СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Катедра „Обучение по математика и информатика“

ДИПЛОМНА РАБОТА

За получаване на образователно-квалификационна степен „магистър“

на Моника Стоянова Тодоринска, ф.н. 24801
специалност „Технологии за обучение по математика и информатика“

Тема: „Рационални изрази“

Научен ръководител:
проф. д-р Иван Тонов

София, 2022 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

Увод 4
I. Алгебра 9
1. Предмет на алгебрата 9
2. Кратки исторически сведения за развитието на алгебрата 9
2.1. Вавилон 9
2.2. Гърция 9
2.3. Китай 9
2.4. Индия 10
2.5. Страните с арабски език. Узбекистан. Таджикистан 10
3. Елементарна алгебра 11
II. Рационални изрази 11
1. Пръстен и поле 11
2. Алгебричен израз 13
3. Променливи и постоянни величини 13
3.1. Променливи величини 13
3.1.1. Независима променлива 14
3.1.2. Зависима променлива 14
3.1.3. Променлива величина 14
3.2. Постоянни величини 14
3.2.1. Константа 14
3.2.2. Параметър 15
4. Цели рационални изрази 15
5. Едночлен и многочлен 15
5.1. Едночлен 15
5.2. Многочлен 16
5.2.1. Определения 16
5.2.2. Тъждествени изрази 16
5.2.3. Теорема за тъждественост на многочлени 16
6. Рационални изрази 17
7. Алгебрични дроби 18
8. Тъждественост на алгебричните дроби 19
9. Съкращаване на алгебрични дроби 22
III. Рационалните изрази в училищния курс по математика за VIII клас 26
1. Учебна програма по математика за VIII клас (Общообразователна подготовка) 26

2. Учебно съдържание 27
3. Подробно разглеждане на темите представени в учебникът по математика за VIII клас на издателство „Регалия 6“ 28
3.1. Рационални дроби. Дефиниционно множество 29
3.3. Привеждане на рационалните дроби към общ знаменател 35
3.4. Събиране и изваждане на рационални дроби 37
3.5. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби 40
3.6. Преобразуване на рационални изрази 46
3.6.1. Преобразуване на рационални изрази – въведение 46
3.6.2. Преобразуване на рационални изрази – упражнение 47
3.7. Дробни уравнения 50
3.8. Моделиране с дробни уравнения 54
Заключение 57
Използвани източници и ресурси: 59

Увод

Цел, целева група, хипотеза, методология, методика и задачи на дипломната работа

Цел – да се разработят модифицирани спрямо целевата група учебни единици по примерно учебно съдържание – Рационални изрази.

Целева група – 18 СУ „Уилям Гладстон“

www.18sou.net

18 училище „Уилям Гладстон“ има 116 годишна история. То е разположено в сърцето на стара София и е паметник на културата от местно значение от първа степен. Училището е първото в България, което въвежда изучаването на източни езици – Японски, Китайски, Арабски и Корейски – в задължителната си програма след седми клас. Училищният комплекс обхваща две сгради – основна и Българо-Японски център за образователен и културен обмен. Библиотеката на училището е с над 20 000 книжен фонд, там учениците могат да се възползват от тиха и приятна среда за учене. Центърът по природо-математически науки „Акад. Георги Наджаков“ се състои от експериментални и дигитални лаборатории по Физика, роботика и 3D моделиране, Химия и опазване на околната среда, Биология и здравно образование и Приложна математика и програмиране. Образователната среда в центъра е модерна, съобразена с тенденциите, изискванията и мерките за безопасност на XXIв. Тя е съчетание от централно мултифункционално пространство за работа и обучение, състоящо се от свързани помежду си четири зали и хранилище и пространство за отдих и неформално

общуване. Лабораториите разполагат с най-модерното експериментално и техническо оборудване в областта на природните науки, както и с подходящ софтуеър и приложения за виртуална работа по различните научни дисциплини. Мултифункционалната зала, отворените пространства и откритите пространства за целодневни дейности създават всички удобства на модерната физическа среда. Дигиталният център на училището е първият такъв изграден на територията на България. През последните години 18 средно училище „Уилям Гладстон“ е най-голямото училище в България, в което се обучават над 2300 ученици, част от, които са чуждестранни граждани, и е притегателен, образователен, културен и социален център за цялата училищна и местна общност.

Общите цели на училището са:

- подобряване на условията, при които в училището се провежда учебния процес в съответствие с националните стандарти за средното образование;
- да създаде добри условия на учениците, както физически, така и научни, морални и социални;
- да предостави различни възможности на учителите да подобрят и обновят преподавателските си умения;
- подобряване на материалната база и оборудването на училището.

Целите за специализация на училището са:

- учениците да се запознаят с културата и бита на страните, чиито езици изучават;
- след 10-ти клас учениците имат голям избор от профилиращи предмети, които да изучават наравно с основните им езикови профили – химия, биология, математика, физика, български език, география, история и философия;
- да се предоставя възможност на учениците от 5ти, 6ти и 7ми клас за избор на факултативни и избираеми учебни часове по български език, математика и чужд език;
- да се предоставя възможност на учениците от 8ми до 12ти клас за избор на факултативни и избираеми учебни часове по български език, математика и чужд език, които задълбочават техните знания и ги подготвят за успешно представяне на национални и международни изпити, състезания и олимпиади.

Конкретно за учебната 2021/2022 година, през която съм водила учебните часове по математика на всички седем паралелки от 8ми клас, мога да кажа, че учениците в тях изучават интензивно корейски език, немски език, английски език, френски език, японски език, арабски език и китайски език. Общият брой на учениците е 189. В арабската паралелка трима ученици са родени извън България и техният майчин език е арабски, като един от тях е получил образованието си до този момент в Канада. Също така във френската паралелка има ученик, който е носител на езика – роден и учил във Франция. Тази мултикултурна среда често е предизвикателство за преподавателите и за постигане на високи резултати в образованието. Това е така, защото тези ученици срещат затруднения в разбирането на терминологията, както и когато идват от други образователни системи, често се наблюдават огромни различия в изучавания материал. Друго важно нещо е, че в гимназиалния етап на училището се обучават ученици със специални образователни потребности. В 8мите класове има един ученик с такива потребности, за когото е необходимо да се отделя допълнително време и да се взима предвид неговият собствен темп на развитие и усвояване на материала.

Хипотеза – целенасочената и конкретизираната спрямо целевата група методика на разработване на учебно съдържание води до повишаване на интереса, мотивацията и академичните резултати.

Методология – Експертните познания и умения на опитния учител.

Методика – конкретизация и специализация на разработването на учебното съдържание.

Задачи на дипломната работа:

- Исторически преглед.
- Анализ на нормативната база – учебната програма и нейните компоненти.
- Идентифициране на целевата група – специфики, особености, традиции, трудности и възможности за преодоляването им.
- Идентифициране, разбиране и управление на рисковете в учебния процес.
- Разработване и надграждане на учебното съдържание за по-ефективно управление на процесите в класната стая с елементи от други области на познанието.

Дипломната работа проследява в детайли развитието на раздел „Рационални изрази“ и начините за представянето му в учебните часове по математика в VIII клас. Представя зараждането на алгебрата в древността, като човешка необходимост за по-добър живот. Преминава в обстойно обследване на рационалните изрази от математическа гледна точка и завършва със систематизирано разглеждане на раздела в съвременния курс по математика за VIII клас предложен в ученикът на издателство „Регалия 6“.

Първата цел на дипломната работа е да се опише математически понятието рационален израз, като се започне от въвеждането на определенията за поле и пръстен, за да се задълбочи в разглеждането на алгебрични изрази и да се въведат понятията свързани с тях. Това въведение спомага да се достигне до определението за цели рационални изрази и разглеждането на понятията едночлени и многочлени. Както и теоретичните действия свърза с тях представени под формата на теореми. Това е необходимо, за да се представят ясно понятията рационални изрази и алгебрични дроби. Тук се задълбочава изследователската дейност на дипломната работа, като се набляга на теоремата за тъждественост на алгебрични дроби и нейното доказателство, както и на теоремата за съкращаване на алгебрични дроби. Тези две теореми са в основата на пълноценното решаване на задачите в VIII клас.

Втората цел на дипломната работа е подробното разглеждане на темите представени в учебникът по математика за VIII клас на издателство „Регалия 6“. Идеята е систематично с помощта на методиката да се представи начина на излагане на теорията в часовете по математика, както и различните похвати и методи за усвояване на знанията от учениците. Набляга се на необходимостта за отстраняване на математическите неточностите и въвеждането на допълнителни уточнения от страна на учителя. Ако той се опира само на написаното в учебника голяма част от учениците ще останат с грешни впечатления за различните понятия, свойства, теореми и действията с тях. За това в дипломната работа са предложени начини за преодоляване на тези несъответствия. Важно е да се отбележи, че за целта са разгледани методическите подходи за обучение – обяснително-илюстративен, евристичен, изследователски, като е обяснено кой, кога и как е най-уместно да се използва. Обяснява се защо са от съществена необходимост

уроците за упражнение, които включват в себе си задачи от различни типове и трудност. Набляга се на обучаващите функции на задачите, които са насочени към формиране на система от математически знания, умения и навици в учениците. В хода на изложението на функциите на задачите се засягат и методите на научното познание в обучението по математика – наблюдение и експеримент; анализиране, абстрахиране и синтезиране; сравнение, обобщения, конкретизация и специализация; моделиране, както и индуктивното и дедуктивното умозаключение. Представя се множество от математически методи за доказване на тъждества, както и се разглежда понятието уравнение и релациите следване и равносилност от гледна точка на методиката. Също така е отделено специално внимание на уроците за моделиране с дробни уравнения, защото те са мостът между математиката и различните области на човешкото познание.

I. Алгебра

1. Предмет на алгебрата

Алгебрата е един от основните дялове на математиката, наред с теорията на числата, геометрията и анализа. В своя най-общ вид алгебрата изучава математическите символи и правилата, по които боравим с тях, като по този начин представлява обединяващо звено за почти всички клонове на математиката.

Алгебрата обхваща широка област от проблеми – от решаването на прости уравнения до изследването на абстрактни обекти, като групи, пръстени и полета. Елементарната алгебра е в основа на математиката, природните науки, техниката, медицината и икономиката и преподаването ѝ започва от основното образование.

Елементарната алгебра се различава от аритметиката по използването на абстракции, като буквени означения за числа, които са неизвестни или нямат точно определена стойност, и с въвеждането на концепцията за променливите. Изрази, използващи променливи, се манипулират с помощта на правилата на операциите, прилагани и върху числата, като с това се постигат различни цели, например решаване на уравнения. Алгебрата дава методи за изписване на формули и решаване на уравнения, които са много по-ясни и лесни за използване от по-стария метод за словесно описание на зависимостите. [1]

2. Кратки исторически сведения за развитието на алгебрата

2.1. Вавилон – Алгебрата се заражда в дълбока древност. Още преди около 4000 години вавилонските учени знаели да решават квадратни уравнения, както и системи от две уравнения, от които едното квадратно. С помощта на такива уравнения се решавали разнообразни задачи от землемерието, строителното изкуство и военното дело.

Буквените означения, с които днес си служим, не били употребяване от вавилонците, те записвали уравненията в словесна форма.

2.2. Гърция – Първите съкратени означения на неизвестни величини се срещат у древногръцкия математик Диофант. Диофант нарича неизвестното „аритмос“ (число), втората степен на неизвестното „дюнамис“ (тази дума има много значения: сила, могъщество, имущество, степен и др.). Третата степен Диофант нарича „кюбос“ (куб), четвъртата – „дюнамодюнамис“, петата – „дюнамокюбос“, шестата – „кюбокюбос“. Тези величини означава с първите букви на съответните названия (ар, дю, кю, ддю, дкю, ккю). Известните числа за разлика от неизвестните са придружени от означението „мо“ (монас- единица). Събирането съвсем не се означава, за изваждането има съкратено означение, равенството се означава с „ис“ (исос – равен).

Нито вавилонците, нито гърците разглеждат отрицателните числа. Уравнението *3 ар 6 мо ис 2 ар 1 мо (3x + 6 = 2x +1)* Диофант нарича „неуместно“. Когато пренася членовете от едната страна на уравнението в другата, Диофант казва, че събираемото става умалител, а умалителят – събираемо.

Гръцките математици умеели да намират приблизителни стойности на корените, но в алгебрата се стараели да избягват ирационалности.

2.3. Китай – 2000 години пр. н. вр. Китайските учени решавали уравнения от първа степен и системи от тях, а също и квадратни уравнения. Били им познати

отрицателните и ирационалните числа. Тъй като в китайското писане всеки знак изобразява някакво понятие, в китайската алгебра не можело да има „съкратени“ означения.

В следващите епохи китайската математика се обогатила с нови постижения. Така в края на XIII в. китайците знаели закона за образуване на биномните коефициенти, известен сега под името „паскалев триъгълник“. В западна Европа този закон бил открит 250 години по-късно от Щилер.

2.4. Индия – Индийските учени прилагали съкратени означения за известните величини и за техните степени. Тези означения са началните букви на съответните названия (неизвестното се наричало „еди колко си“); за различаване на второто, третото и т.н. неизвестно се употребявали съответно имената на цветовете: „черно“, „синьо“, „жълто“ и т.н.). Индийските автори широко употребявали ирационалните и отрицателните числа. Заедно с отрицателните числа в числовото семейство влязла и нулата, която допреди това означавала само липса на число.

2.5. Страните с арабски език. Узбекистан. Таджикистан – Индийските автори излагали алгебричните въпроси в астрономичните съчинения; алгебрата станала самостоятелна дисциплина при учените, които пишели на международния език на мюсюлманския свят – арабския. За основоположник на алгебрата като специална наука трябва да се смята узбекският учен Мохамед от Хорезм, известен под арабското прозвище ал-Хваризми (Хорезмиецът). Неговият алгебричен труд, съставен през IX в. от н. е., е означен „Книга за възстановяването и противопоставянето“. „Възстановяване“ Мохамед нарича пренасянето на умалителя от едната страна на уравнението в другата, където той става събираемо; „противопоставяне“ – събирането на неизвестните в едната страна на уравнението, а на известните – в другата страна. На арабски „възстановяване“ се казва „ал-джабр“. Оттук идва името „алгебра“.

От Мохамед Хорезмийски и от следващите автори алгебрата се прилага широко за търговски и други парични пресмятания. Нито той, нито другите математици, писали на арабски, са използвали съкратени знаци, защото арабското писмо е много кратко. Те не признавали и отрицателните числа: смятали, че познатото им от индийски извори учение за отрицателни числа е зле обосновано. Това било вярно, но за това пък индийските учени можели да се ограничават само с един случай на пълно квадратно уравнение, докато Мохамед Хорезмийски и неговите продължители трябвало да различават три случая ($x^2 + px = q,\ x^2 + q = px,\ x^2 = px + q$; p и q – положителни числа).

Узбекските, таджикските, персийските и арабските математици обогатили алгебрата с редица нови открития. За уравненията от по-висока степен те умеели да намират приблизителни стойности за корените с много голяма точност. Така знаменитият узбекски философ, астроном и математик ал-Бируни (973 – 1048), родом също от Хорезм, свел задачата за пресмятане страната на правилния 9-ъгълник, вписан в дадена окръжност, към кубичното уравнение $x^3 = 1 + 3x$ и намерил (в шестдесетични дроби) приблизителната стойност $x = 1{,}52', 45''47'''13''''$ – едно цяло, 52 шестдесети, 45 три хиляди шестстотни и т.н. (с точност до $\frac{1}{60^4}$; в десетични дроби това дава седем верни десетични знака). Великият таджикски поет и учен Омар ал-Хайям (1036 – 1123) от Нишапур подложил на системно изучаване уравненията от трета степен. Нито той, нито другите математици от мюсюлманския свят успели да намерят израз за корените на кубичното уравнение чрез коефициентите. Но ал-Хайям разработил начин, по който може (геометрично) да се намери броят на реалните корени на кубичното уравнение (него самият го интересували само положителните корени).

2.6. Средновековна Европа – През XII в. „Алгебра“-та на ал-Хваризми станала известна в Европа и била преведена на латински език. От това време започва развитието на алгебрата в европейските страни (най-напред под силното влияние на източните народи). Появяват се съкратените означения на неизвестните, решават се редица нови задачи, свързани с нуждите на търговията. Но съществен напредък нямало до XVI в. През първата третина на XVI в. италианците дел Феро и Тарталя намерили правила за решаването на кубични уравнения от вида $x^3 + px = q$; $x^3 + q = px$; $x^3 = px + q$, а Кардано през 1545 г. показал, че всяко кубично уравнение се свежда към едно от тези три; в същото време Ферари, ученик на Кардано, намерил решение на уравнението от четвърта степен.

