонент от технологията	8.)	8.)	8.)	8.)	9.)
Вид на уравнение (2)	II	II	II	II	II
Корени на уравнение (2)	$x_1 < 0$	$x_1 < 0$	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$	$x_1 < 0$
	$x_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x_2 > 0$	$x_2 > 0$	$x_2 = 0$
	$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$
Корени на уравнение (1)	x_1 е корен	x_1 е „чужд“ корен	x_1 е корен	x_1 е „чужд“ корен	x_1 е „чужд“ корен
	x_2 е „чужд“ корен	x_2 е корен	x_2 е „чужд“ корен	x_2 е корен	x_2 е „чужд“ корен
Задача № в *Таблица* 9	17.	18.	19.	20.	21.
Задача за ученика или за учителя	$(**)$	$(**)$	$(**)$	$(*)$	$(*)$

№ по ред	21	22	23	24	25
Компонент от технологията	9.)	10.)	11.)	11.)	12.)
Вид на уравнение (2)	II	III	III	III	III
Корени на уравнение (2)	$x_1 = 0$	$x_1 < 0$	$x_1 < 0$	$x_1 < 0$	$x_1 < 0$
	$x_2 > 0$	$x_2 > 0$	$x_2 > 0$	$x_2 > 0$	$x_2 > 0$
	$x_1 < x_2$	$x_1 = -x_2$	$x_1 = -x_2$	$x_1 = -x_2$	$x_1 = -x_2$
Корени на уравнение (1)	x_1 е „чужд“ корен	x_1 е корен	x_1 е корен	x_1 е „чужд“ корен	x_1 е „чужд“ корен
	x_2 е „чужд“ корен	x_2 е корен	x_2 е „чужд“ корен	x_2 е корен	x_2 е „чужд“ корен
Задача № в *Таблица* 9	22.	23. и 24.	25.	26.	27. и 28.
Задача за ученика или за учителя	$(**)$	23. – $(*)$ 24. – $(**)$	$(**)$	$(*)$	27. – $(*)$ 28. – $(**)$

№ по ред	26	27	28		
Компонент от технологията	13.)	14.)	15.)		
Вид на уравнение (2)	III	IV	IV		
Корени на уравнение (2)	–	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$		
	–	$x_2 = 0$	$x_2 = 0$		
	–	$x_1 = x_2$	$x_1 = x_2$		
Корени на уравнение (1)	–	x_1 е корен	x_1 е „чужд“ корен		
	–	x_2 е корен	x_2 е „чужд“ корен		
Задача № в *Таблица* 9	29. и 30.	31. и 32.	33. и 34.		
Задача за ученика или за учителя	29. – $(*)$ 30. – $(**)$	31. – $(*)$ 32. – $(**)$	33. – $(*)$ 34. – $(**)$		

Таблица 9

Задача №	1	2
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c = -1$; $d = 2$	$c = 1$; $d = 2$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = -3$; $x_2 = -1$	$x_1 = -2$; $x_2 = 4$
Знак на $cx_1 + d$	$-1.(-3) + 2 = 5$ $5 > 0$	$1.(-2) + 2 = 0$ $0 = 0$
Знак на $cx_2 + d$	$-1.(-1) + 2 = 3$ $3 > 0$	$1.4 + 2 = 6$ $6 > 0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.(-1).2 + (-1)^2.(-3 + (-1))$ $a = -4 + 1.(-4) = -8$	$a = 2.1.2 + 1^2.(-2 + 4)$ $a = 4 + 1.2 = 6$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = 2^2 - (-1)^2.(-3).(-1)$ $b = 4 - 1.3 = 1$	$b = 2^2 - 1^2.(-2).4$ $b = 4 - 1.(-8) = 12$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-8x + 1} = -x + 2$	$\sqrt{6x + 12} = x + 2$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 + 4x + 3 = 0$	$x^2 - 2x - 8 = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = -3$ е корен $x_2 = -1$ е корен	$x_1 = -2$ е корен $x_2 = 4$ е корен

Задача №	3	4
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c = 2$; $d = 3$	$c = -1$; $d = 3$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = 1$; $x_2 = 2$	$x_1 = -2$; $x_2 = 5$
Знак на $cx_1 + d$	$2.1 + 3 = 5$ $5 > 0$	$-1.(-2) + 3 = 5$ $5 > 0$
Знак на $cx_2 + d$	$2.2 + 3 = 7$ $7 > 0$	$-1.5 + 3 = -2$ $-2 < 0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.2.3 + 2^2.(1+2)$ $a = 12 + 4.3 = 24$	$a = 2.(-1).3 + (-1)^2.(-2+5)$ $a = -6 + 1.3 = -3$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = 3^2 - 2^2.1.2$ $b = 9 - 4.2 = 1$	$b = 3^2 - (-1)^2.(-2).5$ $b = 9 - 1.(-10) = 19$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{24x+1} = 2x + 3$	$\sqrt{-3x+19} = -x + 3$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$x^2 - 3x - 10 = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = 1$ е корен $x_2 = 2$ е корен	$x_1 = -2$ е корен $x_2 = 5$ е „чужд“ корен

