Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Дипломна работа

на тема

Интерактивен уеб сайт на тема "Окръжност" в 8. клас

Изготвил: Янка Иванова Виткова

Факултетен номер: M23003

Магистърска програма: Технологии за обучение по математика и информатика

Дипломен ръководител: Теодоси Витанов

София
2022

Съдържание

I. УВОД 3

II. ЦЕЛ И СЪДЪРЖАНИЕ 6

III. ОПИСАНИЕ НА ПРЕДЛАГАНИЯ ПРОДУКТ И МЕТОДИЧЕСКИ НАСОКИ ЗА ИЗПОЛЗВАНЕТО МУ 11

1. ОКРЪЖНОСТ. ТОЧКИ, ПРАВИ И ОКРЪЖНОСТИ 11
   - 1.1. ОКРЪЖНОСТ 11
   - 1.2. ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ТОЧКА И ОКРЪЖНОСТ 12
   - 1.3. ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ПРАВА И ОКРЪЖНОСТ 14
   - 1.4. ДОПИРАТЕЛНИ КЪМ ОКРЪЖНОСТ 17
2. ДИАМЕТРИ И ХОРДИ В ОКРЪЖНОСТ 18
3. ВЗАИМНО ПОЛОЖЕНИЕ НА ДВЕ ОКРЪЖНОСТИ 23
4. ОБЩИ ДОПИРАТЕЛНИ НА ДВЕ ОКРЪЖНОСТИ 25
5. ДЪГА ОТ ОКРЪЖНОСТ. ЦЕНТРАЛЕН ЪГЪЛ 27
   - 5.1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ 27
   - 5.2. ЗАДАЧИ 36
   - 5.3. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА 39
6. ВПИСАН ЪГЪЛ 43
   - 6.1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ 43
   - 6.2. ЗАДАЧИ 47
   - 6.3. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА 50
7. ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ 53
   - 7.1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ 53
   - 7.2. ЗАДАЧИ 56
   - 7.3. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА 63
8. ЪГЛИ, ЧИИТО РАМЕНЕ ПРЕСИЧАТ ОКРЪЖНОСТ 66
   - 8.1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ 66
   - 8.2. ЗАДАЧИ 71
   - 8.3. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА 74

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ 78

V. Използвана литература 79

I. УВОД

Пандемията от COVID-19 промени образователната система в България през последните две години. След въведеното извънредно положение през март 2020 г. в българските училища се въведе обучение от разстояние в електронна среда чрез използване средствата на информационните и комуникационните технологии.[11]

Дигиталното учене означава активно използване от учениците на компютри или мобилни устройства с оглед провеждането на часа и изпълнението на различни задачи. Подготовката на занятието изисква промяна на традиционната организация на урока и на различните активности, което в най-голяма степен зависи от учителя. В процеса на обучение всички участници в системата усвоиха нови знания и умения, промениха своите нагласи, адаптираха се към новите условия в образователната среда.[8]

Често като синоними на OPEC (обучение от разстояние в електронна среда) се използваха термините „онлайн обучение“ и „дистанционно обучение“.

Дистанционното обучение и онлайн обучението са две различни форми за получаване на образование. При дистанционното обучение учителят може да не се среща с учениците в онлайн видео, а само да пише коментари в чата, т.е. отсъства междуличностно общуване лице в лице. Дистанционното обучение е асинхронно и действа в разделителен режим на работа, ученикът може да избира време за учене по дадени от учителя материали и указания.[15]

Онлайн обучението е получаване на знания и умения с помощта на компютър, свързан с Интернет, в режим „тук и сега“ и предполага „живи“ уроци в реално време, при които имаме директно общуване между учител и ученици, а това, от своя страна, води и до по-голяма степен на интерактивност и комуникация.[16]

Онлайн обучението се смята за логическо продължение на дистанционното обучение.

Основното, което е необходимо за осъществяване на обучение от разстояние в електронна среда (OPEC) е наличието на подходящи електронни устройства, електронни образователни ресурси, интернет връзка, достъп до електронни платформи за синхронно и асинхронно обучение и други.

Понятието електронни ресурси за обучение може да се определи така: това са ресурси, които изискват достъп до компютър или друг дигитален източник и се използват с образователна цел, т.е. използват се от учителите, за да подпомагат преподаването, ученето и педагогическата комуникация между учителя и учениците, както и между самите ученици.[1]

Пред какви трудности са изправени учителите в преподаването на математика?

Днес младите хора са свикнали с културата на изображенията поради широкия достъп до социалните мрежи като Фейсбук, Туитър и Ютюб. Чрез тях са достъпни текст, аудио, графични изображения, анимация, видео и виртуална реалност. Освен това, развитието и бързият растеж на Интернет и разширяващият се достъп за всекиго, създаде един изцяло нов дигитален свят. Това означава, че в учебния процес учениците са все по-склонни да възприемат представяното им учебно съдържание по подобен начин. Особено по математика, където множество задачи изискват голямо въображение, учениците нямат желание да усвояват предмета, ако информацията не им се представя по един съвременен и достъпен начин.[9]

Синхронното обучение по математика предполага споделяне на екран от учителя, използване на OneNote в Microsoft Teams или виртуални бели дъски (White Board). Работата на учителя се улеснява и с използването на графичен таблет. При онлайн обучението по математика се използват електронни учебници, някои допълнителни електронни ресурси, предлагани от издателствата към електронните учебници, различни онлайн сайтове и приложения.

В съвременните насоки за преподаването на математика се подчертава важната роля на техниките за визуализация. В отговор на тези потребности са разработени редица приложни програми за създаването на геометрични конструкции и решаването на аналитични и алгебрични задачи. Едно от най-добрите приложения, разработени за конструирането и илюстрирането на математически задачи, е GeoGebra.[9]

Преподаването на геометрия е предизвикателство за учителя по математика. За онагледяване на учебното съдържание са необходими чертежи. Представянето им по един по-интересен и атрактивен начин може да стане с използването на динамични чертежи, каквато възможност дава GeoGebra. Използването й може да облекчи работата на учителя, като спести време и предостави прегледно материала, така че понятия и теореми да станат „видими“ и „осезаеми“.

Основните препятствия в преподаването на математика са:

- понятия без адекватно илюстриране;
- в класическия начин на преподаване, математическите графики са статични – т.е. чертае се на ръка;
- статичните обекти не позволяват обобщаване на понятието.

Националният съвет на преподавателите по математика (NCTM), който е най-голямото в света сдружение на учители по математика, обяви технологиите за един от шестте принципа на математиката в училище.

Технологиите имат жизненоважно значение в преподаването и усвояването на математиката. Те влияят на математиката, която се преподава, и увеличават степента на усвояване от страна на учениците.

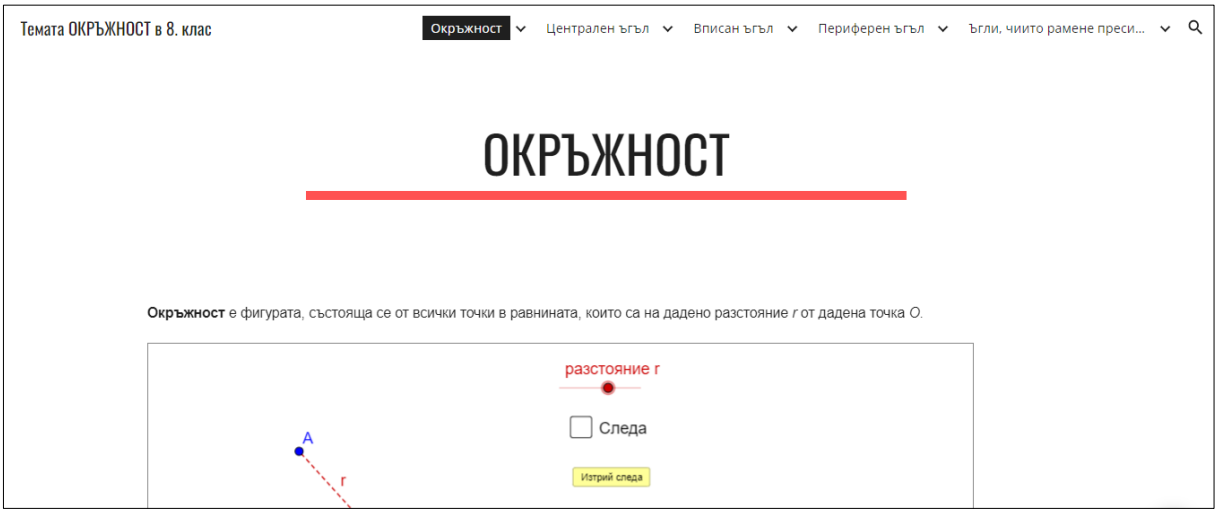
Основната идея на използването на GeoGebra в ежедневното преподаване и учене е да се дават възможности на ученици с различни математически умения и нива на възприемане по-добре да разбират понятията и да бъдат мотивирани и насърчавани да се занимават с математика по нов, атрактивен начин. [9]

II. ЦЕЛ И СЪДЪРЖАНИЕ

Цел на дипломната работа е разработване на интерактивен уеб сайт, който:

- да подпомогне работата на учителя с готови динамични чертежи за онагледяване на учебното съдържание по темата „Окръжност“ в 8. клас;
- да даде възможност за усвояване на учебното съдържание, чрез прилагане на изследователския подход при откриване и доказване на твърдения;
- да предостави средства за упражняване и затвърдяване на новите знания.

Уеб сайт „Темата ОКРЪЖНОСТ в 8. клас“ е достъпен в Интернет на адрес: https://sites.google.com/view/okr8.



Сайтът може да се използва от учители и ученици. Учителят може да го използва в часовете по математика при обучение от разстояние в електронна среда, както и в присъствените часове. Ученикът може да го използва самостоятелно за нови знания (ако ученикът е отсъствал от училище) и за упражнения.

Създаден е с Google Sites – безплатна възможност, която позволява бързо да поставите всяко съдържание в мрежата и да осигурите достъп на аудиторията до него.

Чертежите в сайта са динамични, създадени с GeoGebra. Аплетите са създадени и публично публикувани в платформата на GeoGebra и след това са вградени в уеб сайтът.

При създаването на уеб сайтът водеща е идеята за прилагане на изследователския подход в обучението (inquiry-based learning).

Сайтът предоставя динамични геометрични конструкции, чрез които учениците наблюдават, откриват закономерности, формулират хипотези. В присъствена или дистанционна форма на обучение учителят може да създаде условия на учениците си да генерират идеи и да откриват математически резултати.

Някои електронни учебници по математика предлагат онагледяване на съдържание с динамични чертежи. Обикновено достъпът до електронен учебник с интерактивно съдържание е платен. Често учителят се ориентира към търсенето на готови чертежи в Интернет. Проблемът, който възниква е, че даден чертеж може да не изпълнява изискванията на учителя по математика и той да иска да го промени според нуждите си. Създаването на динамични чертежи с GeoGebra е трудоемка задача и отнема време на учителя. Необходими са и познания за работа с програмата. Това ме провокира да създам този интерактивен сайт, в който учителят да намери подходящ чертеж за онагледяване на конкретното учебно съдържание по темата.

Съдържанието на сайта е съобразено с учебната програма по математика за 8. клас (общообразователна подготовка).

Темата „Окръжност“ е част от учебната програма по математика за 8. клас (общообразователна подготовка) и включва следните подтеми:

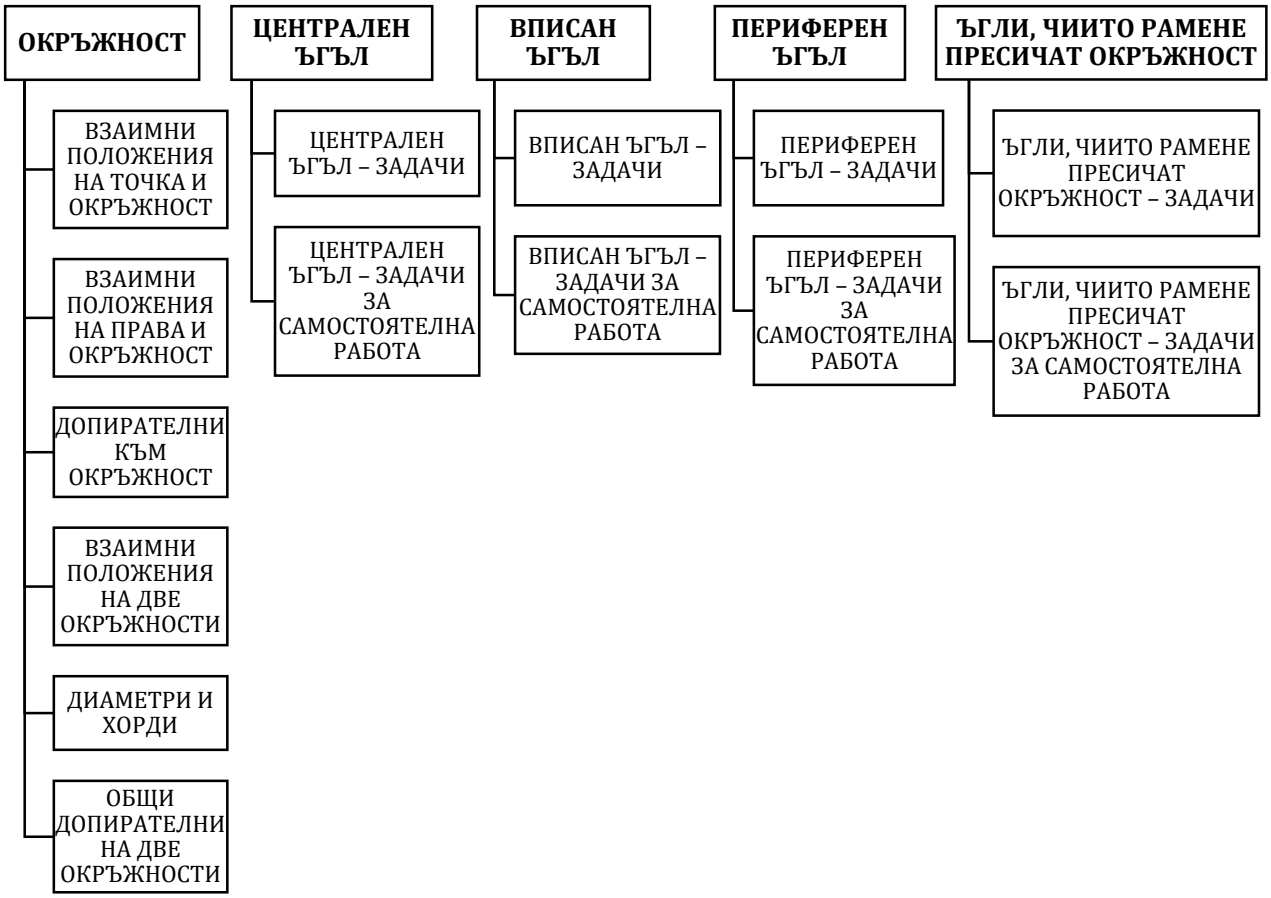
1. Окръжност. Взаимни положения на точка и окръжност.
2. Взаимни положения на права и окръжност.
3. Допирателни към окръжност.
4. Централни ъгли, дъги и хорди.
5. Диаметър, перпендикулярен на хорда.
6. Вписан ъгъл.
7. Периферен ъгъл.
8. Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжност.
9. Ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжност.
10. Взаимно положение на две окръжности.
11. Общи допирателни на две окръжности.