Сложните правила за решаването на тези уравнения наложило да се усъвършенстват означенията. Това ставало постепенно в течение на цяло столетие. В края на XVI в. френският математик Виет въвел буквените означения и при това не само за неизвестните, но и за известните величини (неизвестните се означавали с главни гласни букви, а известните – с главни съгласни). Били въведени съкратени означения за действията; у различните автори те имали различен вид. В средата на XVII в. благодарение на френския учен Декарт (1596 – 1650) алгебричната символика придобила вид, много близък до днешния. [2]

3. Елементарна алгебра

Елементарната алгебра по своето съдържание се различава значително от алгебрата като наука. В средното училище под името „алгебра“ се разбира академичен предмет, който е разнороден по съдържание, който излага основна информация, свързана не само с алгебрата (в правилния смисъл), но и с редица други математически дисциплини. Известно е, че училищната алгебра включва различни въпроси, като например: развитието на понятието число, изучаване на алгебричните изрази (полиноми, рационални изрази, ирационални изрази), изучаване на уравнения, трансцендентални функции, изследването на някои функции (показателни, логаритмични), концепцията за метода на координатите, приложението му към изучаването на функции, понятието за граници, действия с прости редици (по-специално прогресии), елементи на приближени изчисления и др. Някои от тези въпроси са свързани със самата алгебра (изучаване на полиноми, тъждествени преобразувания, алгебрични уравнения), други получават по-нататъшното си развитие в различни математически дисциплини. Например понятието граница, както и дефиницията на най-простите трансцендентални функции, не са свързани с алгебра, а с математическия анализ. Подобна хетерогенност на училищния курс е неизбежна, тъй като училищната математика е предназначена да осигури необходимия комплекс от общообразователна информация и умения, без да се ограничава в рамките, на която и да е математическа дисциплина. [3]

II. Рационални изрази

1. Пръстен и поле

В елементарната алгебра се разглеждат различни конкретни множества, върху чиито елементи могат да се извършват „аритметични действия“. Така например могат да се извършват действия върху числа, върху полиноми, върху алгебрични дроби и пр. Съответните общи определения и аксиоми са формулирани в съвременната алгебра, както следва.

Определение: Пръстен наричаме множество R, за което са дефинирани две операции (действия):

операцията събиране, която поставя в съответствието на всеки два елемента a и b, елемент c, наречен тяхната сума:

$$c = a + b$$

и операцията умножение, която поставя в съответствие на всеки два елемента a и b, елемента d, наречен тяхно произведение:

$$d = ab.$$

Операциите събиране и умножение се характеризират със следните свойства.

Аксиоми за събиране

1. Аксиома за асоциативност: за всеки три елемента a, b и c имаме:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. Аксиома за комутативност: за всеки два елемента a и b имаме:

$$a + b = b + a.$$

3. Аксиома на противоположното действие (за събиране): за всеки два елемента a и b съществува единствен елемент x, удовлетворяващ условието:

$$a + x = b.$$

Елемент x се нарича разлика на елементите b и a и се обозначава, както следва:

$$x = b - a.$$

Аксиоми за умножение

4. Аксиома за асоциативност: за всеки три елемента a, b и c имаме:

$$(ab)c = a(bc).$$

5. Аксиома за комутативност: за всеки два елемента a u b имаме:

$$ab = ba.$$

6. Аксиома за дистрибутивност: за всякакви три елемента a, b и c имаме:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Забележки:

I. В този списък с аксиоми не се възнамерява да се формулира минималния брой изисквания, дефиниращи понятието пръстен, така например в аксиома 3 е възможно да не се изисква еднозначност на изваждането. От условието за съществуване на поне един елемент x, удовлетворяващ уравнението $a + x = b$ и от аксиомите на пръстена, може да се докаже неговата единственост.

II. Ние се ограничаваме само до комутативни пръстени, докато в съвременната алгебра се изучават некомутативни пръстени, за които аксиома 5 няма валидност.

Определение: Поле се нарича пръстен, съдържащ поне един ненулев елемент, в който важи следната аксиома на противоположното действие за умножение.

7. За произволни два елемента a и b, от които $a \neq 0$, съществува единствен елемент x, удовлетворяваш условието:

$$ax = b.$$

Елементът x се нарича частно от делението на b на a и се означени по следния начин:

$$x = \frac{b}{a}.$$

В аритметика аксиомите 1, 2, 4, 5 и 6 за събирането и умножението се наричат основни закони на действие. Тези закони се използват за извеждане на правила за действия с произволен брой компоненти (правила за умножаване – произведение на сборове, събиране на сборове и т.н.)* .

* При определяне на действия с произволен брой компоненти и при доказване на правилата за действие принципът на пълната индукция се използва като средство, необходимо за установяване на общите свойства на крайните множества.

От аксиомите за пръстени и полета се въвеждат следните твърдения:

Във всеки пръстен съществува единствен елемент: „нула“, сборът, на който с произволен елемент a от пръстена е равен на a:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

За всеки елемент a от пръстена съществува единствен елемент $-a$, наречен противоположен на a, удовлетворяващ условието:

$$a + (-a) = 0.$$

Във всяко поле съществува единствен елемент „единица“, удовлетворяващ следното условие:

$$a.1 = 1.a = a,$$

където a е произволен елемент от полето.

За всеки елемент $a \neq 0$ от полето съществува единствен елемент a^{-1} , наречен обратен относно a, удовлетворяващ условието:

$$a.a^{-1} = 1.$$

Произведението на два елемента от дадено поле е равно на нула тогава и само тогава, когато поне един от елементите е равен на нула. [3]

2. Алгебричен израз

Определение: Математически запис, в който участват с определени означения алгебричните действия – събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване и коренуване, и редът на тяхното прилагане над величини и числа, означени съответно с букви и цифри, се нарича алгебричен израз. [5]

3. Променливи и постоянни величини

3.1. Променливи величини

Пример: Фирма за товарни превози пресмята стойността z *(лв.)* на услугата по формулата $z = a + k\,.x$, където $a = 2$ лв. е началната цена, x (km) е изминатия път,

k *лв.* е цената на $1\ km$ превоз. При градски превоз $k = 0{,}80$ *лв.*, а при извънградски превоз $k = 0{,}60$ *лв.* Намерете цената на услугата:

а) при градски превоз – на $5\ km$; $10\ km$;

б) при извънградски превоз – на $30\ km$; $50\ km$.

Решение:

В задачата началната цена е $a = 2$ лв. Тогава формулата $z = a + k\,.\,x$ приема вида $z = 2 + k.x$.

а) $k = 0{,}80$ *лв.*, $z = 2 + 0{,}80\,.\,x$

за $x = 5\ km$ $\quad z = 2 + 0{,}80\,.\,5 = 6$ *лв.*

за $x = 10\ km$ $\quad z = 2 + 0{,}80\,.\,10 = 10$ *лв.*

б) $k = 0{,}60$ *лв.*, $z = 2 + 0{,}60\,.\,x$

за $x = 30\ km$ $\quad z = 2 + 0{,}60\,.\,30 = 20$ *лв.*

за $x = 50\ km$ $\quad z = 2 + 0{,}60\,.\,50 = 32$ *лв.*

3.1.1. Независима променлива

В дадения пример, подусловие а), $z = 2 + 0{,}80\,.\,x$, буквата x може да приема различни стойности (изминат път, който се поръчва от клиента и не зависи от формулата за z). Буквата x означава независима променлива.

3.1.2. Зависима променлива

В дадения пример, подусловие а), $z = 2 + 0{,}80\,.\,x$, буквата z също приема различни стойности, но те зависят от стойността на x (цената зависи от изминатото разстояние). Буквата z означава зависима променлива.

3.1.3. Променлива величина

Определение: Величина, означена с буква, която може да приема различни числени стойности, се нарича променлива величина или неизвестно.

3.2. Постоянни величини

3.2.1. Константа

В случай а) $z = 2 + 0{,}80\,.\,x$ величината $a = 2$ *лв.* остава една и съща. Величината означена с буквата a се нарича константа.

Определение: Величина, означена с буква, която при решаване на една задача не изменя стойността си, се нарича постоянна или константа.

Константи са и всички числа, записани с цифри. Има константи, които се използват толкова често, че за тях се приемат постоянни означения. Такава е константата π.

3.2.2. Параметър

В примера величината, означена с буквата k, при градски превози приема една постоянна стойност $k = 0{,}80$ *лв.*, а при извънградски превози – друга постоянна стойност $k = 0{,}60$ *лв.* Такава величина се нарича параметър.

Определение: Величина, означена с буква, която в една задача при дадено условие приема постоянна стойност, а при друго условие – друга постоянна стойност, се нарича параметър. [6]

4. Цели рационални изрази

Определение 1: Алгебричен израз, в който са използвани само действията – събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване, се нарича рационален израз.

Примери:

1. $A = 5y^3 + 2my - n$
2. $B = bx^2$
3. $C = -3$
4. $D = d$
5. $E = \dfrac{x^2 - 8x + 11}{x - 2}$
6. $F = \dfrac{(x^3 - m)x}{3}$
7. $G = 2\pi r$

Определение: Рационален израз, в който няма деление с променлива се нарича цял рационален израз (цял израз). [6]

От дадените примери изразите A, B, C, D, F и G са цели рационални изрази.

Определение: Стойностите, които могат да приемат означените с букви величини в един цял рационален израз, се наричат допустими стойности за този израз.

Допустими стойности на променливите в един цял рационален израз са всички рационални числа. Ако един цял рационален израз има параметър в знаменател, допустими стойности на параметъра са тези, при които знаменателят е различен от нула. [6]

5. Едночлен и многочлен

5.1. Едночлен

Определение 1: Цели изрази, които са числа, константи, параметри, променливи (аргументи) или произведение от тях, се наричат едночлени.

Определение 2: Представянето на едночлен, в което произведението на множителите започва с число, константа и/или параметър и продължава с променливи,

при които всяка от тях участва точно един път в съответната ѝ степен, се нарича нормален (каноничен) вид на едночлен.
Числата, константите и параметрите или тяхното произведение се нарича коефициент на едночлена.

Определение 3: Сборът от степените на променливите, участващи в един едночлен, се нарича степен на едночлена. [4]

Определение 4: Едночлени, които имат един и същ нормален вид или се различават само по коефициентите, се наричат подобни.

Подобни едночлени събираме или изваждаме, като съберем или извадим коефициентите им и препишем буквената част. Събирането и изваждането на подобни едночлени се нарича приведение.

Подобни едночлени с противоположни коефициенти се наричат противоположни едночлени. Сборът на противоположните едночлени е нула. [4]

5.2. Многочлен

5.2.1. Определения

Определение 1: Цял рационален израз или многочлен (полином) наричаме израз, който е съставен от сбор на едночлени.

Определение 2: Един многочлен, казваме, че е представен в нормален (каноничен) вид, когато всички едночлени в него са в нормален вид и всички възможни действия между подобните едночлените са извършени.

Определение 3: Най-високата от степените на едночлените на един многочлен се нарича степен на многочлена. Коефициентите на едночлените в нормален вид се наричат коефициенти на многочлена. [4]

5.2.2. Тъждествени изрази

Определение: Два израза се наричат тъждествено равни, ако за всяка стойност на променливите, допустима и за двата израза, съответните им числени стойности са равни.

Когато заместим израз с тъждествено равен на него, казваме, че извършваме тъждествено преобразуване.

Определение: Равенство, на което двете страни са тъждествено равни изрази, се нарича тъждество.

5.2.3. Теорема за тъждественост на многочлени

Теорема: Необходимо и достатъчно условие два многочлена да са тъждествени (над което и да е числово поле), зададени в каноничен (нормален) вид, е равенството между коефициентите на членовете, съдържащи едни и същи аргументи с еднакви/равни степени (т.е. коефициентите на подобните членове).

Доказателство:

1) Достатъчно условие: Ако всички съответстващи коефициенти на два много члена

(A) $$P = A_1x^{k_1}y^{t_1}\dots z^{q_1} + A_2x^{k_2}y^{t_2}\dots z^{q_2}+\dots$$

и

(B) $$Q = B_1x^{k_1}y^{t_1}\dots z^{q_1} + B_2x^{k_2}y^{t_2}\dots z^{q_2}+\dots$$

са равни:

$$A_1 = B_1,\ A_2 = B_2, \dots,$$

тогава имаме един и същ, а не два различни израза, следователно стойностите на тези полиноми са равни за всички стойности на аргументите.

2) Необходимо условие: Да предположим, че за всички стойности на аргументите стойностите на многочлените (A) и (B) са равни, ще покажем, че при това условие многочлените се състоят от едни и същи едночлени. Да разгледаме някой (без значение кой) член на многочлените, например $A_1x^{k_1}y^{t_1}\dots z^{q_1}$, в друг многочлен или се съдържа члена $B_1x^{k_1}y^{t_1}\dots z^{q_1}$, подобен на дадения, или такъв член не се съдържа. В последния случай члена $B_1x^{k_1}y^{t_1}\dots z^{q_1}$ може да бъде записан, ако считаме $B_1 = 0$. Добавяйки (в случай на необходимост) във всеки от дадените многочлени липсващото количество членове с коефициент равен на 0, може да се счита, че на всеки член от многочлена съответства подобен член. По условие стойностите на многочлените (A) и (B) са еднакви при всички стойности на аргументите, за това, изпълнявайки почленно изваждане, то ще получим при всички стойности на аргументите:

$$P - Q = (A_1 - B_1)x^{k_1}y^{t_1}\dots z^{q_1} + (A_2 - B_2)x^{k_2}y^{t_2}\dots z^{q_2}+\dots \equiv 0.$$

Това е възможно само при условие, че $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 =\dots= 0$, където $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2, \dots$ т. н.. [3]

6. Рационални изрази

Определение: Рационални изрази с аргументи x, y, … z се наричат изрази, съставени от аргументи и числа от дадено поле и действия събиране, изваждане, умножение и деление.

При това изразите, които нямат числова стойност при нито една стойност на аргументите (т.е. изрази, лишени от смисъл), не се считат за изрази.

Числата, влизащи в състава на рационалните изрази, а също и допустимите стойности на аргументите са от някое числово поле; накратко казано, рационалните изрази се разглеждат над дадено поле.

Примери:

1. Примерни рационални изрази са:

$$\frac{ax+by}{cx+d},\quad -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{3},\quad \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{ab}{x+y}}{a^2+b^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}.$$

Първият и третият израз са дробни, вторият – цял (т.е. многочлен).

2. Изразите

$$\frac{a}{0},\quad \frac{x-1}{x-x},\quad \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2-x^2-2xy-y^2}$$

не са рационални, защото нямат числена стойност за никоя стойност на аргументите.

3. Изразите

$$\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}},\quad tg\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right),\quad \frac{\sin x-1}{\cos x+1}$$

съдържат трансцендентни (неалгебрични) операции над аргумента не са рационални, защото в полето в което са дефинирани не участват тригонометричните и показателни функции.

7. Алгебрични дроби

Определение: Отношението на два многочлена $\frac{P(x,y,\ldots,z)}{Q(x,y,\ldots,z)}$ се нарича алгебрична или рационална дроб.

По броя на аргументите, съдържащи се в многочлените в числителя и знаменателя, алгебричните дроби се разделят на дроби с един, два, три и т.н. аргумента.

Всеки многочлен $P(x,y,\ldots,z)$ може да се разглежда като рационална дроб със знаменател, равен на единица:

$$P(x,y,\ldots,z) = \frac{P(x,y,\ldots,z)}{1}.$$

Така, множеството на многочлените се включва като част от множеството на всички рационални дроби.

Произволна система от стойности на аргументите (от дадено числово поле), при която знаменателят на алгебричната дроб не приема стойност нула и дробта има напълно определена стойност, образува множество от допустими стойности на аргумента или област на определяне на алгебричната дроб (разглеждана над дадено поле). В частност, за дробите с един аргумент $\frac{P(x)}{Q(x)}$, допустими се явяват всички стойности на x (от дадено поле) с изключение на корените на знаменателя.

Ако са зададени краен брой дроби:

$$\frac{P(x,y,\ldots,z)}{Q(x,y,\ldots,z)},\ \frac{P_1(x,y,\ldots,z)}{Q_1(x,y,\ldots,z)},\ \frac{P_2(x,y,\ldots,z)}{Q_2(x,y,\ldots,z)},\ldots$$

допустима се явява произволна система от числени стойности на аргумента (от дадено числово поле), при която нито един от знаменателите $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ не приема стойност нула.

Примери:

1. Примери за алгебрични дроби:

$\frac{x^2-1}{x^2+x+1}$ (с един аргумент), $\frac{x+y}{x-y}$ (с два аргумента), $\frac{x^2+y^2+z^2}{1-x-y-z}$ (с три аргумента).

2. Област от допустими стойности на дробта $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}$, разглеждана над полето на рационалните числа, се явява множеството на всички рационални числа, различни от 1. Областта от допустими стойности на тази дроб, разглеждана над полето на комплексните числа, се явява множеството на всички комплексни числа, различни от $1, i$ и от $-i$.

3. Областта от допустими стойности на дробта $\frac{1}{x-y}$ (над всяко поле) се явява множеството на всички двойки различни числа x и y (т.е. $x \neq y$) от даденото поле.

4. Областта от допустими стойности на дробта $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, разглеждана над полето на реалните числа, се явява множеството от всички точки (x, y), различни от точката $x = y = 0$.

Областта от допустими стойности на същата дроб над полето на комплексните числа, се явява множеството от всички двойки комплексни числа x и y, удовлетворяващи условието $x \neq iy$.

5. Дроб $\frac{x+y+z}{1-x^2-y^2-z^2}$ е определена за всички стойности на x, y, z, освен стойностите, удовлетворяващи уравнението $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (повърхнина на единична сфера в координатното пространство).

8. Тъждественост на алгебричните дроби

Определение: Два аналитични израза $U(x, y, \ldots, z)$ и $V(x, y, \ldots, z)$ от тези аргументи, разгледани заедно, се наричат тъждествени, ако техните числени стойности са равни за произволно допустима система от стойности на аргументите.