Задача №	5	6
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c=1$; $d=2$	$c=-1$; $d=-4$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1=-6$; $x_2=1$	$x_1=-2$; $x_2=-1$
Знак на cx_1+d	$1.(-6)+2=-4$ $-4<0$	$-1.(-2)+(-4)=-2$ $-2<0$
Знак на cx_2+d	$1.1+2=3$ $3>0$	$-1.(-1)+(-4)=-3$ $-3<0$
$a=2cd+c^2(x_1+x_2)$	$a=2.1.2+1^2.(-6+1)$ $a=4+1.(-5)=-1$	$a=2.(-1).(-4)+(-1)^2.(-2+(-1))$ $a=8+1.(-3)=5$
$b=d^2-c^2x_1x_2$	$b=2^2-1^2.(-6).1$ $b=4-1.(-6)=10$	$b=(-4)^2-(-1)^2.(-2).(-1)$ $b=16-1.2=14$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-x+10}=x+2$	$\sqrt{5x+14}=-x-4$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2+5x-6=0$	$x^2+3x+2=0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1=-6$ е „чужд“ корен $x_2=1$ е корен	$x_1=-2$ е „чужд“ корен $x_2=-1$ е „чужд“ корен

Задача №	7	8
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c = 1$; $d = -2$	$c = -1$; $d = 1$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = -2$; $x_2 = 1$	$x_1 = 2$; $x_2 = 3$
Знак на $cx_1 + d$	$1.(-2)+(-2) = -4$ $-4 < 0$	$-1.2+1 = -1$ $-1 < 0$
Знак на $cx_2 + d$	$1.1+(-2) = -1$ $-1 < 0$	$-1.3+1 = -2$ $-2 < 0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.1.(-2)+1^2.(-2+1)$ $a = -4+1.(-1) = -5$	$a = 2.(-1).1+(-1)^2.(2+3)$ $a = -2+1.5 = 3$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = (-2)^2 - 1^2.(-2).1$ $b = 4-1.(-2) = 6$	$b = 1^2 - (-1)^2.2.3$ $b = 1-1.6 = -5$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-5x+6} = x-2$	$\sqrt{3x-5} = -x+1$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 + x - 2 = 0$	$x^2 - 5x + 6 = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = -2$ е „чужд“ корен $x_2 = 1$ е „чужд“ корен	$x_1 = 2$ е „чужд“ корен $x_2 = 3$ е „чужд“ корен

Задача №	9	10
$c \in \mathbb{Z};\ d \in \mathbb{Z}$	$c = -1;\ d = 2$	$c = 1;\ d = -1$
$x_1 \in \mathbb{Z};\ x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = x_2 = -1$	$x_1 = x_2 = 2$
Знак на $cx_1 + d$	$-1.(-1) + 2 = 3$ $3 > 0$	$1.2 + (-1) = 1$ $1 > 0$
Знак на $cx_2 + d$	$-1.(-1) + 2 = 3$ $3 > 0$	$1.2 + (-1) = 1$ $1 > 0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.(-1).2 + (-1)^2.(-1 + (-1))$ $a = -4 + 1.(-2) = -6$	$a = 2.1.(-1) + 1^2.(2 + 2)$ $a = -2 + 1.4 = 2$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = 2^2 - (-1)^2.(-1).(-1)$ $b = 4 - 1.1 = 3$	$b = (-1)^2 - 1^2.2.2$ $b = 1 - 1.4 = -3$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-6x + 3} = -x + 2$	$\sqrt{2x - 3} = x - 1$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x^2 - 4x + 4 = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = x_2 = -1$ е корен	$x_1 = x_2 = 2$ е корен

Задача №	11	12
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c = 2$; $d = 1$	$c = -1$; $d = 2$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = x_2 = -2$	$x_1 = x_2 = 3$
Знак на $cx_1 + d$	$2.(-2)+1=-3$ $-3<0$	$-1.3+2=-1$ $-1<0$
Знак на $cx_2 + d$	$2.(-2)+1=-3$ $-3<0$	$-1.3+2=-1$ $-1<0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.2.1+2^2.(-2+(-2))$ $a = 4+4.(-4) = -12$	$a = 2.(-1).2+(-1)^2.(3+3)$ $a = -4+1.6 = 2$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = 1^2 - 2^2.(-2).(-2)$ $b = 1-4.4 = -15$	$b = 2^2 - (-1)^2.3.3$ $b = 4-1.9 = -5$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-12x-15} = 2x+1$	$\sqrt{2x-5} = -x+2$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 + 4x + 4 = 0$	$x^2 - 6x + 9 = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = x_2 = -2$ е „чужд“ корен	$x_1 = x_2 = 3$ е „чужд“ корен