Според учебната програма компетентности като очаквани резултати от обучението са:

- Знае и може да определя взаимни положения на
  - точка и окръжност;
  - права и окръжност;
  - две окръжности;
- Знае и умее да прилага свойства на хорди в окръжност;
- Знае видовете ъгли, свързани с окръжност, твърденията за тях и умее да ги прилага;

- Умее да разграничава твърденията от темата като необходими и достатъчни условия.

Структурата на сайта е представена със следната диаграма:



Сайтът се състои от пет основни страници: ОКРЪЖНОСТ; ЦЕНТРАЛЕН ЪГЪЛ; ВПИСАН ЪГЪЛ; ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ; ЪГЛИ, ЧИИТО РАМЕНЕ ПРЕСИЧАТ ОКРЪЖНОСТ.

Основната страница „ОКРЪЖНОСТ“ има шест подстраници: взаимни положения на точка и окръжност, взаимни положения на права и окръжност, допирателни към окръжност, взаимни положения на две окръжности, диаметри и хорди, общи допирателни на две окръжности.

Основните страници и подстраниците на страницата „ОКРЪЖНОСТ“ представят теоретичната част по всяка от темите. Те съдържат текстове и аплети с динамични чертежи, които могат да подпомогнат учителя за онагледяване, въвеждане и изясняване на определения, твърдения и теореми по съответната тема. Аплетите дават възможност, чрез експериментиране с динамичните обекти в тях, да се достига до формулировката на теоремите и да се представи доказателството.

За постигане на необходимите знания и умения за всеки вид ъгъл е разработено учебно съдържание, което включва освен теоретична част и задачи. Задачите дават възможност да се затвърдят знанията и уменията за прилагане на теоремите за измерване на съответния ъгъл и връзките между различните видове ъгли.

Учебното съдържание разпределено в три уеб страници, като:

1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ – представена в основната уеб страница за всяка от темите;

Основната уеб страница съдържа динамични чертежи, чрез които учителя да онагледи, въведе и изясни новите понятия. Динамиката в чертежите позволява да се изследват свойствата на обектите, да се наблюдават закономерности и да се правят изводи. Аплети с динамични чертежи дават възможност, чрез експериментиране с динамичните обекти в тях, да се достига до формулировката на теоремите и да се представи доказателството. В някои аплети е предвидена възможност, чрез насоки под формата на допълнителни построения върху чертежа, учениците да се провокират сами да предложат доказателство на даденото твърдение. Представеното доказателство може да се коментира с класа.

2. ЗАДАЧИ – представени в подстраница;

Разработените задачи с динамични конструкции, дават възможност за първоначално приложение и затвърдяване на знанията за новите понятия и уменията за прилагане на теоремите, свързани с тях.

Всеки аплет съдържа:

- условие на задачата;
- динамичен чертеж;
- полета за отметка за активиране на елементи от чертежа;
- поле за отметка „Решение“.

Аплетите със задачи могат да се използват:

- в присъствен учебен час в класна стая с достъп до Интернет и налична техника за презентиране;
- при обучение от разстояние в електронна среда;
- при самостоятелна подготовка.

Аплетите дават възможност задачите да се разработят колективно с класа, учениците да предложат решение, да се коментира решението. С отметка „Решение“, то може да се види частично или изцяло.

3. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА – представени в подстраница

За упражнение в учебен час или за самостоятелна работа са разработени задачи с кратък отговор. Всяка задача е представена с аплет, съдържащ условие на задачата, динамичен чертеж и поле/полета за въвеждане на отговора. След въвеждане и потвърждаване с Enter: при верен отговор се появява съобщението „Правилно!“, при грешен отговор – „Опитай отново!“. Това дава възможност ученикът да получи веднага обратна връзка дали се е справил със задачата, както и при грешен отговор да въведе нов. Бутонът „нова задача“ генерира задача с други градусни мерки на дадените в условието ъгли или дъги. Заложени са около десет различни градусни мерки за дадените ъгли или дъги, което дава възможност учениците да упражнят и затвърдят прилагането на теоремите.

III. ОПИСАНИЕ НА ПРЕДЛАГАНИЯ ПРОДУКТ И МЕТОДИЧЕСКИ НАСОКИ ЗА ИЗПОЛЗВАНЕТО МУ

1. ОКРЪЖНОСТ. ТОЧКИ, ПРАВИ И ОКРЪЖНОСТИ

В тази тема учениците трябва да актуализират знанията си за окръжност и нейните елементи. Да усвоят понятията: вътрешна точка за окръжност, външна точка за окръжност, допирателна към окръжност, допирна точка, секуща на окръжност.

Компетентности като очаквани резултати от обучението са:

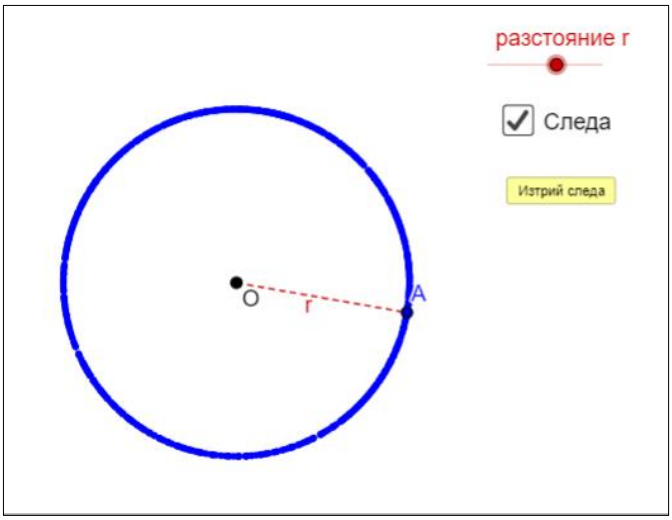
- учениците да знаят и могат да определят взаимните положения на: точка и окръжност; права и окръжност;
- да знаят и да умеят да прилагат твърденията за допирателна към окръжност.

Теоретичната част по темата е разпределена в следните уеб страници: ОКРЪЖНОСТ, ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ТОЧКА И ОКРЪЖНОСТ, ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ПРАВА И ОКРЪЖНОСТ, ДОПИРАТЕЛНИ КЪМ ОКРЪЖНОСТ.

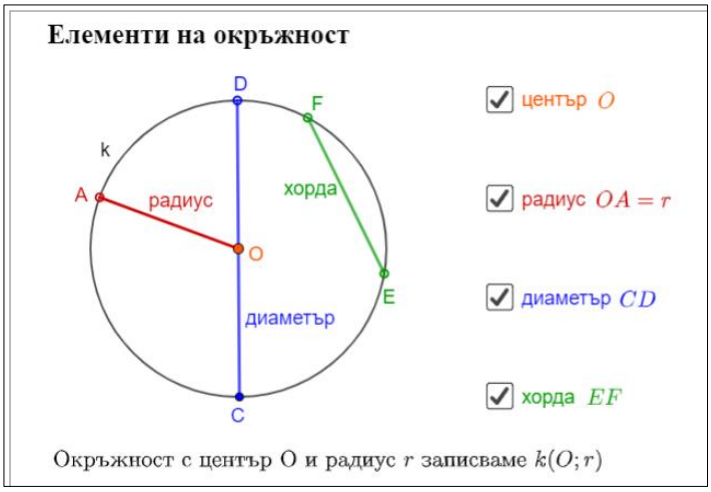
Уеб страниците съдържат аплети, чрез които учителя да онагледи, въведе и изясни новите понятия. Чрез експериментиране с динамичните обекти и наблюдение, учениците могат сами да достигната до формулировката на твърденията. Запис на съответното доказателство може да се визуализира и коментира с класа.

1.1. ОКРЪЖНОСТ

С първия аплет се онагледява определението: ***Окръжност*** *е фигурата, състояща се от всички точки в равнината, които са на дадено разстояние r от дадена точка O.* С движението на точка А и при включена следа, се вижда как се образува окръжност.



С втория аплет може да се онагледят елементите на окръжността и да се дадат съответните определения.



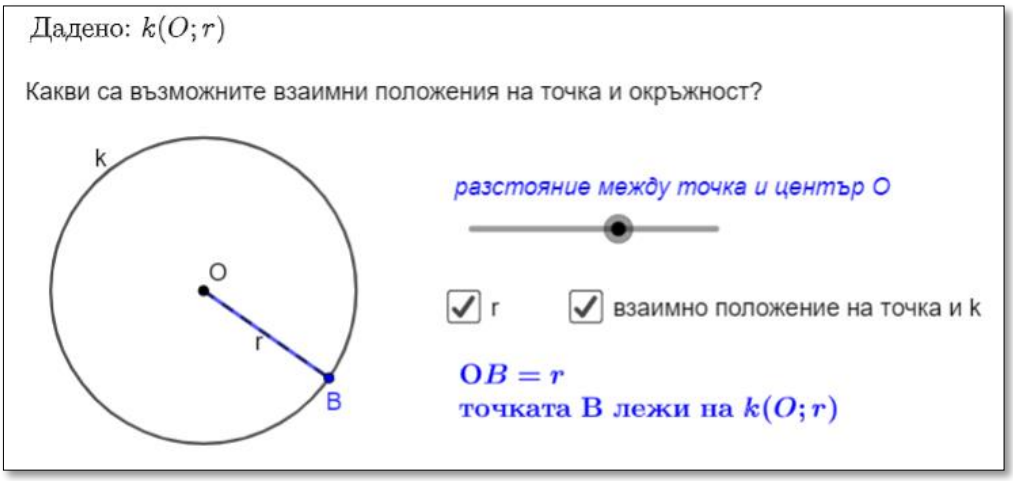
Точката O наричаме център на окръжността. Отсечката, съединяваща центъра на окръжността с произволна точка от окръжността (OA), наричаме **радиус**. Отсечката, съединяваща две точки от окръжността (EF), наричаме **хорда**, а хорда, която минава през центъра на окръжността (CD) – **диаметър**. Окръжност с център O и радиус r записваме $k(O;r)$.

Елементите може да се визуализират по отделно. Точките може да се раздвижат, за да се получат различни ситуации.

1.2. ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ТОЧКА И ОКРЪЖНОСТ

Аплета дава възможност да се наблюдават трите възможности, като с плъзгач се променя разстоянието между дадена точка и центъра на окръжността.

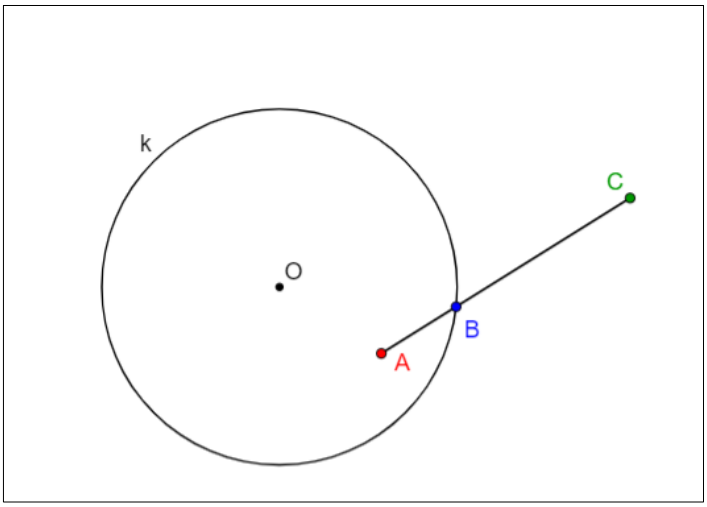
С поле за отметка може да се визуализира радиуса на окръжността, учениците да направят сравнение с разстоянието и да изкажат заключение при какво условие точката е външна, вътрешна или лежи на окръжността. При трите случая са използвани различни цветове за по-лесното им разграничаване и запомняне.



Всяка окръжност разделя точките в равнината, които не лежат на нея, на две множества – вътрешни точки и външни точки. В сила е следното:

Свойство: *Ако точката A е вътрешна, а точката C – външна, то отсечката AC има точно една обща точка с окръжността.*

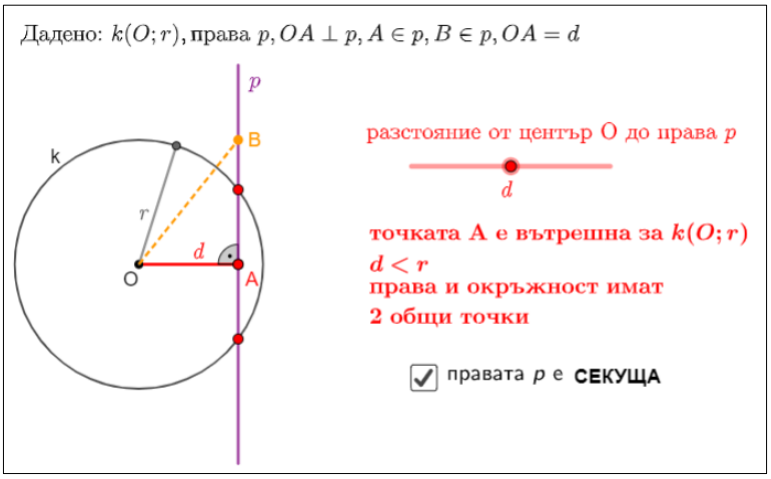
Свойството е онагледено с аплет, в който точките A и C може да се преместят, но винаги A е вътрешна за k и C е външна за k.



1.3. ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ПРАВА И ОКРЪЖНОСТ

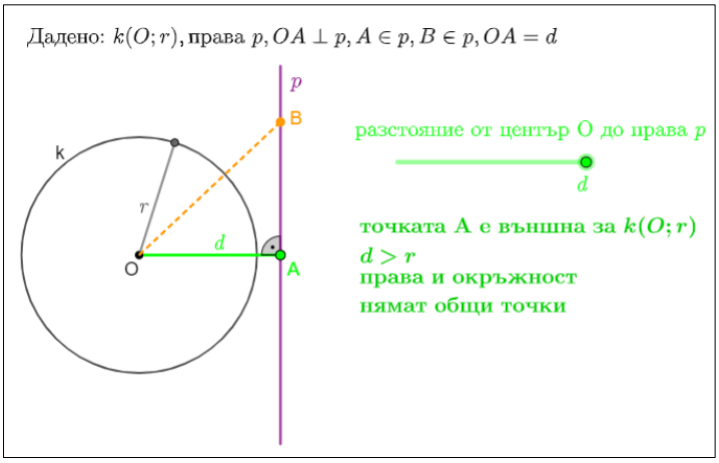
Дадена е окръжност $k(O;r)$ и права p. Построен е перпендикуляр $OA \perp p, A \in p$ и означаваме $OA = d$. За точката A има три възможности – да е вътрешна за окръжността, да лежи на окръжността и да е външна за окръжността.

Тези възможности се демонстрират в първият аплет на страницата. Чрез плъзгач се променя d, така че точката A да бъде вътрешна, да лежи на окръжността или да е външна.