Равенството

$$U(x, y, \ldots, z) = V(x, y, \ldots, z),$$

което е изпълнено за всички допустими стойности на аргументите, се нарича тъждество.

От общото определение за тъждественост на два аналитични израза две алгебрични дроби са тъждествени, ако при тяхното съвместно разглеждане, техните стойности са равни за произволно допустима система от стойности на аргументите. Това определение може да се формулира по следния начин:

Определение: Две алгебрични дроби $\frac{P(x,y,\ldots,z)}{Q(x,y,\ldots,z)}$ и $\frac{P_1(x,y,\ldots,z)}{Q_1(x,y,\ldots,z)}$ са тъждествени, ако равенството $\frac{P(x,y,\ldots,z)}{Q(x,y,\ldots,z)} = \frac{P_1(x,y,\ldots,z)}{Q_1(x,y,\ldots,z)}$ е изпълнено при произволна система от стойности на аргументите $x, y, \ldots, z$, при което всеки от знаменателите на дадените дроби е различен от нула: $Q(x, y, \ldots, z) \neq 0$ и $Q_1(x, y, \ldots, z) \neq 0$.

Пример:

Дробите $\frac{x-y}{x^2-y^2}$ и $\frac{1}{x+y}$ са тъждествени, тъй като за съвместното им разглеждане трябва да се счита, че $x \neq \pm y$, то тогава

$$\frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x+y}.$$

Тъждественото преобразование на алгебричната дроб може да измени нейната област от допустими стойности. Така, например, при замяната на дробта $\frac{x-y}{x^2-y^2}$ с дробта $\frac{1}{x+y}$ стойността $x = y \neq 0$ (недопустима за първата дроб) става допустима.

Теорема: Необходимо и достатъчно условие за тъждественост на две дроби

$$(1) \qquad \frac{P(x,y,\ldots,z)}{Q(x,y,\ldots,z)} = \frac{P_1(x,y,\ldots,z)}{Q_1(x,y,\ldots,z)}$$

се явява изпълнението на тъждеството

$$(2) \qquad P(x,y,\ldots,z)\,.\,Q_1(x,y,\ldots,z) \;=\; P_1(x,y,\ldots,z)\,.\,Q(x,y,\ldots,z).$$

Разяснение: Тъждеството (1) е равенство, изпълнено при всички допустими системи от стойности на аргументите, т.е. при всички системи от числа $x, y, \ldots, z$, при които $Q \neq 0$ и $Q_1 \neq 0$. В тъждество (2) лявата и дясната част са многочлени; съгласно определението за тъждественост на многочлен, това е равенство изпълнено при произволна система от стойности на аргументите от дадено числово поле.

Доказателство:

1) Достатъчно условие: Ако е изпълнено тъждество (2), то произведенията $P.Q_1$ и $P_1.Q$, бъдейки равни при всички системи от стойности на аргументите, са равни (в частност) и при допустимите (за дадените дроби) системи. Но, ако $Q \neq 0$ и $Q_1 \neq 0$, то от равенството $P.Q_1 = P_1.Q$ следва равенството $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$, т.е. тъждество *(1).*

2) Необходимо услови: Трябва да докажем, че ако дробите $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$ са равни при произволни допустими системи от стойности на аргументите, то равенството $P.Q_1 \;=\; P_1.Q$ е изпълнено при всяка система от стойности на аргументите (от дадено числово поле).

Да разгледаме дробите с един аргумент $\frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

Множеството от недопустими стойности на аргументите се състои от всички корени на двете алгебрични уравнения $Q(x) = 0$ и $Q_1(x) = 0$.

Всяко от тези уравнения има разбира се множество от корени (броят на различните корени не е по-голям от степента на лявата част), за това множеството от недопустими стойности на аргумента е крайно, а множеството от допустими стойности е безкрайно (от всички числа на дадено поле трябва да се изключат недопустимите стойности). От тъждеството

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

следва, че при всички допустими стойности на аргумента

$$P(x).Q_1(x) \;=\; P_1(x).Q(x).$$

Следователно, стойността на многочлена

$$R(x) \;= P(x).Q_1(x) - P_1(x).Q(x)$$

е равна на нула при всяка допустима стойност на аргумента. И така, многочленът $R(x)$ има безкрайно множество от корени. Следователно $R(x) \equiv\; 0$; тъй като всеки различен от нула многочлен има само крайно множество от корени, от където $P_1.Q \equiv P.Q_1$.

Да разгледаме две дроби с няколко аргумента. Да ограничим случаите до два аргумента (доказателството може да се разглежда за дроби с всякакъв брой на аргументите).

Нека $R(x,y)$ е произволен различен от нула многочлен от аргументи x и y. Множеството от всички точки (x,y) в равнината, удовлетворяващи уравнението $R(x,y) = 0$ се нарича, както е известно, алгебрична линия (приетото по-долу изложение се явява геометрично само по форма. Така, например, при разглеждане на многочлените над полето на комплексните числа под „точка“ (x,y) следва да се разбира двойка

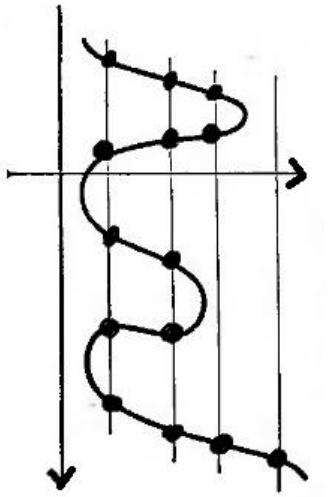
комплексни числа $x = a + bi$; $y = c + di$, а под „равнина“ – множеството от всички тези „точки“).

Да представим многочлена $R(x, y)$ по степените на единия аргумент, например y: $R(x, y) = Q_m(x) . y^m + Q_{m-1}(x) . y^{m-1} + \ldots + Q_1(x) . y + Q_0(x)$ (където $Q_m(x) \neq 0$).

При дадена стойност на аргумента $x = x_0$ е възможен един от двата следващи случая:

1^0) Не всички коефициенти $Q_m(x), Q_{m-1}(x), \ldots, Q_1(x), Q_0(x)$ се превръщат в нули. В този случай уравнението $R(x_0, y) = 0$ има само крайно множество от решения (броят на корените не е повече от m). Геометрично това означава, че успоредните оси с ординати $x = x_0$ могат да пресичат алгебричната линия само в краен брой точки.

За полето на реалните числа този случай е пояснен на следващия чертеж.



2^0) Всички коефициенти $Q_m(x), Q_{m-1}(x), \ldots, Q_1(x), Q_0(x)$ са равни на нула. В този случай $R(x_0, y)$ е нулев многочлен от y. Геометрично това означава, че правата линия $x = x_0$ влиза в състава на алгебричната линия (Така, например, правата $x = 1$ влиза в състава на линията от вида $x^2 + 2xy - 2y - 1 = 0$.).

Множеството от всички особени стойности на x е крайно, защото всяка особена стойност се явява общ корен на всички коефициенти $Q_i(x)$, а всеки (различен от нула) коефициент има краен брой корени.

И така, всяка успоредна ос с ордината $x = x_0$ има с алгебричната линия крайно множество от точки на пресичане, с изключение, може би, на крайно множество успоредни прави, влизащи в състава на линията.

Ако от равнината извадим всички точки от алгебричната линия, то останалото множество от точки в равнината няма да бъде алгебрична линия. Всъщност, на всяка от успоредните оси ординатите ще останат безкрайно множество, с изключение, може би, крайно множество успоредни оси, които ще бъдат извадени от равнината.

Да разгледаме заедно две алгебрични дроби с два аргумента

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \text{ и } \frac{P_1(x,y)}{Q_1(x,y)}.$$

Множеството от допустими системи от стойности на аргумента е множеството на всички точки от равнината, без точките принадлежащи поне на една от двете алгебрични линии

$Q(x,y)=0$, $Q_1(x,y)=0$, т.е. точките, образуващи алгебричната линия $Q(x,y).Q_1(x,y)=0$.

Ако дадените дроби са тъждествени, то многочленът

$$R(x,y) = P(x,y).Q_1(x,y) - P_1(x,y).Q(x,y)$$

е равен на нула при всички допустими системи от стойности на аргументите, т.е. във всяка равнина, с изключение, може би, на точките от алгебричната линия $Q.Q_1=0$. Но при тези условия $R(x,y)$ е нулев многочлен. Ако $R(x,y)\neq 0$, то равенството $R(x,y)=0$ може да е изпълнено само за някои алгебрични линии, а не за всички точки от равнината без алгебричната линия $Q.Q_1=0$, следователно $R(x,y)\equiv 0$, т.е. $P.Q_1 \equiv P_1.Q$.

9. Съкращаване на алгебрични дроби

Теорема: Ако числител и знаменател на алгебрична дроб имат общ нетривиален делител $K(x,y,\dots,z)$, то разделяйки числителя и знаменателя на този делител, ще получим дроб, тъждествена на дадената:

$$\frac{K(x,y,\dots,z).P(x,y,\dots,z)}{K(x,y,\dots,z).Q(x,y,\dots,z)} = \frac{P(x,y,\dots,z)}{Q(x,y,\dots,z)}.$$

Това тъждествено преобразование се нарича съкращаване на дроб на делител K.

Доказателство: В действителност, при всички допустими системи от стойности на аргументите, т.е. системи, определени от условията $Q\neq 0, K\neq 0$, стойностите на дробите са равни.

Друго доказателство: Дробите са тъждествени, защото е изпълнено необходимото и достатъчно условие за тъждественост на алгебричните дроби

$$P.KQ \equiv KP.Q.$$

При съкращаване на дроби областта на определяне може да се разшири. Областта на определяне на дробта $\frac{KP}{KQ}$ се определя от две условия $Q\neq 0, K\neq 0$; за дробта $\frac{P}{Q}$, получена след съкращаването, условието $K\neq 0$ отпада.

Определение: Алгебричната дроб $\frac{p(x,y,\dots,z)}{q(x,y,\dots,z)}$ се нарича несъкратима, ако многочлените в числителя нямат нито един общ (многочлен) делител от положителна степен.

Два многочлена, които нямат общ делител, освен числови, се наричат взаимно прости. Значи, числителят и знаменателят на несъкратимите дроби са взаимно прости.

Да разгледаме разлагането на числителя и знаменателя на несъкратимата дроб на неразложими множители:

$$p = p_1.p_2\dots p_n;\ q = q_1.q_2\dots q_m.$$

Тези разлагания не съдържат нито един общ множител (с точност до числови множители). В действителност, ако $p_i \equiv q_j$, то числителят и знаменателят (въпреки предположението) биха имали общ нетривиален делител. Обратно, ако в разлагането на многочлените p и q не се съдържа нито един общ неразложим множител, то дробта $\frac{p}{q}$ е несъкратима. И така, ако дробта не е несъкратима, то многочлените p и q биха имали общ делител $s(x,y,\dots,z)$:

$$p = \bar{p}.s, q = \bar{q}.s.$$

Но тогава (въпреки предположенията) неразложимите множители, на които се разлага $s(x, y, \ldots, z)$, биха се явили общи в разлагането на числителя и знаменателя.

Примери:

1. Дробта $\frac{x^2+5xy+6y^2}{x^2-xy-2y^2}$ е несъкратима, защото разлагането на числителя и знаменателя

$$x^2 + 5xy + 6y^2 \equiv (x + 2y)(x + 3y)$$
$$x^2 - xy - 2y^2 \equiv (x - 2y)(x + y)$$

Не съдържат общи неразложими множители.

2. Дробта $\frac{x^3+y^3}{x^4-y^4}$ е съкратима, тъй като числителя и знаменателя имат общ нетривиален делител $x + y$.

Тъждествеността на алгебричните дроби има характеристични свойства по отношение на еквивалентността.

I. Обратимост:

$$\text{Ако } \frac{P}{Q} \equiv \frac{P_1}{Q_1}, \text{ то } \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P}{Q}.$$

II. Рефлективност:

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P}{Q}.$$

III. Транзитивност:

$$\text{Ако } \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_2}{Q_2} \text{ и } \frac{P_2}{Q_2} \equiv \frac{P_3}{Q_3}, \text{ то } \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_3}{Q_3}.$$

Доказателство: Верността на свойства I. и II. е очевидна. Ще покажем верността на свойство III..

И така от необходимото и достатъчно условие за тъждественост на дроби имаме:

$$P_1Q_2 \equiv P_2Q_1 \text{ и } P_2Q_3 \equiv P_3Q_2;$$

Умножавайки тези тъждества, получаваме:

$$(P_1Q_2)(P_2Q_3) \equiv (P_2Q_1)(P_3Q_2) \text{ или } P_1Q_3.P_2Q_2 \equiv P_3Q_1.P_2Q_2.$$

Разделяйки двете страни на P_2Q_2, ще получим:

$$P_1Q_3 \equiv P_3Q_1 \text{ и } \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_3}{Q_3}.$$

Определение: Канонично представяне на алгебрична дроб $\frac{P(x,y,\ldots,z)}{Q(x,y,\ldots,z)}$ се нарича всяка тъждествена на нея несъкратима алгебрична дроб.

Пример: За канонично представяне на дробта

$$\frac{x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2}{2x^2 - y^2} \equiv \frac{\left(x + \sqrt{2}y\right)^2}{\left(\sqrt{2}x + y\right)\left(\sqrt{2}x - y\right)}$$

служи несъкратимата дроб $\frac{x+\sqrt{2}y}{\sqrt{2}x-y}$. Ако умножим числителя и знаменателя с произволен, различен от нула числов множител, например, с $\sqrt{2}$, ще получим дробта $\frac{\sqrt{2}x+2y}{2x-\sqrt{2}y}$, която също е канонично представяне на дадената дроб.

Теорема: За всяка алгебрична дроб $\frac{P(x,y,...,z)}{Q(x,y,...,z)}$:

1. Съществува канонично представяне във вид на несъкратима дроб $\frac{p(x,y,...,z)}{q(x,y,...,z)}$:

$$\frac{P(x,y,\dots,z)}{Q(x,y,\dots,z)} \equiv \frac{p(x,y,\dots,z)}{q(x,y,\dots,z)};$$

2. Това канонично представяне е единствено с точност до общи (различни от нула) числови множители (от дадено поле) на числителя и знаменателя.

Доказателство:

1) Разлагаме многочлените $P(x,y,\dots,z)$ и $Q(x,y,\dots,z)$ на неразложими множители (това разлагане е единствено). Да означим с $K(x,y,\dots,z)$ произведението от всички общи множители на многочлените P и Q, ще имаме:

$$P(x,y,\dots,z) = p_1.p_2\dots p_n.K,\ Q(x,y,\dots,z) = q_1.q_2\dots q_n.K$$

(ако дробта $\frac{P}{Q}$ е несъкратима, то считаме, че $K \equiv 1$).

Нека $p(x,y,\dots,z) = p_1.p_2\dots p_j$; $q(x,y,\dots,z) = q_1.q_2\dots q_m$, където p_i и q_k са неразложими многочлени; в частност, многочлените $p(x,y,\dots,z)$ или $q(x,y,\dots,z)$ може да се окаже число (така ще бъде, ако един от многочлените P и Q се дели на другия).

Дробта $\frac{p}{q}$ е несъкратима и $\frac{P}{Q} \equiv \frac{p}{q}$.

2) Да допуснем, че съществува друга несъкратима дроб $\frac{\bar{p}}{\bar{q}}$, тъждествена на дробта $\frac{P}{Q}$, тогава имаме:

$$\frac{p}{q} \equiv \frac{\bar{p}}{\bar{q}}.$$

Да разложим многочлените p и q на неразложими множители $\bar{p} = \overline{p_1}.\overline{p_2}\dots\overline{p_r}$ и $\bar{q} = \overline{q_1}.\overline{q_2}\dots\overline{q_n}$.

От тъждество (1) имаме:

$$p.\bar{q} \equiv \bar{p}.q$$

$$(p_1.p_2\dots p_j)(\overline{q_1}.\overline{q_2}\dots\overline{q_n}) \equiv (\overline{p_1}.\overline{p_2}\dots\overline{p_r})(q_1.q_2\dots q_m).$$

От единствеността на разлагането на многочлени на множители, следва, че лявата и дясната част на това тъждество съдържат едни и същи (с точност до числов множител) неразложими многочлени за множители – подмножители. Групите p и q нямат нито един общ подмножител, за това всички множители от група p се съдържат сред групата множители $\bar{p}$ (различието в числовите множители не се взима под внимание). Аналогично може да се покаже, че всички множители от групата $\bar{p}$ се съдържат сред подмножителите на p. Следователно многочлените p и $\bar{p}$ могат да се отличават само по числови множители. $p = c.\bar{p}$, където $c \neq 0$, то тогава $q = c.\bar{q}$ и т.н.

При разглеждане на несъкратима алгебрична дроб над полето на рационалните числа коефициентите на числителя и знаменателя обикновено се умножават на най-малкото общо кратно на знаменателите на тези коефициенти (разбира се, ако сред коефициентите се съдържат дробни числа). В съответствие с това за канонично представяне на дроби с рационални коефициенти считаме тъждествени на тях несъкратими дроби с цели взаимно прости коефициенти.