Задача №	13	14
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c=1$; $d=1$	$c=1$; $d=2$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	–	–
Знак на cx_1+d	–	–
Знак на cx_2+d	–	–
$a=2cd+c^2\left(x_1+x_2\right)$	$a=3$	$a=3$
$b=d^2-c^2x_1x_2$	$\left(b=-2\right)$ [10*]	$\left(b=1\right)$ [11**]
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{3x-2}=x+1$	$\sqrt{3x+1}=x+2$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2-x+3=0$	$x^2+x+3=0$
Корени на съставеното уравнението	Уравнението няма реални корени.	Уравнението няма реални корени.

[10*] Стойността на b е избрана така, че да удовлетворява условието $b<\frac{ad}{c}-\left(\frac{a}{2c}\right)^2$.

[11**] Същото.

[10*] $\frac{ad}{c}-\left(\frac{a}{2c}\right)^2=\frac{3.1}{1}-\left(\frac{3}{2.1}\right)^2=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$, $b<\frac{3}{4}$. Следователно нека $b=-2$.

[11**] $\frac{ad}{c}-\left(\frac{a}{2c}\right)^2=\frac{3.2}{1}-\left(\frac{3}{2.1}\right)^2=6-\frac{9}{4}=3\frac{3}{4}$, $b<3\frac{3}{4}$. Следователно нека $b=1$.

Задача №	15	16
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c = -2$; $d = 1$	$c = 1$; $d = 3$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = -1$; $x_2 = 0$	$x_1 = 0$; $x_2 = 2$
Знак на $cx_1 + d$	$-2.(-1)+1=3$ $3>0$	$1.0+3=3$ $3>0$
Знак на $cx_2 + d$	$-2.0+1=1$ $1>0$	$1.2+3=5$ $5>0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.(-2).1+(-2)^2.(-1+0)$ $a = -4+4.(-1) = -8$	$a = 2.1.3+1^2.(0+2)$ $a = 6+1.2 = 8$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = 1^2 - (-2)^2.(-1).0$ $b = 1+1.0 = 1$	$b = 3^2 - 1^2.0.2$ $b = 9+1.0 = 9$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-8x+1} = -2x+1$	$\sqrt{8x+9} = x+3$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 + x = 0$	$x^2 - 2x = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = -1$ е корен $x_2 = 0$ е корен	$x_1 = 0$ е корен $x_2 = 2$ е корен

Задача №	17	18
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c = -2$; $d = -1$	$c = 2$; $d = 1$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = -2$; $x_2 = 0$	$x_1 = -3$; $x_2 = 0$
Знак на $cx_1 + d$	$-2.(-2)+(-1)=3$ $3>0$	$2.(-3)+1=-5$ $-5<0$
Знак на $cx_2 + d$	$-2.0+(-1)=-1$ $-1<0$	$2.0+1=1$ $1>0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.(-2).(-1)+(-2)^2.(-2+0)$ $a = 4+4.(-2) = -4$	$a = 2.2.1+2^2.(-3+0)$ $a = 4+4.(-3) = -8$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = (-1)^2 - (-2)^2.(-2).0$ $b = 1-4.0 = 1$	$b = 1^2 - 2^2.(-3).0$ $b = 1-4.0 = 1$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-4x+1} = -2x-1$	$\sqrt{-8x+1} = 2x+1$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 + 2x = 0$	$x^2 + 3x = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = -2$ е корен $x_2 = 0$ е „чужд“ корен	$x_1 = -3$ е „чужд“ корен $x_2 = 0$ е корен

Задача №	19	20
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c = -1$; $d = 3$	$c = 1$; $d = -1$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = 0$; $x_2 = 4$	$x_1 = 0$; $x_2 = 5$
Знак на $cx_1 + d$	$-1.0 + 3 = 3$ $3 > 0$	$1.0 + (-1) = -1$ $-1 < 0$
Знак на $cx_2 + d$	$-1.4 + 3 = -1$ $-1 < 0$	$1.5 + (-1) = 4$ $4 > 0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.(-1).3 + (-1)^2.(0+4)$ $a = -6 + 1.4 = -2$	$a = 2.1.(-1) + 1^2.(0+5)$ $a = -2 + 1.5 = 3$
$b = d^2 - c^2x_1x_2$	$b = 3^2 - (-1)^2.0.4$ $b = 9 - 1.0 = 9$	$b = (-1)^2 - 1^2.0.5$ $b = 1 - 1.0 = 1$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-2x+9} = -x + 3$	$\sqrt{3x+1} = x - 1$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 - 4x = 0$	$x^2 - 5x = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = 0$ е корен $x_2 = 4$ е „чужд“ корен	$x_1 = 0$ е „чужд“ корен $x_2 = 5$ е корен