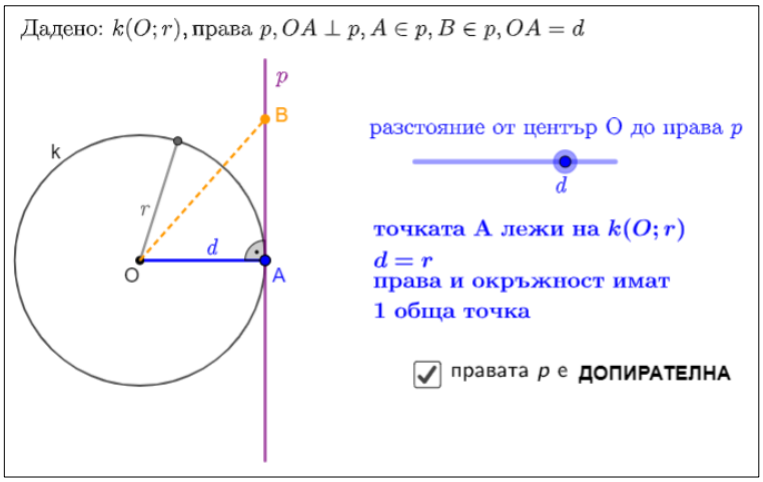
I случай. Точката A е вътрешна за окръжността. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато $d < r$. Върху правата p точка B е такава, че $AB = r$. Тъй като триъгълникът OAB е правоъгълен с хипотенуза OB, то $OB > r$ и точка B е външна за окръжността. От свойството получаваме, че отсечката AB има точно една обща точка с окръжността, т.е. лъчът $AB^{\rightarrow}$ има точно една обща точка с окръжността. Аналогично получаваме, че противоположният му лъч също има една обща точка с окръжността. Следователно, когато $d < r$, правата p има точно две общи точки с окръжността.

С поле за отметка се определя вида на правата и може да се поясни определението: *Права, която има две общи точки с окръжността, се нарича* ***секуща*** *на окръжността.*



II случай. Точката A е външна за окръжността. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато $d > r$. Но за всяка точка B от правата p е изпълнено $OB \geq OA > r$. Следователно всички точки от правата са външни за окръжността и правата p няма общи точки с окръжността k.

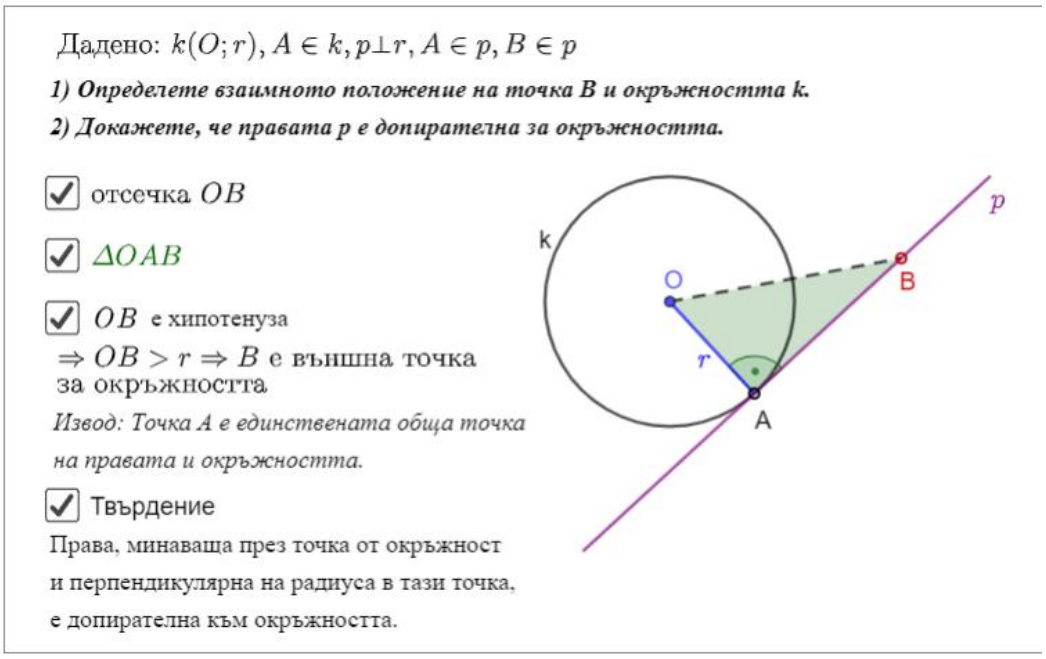
III случай. Точката A лежи на окръжността. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато $d = r$. Очевидно правата p е перпендикулярна на радиуса OA. Ще докажем, че точка A е единствената обща точка на правата p и окръжността k. Нека B е произволна точка от правата p. Тъй като триъгълникът OAB е правоъгълен с хипотенуза OB, то $OB > r$ и точка B е външна за окръжността. Следователно всички точки от правата, освен точката A, са външни за окръжността и правата p няма общи точки с окръжността k.



С поле за отметка се определя вида на правата и може да се поясни определението: *Права, която има точно една обща точка с окръжност, се нарича* ***допирателна*** *към окръжността. Общата точка на правата и окръжността се нарича допирна точка.*

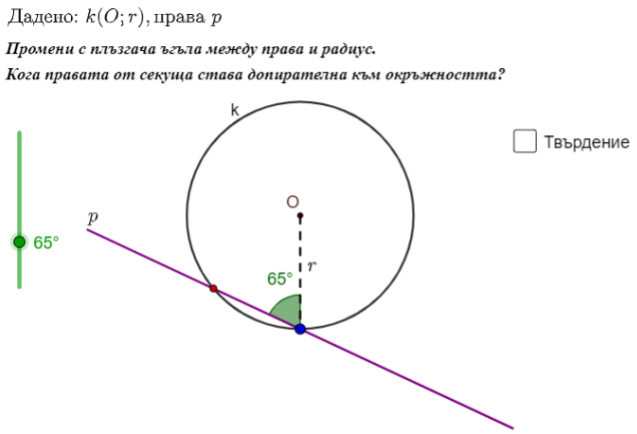
Следващият аплет може да се използва, така че учениците сами да достигнат до формулиране и доказване на следното:

Твърдение: *Права, минаваща през точка от окръжност и перпендикулярна на радиуса в тази точка, е допирателна към окръжността.*

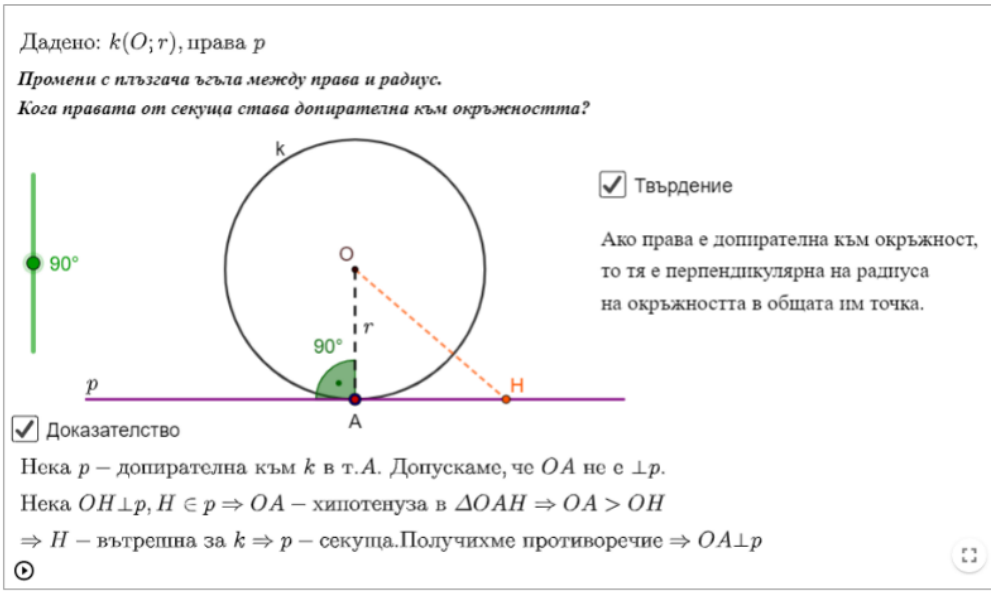


Анимиран чертеж в следващият аплет демонстрира кога правата от секуща става допирателна и онагледява обратното:

Твърдение: *Ако права е допирателна към окръжност, то тя е перпендикулярна на радиуса на окръжността в общата им точка.*



Когато правата p е допирателна и е видима формулировката на твърдението, в аплета става достъпно и самото доказателство.



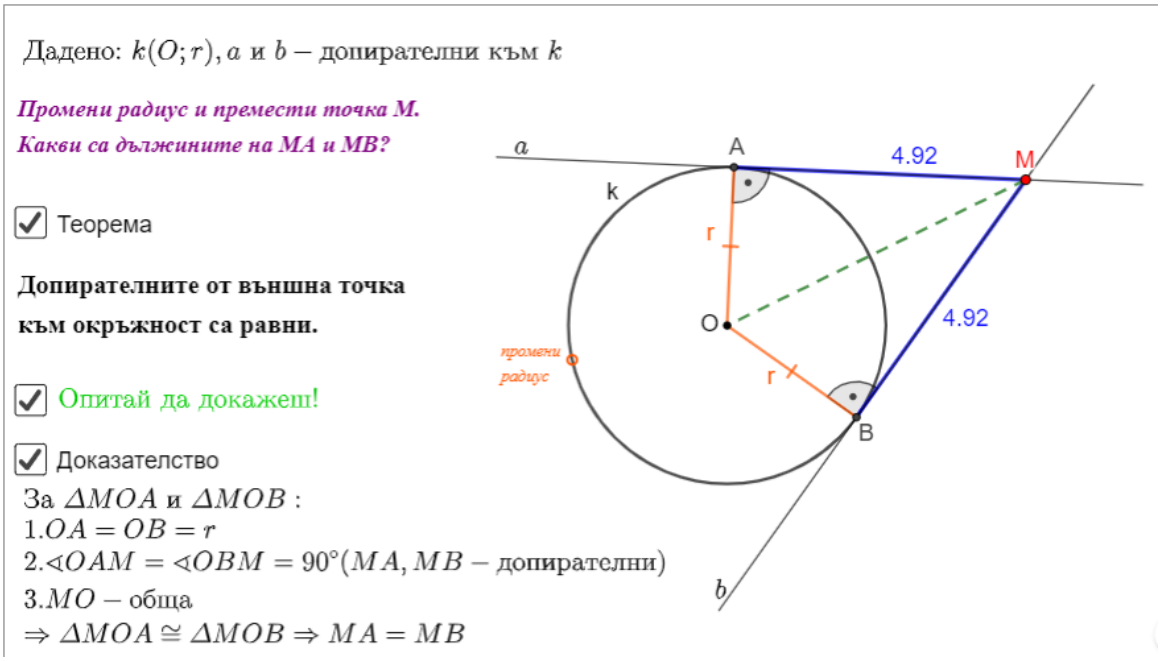
Двете твърдения може да обединим в следната

Теорема: *Права е допирателна към окръжност тогава и само тогава, когато е перпендикулярна на радиуса на окръжността в общата им точка.*

1.4. ДОПИРАТЕЛНИ КЪМ ОКРЪЖНОСТ

Аплетът е разработен за следната много важна *Теорема: Допирателните от външна точка към окръжност са равни.*

Точката M е външна за окръжността $k(O;r)$ и правите a и b са допирателни към k с допирни точки съответно A и B.



Той дава възможност:

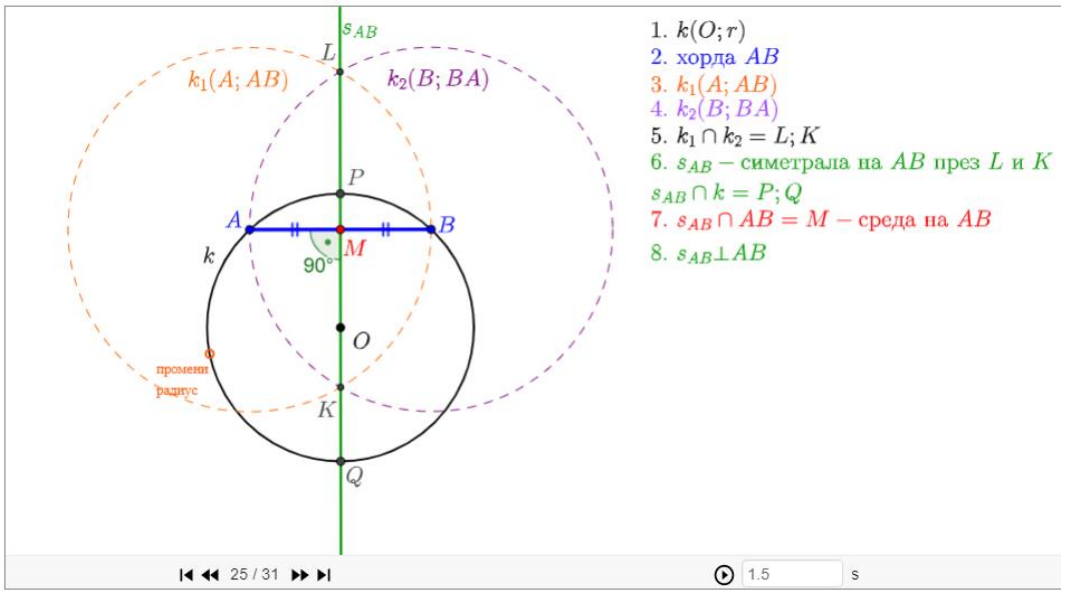
- да се даде и онагледи определението за допирателни към окръжност през външна точка (Отсечките MA и MB се наричат допирателни от M към k);
- да се демонстрират различни ситуации, чрез промяна на радиуса и преместване на външната точка M;
- да се наблюдават дължините на двете допирателни към окръжността при промяна на чертежа;
- да се стигне до самостоятелно заключение и формулиране на твърдението;
- да се провокират учениците да предложат доказателство;
- да се коментира даденото доказателство.

2. ДИАМЕТРИ И ХОРДИ В ОКРЪЖНОСТ

В тази тема учениците трябва да затвърдят знанията си за понятията хорда и диаметър в окръжност. Компетентности като очаквани резултати от обучението са учениците да знаят и да умеят да прилагат свойствата на хорди в окръжност. Теоретичната част по темата е реализирана с подстраница ДИАМЕТРИ И ХОРДИ В ОКРЪЖНОСТ на основната уеб страница ОКРЪЖНОСТ. Уеб страницата съдържа аплети, чрез които учителя да онагледи и изясни понятия и техните свойства. Чрез експериментиране с динамичните обекти и наблюдение, учениците могат сами да достигната до формулировката на твърденията. Запис на съответното доказателство може да се визуализира и коментира с класа.