Пример: Каноничното представяне на дробта $\frac{\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}xy + y^2}{\frac{1}{6}x^2 - xy + \frac{4}{3}y^2}$ е дробта $\frac{x-3y}{x-4y}$ с цели взаимно прости коефициенти.

За привеждане на алгебрични дроби в каноничен вид е достатъчно да разделим числителя и знаменателя на многочлен, служещ им за най-голям общ делител. На практика, обикновено, разлагаме числителя и знаменателя на неразложими множители и съкращаваме дробта на общите множители на числителя и знаменателя.

Теорема: Две тъждествени алгебрични дроби имат едно и също (с точност до числови множители на числителя и знаменателя) канонично представяне.

Доказателство: Нека $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ са канонични представяния на две тъждествени дроби

$$\frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{p_1}{q_1}, \frac{P_2}{Q_2} \equiv \frac{p_2}{q_2} \text{ и } \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_2}{Q_2},$$

Тогава $\frac{p_1}{q_1} \equiv \frac{p_2}{q_2}$ (от свойство транзитивност), но, ако двете несъкратими дроби $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ са тъждествени, то техните числители и знаменатели могат да се отличават само с общи числови множители (точка 2) от предходното доказателство).

Следствие: Всички тъждествени помежду си алгебрични дроби имат единствено (с точност до общи числови множители на числителя и знаменателя) канонично представяне. [3]

III. Рационалните изрази в училищния курс по математика за VIII клас

1. Учебна програма по математика за VIII клас (Общообразователна подготовка)

КРАТКО ПРЕДСТАВЯНЕ НА УЧЕБНАТА ПРОГРАМА

Обучението по математика в VIII клас е насочено към овладяване на базисни знания, умения и отношения, свързани с постигане на изискванията за резултатите от обучението по учебния предмет математика и с изграждане на ключови компетентности на ученика.

ОЧАКВАНИ РЕЗУЛТАТИ В КРАЯ НА КЛАСА

Области на компетентности	Знания, умения и отношения В резултат на обучението си ученикът:
Числа. Алгебра	• Сравнява реални числа и извършва операциите събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване; • Пресмята числови изрази в множеството на реалните числа; • Извършва тъждествени преобразувания на рационални и ирационални изрази (съдържащи квадратни корени); • Умее да решава квадратни уравнения по формулата за намиране на корените им; • Умее да прилага формулите за връзка между корени и коефициенти на квадратно уравнение; • Умее да решава дробни уравнения, свеждащи се до линейни и квадратни.
Фигури и тела	• Знае основните равнинни геометрични фигури: триъгълник, четириъгълник, правилен многоъгълник и окръжност; • Знае основните забележителни точки в триъгълник и може да прилага техните свойства; • Знае взаимното положение на прави и окръжности и може да прилага техните свойства; • Определя по вид и намира ъгли, свързани с окръжност, познава вписани и описани многоъгълници.
Функции. Измерване	• Знае еднаквостите в равнината (осева симетрия, ротация, централна симетрия и транслация) и техните свойства; • Намира образ на точка, отсечка, окръжност и познати геометрични фигури при еднаквост; • Дели отсечка в дадено отношение в конкретни ситуации.
Логически знания	• Разбира на конкретно ниво смисъла на логическите съюзи „и", „или", „ако..., то...", отрицанието „не" и на релациите • „следва" и „еквивалентност"; • Преценява вярност и рационалност в конкретна ситуация и умее да обосновава изводи; • Умее да разграничава конкретни твърдения като необходими и достатъчни условия; • Образува на конкретно ниво отрицание на просто съждение.

Елементи от вероятности и статистика	• Разпознава и пресмята комбинаторни съединения без повторения; • Умее да прилага основни правила за събиране и умножение в комбинаториката.
Моделиране	• Знае понятието вектор, операциите събиране и изваждане на вектори, умножение на вектор с число; • Оценява съдържателно получен резултат, коректност на аргументи и ги интерпретира; предвижда в определени рамки очакван от моделирането резултат; • Моделира с уравнения, свеждащи се до квадратни; • Моделира с дробни уравнения; • Моделира с пермутации, вариации и комбинации.

2. Учебно съдържание

Теми	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови знания
7. Рационални изрази 7.1. Рационални дроби. Дефиниционно множество. 7.2. Основно свойство на рационалните дроби. Съкращаване и разширяване на рационални дроби. 7.3. Привеждане на рационалните дроби къмобщ знаменател. 7.4. Събиране и изваждане на рационалнидроби. 7.5. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби. 7.6. Преобразуване на рационални изрази. 7.7. Дробни уравнения. Моделиране с дробни уравнения.	• Знае алгоритмите за операциите с рационални изрази; • Умее да: – пресмята числена стойност на рационален израз; – извършва тъждествени преобразувания на рационални изрази; – доказва тъждества; – решава дробни рационални уравнения, свеждащи се до линейни или квадратни уравнения; • Използва: – логическите съюзи „и” и „или”; – кванторите „за всяко” и „съществува”, – релацията „еквивалентност” при преобразуване на рационални изрази и при решаване на рационални уравнения; • Използва отрицание на твърдение при определяне на	Рационална дроб, дефиниционно множество, допустими стойности, тъждество, дробно уравнение.

	допустими и недопустими стойности на рационални изрази; • Преценява рационалност при избор на алгоритъм за преобразуване на дробни изрази и решаване на дробни уравнения; • Моделира различни ситуации с уравнения, свеждащи се до дробни; • Оценява формално и интерпретира съдържателно резултати, получени от решението на математическия модел. [7]	

3. Подробно разглеждане на темите представени в учебникът по математика за VIII клас на издателство „Регалия 6“

Тема 7. Рационални изрази

58. Рационални дроби. Дефиниционно множество 204
59. Основно свойство на рационалните дроби. Съкращаване и разширяване на рационалните дроби 207
60. Привеждане на рационалните дроби към общ знаменател 210
61. Събиране и изваждане на рационални дроби 212
62. Събиране и изваждане на рационални дроби. Упражнение 213
63. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби 215
64. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби. Упражнение 216
65. Преобразуване на рационални изрази 218
66. Преобразуване на рационални изрази. Упражнение 220
67. Дробни уравнения 223
68. Дробни уравнения. Упражнение 225
69. Моделиране с дробни уравнения 228
70. Моделиране с дробни уравнения. Упражнение 230
Задачи към тема 7 232
Контролен тест 234

[8]

За да се изясни начинът на представяне на учебното съдържание и бележките, които го съпровождат е необходимо да се въведат трите най-важни понятия свързани с учебния процес, а именно – знание, умение и компетентност.

Най-общо казано знанието е съвкупност от факти, които един човек е усвоил. Математическите знания са знания на количествени и подобни на тях съотношения, пространствени и подобни на тях форми на реалната действителност. Затова и те са приложими навсякъде, където тези форми и съотношения са важни за изучаването на даден обект или процес.

Всяко приложение на математически знания се състои от три етапа:

1) Избор на известен брой факти от определена област и превеждането им на езика на математиката;

2) математическа обработка на тези факти, която може да бъде чисто формална, а може да включва съображения от разглежданата област;

3) превеждане на получените резултати в съждения, описващи факти от разглежданата област.

Затова учениците трябва да се научат да отделят математическата страна на наблюдаваната облост и да я изразяват с математически средства. Да извършват математическа обработка на получената информация, след което да изтълкуват получените резултати в наблюдаваната област. [9.1]

Умението е способността за извършване на дадени действия, което се усъвършенства с опит и надграждане на знанията. В математиката едно от най-важните умения е формирането на математическо мислене, т.е. мислене и опериране с математически категории: понятия, теореми, аксиоми; овладяване на математически методи; развитие на математическа интуиция и осъзнаване на вътрешната логика на развитие на математиката. Друго важно умение в математиката е това за създаване и използване на математически модели за по-точно опознаване на обекти и процесите на заобикалящата ни действителност.

Компетентностите са съвкупността от всички получени знания и умения, които помагат на учениците да постигнат личностна реализация. Те са способности, но не вродени, а придобити чрез качествено учене в подходяща педагогическа среда и чрез придобиване на сериозен практически опит.

Именно, заради спецификата на термина компетентност изложението на всяка тема е съпроводено с математически и методически бележки. Те засягат конкретни казуси, които са възможни да възникнат в процеса на преподаване и обучение. Бележките дават възможност за избор на най-подходящ метод на обучение - наблюдение и експеримент; анализиране, абстрахиране и синтезиране; сравнение, обобщения, конкретизация и специализация; моделиране, както и индуктивното и дедуктивното умозаключение; за избор на методическите подходи за обучение – обяснително-илюстративен, евристичен, изследователски; за избор от множество от математически методи за доказване на тъждества и други.

3.1. Рационални дроби. Дефиниционно множество

Рационални изрази

В множеството на реалните числа са изпълними алгебричните действия събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване и коренуване. Тези действия се използват и за образуване на алгебрични изрази, които освен числа съдържат и букви. Буквите в един израз означават променливи или постоянни величини. Буква, с която при

разглеждане на даден въпрос се означава величина с ***постоянна*** *стойност, се нарича* ***константа****. Константи са* $\pi \approx 3{,}14$*, земното ускорение* $g \approx 9{,}8$ *и други.*

Буква, с която при разглеждане на даден въпрос се означава величина с различна стойност, се нарича ***променлива****. Прието е променливите да се означават с буквите от латинската азбука x, y, z, …, а константите a, b, c, d, … .*

Изразите $x^4 - 5x^2 + 2x - 8, \frac{1-x}{3a}, 2\pi r, \frac{y}{x^2+5}, \frac{\sqrt{x^2+6}}{4}$ *и a са алгебрични.* [8]

От математическа и методична гледна точка е загатнато понятието алгебричен израз, но без да се въведе точна дефиниция за него, което може да доведе до затруднение при разбирането на определението за рационален израз. Пояснението за буквените означения не е пълно. За постоянни величини се считат не само константите, но и параметрите. Относно променливите те биват зависими и независими, но тук уточнение не е нужно, тъй като не се разглеждат зависимости, а само преобразувания. Твърдението за означенията на променливите и константите не може да се приеме за абсолютно вярно, защото практиката показва, че в голяма част от новоиздадените сборници, учебници и учебни помагала често в примерите променливите са зададени с произволна буква. В този смисъл запомнянето на дадената информация би довело до затруднение на учениците.

При разгледаните примери в урока напълно коректно може да се твърди, че първите четири израза са алгебрични, но при петия има неточност. $\frac{\sqrt{x^2+6}}{4}$ – подкоренния израз съдържа променлива, което означава, че примерът от алгебричен се превръща в ирационален.

Променливите в един алгебричен израз могат да приемат всички числови стойности, за които действията в израза са изпълними. [8]

Тук е необходимо да се уточни, че стойностите, при които действията в израза са изпълними, се наричат допустими стойности на променливите. От това уточнение става ясно, защо всички останали стойности се наричат не допустими.

Например в израза $\frac{y-1}{x}$ *при* $x = 0$ *не може да се извърши действие деление. Затова казваме, че числото 0 не е допустима стойност за променливата* x*, а всяко* $x \neq 0$ *е допустима стойност. Множеството от всички допустими стойности на променливите в даден алгебричен израз се нарича* ***дефиниционно множество (дефиниционна област)*** *D на този израз.*

Определение 1: Алгебричен израз, образуван от числа, букви, скоби и знаците за действията събиране, изваждане, умножение и деление, се нарича рационален израз. [8]

Рационалният израз е запис, съставен от числа и букви, свързани със знаците за събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване, ако степенните показатели са цели числа. В записа може да има и скоби, които определят реда на действията.

Индуктивно определение за рационален израз:

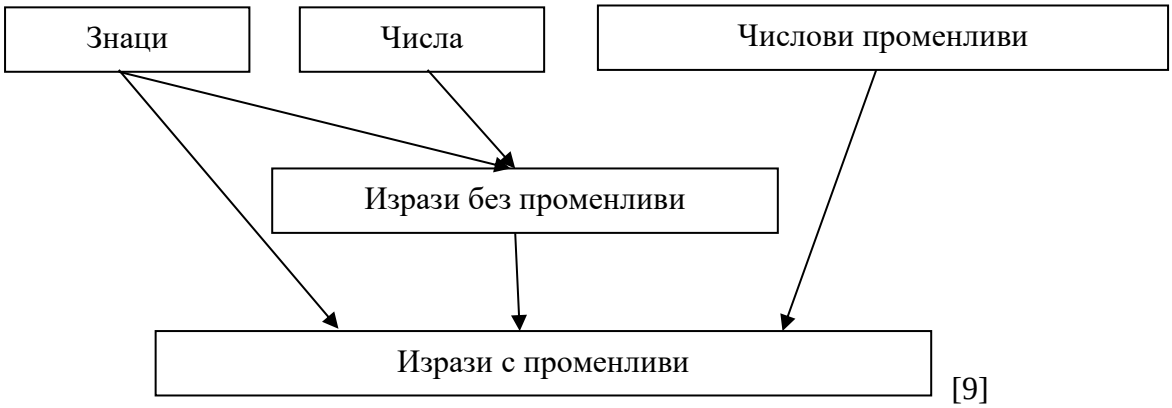
а) Всяко число и всяка буква, означаваща числова променлива, е рационален израз;

б) Ако A и B са рационални изрази, то $A - B$, $A + B$, $A.B$, $A:B$, при $B \neq 0$, A^B ,при B цяло число, също са рационални изрази;

в) Една съвкупност от числа, числови променливи и знаци за събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване (евентуално и скоби) е рационален израз, ако е такъв в смисъла на а) или краен брой пъти приложено б). (Обикновено числата, означени с цифри и допустимите стойности на променливите в даден рационален израз се избират от някое числово поле: в първи гимназиален етап – множеството на реалните числа.) [9]

В този смисъл при работа в полето на рационалните числа може да се твърди, че рационалния израз е алгебричен, тъй като полето включва множеството на ирационалните числа и действията с тях. Но отново трябва да се отбележи, че, за да бъде алгебричен израз не трябва подкоренните изрази да съдържат променливи.

Градивните елементи на израза са числата, числовите променливи и знаците за действие.



[9]

*Рационалните изрази са **цели** и **дробни**.*

*Един рационален израз се нарича **цял**, ако не съдържа променливи в знаменателя и **дробен** – ако съдържа променливи в знаменателя.*

***Допустими стойности** на цял рационален израз са всички рационални числа.* [8]

Дефиницията за рационален израз е въведена чрез алгебричен израз. На този етап учениците познават ирационалните числа следователно допустимите стойности на цял рационален израз са всички реални числа.

***Допустими стойности** на дробен рационален израз са всички числа, за които знаменателят е различен от нула.* [8]

Тук е необходимо да се добави полето, в което се разглеждат дробните рационални изрази.

Допустими стойности на дробен рационален израз са всички реални числа, за които знаменателят е различен от нула.

*Ако буквите в даден рационален израз се заменят с числа от дефиниционната област и се извършат означените действия, то полученото число се нарича **числена стойност** на този израз.*

За числата, които не са от дефиниционната област, рационалният израз не е дефиниран и няма числена стойност.

Рационална дроб

Определение 2: Частното на два цели рационални израза се нарича ***рационална дроб****.*

Ако A и B са цели рационални изрази, то $\frac{A}{B}$ *е рационална дроб. Например изразите* $\frac{2x-3}{x^2+5}$, $\frac{6a}{x-3}$ *и* $\frac{x^2+1}{y^3+1}$ *са рационални дроби.*

Всеки цял рационален израз може да се запише като рационална дроб със знаменател 1.

Допустими стойности за променливите на една рационална дроб са всички числа, за които знаменателят и не е нула. [8]

Представената теория е математически издържана, но отново трябва да се отбележи, че не е споменато числовото поле, над което се разглеждат рационалните изрази.

От страна на методиката е добре да се добави, че ако един израз съдържа *к* числови променливи, то множеството от допустими стойности (МДС) е множество от всички наредени *к*-торки от стойности на променливите, за които изразът има числена стойност.

Често за променливите от даден израз се въвеждат и допълнителни ограничения. Тогава се получава множество, което е подмножество на МДС. То се нарича област на определеност на израза.

Когато в един рационален израз има делител и той съдържа променлива, изразът се нарича дробен. Ако няма делител с променлива той се нарича цял.

Особено място сред различни видове изрази заема понятието нормална рационална дроб (алгебрична дроб). Обикновено тя се дефинира като частно на два полинома, които нямат общ делител. Нормални рационални дроби са изразите $\frac{x-y+2}{x^2-3}$, $\frac{3}{x}$, $2x^2-5$, 5, но не са такива изразите $\left(\frac{2}{x}+3\right):x$, $\frac{5x-x^2}{5-x}$. Нормалната рационална дроб (алгебрична дроб) може и да не е дробен израз. [9]

3.2. Основно свойство на рационалните дроби. Съкращаване и разширяване на рационалните дроби

Два израза са ***тъждествено равни****, ако приемат една и съща стойност, за всяка стойност на променливите, в сечението на дефиниционните им области.*

Ако заменим един рационален израз с тъждествено равен на него израз, казваме, че извършваме ***тъждествено преобразувание****.* [8]

Така изложена теорията в учебника е достъпна за учениците и математически коректна.

Тук е мястото да се разгледа това изложение и от гледна точка на методиката.

Важно понятие в теорията на изразите е понятието тъждественост на два израз. Нека са дадени два израза $A(x,y,\dots t)$ и $B(x,y,\dots t)$, множествата от допустимите стойности на които са означени с $D \subset D_1 \cap D_2$.