Задача №	21	22
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c = 1$; $d = -1$	$c = -1$; $d = -1$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = -4$; $x_2 = 0$	$x_1 = 0$; $x_2 = 5$
Знак на $cx_1 + d$	$1.(-4) + (-1) = -5$ $-5 < 0$	$-1.0 + (-1) = -1$ $-1 < 0$
Знак на $cx_2 + d$	$1.0 + (-1) = -1$ $-1 < 0$	$-1.5 + (-1) = -6$ $-6 < 0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.1.(-1) + 1^2.(-4 + 0)$ $a = -2 + 1.(-4) = -6$	$a = 2.(-1).(-1) + (-1)^2.(0 + 5)$ $a = 2 + 1.5 = 7$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = (-1)^2 - 1^2.(-4).0$ $b = 1 - 1.0 = 1$	$b = (-1)^2 - (-1)^2.0.5$ $b = 1 - 1.0 = 1$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-6x + 1} = x - 1$	$\sqrt{7x + 1} = -x - 1$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 + 4x = 0$	$x^2 - 5x = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = -4$ е „чужд“ корен $x_2 = 0$ е „чужд“ корен	$x_1 = 0$ е „чужд“ корен $x_2 = 5$ е „чужд“ корен

Задача №	23	24
$c \in \mathbb{Z};\ d \in \mathbb{Z}$	$c = 1;\ d = 2$	$c = 1;\ d = 1$
$x_1 \in \mathbb{Z};\ x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = -2;\ x_2 = 2$	$x_1 = -1;\ x_2 = 1$
Знак на $cx_1 + d$	$1.(-2) + 2 = 0$ $0 = 0$	$1.(-1) + 1 = 0$ $0 = 0$
Знак на $cx_2 + d$	$1.2 + 2 = 4$ $4 > 0$	$1.1 + 1 = 2$ $4 > 0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.1.2 + 1^2.(-2 + 2)$ $a = 4 + 1.0 = 4$	$a = 2.1.1 + 1^2.(-1 + 1)$ $a = 2 + 1.0 = 2$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = 2^2 - 1^2.(-2).2$ $b = 4 + 1.4 = 8$	$b = 1^2 - 1^2.(-1).1$ $b = 1 - 1.(-1) = 2$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{4x + 8} = x + 2$	$\sqrt{2x + 2} = x + 1$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 - 4 = 0$	$x^2 - 1 = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = -2$ е корен $x_2 = 2$ е корен	$x_1 = -1$ е корен $x_2 = 1$ е корен

Задача №	25	26
$c\in\mathbb{Z};\ d\in\mathbb{Z}$	$c=-1;\ d=-2$	$c=1;\ d=-1$
$x_1\in\mathbb{Z};\ x_2\in\mathbb{Z}$	$x_1=-3;\ x_2=3$	$x_1=-3;\ x_2=3$
Знак на cx_1+d	$-1.(-3)+(-2)=1$ $1>0$	$1.(-3)+(-1)=-4$ $-4<0$
Знак на cx_2+d	$-1.3+(-2)=-5$ $-5<0$	$1.3+(-1)=2$ $2>0$
$a=2cd+c^2(x_1+x_2)$	$a=2.(-1).(-2)+(-1)^2.(-3+3)$ $a=4+1.0=4$	$a=2.1.(-1)+1^2.(-3+3)$ $a=-2+1.0=-2$
$b=d^2-c^2x_1x_2$	$b=(-2)^2-(-1)^2.(-3).3$ $b=4+1.9=13$	$b=(-1)^2-1^2.(-3).3$ $b=1+1.9=10$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{4x+13}=-x-2$	$\sqrt{-2x+10}=x-1$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2-9=0$	$x^2-9=0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1=-3$ е корен $x_2=3$ е „чужд“ корен	$x_1=-3$ е „чужд“ корен $x_2=3$ е корен

Задача №	27	28
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c=-1$; $d=-2$	$c=-1$; $d=-3$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1=-1$; $x_2=1$	$x_1=-2$; $x_2=2$
Знак на cx_1+d	$-1.(-1)+(-2)=-1$ $-1<0$	$-1.(-2)+(-3)=-1$ $-1<0$
Знак на cx_2+d	$-1.1+(-2)=-3$ $-3<0$	$-1.2+(-3)=-5$ $-3<0$
$a=2cd+c^2(x_1+x_2)$	$a=2.(-1).(-2)+(-1)^2.(-1+1)$ $a=4+1.0=4$	$a=2.(-1).(-3)+(-1)^2.(-2+2)$ $a=6+1.0=6$
$b=d^2-c^2x_1x_2$	$b=(-2)^2-(-1)^2.(-1).1$ $b=4+1.1=5$	$b=(-3)^2-(-1)^2.(-2).2$ $b=9+1.4=13$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{4x+5}=-x-2$	$\sqrt{6x+13}=-x-3$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2-1=0$	$x^2-4=0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1=-1$ е „чужд“ корен $x_2=1$ е „чужд“ корен	$x_1=-2$ е „чужд“ корен $x_2=2$ е „чужд“ корен