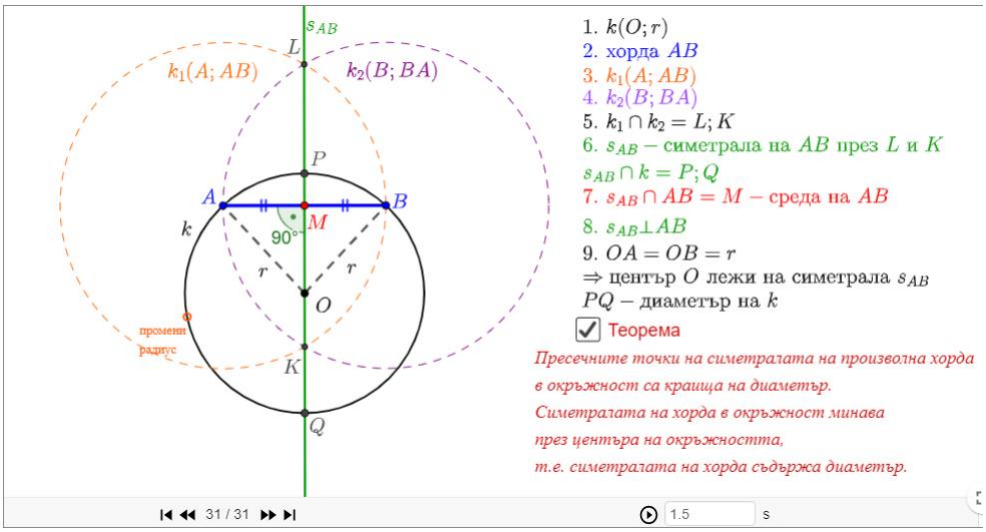
Първият аплет е разработен за онагледяване на ***Теорема 1****: Пресечните точки на симетралата на произволна хорда в окръжност с окръжността са краища на диаметър. Симетралата на хорда в окръжност минава през центъра на окръжността, т.е. симетралата на хорда съдържа диаметър.*

Реализиран е като анимация на последователните построения при създаване на чертеж, който да демонстрира теоремата. Анимацията може да бъде поставяна на пауза, за да се пояснят определени понятия и свойства на обектите. Първите стъпки онагледяват построяването на симетрала на дадена хорда AB. В хода на построението може да се актуализират знанията за симетрала на отсечка и нейните свойства.

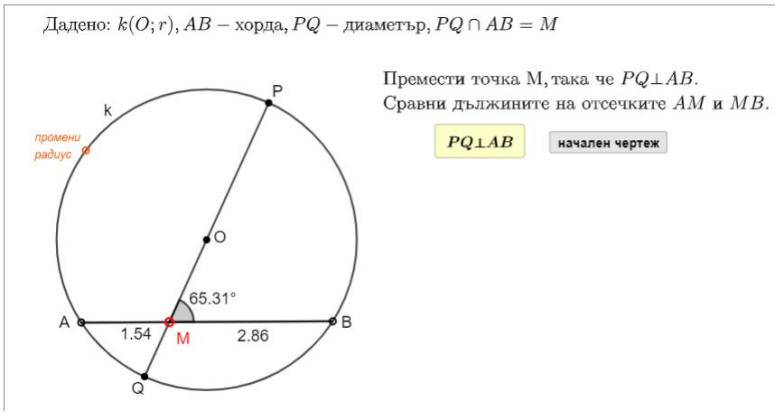


Последната девета стъпка визуализира на чертежа отсечките $OA = OB = r$ и тъй като всяка точка от симетралата е на равни разстояния от краищата на отсечката, то центърът O на окръжността лежи върху симетралата на AB. С поле за отметка се визуализира пълната формулировка на теоремата и учителя може да коментира с

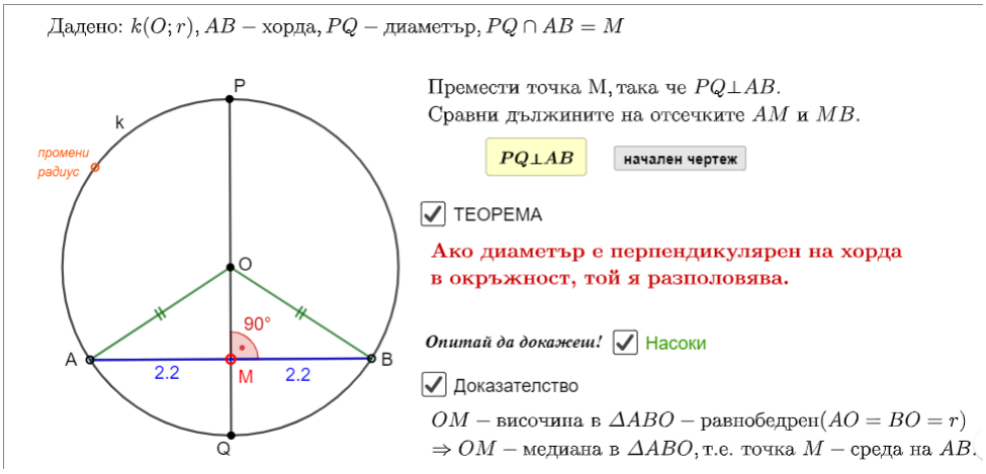
учениците доказателството. Чрез динамичната точка „промени радиус“ с чертежа може да се експериментира.



Вторият аплет дава възможност да се направи изследване, чрез преместването на точките M, A, B и *„промени радиус“* и да се наблюдава, че дължините на отсечките AM и MB са равни само когато PQ и AB са перпендикулярни. Това може да се постигне или с преместването на точка M или с бутона „$PQ \perp AB$“.



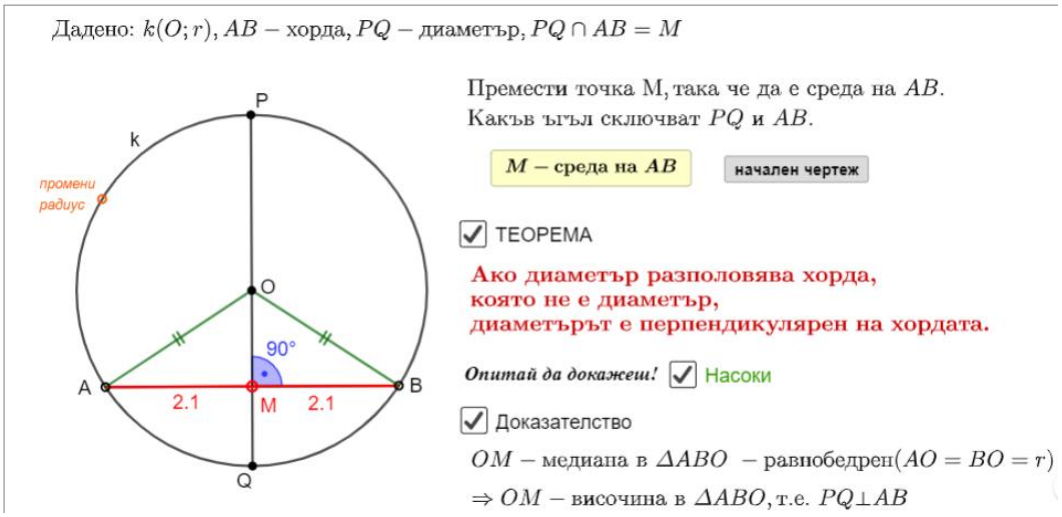
Когато $PQ \perp AB$ в аплета стават видими полета за отметка за формулировката на теоремата, насоки и доказателство. Полето за отметка „Насоки“ визуализира на чертежа допълнителни построения, които да подпомогнат учениците в самостоятелно доказателство на ***Теорема 2***.



Третият аплет онагледява ***Теорема 3**: Ако диаметър разполовява хорда, която не е диаметър, диаметърът е перпендикулярен на хордата.*

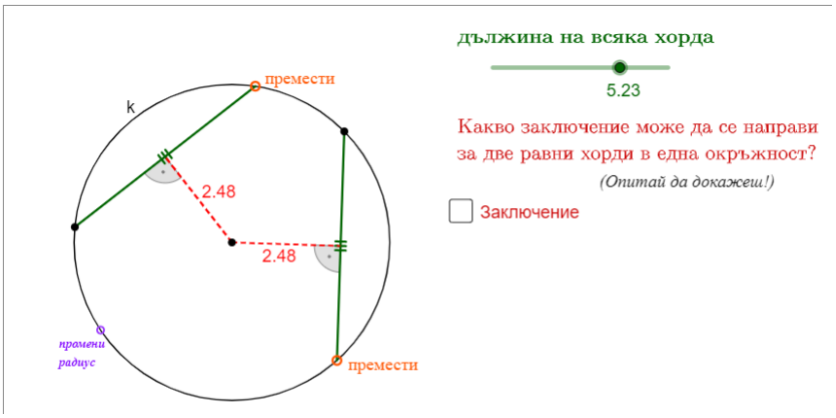
Динамиката в чертежа се реализира с точките M, A, B и *„промени радиус“.* Това дава възможност да се изследва и наблюдава, че само когато точка M е среда на AB, PQ и AB са перпендикулярни. За да стане точката M среда на AB може да се премести самата точка или да се използва бутона "M – среда на AB".

Когато M среда на AB в аплета стават видими полета за отметка за формулировката на теоремата, насоки и доказателство. Полето за отметка „Насоки“ визуализира на чертежа допълнителни построения, които да подпомогнат учениците в самостоятелно доказателство.

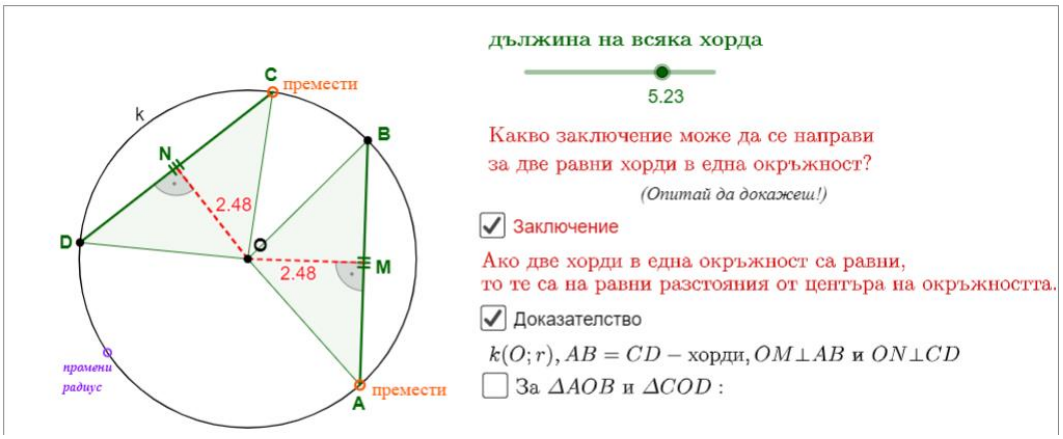


Основна задача 1: Да се докаже, че ако две хорди в една окръжност са равни, то те са на равни разстояния от центъра на окръжността.

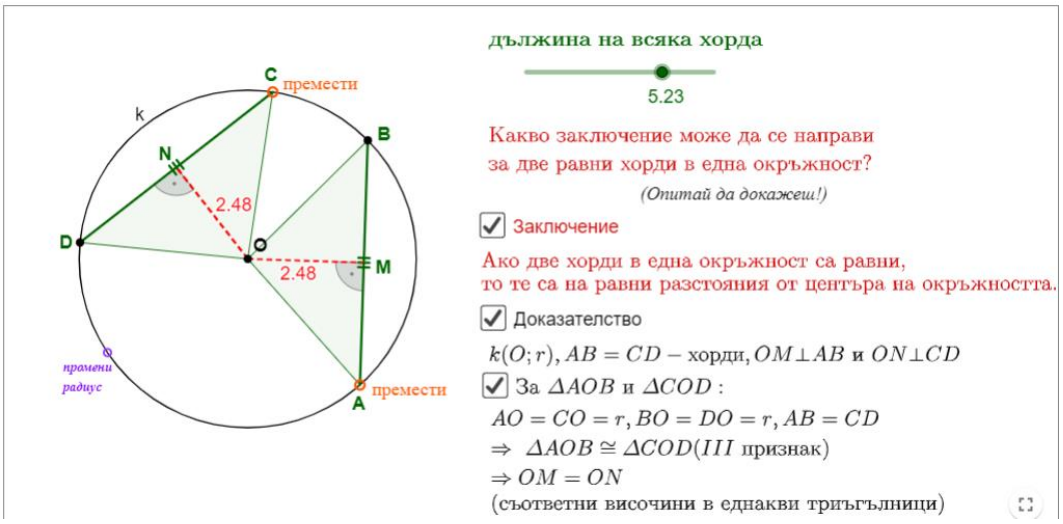
Разработения аплет дава възможност за изследване на различни ситуации, като се променя дължината на хордите, преместват се, променя се радиуса на окръжността. След наблюдение учениците може да изкажат заключение.



С отметка на „Доказателство“ се визуализират текста "$OM \perp AB$ и $ON \perp CD$", допълнителни построения и означения на чертежа. Това може да насочи учениците да използват *Теорема 2* и сами да открият доказателството.

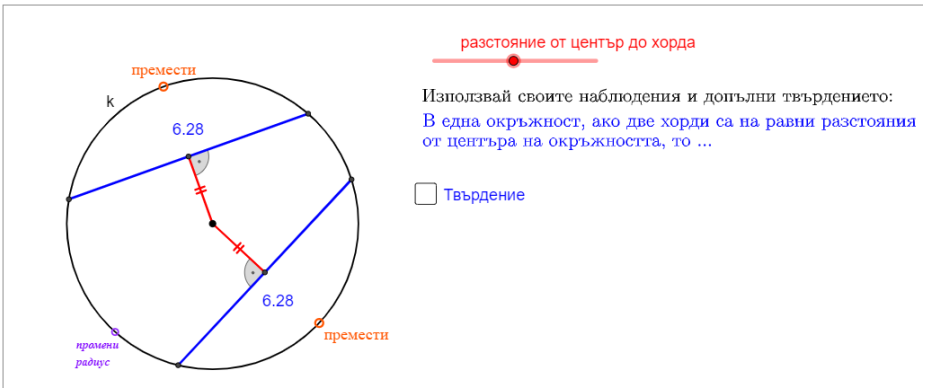


Целият запис може да се види с поле за отметка и да се коментира с класа.

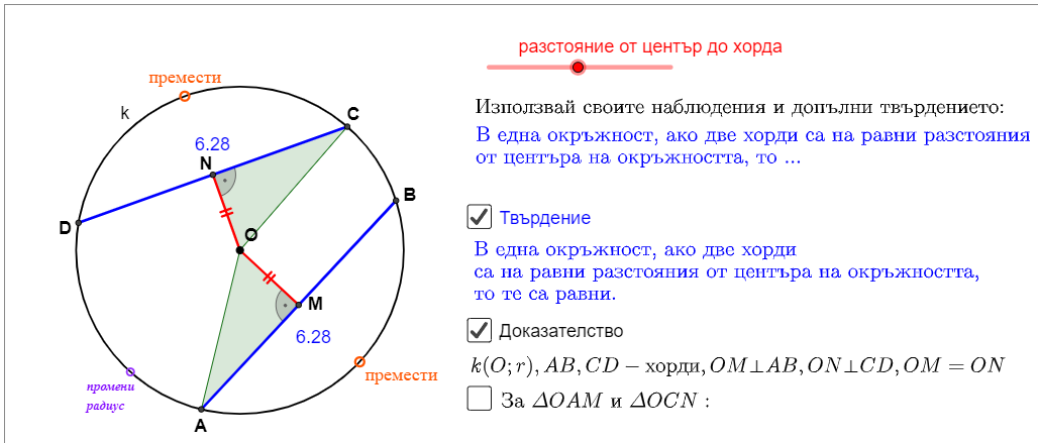


Основна задача 2: Да се докаже, че ако две хорди в една окръжност са на равни разстояния от центъра на окръжността, то те са равни.