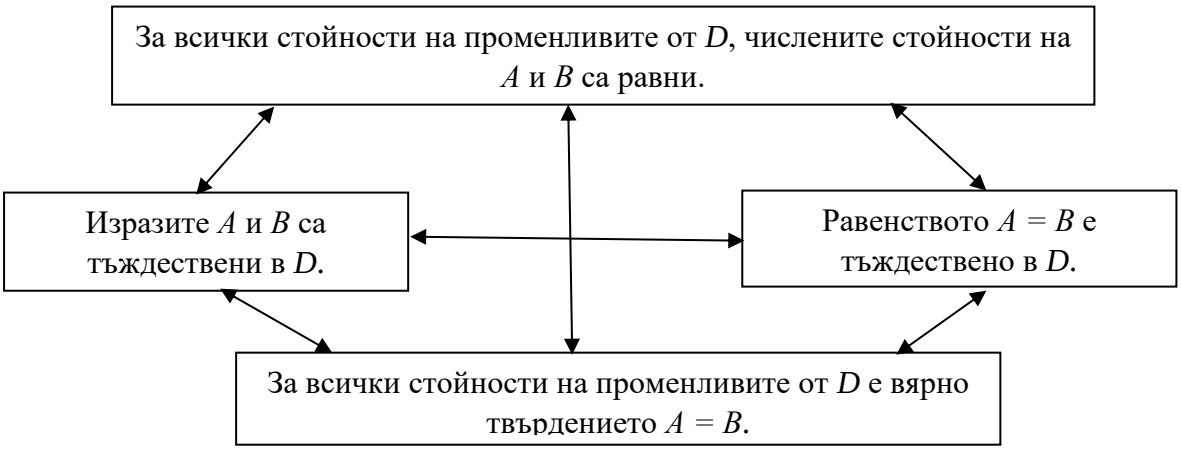
Определение 1: Два израза $A(x, y, \dots t)$ и $B(x, y, \dots t)$ с κ променливи наричаме тъждествени в множеството $D = D_1 \cap D_2$, когато за всяка κ-торка от стойности $(x_0, y_0, \dots t_0) \in D$ числовите стойности на A и B са равни.

Лесно се установява, че така дефинираната двучленна релация притежава свойствата рефлективност, симетричност и транзитивност, т.е. тъждествеността на два израза е релация на еквивалентност.

Тогава тя разбива всяко множество от изрази на класове на еквивалентност.

I.	$2x^2 - 3xy - xy + 4y^2 - x^2 - 4$	$\frac{2x}{x-3} - \frac{y}{y+2}$
II.	$x^2 - 4y(x-y) - 4$	
III.	$(x - 2y)^2 - 4$	$\frac{3y + 4x + xy}{xy - 3y + 2x - 6}$
IV.	$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4$	$2 + \frac{3y + 12 + xy}{(x-3)(y+2)}$
V.	$(x - 2y - 2)(x - 2y + 2)$	
…… *H*		…… …..
……		……

Ако един израз от даден клас се замени с друг израз от същия клас, се казва, че е извършено тъждествено преобразуване или, че първият израз е представен с втория (всеки израз е представител на съответния клас). Фактът, че два израза са тъждествени, се изразява по различен начин:



Свойства на тъждествеността:

а) Ако равенството $A = B$ е тъждество в някое множество D, то е такова и в всяко негово подмножество.

а) Ако $A = B$ е тъждество в D и някоя променлива в него заменим навсякъде с един и същ израз, дефиниран в D, то пак се получава тъждество.

Последното свойство позволява от едно дадено тъждество да се получават много други.

В някои случаи тъждествеността на двата израза *A* и *B* се определя в сечението на D_1 и D_2. В този случай тъждествеността не е транзитивна, следователно не е релация на еквивалентност. В друг случай тъждествеността на изразите се определя в множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ или в множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$. Тогава понятието тъждественост се използва недостатъчно поради това, че малко изрази са дефинирани в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$.

Освен използвания до тук теоретико-множествен подход за дефиниране на тъждественост често в училищните учебници, се използва и алгебричен подход.

Определение 1.1: Два израза А и В се наричат тъждествени в множеството, $D = D_1 \cap D_2$, ако имат един и същ нормален (стандартен) вид.

В методическо отношение се предпочита определение 1, защото то се отнася за всички видове изрази, а определение 1.1 – само за такива, за които е въведено понятието стандартен вид. Такова понятие няма въведено за ирационалните изрази, за логаритмични, тригонометрични и други изрази. С определение 1 лесно се установява, че два израза не са тъждествени, а с определение 1.1 – че два цели или два дробни рационални израза са тъждествени. Затова в обучението е уместно използването на двете определения, отначало с приоритет 1.1 (при цели изрази), а след това на определение 1. [9]

За тъждествено преобразувание на рационални изрази се използва и ***основното свойство на рационалните дроби****.*

Свойство: Ако умножим числителя и знаменателя на една рационална дроб $\frac{A}{B}$ *с един и същ израз C, различен от нула, получената дроб* $\frac{A.C}{B.C}$ *е тъждествено равна на* $\frac{A}{B}$, *т.е.* $\frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C}\ C \neq 0.$

В частност, при $C = -1$, *получаваме следното правило за промяна на знака на рационалната дроб*

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{-B}, B \neq 0.$$

Ако дробта $\frac{A}{B}$ *заменим с дробта* $\frac{A.C}{B.C}$, *казваме, че* ***разширяваме*** $\frac{A}{B}$ *с допълнителен множител* C.

При тъждествени преобразувания дефиниционната област на получения израз може да бъде различна от дефиниционната област на дадения израз. Даденият и полученият израз имат равни стойности в общата част на техните дефиниционни области. [8]

Във връзка с тъждествеността в сборници и учебници често се срещат задачи с формулировката „Опростете (преобразувайте израза …“. Тази формулировка е лишена от смисъл, ако не е казано каква е целта на преобразуването. Например за изразите от клас *H* представянето *IV* е тъй-наречения нормален (стандартен) многочлен; представянето *III* е най-удобно (най-просто, най-рационално), ако трябва да се изследва множеството от стойности на израза (те са не по-малки от – *4*); представянето *V* е най-рационално, ако изразът е едната страна на уравнението, когато другата е нула и т.н. От всичко казано следва, че при решаване на задачи за „преобразуване“ на изрази учениците

трябва да се приучават отначало да обмислят различни варианти и възможности за „преобразуване“, а след това да избират най-рационалния за конкретната цел, т.е. да се съобразяват както с основната информация, така и със специфичната информация в задачата. По такъв начин задачите от този вид ще помогнат не само за придобиване на отлична техника за „преобразуване“, но и за развиването на рационално, комбинативно логическо мислене. [9]

3.3. Привеждане на рационалните дроби към общ знаменател

За привеждане на рационалните дроби към общ знаменател, е необходимо да се намери най-малкото общо кратно на многочлените от знаменателите.

Задача 1. Да се намери многочлен, който е най-малкото общо кратно на многочлените $x^3 - x$, $x^2 - x - 2$ *и* $3x^3 + 6x + 3$.

Решение:

Дадените многочлени разлагаме на множители:

$x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$,

$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$,

$3x^3 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2$.

Най-малко общо кратно е $3x(x - 1)(x - 2)(x + 1)^2$.

Правилото за намиране на най-малко общо кратно (НОК) на многочлени е подобно на правилото за намиране на най-малко общо кратно на естествени числа. Разлагаме на множители всеки от многочлените (ако са разложими). Най-малко общо кратно е произведението на различните множители, взети по един път, като всеки множител участва с най-високата степен, в която се среща в разлагането на дадените многочлени.

Дробни изрази с различни знаменатели привеждане към изрази с еднакви знаменатели като разширим или съкратим дробите с подходящи множители.

Задача 2: Да се приведат към общ знаменател рационалните дроби:

а) $\frac{5}{x^2 - 25}$ *и* $\frac{-7}{3x + 15}$

б) $\frac{x - 2}{x^2 - 4}$ *и* $\frac{15x}{5x + 10}$

Решение:

а) $\frac{5}{x^2 - 25}$ *и* $\frac{-7}{3x + 15}$

1. Разлагаме на множители знаменателите на изразите и намираме най-малкото общо кратно, т.е. $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ *и* $3x + 15 = 3(x + 5)$, *откъдето НОК (*$x^2 - 25, 3x + 15$ *)* = $3(x - 5)(x + 5)$, $D : x \neq \pm 5$.

2. Разширяваме изразите със съответните допълнителни множители, които се получават като частно на най-малкото им общо кратно и разложените на множители знаменатели:

$$\frac{5}{x^2-25}=\frac{5.3}{3(x+5)(x-5)}=\frac{15}{3(x+5)(x-5)},$$

$$\frac{-7}{3x+15}=\frac{-7(x-5)}{3(x+5)(x-5)}=\frac{-7x+35}{3(x+5)(x-5)}.$$

б) $\frac{x-2}{x^2-4}$ *и* $\frac{15x}{5x+10}$

Дробта $\frac{x-2}{x^2-4}$ *може да се съкрати на* $x-2$ *при* $x\neq 2$*, а дробта* $\frac{15x}{5x+10}$ *– на 5.*

Тогава $\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x+2}$ *и* $\frac{15x}{5x+10}=\frac{3x}{x+2}$, $D: x\neq\pm 2$. [8]

Усвояването от учениците на тъждествените преобразувания при дробните изрази се подпомага от аналогията с обикновените дроби и системния подготвителен преговор на начините за представяне на многочлени с произведения.

Използваният подход на обучение във встъпителната си част е обяснително-илюстративен, а след това евристичен, тъй като приносът на обяснително-илюстративния подход за развитие на познавателните способности и активността на учениците е малък.

Подход на обучение: Подходът е начин за постигане на образователните и възпитателните цели на обучението, обусловени от предварително възприетата теоретична концепция. Той определя методите и средствата на обучение, системата от дейности. Подходът се реализира чрез система от методи.

Обяснително-илюстративен подход: Реализира се най-често чрез методите разказ, обяснение, лекция, които стройно подредени, логически обосновани, подходящо онагледени за най-кратно време предават на учениците предвидената информация. Основната задача на учителя при този подход е да изясни научно вярно, подробно и достъпно учебното съдържание. За тази цел той подготвя подходящи примери, задачи, въпроси, чертежи, модели, табла и други илюстративни материали, които улесняват учениците при разбиране на учебния материал. Ролята на ученика при този подход е твърде пасивна. Дейността му се изразява главно в слушане, възприемане, разбиране и запомняне на информацията. Приносът на подхода за развитие на познавателните способности и активността на учениците е малък.

Евристичен (частично търсещ) подход: Същността му се състои в организиране на самостоятелно решаване на част от основната познавателна задача. Последната се разбива от учителя на относително самостоятелни задачи, които последователно поставя пред учениците. Той ръководи, подпомага и допълва решението на тези познавателни подзадачи.

Основен метод за реализиране на този подход е евристичната беседа. Добре обмислените, последователно поставени въпроси водят до частично самостоятелно придобиване на знания от учениците. Въпросите не само направляват търсенията и мисленето на учениците, но ги и активизират. Чести са въпросите като: „Помислете какво искаме да намерим?“, „Какво е нужно да знаем за тази цел?“, „Дали не е нужно да

въведем някой помощен елемент?“, „Какво получихме?“, „Правилен ли е изводът?“, и т.н. При този подход задължително трябва да се използва похватът актуализация на знанията.

Дейността на учениците при евристичния подход се отличава с по-голяма познавателна самостоятелност. Те анализират поставените подзадачи, сравняват, абстрахират и обобщават, пренасят готови образци от собствения си минал опит, изказват хипотези, доказват, а на места и частично планират дейността си. С развитие на беседата умственото напрежение нараства, увлечението и удовлетвореността – също.

В протичането на учебния процес, организиран по този подход, през цялото време се чувства твърдата ръководна функция на учителя. [9.1]

3.4. Събиране и изваждане на рационални дроби

Действията събиране и изваждане на рационални дроби се извършват аналогично на действията с обикновени дроби. Ако A, B, C и D са рационални изрази, то в сила са следните правила:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}, B\neq 0 \text{ и } \frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}, B\neq 0. [8]$$

Тук е мястото учителят да опресни знанията, изучавани в 5. клас за сбор и разлика на обикновени дроби с равни знаменатели и да подкрепи думите си с примери. Освен това е необходимо да припомни действието за изнасяне на знак минус пред дробната черта и да го формулира за обща употреба при рационалните дроби.

Обясненията следва да бъдат, че във формулата за разлика на дроби ще се замени $A=0$. Тогава $\frac{A}{B}$ = *0* и следователно $-\frac{C}{B}=\frac{-C}{B}$. Тъй като $-\frac{C}{B}=\frac{-C.(-1)}{B.(-1)}=\frac{C}{-B}$, то $-\frac{C}{B}=\frac{-C}{B}=\frac{C}{-B}$.

При разглеждане на действията събиране и изваждане на рационални дроби от страна на методиката е необходимо да навлезем в по-големи подробности, като се започне с разглеждането на системата от аксиоми за естествените числа.

Система от аксиоми за естествените числа:

А*1*. След всяко естествено число n следва едно естествено число, което се означава с $n+1$.

А2. Числото 1 не следва след никое естествено число.

А*3*. Всяко естествено число, освен 1, следва само след едно естествено число.

А*4*. Аксиома на математическата индукция.

Ако множеството от естествени числа M съдържа 1 и ако от твърдението $n\in M$ следва, че $(n+1)\in M$, то $M=\mathbb{N}$.

На тази аксиома се основава методът на математическата индукция.

А*5*. Аксиома на събирането.

За всеки две естествени числа n и m, съществува единствено естествено число, наречено сбор $n+m$, такова че:

− за всяко естествено число n следващото го естествено число е сбор от n и 1, т.е. $n+1$;

– за всеки две естествени числа е вярно равенството $n + (m + 1) = (n + m) + 1$.

A_6. Аксиома на умножението.

За всеки две естествени числа n и m съществува единствено естествено число, наречено произведение $n.m$, такова, че:

– за всяко естествено число n е вярно $n.1 = n$;

– за всеки две естествени числа n и m е вярно равенството

$n.(m + 1) = n.m + n$.

Множеството на естествените числа $\mathbb{N}$ е наредено: неравенството $n > m$ $(n < m)$ е вярно, ако съществува такова естествено число k, че $n = m + k$.

С помощта на A_1–A_6 се доказват всички свойства на естествените числа и особено важните свойства на събирането и умножението, които поради това се наричат и закони:

– разместителен (комутативен) закон (свойство)

(1) $a + b = b + a, \quad a.b = b.a;$

– съдружителен (асоциативен) закон

(2) $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a.b).c = a.(b.c);$

– разпределителен (дистрибутивен) закон за умножението относно събирането

(3) $a.(b + c) = ab + ac.$

Ще дадем определения за операциите изваждане и деление, в множеството на естествените числа.

Разликата на две числа a и b се нарича такова число (ако съществува), означено с $a - b$, че $(a - b) + b = a$.

Частното на две числа се нарича такова число (ако съществува), означено с $a:b$, че $(a:b).b = a$. [9]

След въвеждането на аксиоматиката за естествените числа и основавайки се на нея поетапно се достига до въвеждането на аритметичните операции събиране и умножение на рационални числа. Като двете операции дефинирани по следния начин

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd},$$

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

Притежават важните свойства (1), (2) и (3).

Така създадената аналогия между рационалните числа и рационалните дроби е математически и методически подкрепена и достоверна. Следователно учителят може да разшири обсега на разглежданите примери като въведе събиране (изваждане) на рационални дроби с различни знаменатели. Важно е да се отбележи, че при събирането (изваждането) с различни знаменатели е необходимо първо ученикът да приведе дробите към общ знаменател. Тук идва момента на опресняване и затвърждаване на знанията на учениците от предходния урок. Необходимо е да се направи извод, че от направените разсъждения следва, че привеждането към общ знаменател, събирането и изваждането на рационални дроби са тъждествени преобразувания.

Дадените примери в учебника:

Задача 1. Да се извършат означените действия:

а) $\frac{2x}{7x+1} + \frac{3}{7x+1}$; *б)* $\frac{6}{a-b} + \frac{3}{b-a}$; *в)* $\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{x^2-1}$.

Решение:

а) $\frac{2x}{7x+1} + \frac{3}{7x+1} = \frac{2x+3}{7x+1}, x \neq -\frac{1}{7};$

б) $\frac{6}{a-b} + \frac{3}{b-a} = \frac{6}{a-b} - \frac{3}{a-b} = \frac{3}{a-b}, a \neq b;$

в) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{x^2-1} = \frac{1-x}{x^2-1} = -\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1}, x \neq \pm 1.$

Изразите с различни знаменатели събираме (изваждаме) като предварително ги приведем към дробни изрази с еднакви знаменатели.