Задача №	29	30
$c \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$	$c = 1$; $d = 2$	$c = 1$; $d = 3$
$x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_2 \in \mathbb{Z}$	–	–
Знак на $cx_1 + d$	–	–
Знак на $cx_2 + d$	–	–
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 4$	$a = 6$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$(b = 1)$ [12*]	$(b = 1)$ [13**]
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{4x+1} = x + 2$	$\sqrt{6x+1} = x + 3$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 + 3 = 0$	$x^2 + 8 = 0$
Корени на съставеното уравнението	Уравнението няма реални корени.	Уравнението няма реални корени.

[12*] Стойността на b е избрана така, че да удовлетворява условието $b < \frac{ad}{c} - \left(\frac{a}{2c}\right)^2$.

[13**] Същото.

[12*] $\frac{ad}{c} - \left(\frac{a}{2c}\right)^2 = \frac{4.2}{1} - \left(\frac{4}{2.1}\right)^2 = 8 - 4 = 4$, $b < 4$. Следователно нека $b = 1$.

[13**] $\frac{ad}{c} - \left(\frac{a}{2c}\right)^2 = \frac{6.3}{1} - \left(\frac{6}{2.1}\right)^2 = 18 - 9 = 9$, $b < 9$. Следователно нека $b = 1$.

Задача №	31	32
$c \in \mathbb{Z};\ d \in \mathbb{Z}$	$c = 1;\ d = 1$	$c = 2;\ d = 1$
$x_1 \in \mathbb{Z};\ x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = x_2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$
Знак на $cx_1 + d$	$1.0 + 1 = 1$ $1 > 0$	$2.0 + 1 = 1$ $1 > 0$
Знак на $cx_2 + d$	$1.0 + 1 = 1$ $1 > 0$	$2.0 + 1 = 1$ $1 > 0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.1.1 + 1^2.(0 + 0)$ $a = 2 + 1.0 = 2$	$a = 2.2.1 + 2^2.(0 + 0)$ $a = 4 + 4.0 = 4$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = 1^2 - 1^2.0.0$ $b = 1 - 1.0 = 1$	$b = 1^2 - 2^2.0.0$ $b = 1 - 4.0 = 1$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{2x+1} = x + 1$	$\sqrt{4x+1} = 2x + 1$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 = 0$	$x^2 = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = x_2 = 0$ е корен	$x_1 = x_2 = 0$ е корен

Задача №	33	34
$c \in \mathbb{Z};\ d \in \mathbb{Z}$	$c = 1;\ d = -1$	$c = 3;\ d = -1$
$x_1 \in \mathbb{Z};\ x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = x_2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$
Знак на $cx_1 + d$	$1.0 - 1 = -1$ $-1 < 0$	$3.0 - 1 = -1$ $-1 < 0$
Знак на $cx_2 + d$	$1.0 - 1 = -1$ $-1 < 0$	$3.0 - 1 = -1$ $-1 < 0$
$a = 2cd + c^2 \left(x_1 + x_2\right)$	$a = 2.1.\left(-1\right) + 1^2.\left(0 + 0\right)$ $a = -2 + 1.0 = -2$	$a = 2.3.\left(-1\right) + 3^2.\left(0 + 0\right)$ $a = -6 + 9.0 = -6$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = \left(-1\right)^2 - 1^2.0.0$ $b = 1 - 1.0 = 1$	$b = \left(-1\right)^2 - 3^2.0.0$ $b = 1 - 9.0 = 1$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-2x + 1} = x - 1$	$\sqrt{-6x + 1} = 3x - 1$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 = 0$	$x^2 = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = x_2 = 0$ е „чужд“ корен	$x_1 = x_2 = 0$ е „чужд“ корен

Задача 35. Намислих число, умножих го по (-2) и полученото произведение събрах с 3. Новото число коренувах и получих противоположното число на намисленото число. Кое е намисленото число?

Задача 36. Лицето на квадрат е равно на $(3x+10)$ cm^2. Намерете дължината на страната на квадрата в сантиметри, ако тя е равна на стойността на израза $(x+2)$.

Коментар към задачи 35. *и* 36.