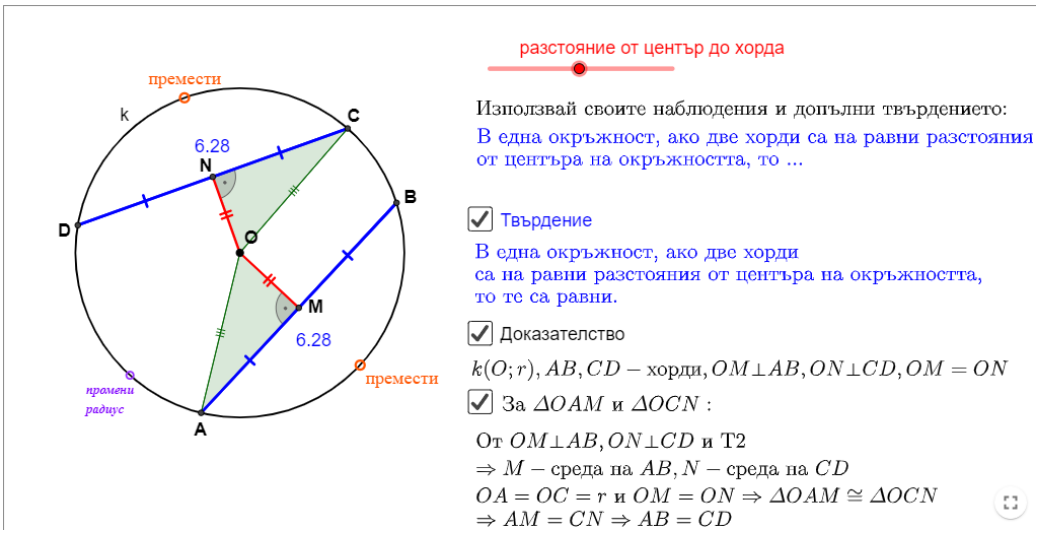
Разработения аплет дава възможност за изследване на различни ситуации, като се променя разстоянието от центъра до хордите, преместват се, променя се радиуса на окръжността. След наблюдение учениците може да допълнят твърдението.



С отметка на „Доказателство“ се визуализират, както допълнителни построения и означения на чертежа, така и текста "$OM \perp AB, ON \perp CD, OM = ON$". Това може да насочи учениците да използват *Теорема 3* и сами да открият доказателството.



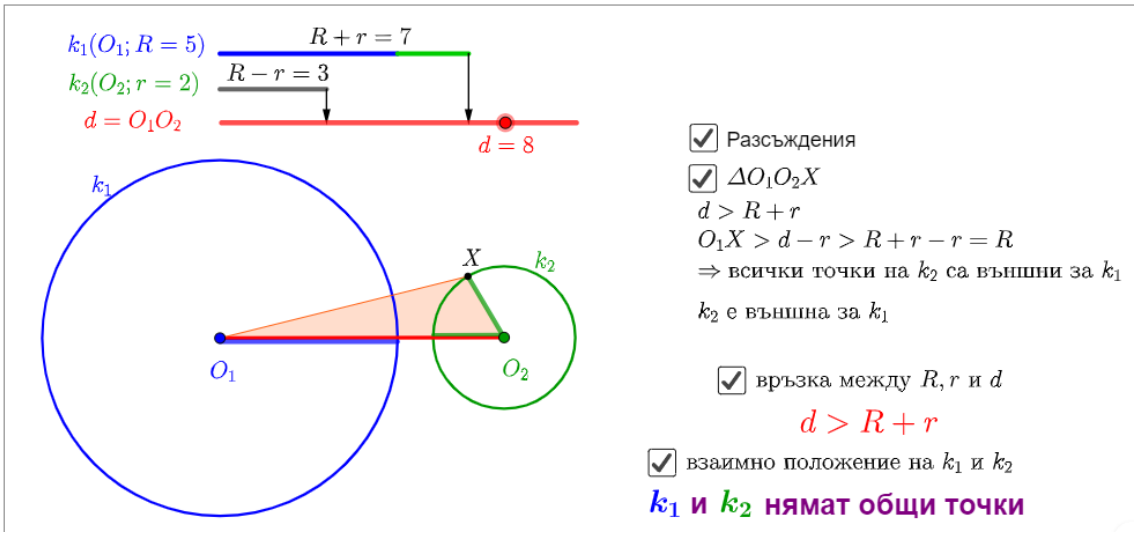
Целият запис може да се види с поле за отметка и да се коментира с класа.

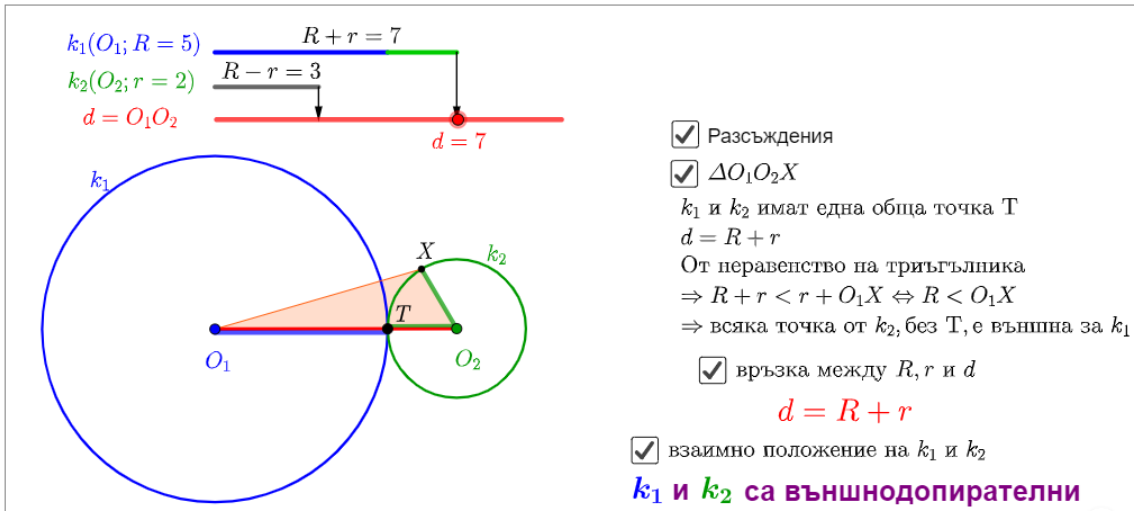


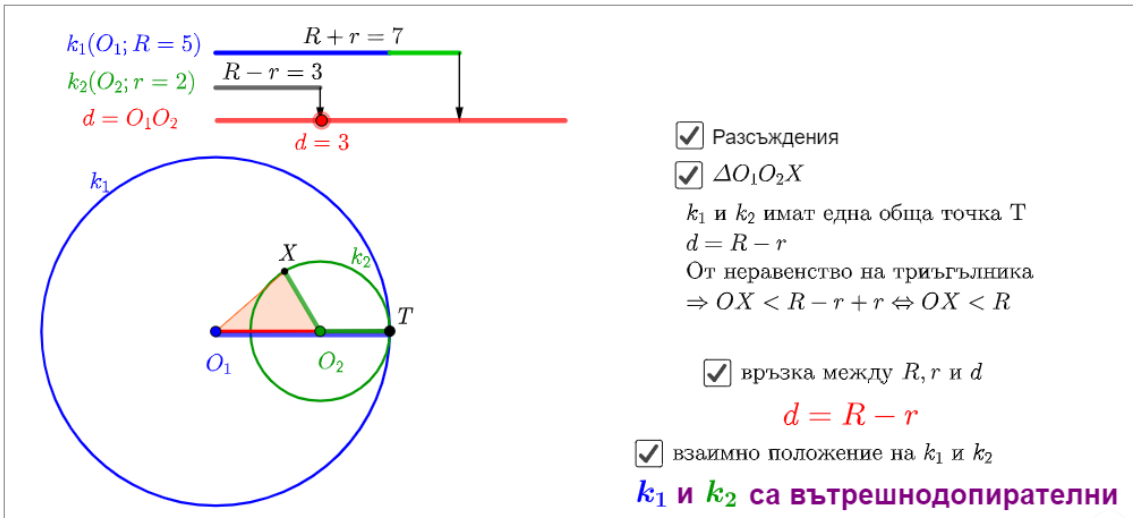
3. ВЗАИМНО ПОЛОЖЕНИЕ НА ДВЕ ОКРЪЖНОСТИ

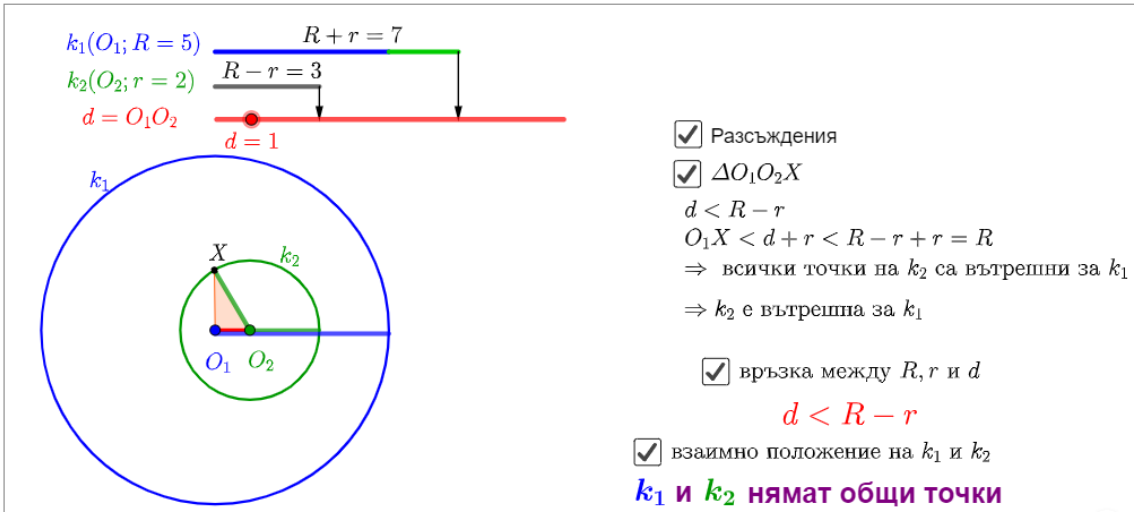
В тази тема учениците трябва да усвоят понятията външнодопирателни окръжности, вътрешнодопирателни окръжности, концентрични окръжности, пресичащи се окръжности, централа на две окръжности. Компетентности като очаквани резултати от обучението са: ученикът да знае и може да определя взаимните положения на две окръжности.

Определянето на взаимното положение на две окръжности изисква сравняване на разстоянието между центровете на окръжностите с радиусите или със сбора и разликата им. Разработеният аплет служи за онагледяване на различните възможности за взаимно положение на две окръжности. За всяко от тях може да се види връзката между радиусите им R и r и разстоянието d между центровете им. Динамиката се реализира с плъзгач за разстоянието d между центровете на окръжностите. Учителят има възможност да визуализира допълнителни построения и означения на динамичния чертеж, с което да обоснове връзката между радиусите и разстоянието между центровете за всяко взаимно положение на двете окръжности.







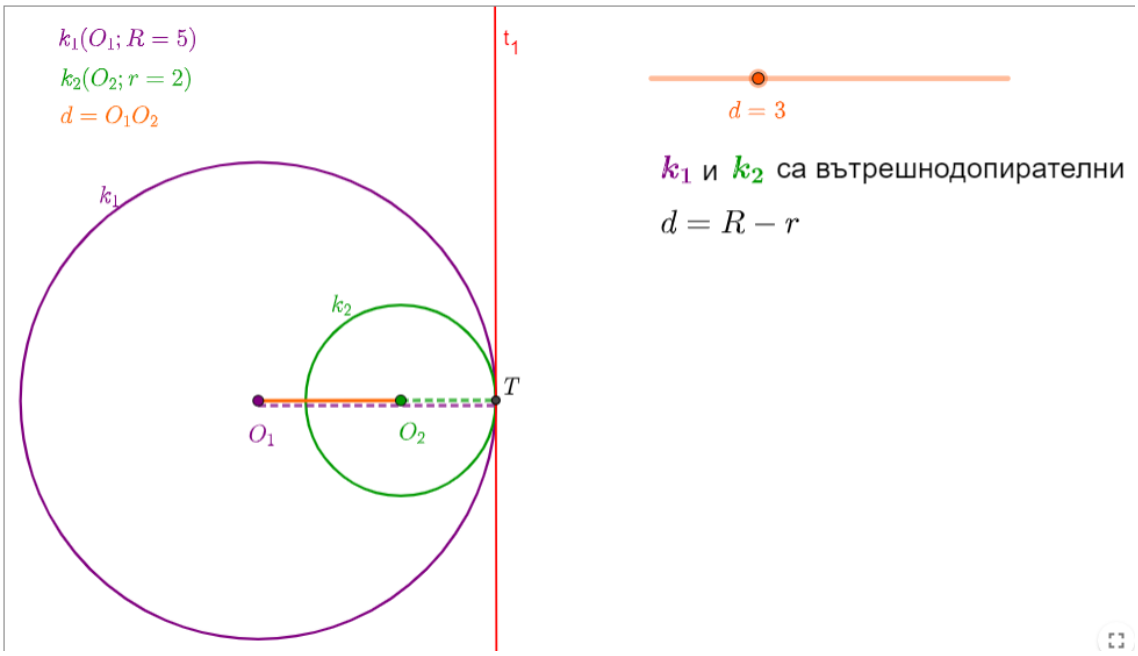


При изследване на различните взаимни положения може да се обърне внимание на зависимостта на броя на общите точки на две окръжности от разстоянието между центровете им. Аплетът може да спомогне за осмисляне на понятията, свързани с взаимното положение на две окръжности.