Задача 2. Да се представи като рационална дроб:

а) $\frac{5a}{6x^2y} + \frac{b}{9xy^2};$ *б)* $\frac{5}{a} - \frac{4}{a-1};$ *в)* $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-5x+6}.$

Решение:

а) $\frac{5a}{6x^2y} + \frac{b}{9xy^2} = \frac{15ay}{18x^2y^2} + \frac{2bx}{18x^2y^2} = \frac{15ay+2bx}{18x^2y^2}, x \neq 0, y \neq 0;$

б) $\frac{5}{a} - \frac{4}{a-1} = \frac{5(a-1)}{a(a-1)} - \frac{4a}{a(a-1)} = \frac{5a-5-4a}{a(a-1)} = \frac{a-5}{a(a-1)}, a \neq 0;\ a \neq 1;$

в) $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{1.(x-2)}{(x-3)(x-2)} - \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-2-1}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-3}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-2}, x \neq 2;\ x \neq 3.$ [8]

подкрепят по подходящ начин изложената теория и подпомагат за трайното усвояване на знанията от учениците.

Следва урок за упражнение, при който може да се използват различни подходи на изложение. Освен вече разгледания евристичен подход тук може да се приложи и изследователския подход, тъй като множеството от разглеждани задачи е разширено.

Изследователски подход. Състои се в организиране на творческа търсеща дейност на учениците за самостоятелно решаване на познавателни задачи. Според Е. И. Монисзон той се реализира в следните етапи:

а) наблюдение и изучаване на факти и явления;

б) уточняване на непознати обекти, подлежащи на изследване;

в) съставяне на план за изясняване на непознатите обекти;

г) формулиране на решението, обяснението;

д) проверка на решението;

е) практически изводи за приложения на получените знания.

При този подход учителят използва същите похвати, както при евристичния подход, но в друг порядък. Например въпросите и указанията при евристичния подход предхождат решаването на познавателните задачи, а при изследователския се дават след решението и имат за цел да се реши повторно задачата, но с други методи и похвати

(получава се наслагване на методи). За правилно решилите познавателната задача това е средство за самоконтрол и затвърдяване, а за другите е решение на задачата на достъпно за тях равнище. При този подход учениците работят максимално самостоятелно.

Реализирането на изследователския подход изисква повече време в сравнение с другите подходи. Обикновено проучванията, наблюденията, експериментирането се правят в домашни условия, а в клас се разискват резултатите от тях, дава се решението.

Очевидно при този подход освен знания, учениците придобиват и умения самостоятелно да придобиват знания, да планират и организират търсеща познавателна дейност. Той дава най-големи възможности за развитие и изява на творческите способности на учениците. [9.1]

3.5. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби

Действията умножение, деление и степенуване на рационални дроби се извършват аналогично на действията с обикновени дроби. Ако A, B, C и D са рационални изрази, то в сила са следните правила:

$$\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}, B\neq 0, D\neq 0$$

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A.D}{B.C}, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}, B\neq 0, n\in\mathbb{N}. [8]$$

Така представена теорията е математически вярна, но липсват допълнителни пояснения, които учителят задължително трябва да даде. Също така степенуването е представено само с едно от правилата си, което може да доведе до объркване в учениците, че не всички правила за степенуване важат при рационалните дроби.

Правилното и пълно въвеждане на умножението, делението и степенуването на рационални дроби следва да се представи като се започне от умножението на обикновени дроби.

Обикновени дроби умножаваме, като напишем дроб с числител, равен на произведението от числителите, и знаменател, равен на произведението от знаменателите на умножаваните дроби. След това съкращаваме общите множители на числителя и знаменателя на получената дроб:

$$\frac{5}{7}.\frac{4}{9}.\frac{21}{13}=\frac{5.4.21}{7.9.13}=\frac{5.4}{3.13}=\frac{20}{39}.$$

Нека $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ са две рационални дроби. От правилото за умножение на обикновени дроби следва, че равенството $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}$ е вярно числово равенство за всяка допустима стойност, т.е. то е тъждество. Едва след тези разяснения следва да се даде правилото за умножение на рационални дроби. Също така трябва да се уточни, че то се използва и при умножение на три и повече дроби.

Следва представянето на правилото за деление на рационални дроби, като първо се актуализират знанията за реципрочни числа.

Ако числото b е реципрочно на числото a, то $b=\frac{1}{a}$, т.е. $ab=1$.

От правилото за умножение на рационални дроби имаме $\frac{A}{B}.\frac{B}{A}=\frac{A.B}{B.A}=1.$ Дробта $\frac{B}{A}$ се нарича реципрочна на дробта $\frac{A}{B}$.

Делението $a:b$ на две рационални числа се свежда до умножение на числото a с реципрочното на b, т.е. $a:b=a.\frac{1}{b}$. От това правило следва, че за всяка допустима стойност равенството $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}.\frac{D}{C}$ е вярно числово равенство, т.е. тъждество.

Необходимо е да се припомни на учениците, че произведението на няколко равни множителя се нарича степен с цял положителен степенен показател. От правилото за умножение на рационални дроби непосредствено се получава:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\underbrace{\frac{A}{B}.\frac{A}{B}\ldots\frac{A}{B}}_{n\text{-множителя}}=\frac{A.A\ldots A}{B.B\ldots B}=\frac{A^n}{B^n}.$$

Следователно $\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}, B\neq 0, n\in\mathbb{N}.$

Тук е моментът да се въведат всички правила за степенуване на рационални дроби.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n.\left(\frac{C}{D}\right)^n=\left(\frac{AC}{BD}\right)^n=\frac{(AC)^n}{(BD)^n}, B\neq 0, D\neq 0, n\in\mathbb{N};$$

$$\left(\left(\frac{A}{B}\right)^n\right)^m=\left(\frac{A}{B}\right)^{n.m}=\frac{A^{n.m}}{B^{n.m}}, B\neq 0, n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N};$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n.\left(\frac{A}{B}\right)^m=\left(\frac{A}{B}\right)^{n+m}=\frac{A^{n+m}}{B^{n+m}}, B\neq 0, n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N};$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n:\left(\frac{A}{B}\right)^m=\left(\frac{A}{B}\right)^{n-m}=\frac{A^{n-m}}{B^{n-m}}, B\neq 0, n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}, n>m.$$

След въвеждането на действията умножение, деление и степенуване на рационални дроби в учебникът са разгледани подходящи примери илюстриращи различни ситуации. Въпреки това е необходимо да се допълни и с примери, който онагледяват всички правила за степенуване.

Към *Задача 2.* Са подходящи да се добавят следните примери:

в) $\left(\left(\frac{x+y}{2bc^2}\right)^2\right)^3$; г) $\left(\frac{x}{y+1}\right)^2.\left(\frac{x}{y+1}\right)^3$; д) $\left(\frac{ax^3}{y}\right)^4:\left(\frac{ax^3}{y}\right)^2$.

Решение:

в) $\left(\left(\frac{x+y}{2bc^2}\right)^2\right)^3=\left(\frac{x+y}{2bc^2}\right)^{2.3}=\left(\frac{x+y}{2bc^2}\right)^6=\frac{(x+y)^6}{2^6b^6c^{2.6}}=\frac{(x+y)^6}{64.b^6c^{12}},$ $b\neq 0, c\neq 0;$

г) $\left(\frac{x}{y+1}\right)^2.\left(\frac{x}{y+1}\right)^3=\left(\frac{x}{y+1}\right)^{2+3}=\left(\frac{x}{y+1}\right)^5=\frac{x^5}{(y+1)^5}, y\neq -1;$

д) $\left(\frac{ax^3}{y}\right)^4:\left(\frac{ax^3}{y}\right)^2=\left(\frac{ax^3}{y}\right)^{4-2}=\left(\frac{ax^3}{y}\right)^2=\frac{a^2x^{3.2}}{y^2}=\frac{a^2x^6}{y^2}, y\neq 0.$

Отново следва урок за упражнение. Уроците за упражнение са от съществено значение, защото най-важното нещо за формиране на висока математическа култура в учениците, за активизиране в обучението по математика е ефективната организация и управление на учебната дейност на учениците при решаване на математически задачи. По този начин учениците съзнателно и трайно усвояват системата от математически знания, умения и навици. За това тук е моментът да се разяснят функциите на задачите в училищното обучение по математика.

Под обучаващи функции на задачите разбираме такива, които са насочени към формиране на система от математически знания, умения и навици в учениците (както предвидени от програмата, така и разширяващи и задълбочаващи нейното съдържание) на различни етапи на усвояването им. Обучаващите функции могат да се разделят на функции от общ, специален и конкретен характер. Под общи обучаващи функции разбираме такива функции на задачите, които имат място не само в обучението по математика, но и по всички предмети от естествено-математическия цикъл. Под специални функции на математическите задачи разбираме функции от общ характер, които имат значение само за обучението по математика. Под конкретни функции на задачите разбираме частни видове специални функции. Например формирането в учениците на някои понятия (на равнище представа) е обща обучаваща функция; формирането на представа за естествено число е специална функция, а формирането на представа за числото 3 е обща обучаваща функция. Към общите обучаващи функции на задачите се отнасят:

1. формиране на понятия (на равнище представа, на равнище усвояване и на равнище затвърждаване);
2. установяване на връзки между понятията (от род към вид, вътрешнопредметни, междупредметни и други);
3. конструиране на описания, определения на понятия, подвеждане под понятие;
4. формиране на водещи идеи, закони, съждения и връзки между тях;
5. усвояване на основни видове умозаключения;
6. формиране на водещи умения и навици, характерни за дадения учебен предмет;
7. формиране на умения и навици за изразяване на мислите си устно и писмено на говорим или символичен език;
8. формиране за умения и навици за работа с прибори, инструменти, компютри, с учебна и справочна литература и други.

Известно е, че обучението възпитава преди всичко чрез своето съдържание – факти и тяхното тълкуване. Обаче заедно с това успехът на възпитанието зависи и от това как се поставят пред учениците учебните цели и от организацията на учебната работа на класа и на всеки ученик поотделно. Необходимо е целенасочено да се използва изучаваният материал и самият процес на учене, и в частност процесът за решаване на задачи за:

– възбуждане и развитие на интерес към учебния предмет;
– възпитание на отговорно отношение към учебния процес;
– възпитание на високи нравствени качества на личността;
– естетическо възпитание и т.н.

По същество всяка задача (или процесът на решаването ѝ) съдържат в себе си една или друга възпитателна функция. И от учителя (както и от автора на учебника или сборника) зависи ефективността на реализацията ѝ.

Накрая под развиващи функции на задачите ще разбираме тези функции, които са насочени към развитието на мисленето на учениците, към формиране на качества, присъщи на научното мислене, овладяване на подходи за ефективна умствена дейност.

Към общите развиващи функции на задачите се отнасят:

1. овладяване на методите на научно познание като методи на изследване;

2. развитие на способността за индуктивни и дедуктивни умозаключения (в частност умение правилно да се използват аналогията и индукцията);

3. овладяване на елементарна логическа грамотност;

4. умение да се извършва елементарно моделиране на учебни ситуации и да се използват съществуващи или съставени модели за изучаване на свойствата на обектите (построяване и използване на графики, диаграми, рисунки, схеми и т.н.);

5. умение да се класифицират изучаваните обекти, да се систематизират знанията, да се откриват причинно-следствени и структурни връзки между тях;

6. умение да се подбират средства и методи за достигане на поставена цел, отчитайки конкретните условия; умение да се отделя главното;

7. умение да се съзира връзка на изучавания материал с живота, с практическата дейност на хората;

8. овладяване на основни качества, присъщи на научното мислене;

9. развитие на творческото пространствено въображение;

10. развитие на избирателна и трайна памет и умение да се възпроизвеждат най-важни, основни неща от изучения материал и други.

Към специалните развиващи функции могат да се отнесат:

1. формиране на умения за предсказване съществуването на един или друг факт или свойства, отнасящи се към математическите обекти с достатъчна степен на правдоподобност;

2. формиране и развитие на умение да се доказва или опровергава дедуктивно едно или друго математическо твърдение;

3. развиване на умението да се планира решаването на дадена задача, да се изключват ненужните данни от условието ѝ, да се допълнят недостигащите, да се подбират методи, средства и операции за нейното решаване, да се проверява правилността на решението;

4. формиране на ясна представа за логическата структура на курса по математика, за това, че абстрактният характер на математиката е основна причина за многочислените приложения в други науки, в техниката, в стопанството;

5. формиране на умения да се дават определения на математически понятия и да се съотнася дадено понятие към съответно определение;

6. развитие и усъвършенстване на умението бързо и правилно да се извършват изчисления със и без помощта на изчислителни устройства;

7. усъвършенстване на умението да се провеждат изследвания в най-прости учебни ситуации;

8. усъвършенстване на умението да се използва езика на математическата символика. [9.1]

В хода на изложението на функциите на задачите се засягат и методите на научното познание в обучението по математика, както и индуктивното и дедуктивното умозаключение. За това е редно да бъдат представени с цел да се изясни напълно казаното до тук.

Основни методи за научно познание:

1. Наблюдение и експеримент.

Наблюдението е метод на изучаване свойствата и отношенията на обекти, разглеждани в естествената им среда, т.е. без да се променя нито едно от условията, при които те съществуват.

Експериментирането е метод на изучаване свойствата и отношенията на обекти при условия, от които поне едно е създадено допълнително към условията, при които те съществуват.

При тези два метода обектите се възприемат, запомнят и фиксират в думи (или записи). Те са основен източник на първична информация, която след това се преработва чрез други методи на познание и се достига до нова информация, чието получаване чрез наблюдение и експериментиране е неосъществимо. За тази нова информация се казва, че е зад границите на непосредственото наблюдение. Тя се нарича вторична информация.

В обучението по математика наблюдението и експериментирането се използват най-често за откриване на общи свойства, релации (отношения) или методи, а също и при мотивиране на нови знания.

Докато наблюдението има преди всичко визуален характер (извършва се с очите), то експериментът има действен характер (при него много често действат ръцете). Освен това във всеки експеримент винаги има и визуално получаване на информация, но след някакво предварително действие, осигурило явлението, от което тя се получава. Обратно – при наблюдението получаващият информация е пасивен по отношение протичането на съответното явление, от което тя се получава.

Наблюдението и експериментът са в основата и на всички останали познавателни методи, защото чрез тях се получава информация, на базата, на която се използват тези методи.

2. Анализиране, абстрахиране и синтезиране.

Анализирането е познавателен метод, при който цялото се разчленява на части и последователно се изучава всяка част.

Абстрахирането е познавателен метод, при който вниманието се съсредоточава само върху някои части на изучавания обект, а другите се пренебрегват.

Синтезирането е познавателен метод, при който частите се съединяват в цяло.

За да може да се осигури цялостно опознаване на изучаван обект, трябва първо да се извърши анализиране, а след това – синтезиране. Затова, когато осъзнато първо се използва анализиране, а след това – синтезиране, се казва, че се прилага аналитико-синтетичен метод.

Основни случаи на използване на тези три метода в обучението по математика са:

а) при изучаването на цялото съдържание на училищния курс по математика;

б) при изучаването на отделните математически понятия;

в) при проучване на задача (теорема) преди решаването (доказването) ѝ;

г) при проучване на готово решение на задача (доказателство на теорема);

д) при откриване решение на задача (доказателство на теорема);

е) при откриване и оформяне на цели групи (системи, цикли) от задачи с общи методи за решаване.

Винаги, когато се използват само анализиране и абстрахиране, се получават разпокъсани и изолирани знания, които трудно се запомнят и използват, защото не се получава цялостна представа за изучавания обект. С извършването на синтезирането се получават цялостни знания.

3. Сравнение, обобщения, конкретизация и специализация.

Сравнението е познавателен метод, при който се търсят общи или различни свойства на изучавани обекти.

След откриването на общите свойства на някои обекти много често те се обединяват в едно множество или в система.

В този случай се казва, че се извършва обобщение чрез сравнение или емпирическо обобщение. Това позволява в последствие да се изучават отделни елементи от това множество и да се правят изводи за всички елементи от него. Освен това по този начин се облекчава запаметяването на изучаваните свойства, защото не се запаметяват свойствата на много отделни обекти, а на малко на брой множества от обекти.

След като се формулира общото твърдение, то се прилага за различни конкретни случаи или за същински подмножества на множество, за което е формулирано общо твърдение при обобщението. В първия случай се казва, че се извършва конкретизация, а във втория – специализация. Конкретизация се използва например при всяко прилагане на формулирано общо свойство на уравненията, а специализация – при преминаването от множеството на дробните положителни числа към множеството на естествените числа (разгледани като дробни със знаменател единица).

4. Моделиране.

Моделирането е познавателен метод, при който добре развити знания от една област или познати реални обекти, които са удобни за работа, се съпоставят с недостатъчно развити знания от друга област или с недобре познати обекти от действителността и първите се използват съответно за развиване или изследване на вторите.

Типичен пример за моделиране на явления от действителността е съставянето на уравнения за решаване на тъй наречените текстови задачи, свързани с работа, движение и други.

Новооткритият или новосъздаденият обект, който се използва за изследване на другия обект, се нарича модел, а изследваният обект се нарича оригинал.

Всеки модел съдържа само част от свойствата на оригинала, но те са такива, че може да се направят изводи за нови свойства на модела, за които след това да се потърси дали не съответстват на някои неизвестни до момента свойства или характеристики на оригинала.

Когато моделът е изграден от формално описани математически обекти, той се нарича математически.

В моделирането има четири основни етапа. Конкретно при математическото моделиране тези етапи имат следното съдържание:

1. Изучаване на обекта-оригинал – определяне на главните параметри, връзки и закономерности, които го характеризират.

2. Построяване на математическия модел – превод на конкретната задача от говоримия език на математически език.

3. Решаване на математическата задача.