Дейностите, които се извършват в последните две задача от системата, имат творчески характер. При решаването на тези задачи се изисква моделиране с ирационални уравнения с един радикал. Задачите са подбрани така, че ирационалните уравненията, с които се моделират ситуациите, отговарят на описаната технология в 5.2. В *Таблица* 10 е описан начина за генерирането на тези уравнения. При решаването на задача 36. е необходимо и допълнително изчисление (за дължината на страната на квадрата) освен моделирането и решаването на ирационалното уравнение.

Обобщен коментар към системата от задачи

От предоставените 36 задачи за урока са избрани задачите 1., 5., 8., 10., 12., 13., 15., 20., 21., 23., 26., 27., 29., 31., 33. и 35. Останалите задачи са допълнителни и учителят може да ги използва по своя преценка, но целта им е същата – формиране на умения за решаване на ирационални уравнения с един радикал от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ с целочислени коефициенти и целочислени корени.

Ако ученикът среща трудност при решаването на ирационалните уравнения с един радикал, то учителят трябва да диагностицира причината за затрудненията. Ако това е някакво междинно знание/умение (например неправилно прилагане на формула за съкратено умножение или друго знание/умение, необходимо за реализирането на този алгоритъм), то това знание трябва да се актуализира или съответното умение да се упражни с един или повече примери. Ако затруднението е в запомняне на алгоритъма, то той трябва да се припомни отново. Това може да стане чисто формално или като материална опора отново да се използва решеният пример.

Таблица 10

Задача №	35	36
$c \in \mathbb{Z};\ d \in \mathbb{Z}$	$c = -1;\ d = 0$	$c = 1;\ d = 2$
$x_1 \in \mathbb{Z};\ x_2 \in \mathbb{Z}$	$x_1 = -3;\ x_2 = 1$	$x_1 = -3;\ x_2 = 2$
Знак на $cx_1 + d$	$-1.(-3) + 0 = 3$ $3 > 0$	$1.(-3) + 2 = -1$ $-1 < 0$
Знак на $cx_2 + d$	$-1.1 + 0 = -1$ $-1 < 0$	$1.2 + 2 = 4$ $4 > 0$
$a = 2cd + c^2(x_1 + x_2)$	$a = 2.(-1).0 + (-1)^2.(-3+1)$ $a = 0 + 1.(-2) = -2$	$a = 2.1.2 + 1^2.(-3+2)$ $a = 4 + 1.(-1) = 3$
$b = d^2 - c^2 x_1 x_2$	$b = 0^2 - (-1)^2.(-3).1$ $b = 0 + 1.3 = 3$	$b = 2^2 - 1^2.(-3).2$ $b = 4 - 1.(-6) = 10$
Уравнение, което съставяме	$\sqrt{-2x+3} = -x$	$\sqrt{3x+10} = x + 2$
Уравнение, до което се свежда съставеното	$x^2 + 2x - 3 = 0$	$x^2 + x - 6 = 0$
Корени на съставеното уравнението	$x_1 = -3$ е корен $x_2 = 1$ е „чужд“ корен	$x_1 = -3$ е „чужд“ корен $x_2 = 2$ е корен

8. Заключение

В обобщение може да се каже, че темата на дипломната работа е актуална, а разработеното съдържание е практически приложимо. Тя е актуална, тъй като се разглеждат конкретни теми от училищния курс по математика от сега действащите учебни програми по математика. От друга страна, разработката е практически приложима, защото съдържанието на дипломната работа се отнася до управляем процес на създаване на системите от задачи върху тези теми. Подробно са описани технологиите за генериране на дадените системи от задачи и детайлно е описана и методиката за работа с предложените системи от задачи.

8.1. Обобщение на постигнатите резултати

В резултат на разработването на дипломната работа са постигнати следните резултати. При съставянето на трите системи от задачи са съблюдавани трите аспекта на педагогическа технология, описани от Г. К. Селевко:

1. **Научен** В научен аспект първите две дидактически системи от задачи са реализирани на базата на логическата структура на определението на конкретно понятие. Тази теория е описана от доц. д-р Ю. Нинова (Нинова, 2004). Третата система от задачи е създадена въз основа на двете теореми, формулирани в статията на П. В. Семенов „Как составлять уравнения $\sqrt{ax+b}=cx+d$" в международно признатото списание „Математика в школе" (Семенов, 2000).
2. **Процесуално-описателен** По отношение на този аспект при създаването на системите от задачи са формулирани техните цели, очаквани резултати, условия за ползване, методи/дейности и средствата. За да се усъвършенства системата за овладяване на новите знания или системата за формиране на умения, е необходим анализ на тези знания или структуриране на стъпките за формиране на съответни умения и изработването на адекватни дидактическите средства, с помощта на които може да се постигне това овладяване. Системите от задачи са конструирани върху технологии, за които е описана тяхната структура и

компоненти. За съставяне на дидактическите материали са посочени и използвани възможности на динамичния геометричен софтуер *GeoGebra* и възможности на електронните таблици *Microsoft Excel*.