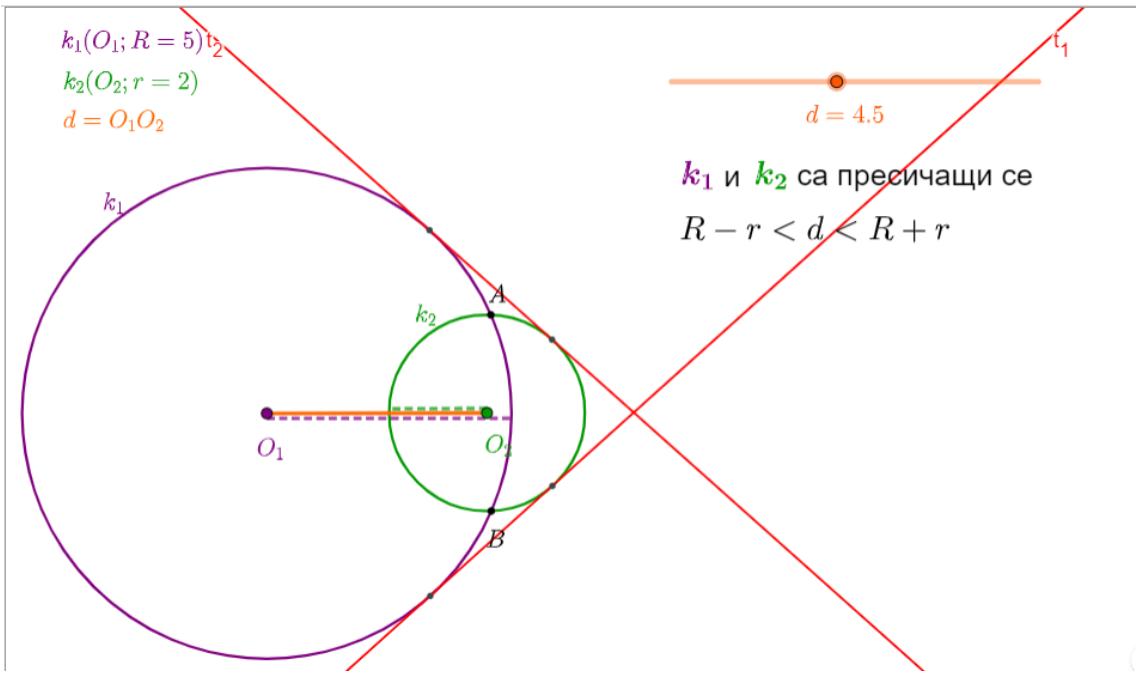
4. ОБЩИ ДОПИРАТЕЛНИ НА ДВЕ ОКРЪЖНОСТИ

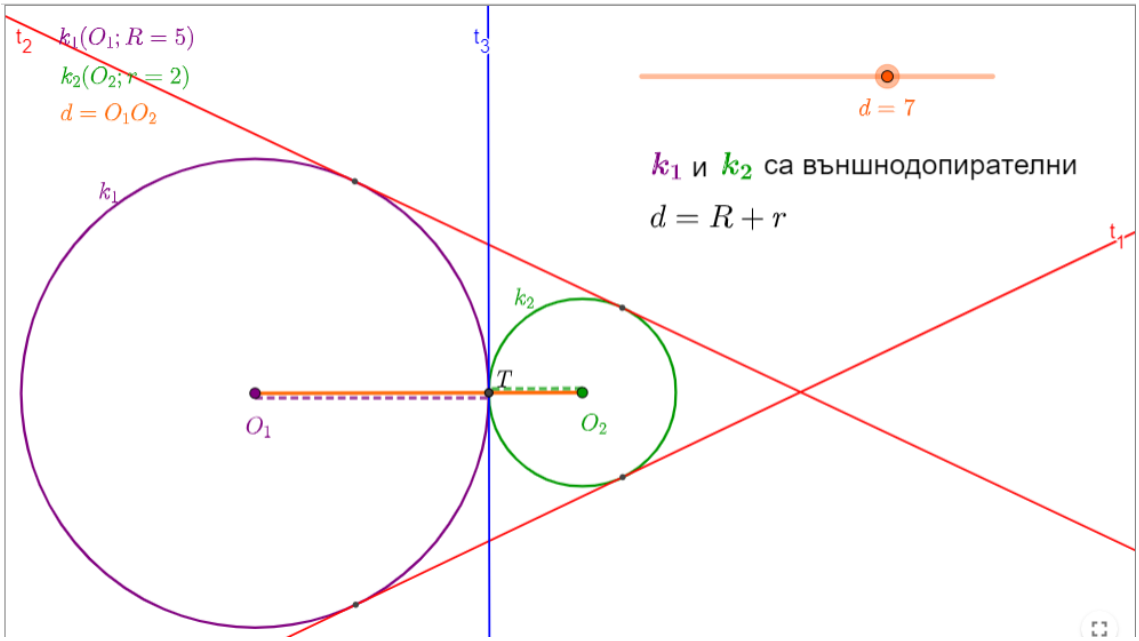
В тази тема учениците трябва да усвоят понятието обща допирателна към две окръжности. Учениците следва да затвърдят знанията си за взаимни положения на две окръжности, тъй като взаимното положение на две окръжности определя броя на общите допирателни към окръжностите.

С разработеният аплет може да се демонстрират различните взаимни положения на две окръжности и общите им допирателни.

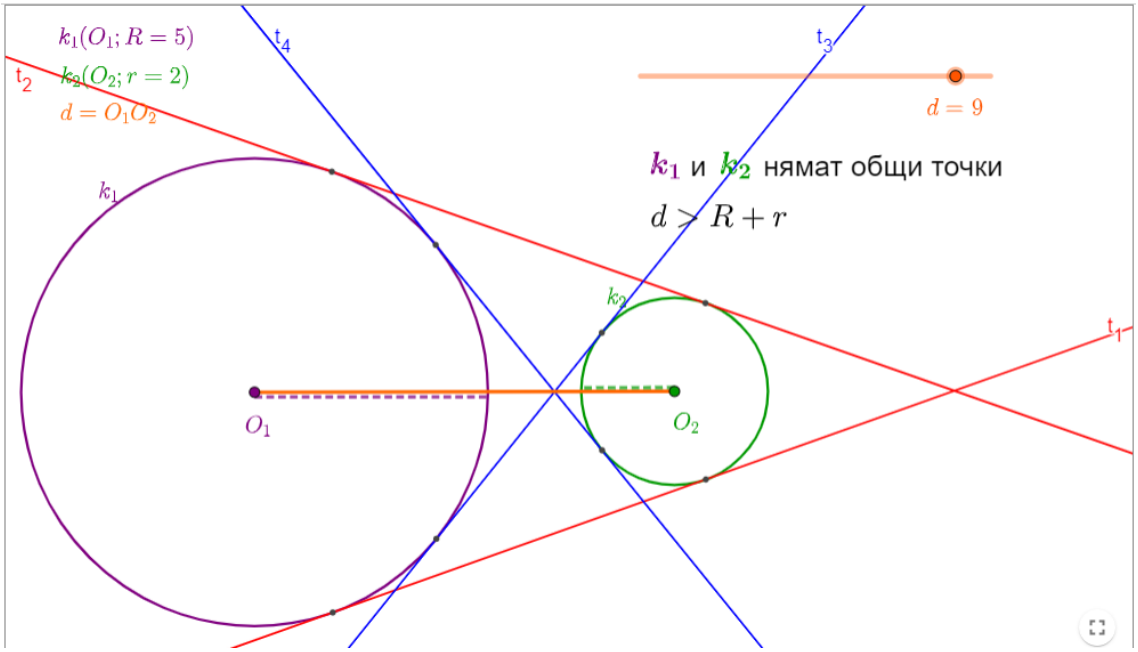


При различните възможности може да се проследи връзката между радиусите и разстоянието между центровете.





Общите външни и вътрешни допирателни са в различен цвят, което ще подпомогне осмислянето на двете понятия и разликата между тях. Правата се нарича ***обща външна допирателна***, когато окръжностите са в една и съща полуравнина относно правата и ***обща вътрешна допирателна***, когато окръжностите са в различни полуравнини относно правата.



5. ДЪГА ОТ ОКРЪЖНОСТ. ЦЕНТРАЛЕН ЪГЪЛ

В тази тема учениците трябва да усвоят понятията дъга от окръжност, централен ъгъл, градусна мярка на дъга от окръжност. Компетентности като очаквани резултати от обучението са: учениците да разпознават централен ъгъл и да определят съответната му дъга; да знаят твърденията, свързани с него и да умеят да ги прилагат.

За постигане на необходимите знания и умения по темата е разработено съдържание, реализирано като:

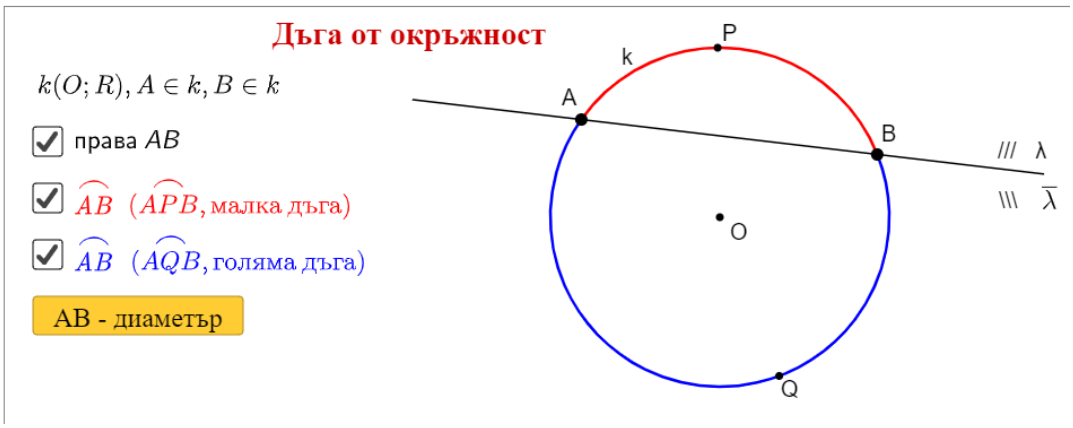
- ✓ ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ – представена в уеб страница „ЦЕНТРАЛЕН ЪГЪЛ“;
- ✓ ЗАДАЧИ – представени в подстраница „ЦЕНТРАЛЕН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ“;
- ✓ ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА – представени в подстраница „ЦЕНТРАЛЕН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА“

5.1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ

Уеб страница „ЦЕНТРАЛЕН ЪГЪЛ“ съдържа динамични чертежи, които могат да подпомогнат учителя за онагледяване, въвеждане и изясняване на новите понятия. Аплети с динамични чертежи дават възможност, чрез експериментиране с динамичните обекти в тях, да се достига до формулировката на теоремите и да се представи доказателството.

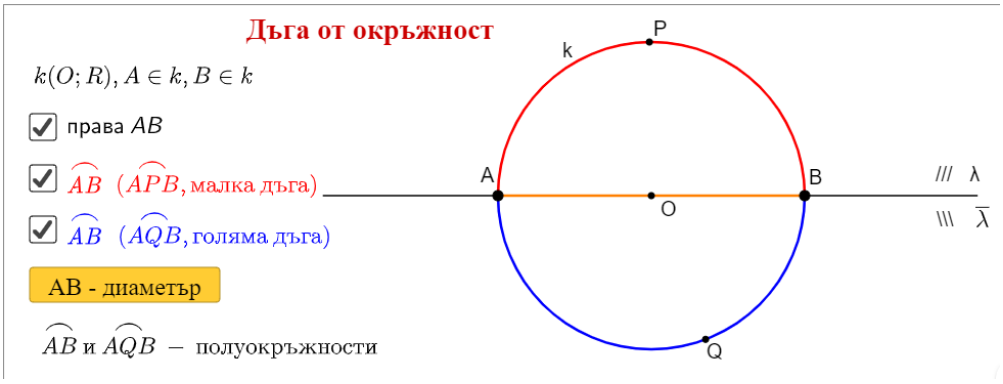
За въвеждане и изясняване на понятието **дъга от окръжност** може да се използва аплет „Дъга от окръжност“.

Дадена е окръжност $k(O;R)$ и точки $A \in k, B \in k$. Правата AB разделя равнината на две полуравнини λ и $\bar{\lambda}$. *Частите от окръжността, които лежат във всяка от полуравнините, се наричат дъги.*



Точките могат да се преместят. С полета за отметка може да се визуализира права AB, малка синя дъга и голяма червена дъга.

Бутонът „AB - диаметър“ задава позиция на точките A и B, така че AB да е диаметър и двете дъги са полуокръжности.

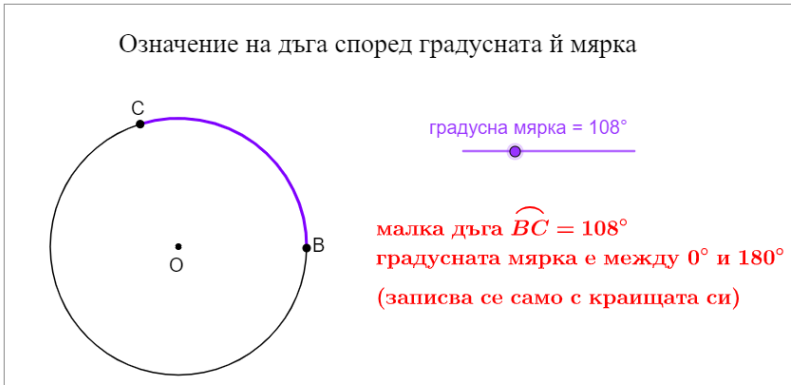


При преместване на точките червената дъга винаги е по-малката (изключение при AB – диаметър). *Дъгата $\overset{\frown}{APB}$ е по-малка от полуокръжност и се нарича малка дъга, а дъгата $\overset{\frown}{AQB}$ – голяма дъга*. Прието е, когато дъгата е записана само с краищата си, да се има предвид малката дъга.

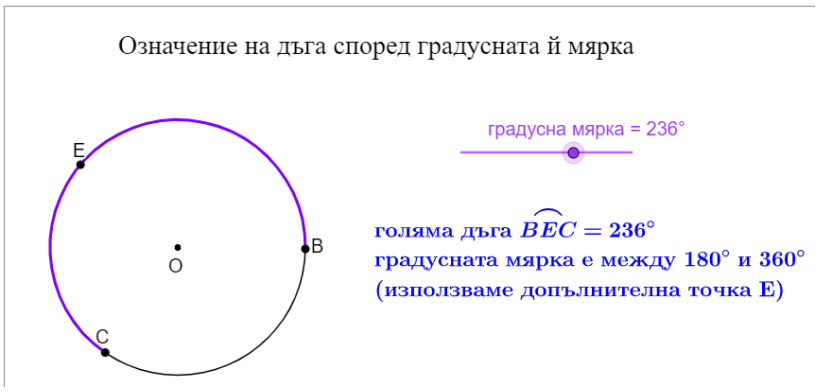
За формиране на умение за правилно записване на дъги в зависимост от градусната им мярка може да се използва аплет „Означение на дъга според градусната й мярка“.