4. Оценка на полученото решение. Оценката бива два вида – формална (математическа), когато се проверява съответствието между полученото решение и построения математически модел, и съдържателна, когато се проверява съответствието между полученото математическо решение и оригинала.

Индуктивно умозаключение – Индуктивно умозаключение се нарича това умозаключение, при което от няколко верни съждения за конкретни елементи от някакво множество $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots\}$ се получава ново съждение за всички елементи на A. По-точно, ако P е свойство, което могат да имат елементите на множеството A и $P(a_1)$, $P(a_2)$, $P(a_3)$, …, $P(a_k)$ са верни съждения, при индуктивно умозаключение се прави извод, че е вярно съждението $(\forall a \in A)P(a)$. Този факт се записва символично така:

$$(1)\ \frac{P(a_1), P(a_2), P(a_3), \dots, P(a_k), a_1 \in \mathrm{A}, a_2 \in \mathrm{A}, \dots, a_k \in \mathrm{A}}{(\forall a \in A)P(a)}.$$

Когато A е крайно множество и съдържа k елемента, индукцията, представена със схема (1), се нарича пълна индукция.

Думата „индукция“ е латинска и означава „навеждане към идея, към ново твърдение“.

Дедуктивно умозаключение – Дедуктивното умозаключение е такава форма на мислене, при която от едни верни съждения се получават други верни съждения на основата на закони и правила за извод от логиката.

Димата „дедукция“ е латинска и означава „извеждане“. [9.1]

3.6. Преобразуване на рационални изрази

3.6.1. Преобразуване на рационални изрази – въведение

Редът на действията с рационални изрази съответства на реда на действията с числа – първо степенуване, после умножение и деление и последно събиране и изваждане. Ако в израза има скоби първо се извършват действията в скобите по описания вече ред.

Задача 1. Да се опрости изразът:

а) $\frac{2x-y}{2x+y} : \left(1 - \frac{2y}{2x+y}\right)$;

б) $\frac{y+3}{y^2-6y+9} \cdot \frac{7y-21}{y^2-9} - \frac{7}{y^2+6y+9}$;

в) $x - \frac{1}{x-7} : \left(\frac{1}{x^2-8x+15} + \frac{2}{10x-x^2-21}\right)$.

Решение:

а) $\frac{2x-y}{2x+y} : \left(1 - \frac{2y}{2x+y}\right) = \frac{2x-y}{2x+y} : \frac{2x+y-2y}{2x+y} = \frac{2x-y}{2x+y} \cdot \frac{2x+y}{2x-y} = 1$,

при $x \neq \pm\frac{y}{2}$;

б) $\frac{y+3}{y^2-6y+9}\cdot\frac{7y-21}{y^2-9}-\frac{7}{y^2+6y+9}=\frac{(y+3)}{(y-3)^2}\cdot\frac{7(y-3)}{(y-3)(y+3)}-\frac{7}{(y+3)^2}=$
$\frac{7}{(y-3)^2}-\frac{7}{(y+3)^2}=\frac{7\left((y+3)^2-(y-3)^2\right)}{(y-3)^2(y+3)^2}=\frac{7\left((y+3)-(y-3)\right)\left((y+3)+(y-3)\right)}{(y-3)^2(y+3)^2}=$
$\frac{84y}{(y-3)^2(y+3)^2}$, при $y\neq\pm3$;

в)

$$x-\frac{1}{x-7}:\left(\frac{1}{x^2-8x+15}+\frac{2}{10x-x^2-21}\right)=$$
$$x-\frac{1}{x-7}:\left(\frac{1}{(x-3)(x-5)}-\frac{2}{(x-3)(x-7)}\right)=$$
$$x-\frac{1}{x-7}:\frac{x-7-2(x-5)}{(x-3)(x-5)(x-7)}=$$
$$x-\frac{1}{x-7}:\frac{x-7-2x+10}{(x-3)(x-5)(x-7)}=$$
$$x-\frac{1}{x-7}:\frac{-(x-3)}{(x-3)(x-5)(x-7)}=$$
$$x+\frac{1}{x-7}.(x-5)(x-7)=2x-5,\text{при } x\neq5, x\neq3, x\neq7.$$ [8]

Така изложено учебното съдържание е непълно, защото освен важността на реда на действията е важно да се въведе и термина – опростяване на изрази. Необходимостта идва от това, че преобразуване е синоним на опростяване и често в учебната литература се използва точно този термин. По същество опростяването на изрази означава представяне на даден рационален израз с рационална дроб, в която са извършени възможните съкращения. Освен това е важно да се отбележи, преди представянето на примерите, че действията при рационални изрази се извършват в общото им дефиниционно множество.

3.6.2. Преобразуване на рационални изрази – упражнение

*Два рационални изрази са **тъждествено равни**, ако имат една и съща числова стойност за всички стойности на променливите, допустими и за двата израза.*

*Два тъждествено равни израза, свързани със знак за равенство, образуват **тъждество.***

*Тъждествата се наричат **условни** или **безусловни** в зависимост от това дали за променливите в тях има, или няма допълнително поставено условие.*

За доказване на безусловните тъждества най-често се използва един от начините:

а) преобразува се едната страна на равенството, докато се получи другата (ако равенството е тъждество);

б) образува се разликата на двете страни на равенството и ако то е тъждество, тя трябва да е равна на нула. [8]

Ще разгледаме само два от представените примери, които директно подкрепят двата различни варианта предложени за доказването на безусловни тъждества.

Задача 1. Да се докаже тъждеството:

а) $x - \frac{5 - x^2}{5 - x} = \frac{5(1 - x)}{x - 5}$;

……

в) $\frac{y^2 + 10y + 25}{y + 5} + 2y = \frac{9y^2 - 25}{y - 3} \cdot \frac{2y^2 - 3y}{3y^2 - 5y}$.

Решение:

а) $x - \frac{5 - x^2}{5 - x} = \frac{5(1 - x)}{x - 5}$

$x - \frac{5 - x^2}{5 - x} = \frac{x(5 - x) - (5 - x^2)}{5 - x} = \frac{5x - x^2 - 5 + x^2}{5 - x} = \frac{5(x - 1)}{5 - x} = \frac{5(1 - x)}{x - 5}$, при $x \neq 5$;

……

в)

$$\frac{y^2 + 10y + 25}{y + 5} + 2y = \frac{9y^2 - 25}{y - 3} \cdot \frac{2y^2 - 3y}{3y^2 - 5y}$$

$$\frac{y^2 + 10y + 25}{y + 5} + 2y - \frac{9y^2 - 25}{y - 3} \cdot \frac{2y^2 - 3y}{3y^2 - 5y} =$$

$$\frac{(y + 5)^2}{y + 5} + 2y - \frac{(3y - 5)(3y + 5)}{2y - 3} \cdot \frac{y(2y - 3)}{y(3y - 5)} =$$

$$y + 5 + 2y - (3y + 5) = 0, \text{при } x \neq -5, y \neq \frac{3}{2}, y \neq \frac{5}{3}, y \neq 0.$$

При условните тъждества има допълнително условие (може и няколко) за променливите и то се използва в хода на доказателството.

За да докажем, че два израза не са тъждествено равни, е достатъчно да намерим поне една стойност на променливите от общата част на дефиниционните им области, за която числените стойности на изразите са различни. [8]

В точка **3.2.** подробно са разгледани тъждествено равните изрази и тъждественото преобразуване от гледна точна на методиката, за това тук няма да бъдат повторени, а само ще се отбележи факта, че така изказани първите изречения в урока са достоверни и коректни. Но последвалите ги термини – условни и безусловни тъждества, не се изясняват. Едва след третия пример на *Задача 1.* се дава кратко пояснение за условните тъждества. Налага се разяснение, защото не във всички учебници по математика за 7. клас се въвеждат, или ако са споменати, то това е направено в извън задължителния материал. За това тук учителят трябва да даде допълнително определение, подкрепено с примери.

Тъждества, в които променливите удовлетворяват някои допълнителни условия, се наричат условни. При доказването им най-често се прилагат двата предложени метода, но в процеса на преобразуване на изразите се използват дадените допълнителни условия. В случая при рационалните изрази тези допълнителни условия са допустимите им

стойности. Следователно за безусловни тъждества ще се считат всички, които съдържат многочлени без допълнително условие за променливите в тях.

Примери:

1. Безусловно тъждество:

Докажете тъждеството:

$$(x-y)^2+4xy-1=(x+y+1)(x+y-1)$$

Решение:

$$x^2-2xy+y^2+4xy-1=(x+y)^2-1$$
$$x^2+2xy+y^2-1=x^2+2xy+y^2-1$$

2. Условно тъждество:

Докажете, че ако $x+y=2$ и $x.y=1$, то $x^2+y^2=2$.

Решение:

От това, че $x+y=2$, то $x^2+2xy+y^2=4$.

Заместваме с $x.y=1$ и получаваме $x^2+2+y^2=4$.

Следователно $x^2+y^2=2$.

Необходимо е да се допълни и метода на непосредствената проверка за доказване на тъждества, за да бъде методически и математически пълен.

Метод на непосредствената проверка

За да докажем, че $A=B$ е тъждество се използват различни варианти:

а) преобразува се тъждествено едната страна A (B) на тъждеството, докато се получи другата B (A), т.е.

$$A=A_1=A_2=\ldots=B.$$

б) Преобразуват се и двете страни, докато се получат едни и същи изрази, като се използва записа:

$$A=A_1=\cdots=M \text{ и } B=B_1=\cdots=M \Rightarrow A=B.$$

в) Образува се разликата и последната се преобразува

$$A-B=P_1=P_2=\cdots=C.$$

Ако C е нула, то с това е доказано тъждеството $A=B$;

Ако C е положително число или израз само с положителни числени стойности, то сме доказали неравенството $A>B$, а ако $C<0$, то сме доказали неравенството $A<B$. [9]

Тук е мястото да се представят и други методи, подходящи за доказване на тъждества.

Метод на еквивалентните преобразувания

Схемата на двата му варианта е:

а) (Аналитичен) $A=B \Leftrightarrow A_1=B_1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_k=B_k$. Ако последното равенство е тъждество, то такова е и $A=B$.

б) (Синтетичен) Тръгва се от вярното равенство $A_k=B_k$.

$$A_k=B_k \Leftrightarrow A_{k-1}=B_{k-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A=B.$$

Метод на следствията

И той има няколко варианта:

а) (Синтетичен) Тръгва се от известно равенство $A_k = B_k$ (тъждество) и се търсят негови следствия

$$A_k = B_k \Longrightarrow A_{k-1} = B_{k-1} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow A = B.$$

б) (Аналитичен по схемата на Пап) Тръгва се от тъждеството $A = B$, което трябва да се докаже и се търсят достатъчни условия

$$A = B \Longleftarrow A_1 = B_1 \Longleftarrow \ldots \Longleftarrow A_k = B_k$$

е известно или дадено тъждество.

в) (Аналитичен по схемата на Евклид) Тръгва се от тъждеството $A = B$, което трябва да се докаже и се търсят следствия

$$A = B \Longrightarrow A_1 = B_1 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow A_k = B_k.$$

Ако е известно, че $A_k = B_k$ не е тъждество, то не е такова и $A = B$, а ако е известно, че $A_k = B_k$ е тъждество, то трябва да се докаже, че и от $A_k = B_k \Longrightarrow A = B$. Без последното тъждеството $A = B$ няма да е доказано.

Използване на елементи от анализа

За да се докаже, че $A = B$ е тъждество, образува се разликата $A - B$ и тя се разглежда като функция на една от променливите ѝ. Ако производната на тази функция е нула, то $A - B$ е константа и с непосредствено заместване се проверява дали константата е нула, т.е. $A - B = 0$ или не. [9]

Метод на математическата индукция

Доказателството по метода на математическата индукция се състои от доказателството на две самостоятелни теореми.

Теорема 1. Твърдението е вярно за $n = 1$.

Теорема 2. Твърдението е вярно за $n = k + 1$, щом е вярно за $n = k$, където k е произволно естествено число.

Ако и двете теореми са доказани, то въз основа на принципа на математическата индукция твърдението е вярно за всяко естествено число n.

3.7. Дробни уравнения

Определение: Уравнение, което съдържа неизвестно в знаменател, се нарича ***дробно уравнение****.*

Дефиниционната област *на дробното уравнение е общата дефиниционна област на участващите в него изрази.*

Дробно уравнение решаваме като го преобразуваме до цяло уравнение, на което намираме корени. Цялото уравнение е следствие от дробното и двете уравнения може да не са равносилни. Затова трябва да проверяваме дали корените на цялото уравнение са от дефиниционната област на дробното.

Задача 1. Да се реши дробното уравнение:

а) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{1}{2-x} = 0$

Решение:

1) Определяме дефиниционната област.

$D: x-2 \neq 0, D: x \neq 2$

2) Привеждаме дробното уравнение към цяло, което решаваме.

$$\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x-2}=O, x+1=0, x=-1$$

3) Проверяваме дали корените на цялото уравнение са от дефиниционната област на дробното.

$x=-1 \in D$. *Следователно корен на уравнението е* $x=-1$. [8]

Теорията е кратка, точна и ясна, а примерите представят подходящо стъпките за решаване на дробни уравнения.

Подходящо е да се разгледа понятието уравнение и релациите следване и равносилност от гледна точка на методиката.

Определение 1 (O_1). Уравнението е равенство, което съдържа променливи и се удовлетворява само за някои стойности на променливите.

Понякога се добавя, че ако равенството се удовлетворява за всички допустими стойности на променливата, тогава то се нарича тъждество.

Родовото понятие в O_1 е „равенство“, а видовият признак е конюнкция от две съждения „равенството съдържа две променливи“ и „се удовлетворява само за някой стойности на променливите“. Основният недостатък в това определение, поради който то вече не се използва, е, че обектът уравнение се определя чрез стойностите на променливата, които удовлетворяват равенството, а предварително не се знае съществуват ли такива стойности и колко са те, т.е. уравнението се определя в зависимост от множеството на решенията му. Но последното става известно след като уравнението се реши. Излиза, че ще се решава нещо, без да се знае какво е то. Освен това някой равенства например $ax+b=0$ „се проявяват“ по различен начин: при $a \neq 0$ е уравнение (удовлетворява се само за $x=-\frac{b}{a}$), а при $a=0$ не е уравнение, защото се удовлетворява за всяка стойност на променливата (при $b=0$) или не се удовлетворява за никоя нейна стойност (при $b \neq 0$).

Много разпространено в литературата е

Определение $1'$ (O_1'). Уравнение се нарича равенство на две функции, разглеждани в обща дефиниционна област.

Това определение е останало от времето, когато понятието функция задължително се е свързвало с понятието израз. Положителното в O_1' е, че още с определението вниманието се насочва към връзката на уравненията с функциите. Но това определение, освен че създава условия за смесване на понятието уравнение с понятието „равни функции“, не се съгласува и със съвременното по-общо схващане за понятието функция (двучленна релация).

Определение 2 (O_2). Записът

$$f_1(x)=f_2(x),\ x \in D \tag{1}$$

се нарича равенство с една променлива и с област на определеност D.

Областта на определеност D или е същинско подмножество на $D_1 \cap D_2$, където D_1 и D_2 са множествата на допустими стойности на променливата съответно в $f_1(x)$ и $f_2(x)$, или $D=D_1 \cap D_2$. В първия случай със задаване на равенството (1) се задава и D, а във втория D може да не се задава, защото сечението $D_1 \cap D_2$ е еднозначно определено и

всеки, който работи с равенство (1) може да намери и D. В този случай областта на определеност съвпада с множеството на допустимите стойности на променливата в даденото равенство.

За някой стойности на променливата x от равенство (1) се получава вярно твърдение (вярно числово равенство). Казва се, че тези стойности удовлетворяват равенството, а за други стойности – невярно твърдение.

Когато равенство (1) се удовлетворява за всяка стойност на променливата x от D казваме, че равенството $f_1(x) = f_2(x)$ е тъждество в D.

Определение 3 (O_3). Равенството (1) се нарича уравнение с едно неизвестно, когато се постави задачата да се намерят всички стойности на променливата x, принадлежащи на D и удовлетворяващи равенството.

Едно и също равенство например (1) може да се тълкува и като уравнение и като тъждество. Ако се иска да се намерят стойностите на x, за които от предиката (1) се получава вярно равенство, тогава (1) е уравнение, а ако се иска да се докаже, че изразите от двете страни на равенството са тъждествени, тогава (1) е съждение, което се нарича тъждество.

Определение 4 (O_4). Всяко число x_0, за което $x_0 \in D$ и $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ е вярно равенство се нарича корен или решение на уравнението $f_1(x) = f_2(x),\ x \in D$.

Множеството M на всички корени се нарича множество на решения на уравнението. От дадените определения се вижда, че всяко уравнение се свързва с две множества: област на определеност D и множество на решения M, където $M \subset D$, а $D \subset D_1 \cap D_2$. По отношение на областта на определеност D, множеството на решения M може да е същинско негово подмножество ($M \subset D$, и $M \neq D$) или да съвпада с D, ($M = D$). M може да е празно (уравнението няма решения), да е крайно или да е безкрайно.