3. **Процесуално-действен** Този аспект е реализиран чрез изработването на трите дидактически системи от задачи за ученика и методическото ръководство за учителя. Системите са частично представени в глава 6., а в глава 7. са представени явно, пълно и детайлно са описани тяхното генериране и методика за ползване.

8.2. Насоки за бъдещо развитие и усъвършенстване

По отношение на бъдещото развитие и усъвършенстване на дипломната работа се предвижда разработването на допълнителни дидактически системи от задачи чрез конкретизиране върху друго учебно съдържание на вече разгледаните частнопредметни технологии. С цел създаване на дидактически модел на базата на технологичния подход е необходимо систематизиране на описани в литературата частнопредметни технологии, анализирането им от гледна точка на набор от критерии или създаване на нови технологии и тяхното конкретизиране върху конкретно учебно съдържание.

9. Използвана литература

1. Duncker, K. (1945). *On Problem Solving. Psychological Monographs.* American Psychological Association.
2. Galbraith, J. K. (1967). *Part I: The History and Nature of the New Industrial State Change and the Industrial System from "The new industrial state".* Boston, MA: Houghton Mifflin. Изтеглено на 25. 07. 2020 г. от https://bit.ly/3iro37z (Last modified: 2019/11/08 10:39)
3. Januszewski, A., & Persichitte, K. A. (2008). *A history of the AECT's definitions of educational technology. In A. Januszewski & M. Molenda (Eds.), Educational technology (pp. 259-282).* New York: Lawrence Erlbaum Associates.
4. Toffler, A. (1980). *The Third Wave. The Classic Study of Tommorrow.* USA: Bantam Books.
5. Алексеевич, М. А. (2007). *Многоуровневая система задач как средство обучения учащихся средней школы алгебре и началам математического анализа (автореферат на диссертация).* Самара. Изтеглено на 03. 08. 2020 г. от http://www.dslib.net/teoria-vospitania/mnogourovnevaja-sistema-zadach-kak-sredstvo-obuchenija-uchawihsja-srednej-shkoly-algebre.html
6. Аммосова, Н. А., & Краснова, Г. Г. (2015). Конструирование системы задач по алгебре и началам математического анализа в соответствии с этапами усвоения учащимися знаний. *Международный научно-исследователский журнал*(брой 3, част 4), 25-27. Изтеглено на 25. 07. 2020 г. от https://research-journal.org/pedagogy/konstruirovanie-sistemy-zadach-po-algebre-i-nachalam-matematicheskogo-analiza-v-sootvetstvii-s-etapami-usvoeniya-uchashhimisya-znanij/
7. Антипешева, Ц. (н.д.). *Монографичен труд.* Изтеглено на 10. 08. 2020 г. от https://bit.ly/3ioKlXJ
8. Асенова, П. (1990). *Построение и использование системы задач дляобучения алгоритмизации в курсе информатики болгарской школы.* Москва: РАО.
9. Асенова, П., & Маринов, М. (2019). Система от задачи в обучението по математика. *Математика и информатика*, 53. Извлечено от https://bit.ly/3h1I3N7

10. Бершадский, М. (2002). В каких значениях используется понятие «технология» в педагогической литературе? *Школьные технологии.*(1), 6.

11. Васильева, В. (н.д.). *Педагогические технологии в образовательном процессе; формы, методы и технологические основы проблемного обучения*. Изтеглено на 11. 08. 2020 г. от Подготовка к экзамену по педагогике: http://i-educator.ru/vopros44

12. Великова, Е., & Петкова, М. (2014). *Ролята на педагогическите технологии в учебния процес – теоретичен анализ.* Русе: Педагогически новости. Изтеглено на 01. 08. 2020 г. от https://bit.ly/2FbN2gX

13. Войнов, М., & Милев, А. (1990). *Латинско–български речник A–Z.* София: Наука и просвета.

14. Ганчев, И. (1971). *За математическите задачи.* София: Народна просвета.

15. Ганчев, Н., & Иванов, И. (1984). *Технологични основи на обучението.* Шумен: ВПИ "Константин Преславски", № 7-8, 1993, 3-15. Изтеглено на 03. 08. 2020 г. от http://www.ivanpivanov.com/research/

16. Гъров, К. (2004). Система от опорни задачи при подготовката на талантливи и изявени ученици за участие в олимпиади и състезания по информатика. *Математика и математическо образование,* 33-та пролетна конференция на СМБ, 316 – 321.

17. Гъров, К. (2010). Задачите в обучението по информатика и информационни технологии. *Образованието в информационното*, Национална конференция.

18. Гъров, К., & Тодорова, Е. (2006). Примерна система от опорни задачи по темата „Алгоритми и задачи от теория на числата“ за подготовка на талантливи ученици по информатика. *Математика и математическо образование,* 35-та пролетна конференция на СМБ, 374 – 380.