С плъзгач се променя градусната мярка на оцветена дъга и се вижда правилното й означение:

- когато градусната й мярка е по-малка от 180° дъгата се записва само с краищата си;



- когато градусната й мярка е равна или по-голяма от 180° дъгата се записва $\overset{\frown}{BEC}$ (използваме допълнителна точка $E \in \overset{\frown}{BC}$)



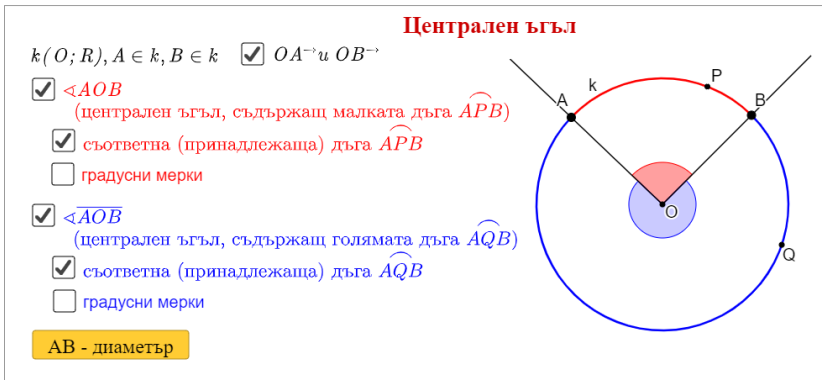
За въвеждане и изясняване на понятието **централен ъгъл** може да се използва аплет „Централен ъгъл“.

Динамичният чертеж дава възможност да се онагледи понятието: *Ако k е окръжност с център O, а точките A, B лежат на k, двете части от равнината, определени от лъчите $OA^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$, се наричат централни ъгли.*

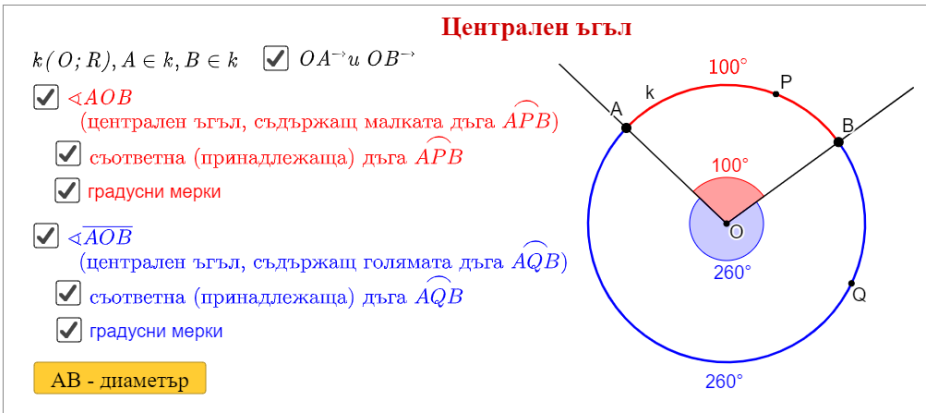
Чрез полета за отметка стават видими:

- $\sphericalangle AOB$ – централен ъгъл, съдържащ малката дъга $\overset{\frown}{APB}$;
- $\sphericalangle \overline{ABC}$ – допълнителен на ∢AOB, съдържащ голямата дъга $\overset{\frown}{AQB}$
- съответните дъги.

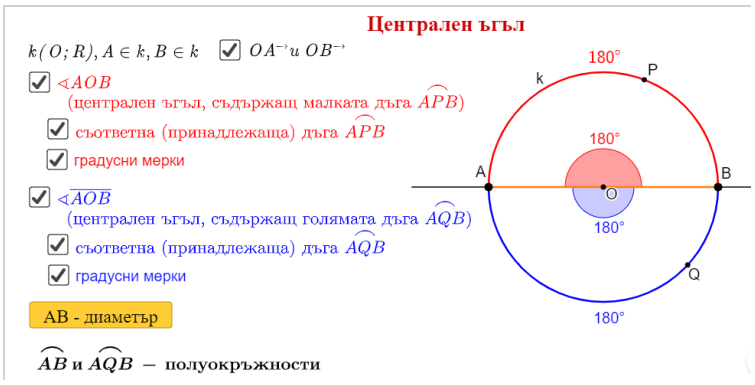
Експериментирайки с динамичните точки A и B, може да се поясни понятието съответна дъга: *Дъгата $\overset{\frown}{APB}$ наричаме съответна или принадлежаща дъга на централния ъгъл ∢AOB. Дъгата $\overset{\frown}{AQB}$ наричаме съответна или принадлежаща дъга на допълнителния ъгъл на ∢AOB.*



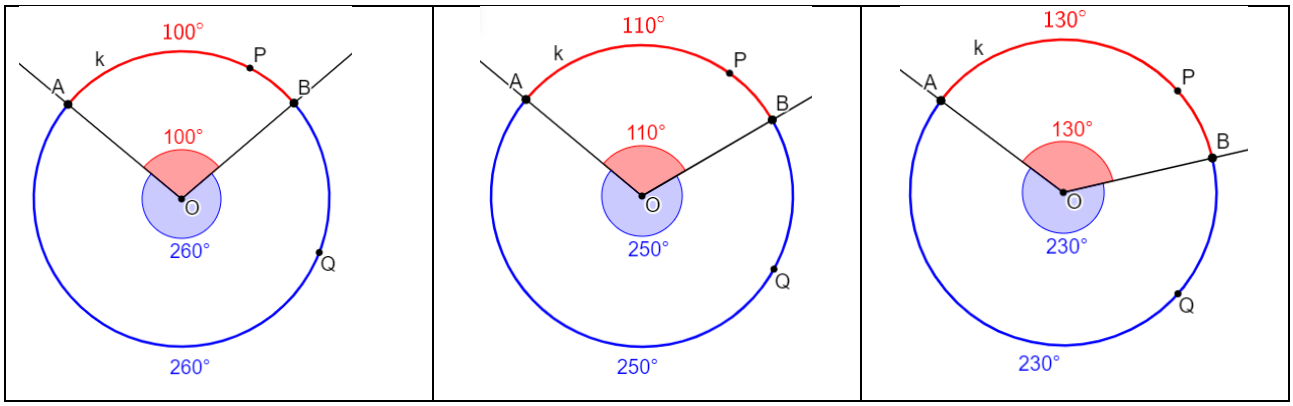
Всеки централен ъгъл определя принадлежащата си дъга и всяка дъга – съответния централен ъгъл. Това дава основание да измерваме дъгите в градуси. Може да визуализираме градусните мерки на централните ъгли и съответните им дъги, както и да преместим точките A и B, да наблюдаваме изменението им и да дадем определението: *Градусна мярка на дъга от окръжност се нарича градусната мярка на съответния й централен ъгъл.*



Бутонът „AB - диаметър“ задава позиция на точките A и B, така че AB да е диаметър и двете дъги са полуокръжности. Може да се наблюдава, че всяка полуокръжност има градусна мярка 180°. Диаметърът разделя окръжността на две полуокръжности, следователно мярката на окръжността е 360°.

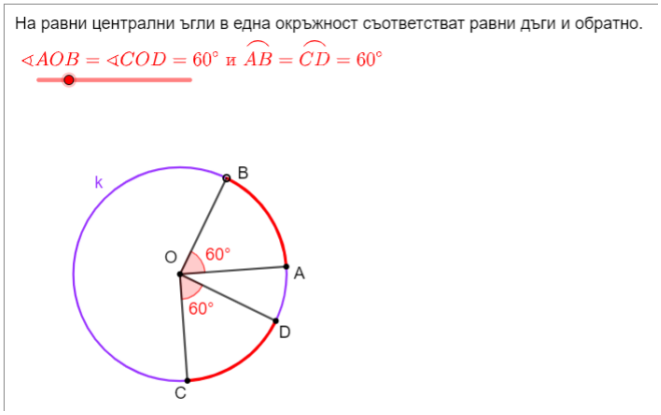


В динамичния чертеж можем да преместим точките A и B, така че $\sphericalangle AOB$ да има различни мерки: 100°, 110°, 130°. Това са мерките и на съответната му дъга $\overset{\frown}{AB}$ (по-малка от полуокръжност). Можем да наблюдаваме, че мерките на допълнителния $\sphericalangle \overline{ABC}$ са съответно: $260° = 360° - 100°, 250° = 360° - 110°, 230° = 360° - 130°$.



Ако означим $\sphericalangle AOB = \alpha°$, то $\overset{\frown}{AB} = \alpha°$. Тогава $\sphericalangle \overline{ABC} = 360° - \alpha°$.

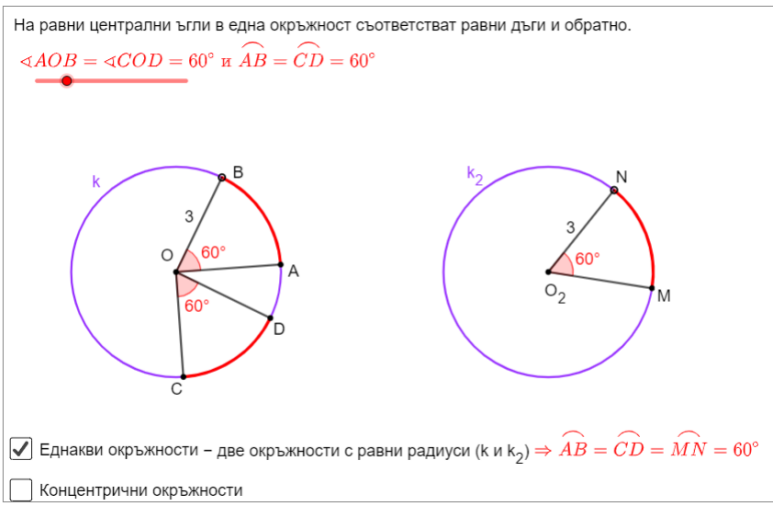
Следващият аплет е подходящ за онагледяване на определението: *Казваме, че в една окръжност две дъги са равни, когато са равни градусните им мерки.*



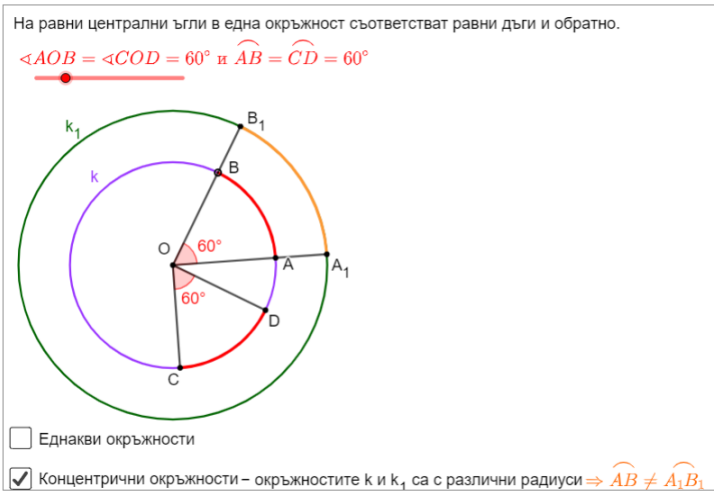
От определенията за градусна мярка на дъга и за равенство на дъги от една окръжност получаваме, че: *На равни централни ъгли в една окръжност съответстват равни дъги и обратно.*

С динамичния чертеж може да се експериментира и да се разгледат три ситуации: централните ъгли са в една окръжност, в еднакви окръжности или в концентрични окръжности.

С плъзгача може да се променят централните ъгли $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$. Точките B и N може да се преместят. Наблюдава се равенство на съответните дъги в една окръжност. В окръжност k_2, която е еднаква с k(имат равни радиуси), се наблюдава равенството на дъгите, съответни на равни централни дъги.



Две дъги могат да имат равни градусни мерки и да са с различни дължини, ако лежат на окръжности, които не са еднакви. Това може да се види като се активира полето за отметка „Концентрични окръжности“. Централните ъгли $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A_1OB_1$ съвпадат, следователно имат равни градусни мерки. Тогава градусните мерки на дъгите $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A_1B_1}$ са равни, но дъгите са с различни дължини.



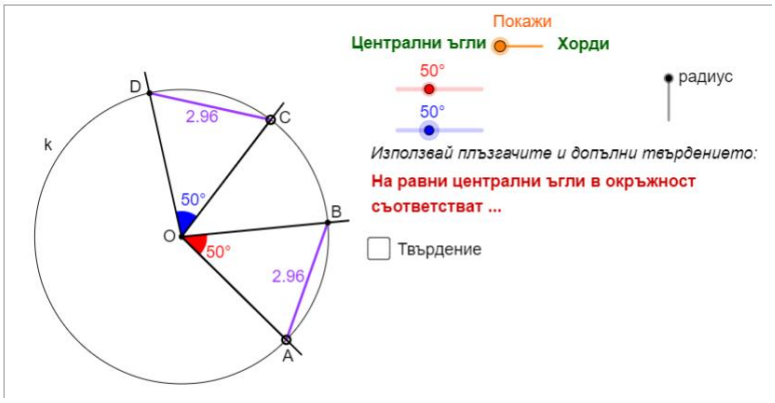
Следващият аплет дава възможност на учениците сами да достигнат до формулиране на следната:

Теорема 1: На равни централни ъгли в окръжност съответстват равни хорди и обратно – на равни хорди съответстват равни централни ъгли.

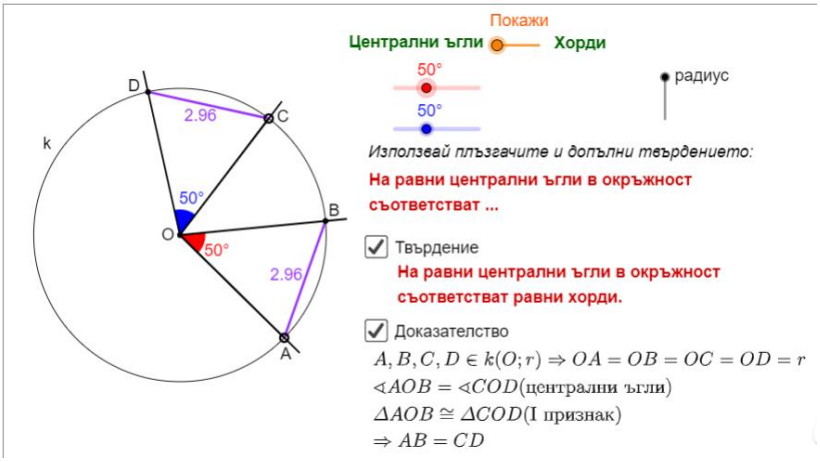
Чрез плъзгача „Покажи: Централни ъгли/Хорди“ се визуализират две ситуации:

1) Плъзгача е в положение „Централни ъгли“

С червен и син плъзгач се променят два централни ъгъла, като точките A и C са динамични. При равенство на двата ъгъла се наблюдава и равенство на съответните им хорди. Може да се зададат различни ситуации и да се наблюдават дължините на хордите, така че да се провокират учениците да допълнят твърдението: „На равни централни ъгли в окръжност съответстват …“



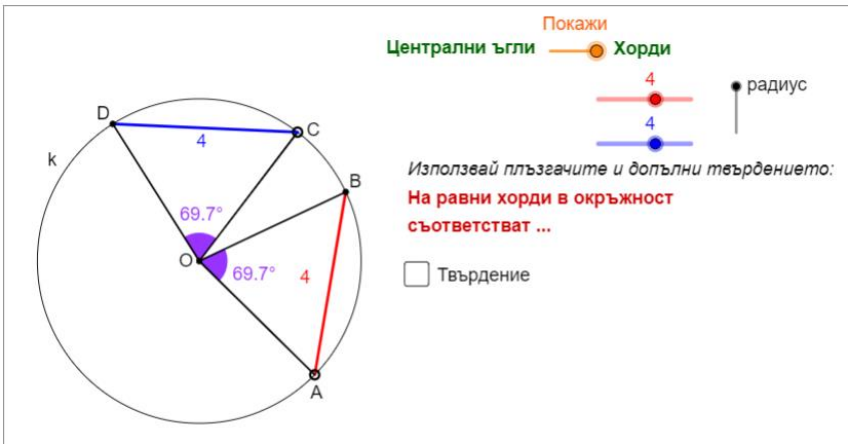
След визуализиране на твърдението, преди да е видимо пълното доказателство, във фронтална беседа учениците може да предложат доказателство.