За изложение в учебниците по математика най-подходящо е да се използва Определение 3, тъй като има редица дидактически предимства:

– използват се сравнително по-естествени за учениците понятия като израз с променлива, равенство с променлива (предикат), удовлетворяване на равенства;

– свободата $D \subset D_1 \cap D_2$ се съгласува с неявното използване на уравненията в предходните класове;

– свободата да избираме $D \subset D_1 \cap D_2$ позволява да се съставят достъпни и ефективни упражнения за усвояване на знанията за равносилност и следствие и свързаните с тях теореми;

– насочва учениците към по-съзнателно усвояване на понятията.

В множеството на уравненията с едно неизвестно се въвеждат две релации – на равносилност (еквивалентност) и на следване, които са в основата на два метода за решаване на уравнения.

Нека са дадени две уравнения $f_1(x) = f_2(x),\ x \in D$ (1) с множество на решения M и $g_1(x) = g_2(x),\ x \in D'$ (2) с множество на решения M'.

Определение 5 (O_5). Казва се, че уравнение (2) е следствие от уравнение (1) или че от (1) следва (2), когато $D \subset D'$, и $M \subset M'$.

Това означава, че всички корени на (1) са корени и на (2), но уравнението (2) може да има и други корени. Фактът, че (2) е следствие на (1) най-често се означава с $(1) \Longrightarrow (2)$.

Определение 6 (O_6). Когато $D \subset D'$ и $M \subset M'$ се казва, че уравнение (1) е равносилно (еквивалентно) на уравнение (2).

Определението за равносилност може да се даде и през понятието следствие.
Определение $6'$ ($O_6{}'$). Казва се, че уравнение (1) е равносилно на уравнение (2), когато от (1) следва (2) и от (2) следва (1).

Като се използва O_6 лесно се съобразява, че са налице свойствата рефлективност, симетричност и транзитивност на релацията равносилност, т.е. тя е релация на еквивалентност.

Тази релация разбива множеството от уравнения с едно неизвестно на класове на еквивалентност.

Примери:

$$Dx = \{R \setminus * S\}$$
$$\frac{10+x}{x+5} + \frac{x+2}{x+5} = 1$$
$$10 + x + x + 2 = x + 5$$
$$2x - x = 5 - 12$$
$$x = -7$$
$$3x = -21$$
…….
…….
…….

$$Dx = R$$
$$2x(2x-1) + 11 = x(3x+10)$$
$$4x^2 - 2x + 11 = 3x^2 + 10x$$
$$x^2 - 12x + 11 = 0$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 11$$
…….
…….
…….

Всички уравнения от един клас са равносилни и имат едно и също множество от решения. Един от представителите на този клас има вида, или е дизюнкция от такива уравнения. Да решим едно уравнение често означава да намерим такъв представител.

Определението за равносилност притежава редица предимства от логически и дидактически характер:

а) равносилността е релация на еквивалентност;

б) определението е едно и също когато е празно или не е празно;

в) облекчава се формулировката на редица теореми за равносилност;

г) свързването на понятието равносилност с областта на определеност задължава учениците да следят изменението при замяна на едно уравнение с друго, което може да доведе до поява на нови корени или до загуба на такива, т.е. това определение действа за предпазване на учениците от грешки. [9]

Следва урок за упражнение, който не само затвърждава знанията на учениците, но и ги задълбочава, защото урокът не преповтаря видовете задачи от предходния, а ги надгражда. Предложените задачи се решават много по-лесно чрез подходящо полагане. Тук се налага кратка препратка към биквадратните уравнения, за да се актуализират знанията на учените. Освен това е предложен обобщен начин за полагане в специфични уравнения, а именно:

Дробни уравнения от вида

$$\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c} = C, \text{при } A, B, C \neq 0 \text{ и } a, c \neq 0,$$

$$\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} = \frac{Ax}{ax^2 + b_3x + c}, \text{при } A \neq 0 \text{ и } a, c \neq 0, \text{и}$$

$$\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c} \pm \frac{ax^2+b_3x+c}{ax^2+b_4x+c} = A, \text{при } a, c \neq 0,$$

се решават лесно с полагането на $y = ax + \frac{c}{x}$,*когато* $x = 0$ *не е корен на уравнението.* [8]

И отново предложеният метод е подкрепен с подходящ пример за приложението му.

3.8. Моделиране с дробни уравнения

Моделирането с дробни уравнения е разгледано в два последователни урока, в които са представени по-голяма част от възможните видове задачи, които могат да се срещнат в учебната литература. Тъй като учениците са запознати с модела на моделиране, урокът започва директно с пример, но въпреки това учителят трябва да обърне специално внимание на етапите на моделиране.

Задача 1. Разликата от квадрата на едно число и квадрата на реципрочното му число е 1,5. Да се намери числото.

Решение:

① ***Избираме*** *неизвестно и* ***съставяме*** *уравнение по текста на задачата.*

Нека x *е неизвестното число. Тогава от текста на задачата се получава уравнението* $x^2 - \frac{1}{x^2} = 1{,}5$ с $D: x \neq 0$.

② ***Решаваме*** *съставеното уравнение. След тъждествени преобразувания се получава:*

$$2x^4 - 3x^2 - 2 = 0, \;\; x_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

③ ***Проверяваме*** *дали намерените корени удовлетворяват условието на задачата:*

Корените $\sqrt{2}$ *и* $-\sqrt{2}$ *удовлетворяват условието на задачата. Числата са* $\sqrt{2}$ *и* $-\sqrt{2}$. [8]

В по-голяма част от учебниците, както и в този, моделирането се представя в три стъпки:

I. Съставяне на математически модел;

II. Решаване на получените уравнения;

III. Формулиране на окончателен отговор,

но това не е математически и методически напълно коректно. Първата стъпка е прекалено обобщена. Необходимо е тази стъпка в съставянето на математическия модел да бъде разделена на две отделни части:

I.1. Трябва да се определят участващите величини и някои от тях да се изберат за неизвестни, като за тези неизвестни се определя множество от допустими стойности. (Без да бъде разбрано условието на задачата и да се извърши определянето на неизвестните не може да се премине към изграждане на модел, за това тази фаза трябва да е отделена в самостоятелна стъпка.)

I.2. По данните от условието трябва да се изразят връзките между величините, т.е. да се създаде уравнение.

За да се изясни въпроса за необходимостта от това разделение трябва да се разгледа и методически моделирането с уравнения.

Описанието на процеси, явления и предмети с математически средства се нарича математическо моделиране. Математическите модели се създават за по-удобно и резултатно изучаване на обектите и явленията. Понятието математически модел се въвежда и използва явно в средния курс във връзка с изучаване на уравнения, неравенства и системи от тях, но подготвителна работа по съставяне на изрази и уравнения се извършва интензивно и в предходните класове. За създаване на математически модели в училище най-често се използват изрази, функции, уравнения и неравенства. Моделирането обикновено е свързано с решаване на някои практически (нематематически) задачи.

Методът на математическото моделиране за решаване на нематематически задачи се прилага в следната последователност:

а) Разбиране на практическата (нематематическата) задача;

б) Превод на описанието на задачата от нематематически на математически език (създаване на математическия модел);

в) Решаване на получената математическа задача;

г) Превод на резултатите от решаването от математически език на езика на областта, от където е взета задачата и тълкуване на тези резултати.

Задачите за математическо моделиране могат да се вземат от различни области на човешкото познание (физика, химия, география и др.) и практиката (строителство, промишленост, селско стопанство, търговия и др.), поради което се отличават с голямо съдържателно разнообразие, макар да имат почти една и съща структура. Обикновено със средствата на говоримия език са описани няколко множества M_i $(i = 1, 2, 3, \dots k)$ от числа, от наредени двойки числа, от наредени тройки числа и т.н. и се иска множествата M_i, да се опишат с математически средства и след това с тях да се извършат някои математически операции. Характерът и броят на M_i, както и начинът на задаването им и съставения математически модел, могат да послужат за класификация на текстовите задачи. Задачи от уравнения, от неравенства, задачи с едно неизвестно, задачи с две, с три и т.н. неизвестни.

Умението да се решават практически задачи чрез моделиране с уравнения е сложно, защото то се състои от следните дейности:

а) разбиране на задачата;

б) избор на основни неизвестни и означаването им с букви;

в) съставяне на изрази за някои от неизвестните;

г) определяне дефиниционните множества на тези изрази;

д) съставяне на уравнения, които са словесно зададени в задачата;

е) решаване на уравненията или системата от тях;

ж) тълкуване на решенията на математическата задача в областта на практическата задача (обратен превод).

От своя страна изброените дейности също имат сложна структура. Например разбирането на нематематическата ситуация означава, че е ясно какви обекти се разглеждат (движения, покупки, планиране, смеси и др.), от какво се определят обектите (скорост (V), време (t) и път (S); цена (P), количества стока (Q) и стойност (S) и др.), какви връзки има между тези обекти $(S = V.t;\ P.Q = S$ и др.), колко случая се разглеждат в ситуацията (две покупки, 4 движения и т.н.), какви зависимости има между стойностите на обектите при различните случаи, кои от тях са дадени, кои са неизвестни, кои се търсят и т.н..

От това следва, че явното поставяне на въпроса за съставяне на математически модел трябва да се предхожда от продължителна, целенасочена пропедевтична дейност.

При съставяне на уравнения учениците често допускат груби грешки – пишат равенства, в които участват мерки на обекти от един и същ вид, измерени с различни мерни единици. Затова е необходимо, учителят винаги да напомня, че мерните единици трябва да се преобразуват в един и същ вид, като подкрепя изискването с подходящи и разбираеми примери, чрез които учениците ще установят важността на изискваното от тях действие.

Когато в съставения математически модел участват само уравнения, могат да възникнат следните ситуации:

А) броят на независимите уравнения, които могат да се съставят, е равен на броя на неизвестните.

Б) броят на уравненията е по-малък от броя на неизвестните.

В) броят на независимите уравнения е по-голям от броя на неизвестните. В този случай, когато уравненията са линейни, системата няма решение.

В случай А) могат да се намерят всички неизвестни и за това няма значение от кое неизвестно и от кое уравнение ще започне решаването (евентуално това може да окаже влияние само на краткостта на решението).

В случай Б), когато броят на уравненията е по-малък от броя на неизвестните и няма други ограничителни условия за неизвестните, системата е неопределена – има безбройно много решения. В училищната практика обикновено се решават такива задачи от група Б), при които могат да се намерят само някои неизвестни или частно от неизвестните, които не зависят от останалите неизвестни или допълнителни ограничителни условия, които дават възможност от безбройно многото решения да се подберат краен брой от тях. Тези задачи са по-трудни за учениците. При решаването им, за основни неизвестни се избират търсените, а едно или повече от останалите неизвестни се разглеждат като параметри, които при намиране на търсените неизвестни се съкращават или унищожават. Типични представители на тази група задачи са често срещаните в училищните сборници и учебници задачи от работа, при които количеството работа не е дадено и не се търси. По традиция това количество работа се приема за единица. Това затруднява формулирането на умения да се решават задачи от този тип, защото трудно може да се поясни на учениците кога да приемат работата за единица и кога не. За препоръчване е по-общото – щом работата е неизвестна, означава се с някаква буква – параметър. [9]

Заключение

На база поставените цели в дипломната работа и последвалото ги изложение може да се твърди, че чисто теоретично те са изпълнени. Разгледано е пълно и систематизирано понятието рационален израз от въвеждането на идеята за рационални числа в древността до доказателството на основните теореми за тъждественост и съкращаване на алгебрични дроби. Както и са разгледани всички теми от учебникът по математика за VIII клас на издателство „Регалия 6“. Те са представени с всички възможности за по-добро преподаване в учебните часове, чрез избор на подходяща методика и коректни допълнения от математическа гледна точка.

Тук е необходимо да се направи анализ и на рефлексията. От моя гледна точка, стъпвайки на задълбоченото изучаване на раздела рационални изрази мога да твърдя, че двете поставени цели подпомогнаха изключително много начина ми на представяне на учебния материал в учебните часове.

Още от първоначалното представяне на термина алгебра в арабската паралелка в училището, в което преподавам, се разви интересна дискусия за историята на математиката и дори част от учениците знаеха откъде произлиза термина и какво означава. С помощта на кратко изложение на историческите бележки се повиши заинтересоваността на по-голяма част от учениците и от другите паралелки. Опирайки се на методическите бележките поставени във всеки един урок, установих, че уменията на учениците за усвояване на нови знания се подобряват. Направените коментари от математическа гледна точка подпомогнаха още в първия урок да се изяснят понятията дефиниционно множество, дефиниционна област и допустими стойности, като се уточни, че всички те се разглеждат в множеството на реалните числа. Задълбоченото разглеждане на теоремите за тъждественост и съкращаване на алгебрични дроби ми позволи лесно да въведа и да обясня на учениците основното свойство на рационалните дроби. Боравенето с различните подходи на обучение, като обяснително-илюстративния подход за въвеждането на нови знания, последван от евристичния подход при решаването на сходни примери, доведоха до по-лесно възприемане и частично самостоятелно придобиване на нови знания. Представянето и съпоставянето на събирането и изваждането на рационални дроби със сбор и разлика на обикновени дроби подпомогна да се премине спокойно от сбор с еднакви знаменатели към сбор с различни. Така с малко подкрепа от моя страна и общи усилия учениците стигнаха до извода, че привеждането към общ знаменател, събирането и изваждането на рационални дроби са тъждествени преобразувания. Избирането на изследователския подход при уроците за упражнение насърчи творческата дейност на учениците и им позволи сами да открият оптималния вариант за решаване на дадените типове задачи. При урокът за умножение, деление и степенуване на рационални дроби започнах с припомнянето на правилото за умножение на обикновени дроби, като чак след тези разяснения въведох правилото за умножение на рационални дроби. Тук беше мястото да уточня, че то се използва и при умножение на три и повече дроби. Последвалата актуализация на знанията за реципрочните числа подпомогна бързото усвояване на правилото за деление на рационални дроби. Своевременното въвеждане на всички правила за степенуване на рационални дроби отстрани възможността за объркване на учениците, че не всички правила за степенуване важат при рационалните дроби. В урокът за преобразуване на рационални изрази спазих конструктивната забележка и въведох пълно и точно термина

опростяване на израз, тъй като преобразуването е синоним на опростяването и често в учебната литература се използва точно този термин. Урокът за упражнение пък ми даде възможност да представя на учениците различни методи за доказване на тъждества – метод на непосредствената проверка, метод на еквивалентните преобразувания, метод на следствията и използване на елементи от анализ. Така на всеки ученик се дава шанса да избере този метод, който за него или за типа задача би бил най-подходящ и рационален. След като учениците са натрупали необходимите знания до този момент при решаването на дробните уравнения си създадохме „рецепта“ , за да може всеки, дори и тези, които по-бавно и трудно усвояват учебния материал да могат да се справят. Така наречената „рецепта“ представлява решение на задачите представено чрез опорни стъпки, а именно:

1. намиране на дефиниционно множество;
2. разлагане на знаменателите и числителите, където е възможно;
3. опростяване на всяка една дроб участваща в уравнението, където е възможно;
4. привеждане под общ знаменател, когато има действия събиране и изваждане;
5. решаване на така полученото уравнение;
6. проверка на корените дали принадлежат на дефиниционното множество;
7. извод дали корените са решения на уравнението.

Разбира се тези стъпки не са универсални за всички задачи, тъй като винаги има изключения, но те помогнаха на по-слабо заинтересованите ученици да се справят с решенията на задачите и да повишат успеха си. Последните уроци в раздела са свързани с моделирането с дробни уравнения. Моделирането винаги е плашило учениците, за това тук обърнах специално внимание на стъпките, чрез които се извършва то. Следвайки методическите бележки, първата стъпка за съставяне на математически модел я разбих на две част, а именно първо да се определят участващите величини и някои от тях да се изберат за неизвестни, като за тези неизвестни се определи множество от допустими стойности и второ по данните от условието да се изразят връзките между величините, т.е. да се създаде уравнение. По този начин се улесни работата на учениците.

В заключение и на база на резултатите от писменото изпитване на учениците, което средно за всички класове е над добър, мога да твърдя, че очакваните резултати от обучението зададени в учебната програма и учебното съдържание са покрити, както и моите цели за повишаване на тяхната мотивация и възприемчивост на новите знания и умения.

Използвани източници и ресурси:

1. https://bg.freejournal.org/50229/1/algebra.html - Алгебра. Елементарна алгебра
2. Вигодски, М. Я., 1969, Справочник по елементарна математика, София, Техника
3. Новоселов, С.И., 1958, Специальный курс элементарный алгебры, Москва, Советская наука
4. Витанов, Т., Калчева, А., Джонджорова, И., Кьосева, М., Тодорова, П., 2018, Учебник по математика за 7. клас, София, Анубис
5. https://mariyavoschoolmaths.wordpress.com/
6. Паскалева, З., Алашка, М., Алашка, Р., 2018, Учебник по математика за 7. клас, София, Архимед
7. https://www.mon.bg/bg/1999 - Учебна програма по математика за 8. Клас
8. Тонов, И., Шаркова, И., Христова, М., Капралова, Д., Златилов, В., 2017, Учебник по математика за 8. клас, София, Регалия 6
9. Ганчев, И., Колягин, Ю., Кучинов, Й., Портев, Л., Сидоров, Ю., 1998, Методика на обучението по математика VIII – XI клас, II част, София, Модул
9.1. Ганчев, И., Колягин, Ю., Кучинов, Й., Портев, Л., Сидоров, Ю., 1998, Методика на обучението по математика VIII – XI клас, I част, София, Модул