19. Далингер, В. А. (1982). Теоретическая модель системы упражнений как средство реализации внутрипредметных связей в школьном курсе математики. *Новые исследования в педагогических науках, Педагогика*(1), 53-56.

20. Денек, К., & Гнитецки, Я. (1983). *Проблемы эффективности в технологии обучения.* Соврем, высш. шк. - № 1. - С. 179-197.

21. Дурева, Д. (2001). *Модулен подход в училищния курс по информатика.* Дисертация за кандидат на педагогическите науки.

22. Колягин, Ю. М. (1977). Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы. *Автореф. диссертации доктора педагогических*.

23. Коменски, Я. А. (1957). *Велика дидактика.* София: БАН.

24. Кукушин, С. (2005). *Теория и методика обучения / В.С. Кукушин.— Ростов н/Д.* Феникс, 474, [1] с. (Высшее образование).

25. Лернер, И. Я. (1978). Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? *Знания*, 112. Изтеглено на 07. 25. 2020 г. от https://www.studmed.ru/view/lerner-iya-kachestva-znaniy-uchaschihsya-kakimi-oni-dolzhny-byt_3ad0345220b.html

26. Малчески, Р. (2001). *Методика на наставата по математика.* Скопје: Алфа 94.

27. Маслева, Н. (2001). *Гръцко-български речник. Българо-гръцки речник.* Велико Търново: Gaberoff, Елпис.

28. Михова, М. (2003). *Дизайн на обучението. Теоретико–приложни аспекти.* Велико Търново: Астарта.

29. Нинкова, П., Лилкова, М., Стоева, Т., Шаркова, И., & Раденкова, Л. (2018). *Математика за 7. клас.* София: Просвета основано 1945.

30. Нинова, Ю. (2004). *Модели и дидактически технологии за решаване на дидактически задачи, свързани с изучаването на математическите понятия.* София.

31. Нинова, Ю., Матакиева, С., Райков, Н., & Христова, Т. (2018). *Математика за 7. клас.* София: Просвета плюс.

32. Новикова, А. (2017). Система задач как средство реализации прикладной направленности курса алгебры. *Univers pedagogic*, 48-52. Извлечено от http://ise.md/uploads/files/1528484243_revistaup_nr.4_2017.pdf

33. Павлов, Д. (2001). *Образователни информационни технологии. Модул първи (М-1). Университетски курс.* София: Даниела Убенова.

34. Петров, П., & Атанасова, М. (2001). *Образователни технологии и стратегии на учене.* София: Веда Словена - ЖГ.

35. Пойа, Д. (1968). *Математическо откритие.* (И. Димовски, & И. Чобанов, Прев.) София: Народна просвета.
36. *Речник на българския език*. (2014). Извлечено от Института за български език „Професор Любомир Андрейчин“: https://ibl.bas.bg/
37. Саранцев, Г. С. (1982). Система упражнений по математике как предмет методического исследования в педагогических науках. *Педагогика, 1*, 40-42.
38. Селевко, Г. К. (1998). *Современные образовательные технологии.* М.: Народное образование. Изтеглено на 28. 07. 2020 г. от https://may.alleng.org/d/ped/ped021.htm
39. Семенов, П. В. (2000). Как составлять уравнения $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ *Математика в школе* (№ 10), стр. 18-19.
40. *СИСТЕМА ЗАДАЧ.* (15. 08. 2019 г.). Извлечено от Словари и энциклопедии на Академике: https://bit.ly/30KnHmt
41. Скафа, Е., & Милушев, В. (2009). *Конструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи.* Пловдив: Университетско издателство "Паисий Хилендарски".
42. Стефанова, М. (1999). *Дидактическо общуване.* София: Булвест 2000.
43. Талызина, Н. Ф. (1957). К вопросу об усвоении начальных геометрических понятий. Материалы совещания по психологии (1955). *Известия АПН РСФСР*.
44. Талызина, Н. Ф. (1997). *Технология обучения и ее место в педагогической теории. Современная высшая школа* (Том 1).
45. Тонов, И. К. (2012). *Евристика - наука, изкуство, занаят.* София.
46. Туджаров, Х. (2007). *Електронен учебник по Информатика.* Велико Търново: ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“. Изтеглено на 27. 07. 2020 г. от http://www.tuj.asenevtsi.com/index.htm
47. Филипова-Байрова, М., Бояджиев, С., Машалова, Е., & Костов, К. (1982). *Речник на чуждите думи в българския език.* София: Институт за български език, Българска академия на науките.
48. Чавдарова-Костова, С., Делибалтова, В., & Господинов, Б. (2012). *Педагогика.* София: Университетско издателство "Св. Климент Охридски".