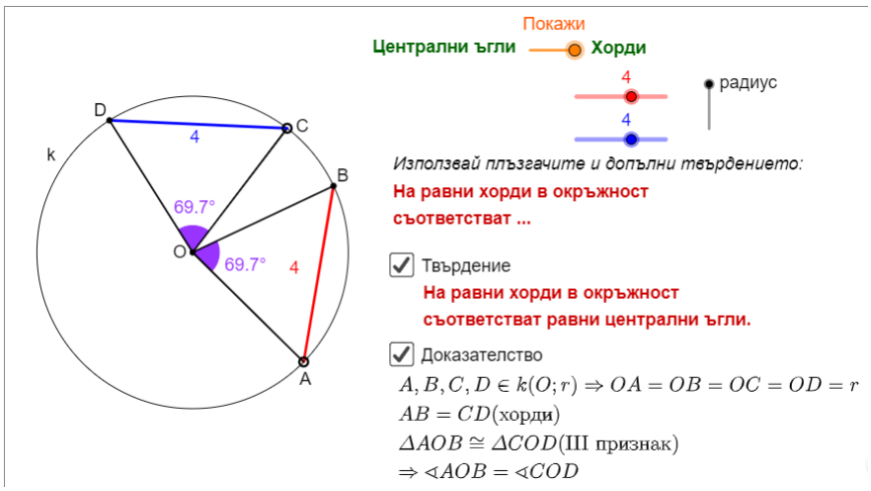
2) Плъзгача е в положение „Хорди“

С червен и син плъзгач се променят дължините на две хорди, като точките A и C са динамични. При равенство на двете хорди се наблюдава и равенство на съответните им централни ъгли. Може да се зададат различни ситуации и да се наблюдават мерките

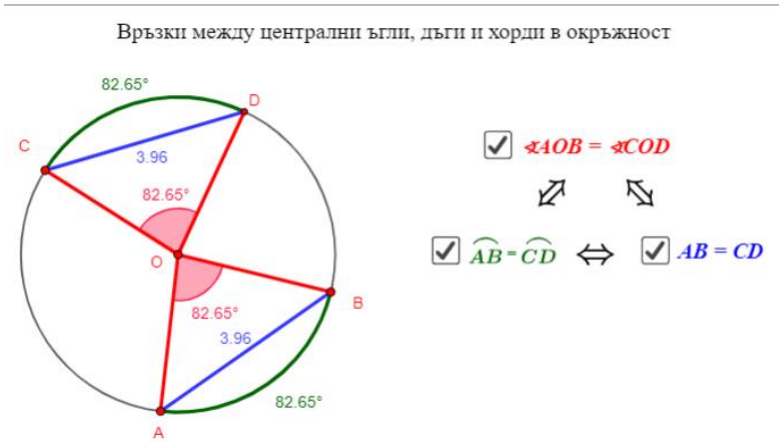
на централните ъгли, така че да се провокират учениците да допълнят твърдението: „На равни хорди в окръжност съответстват …“



След визуализиране на твърдението, преди да е видимо пълното доказателство, във фронтална беседа учениците може да предложат доказателство.



Аплета „Връзки между централни ъгли, дъги и хорди в окръжност“ дава възможност да се визуализира зависимостта между равните централни ъгли, съответните им дъги и хорди в една окръжност. Точките A, B, C могат да се преместят и да се променят централните ъгли.



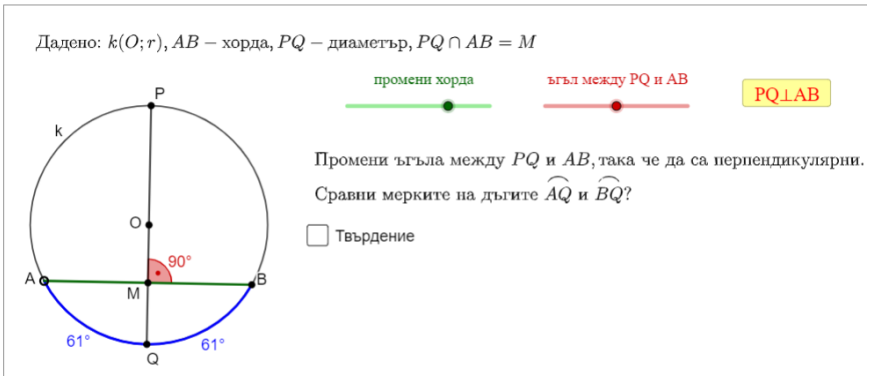
Теорема 2: В окръжност диаметър е перпендикулярен на хорда, която не е диаметър, тогава и само тогава, когато разполовява определената от хордата дъга.

Изследване на различни ситуации за достигане до формулиране на теоремата и доказателството й е реализирано с два аплета за следните твърдения:

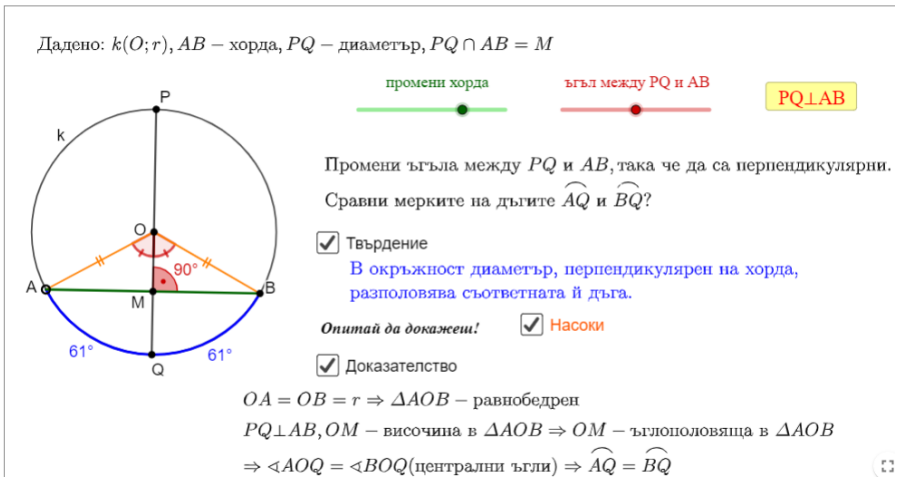
1) *В окръжност диаметър, перпендикулярен на хорда, разполовява съответната й дъга.*

В аплета динамиката в чертежа се реализира с точка A и плъзгачите „промени хорда“ и „ъгъл между PQ и AB“. За да станат перпендикулярни PQ и AB може да се използва плъзгача или бутонът „PQ⊥AB“, който задава прав ъгъл между диаметъра и хордата.

Учениците наблюдават различни ситуации и достигат до извода, че когато PQ и AB са перпендикулярни дъгите $\widehat{AQ}$ и $\widehat{BQ}$ са равни, т.е. Q е среда на съответната на хордата дъга.



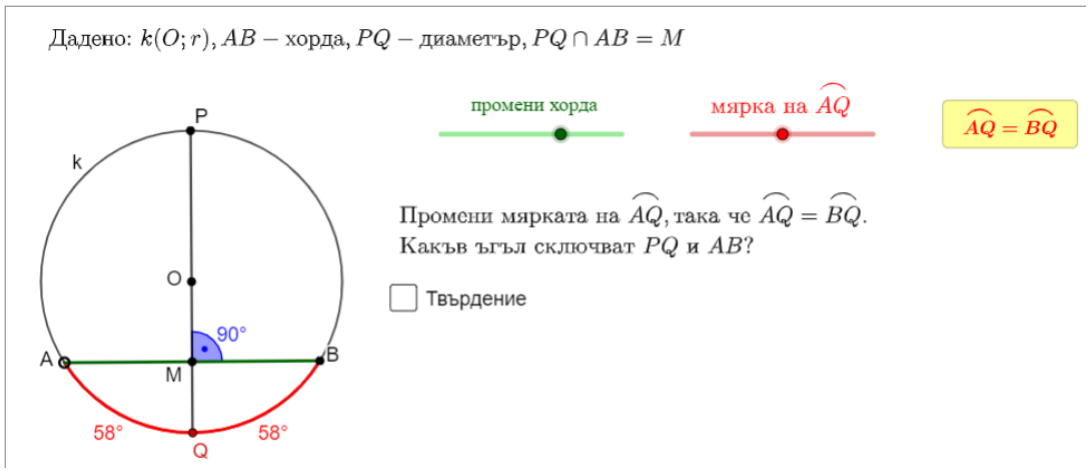
Полета за отметка дават възможност да се визуализират: твърдението; допълнителни построения и означения, които да ги подпомогнат самостоятелно да докажат твърдението; пълното доказателство. Аплетът дава възможност да се направи фронтална беседа, в която учениците да предложат свое доказателство преди да са го видели.



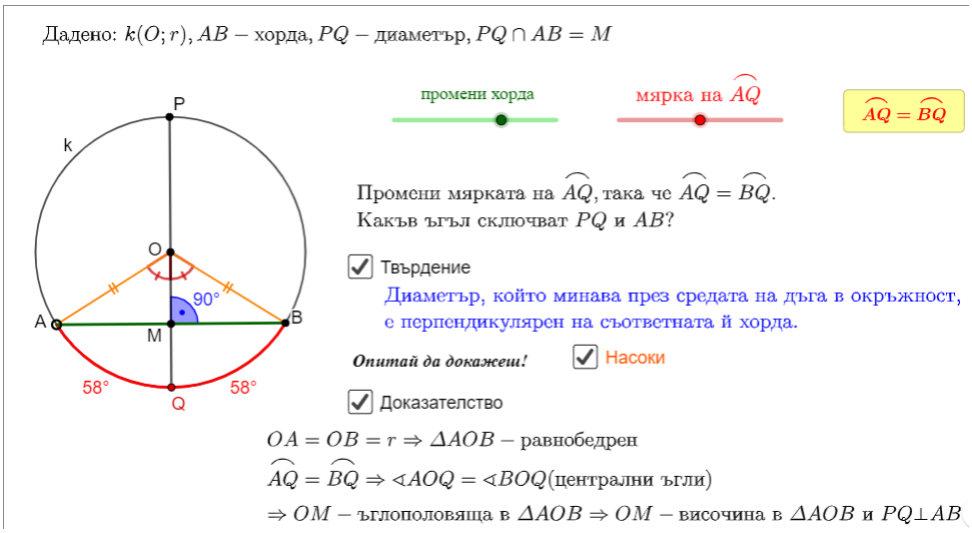
2) *Диаметър, който минава през средата на дъга в окръжност, е перпендикулярен на съответната ѝ хорда.*

В аплета динамиката в чертежа се реализира с точка A и плъзгачите „промени хорда“ и „мярка на $\widehat{AQ}$“. За да станат равни дъгите $\widehat{AQ}$ и $\widehat{BQ}$ може да се използва плъзгача „мярка на $\widehat{AQ}$“ или бутона „$\widehat{AQ} = \widehat{BQ}$“, който задава точка Q да е среда на дъгата $\widehat{AB}$ и $\widehat{AQ} = \widehat{BQ}$.

След наблюдение на различни ситуации учениците достигат до извода, че когато $\widehat{AQ} = \widehat{BQ}$ (Q е среда на дъгата $\widehat{AB}$), диаметърът PQ и хордата AB сключват прав ъгъл, т.е. диаметърът е перпендикулярен на хордата



Полета за отметка дават възможност да се визуализират: твърдението; допълнителни построения и означения, които да ги подпомогнат самостоятелно да докажат твърдението; пълното доказателство. Аплетът дава възможност да се направи фронтална беседа, в която учениците да предложат свое доказателство преди да са го видели.



5.2. ЗАДАЧИ

В подстраница „ЦЕНТРАЛЕН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ“ са разработени задачи с динамични конструкции, които дават възможност за първоначално приложение и затвърдяване на знанията за дъга от окръжност, централен ъгъл, съответна дъга на централен ъгъл и уменията за прилагане на теоремите, свързани с тях.

Всеки аплет съдържа:

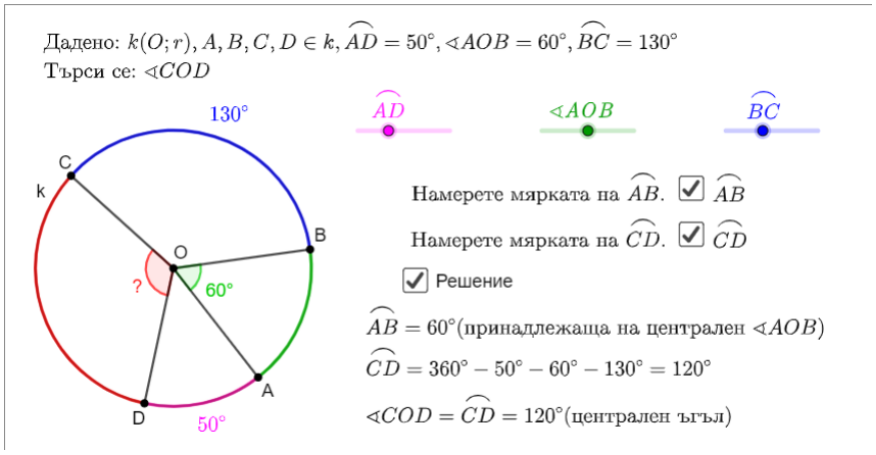
- условие на задачата;
- динамичен чертеж;
- плъзгачи, с които се променят мерките на дадените дъги и централни ъгли;
- полета за отметка за активиране на елементи от чертежа;
- поле за отметка „Решение“.

Аплетите дават възможност задачите да се разработят колективно с класа, учениците да предложат решение, да се коментира решението. С отметка „Решение“, то може да се види частично или изцяло.

Задача 1 дава възможност да се затвърдят понятията дъга от окръжност, централен ъгъл и съответна дъга, както и теоремата за градусна мярка на централен ъгъл.

В тази задача се търси мярката на централен ъгъл $\sphericalangle COD$ при дадени мерките на дъги $\widehat{AD}$ и $\widehat{BC}$ и централен ъгъл $\sphericalangle AOB$. С плъзгачи мерките на дадените дъги и централен ъгъл могат да се променят. Така практически се получава набор от еднотипни задачи с различни стойности на дадените дъги и централен ъгъл.

Поле за отметка за дъгата $\widehat{AB}$ дава възможност да се визуализира на чертежа дъгата и да се насочат учениците как да започнат решаването на задачата. При нейното активиране е достъпно поле за отметка, което визуализира $\widehat{CD}$, както и поле за отметка, чрез което може да се види решението на задачата.

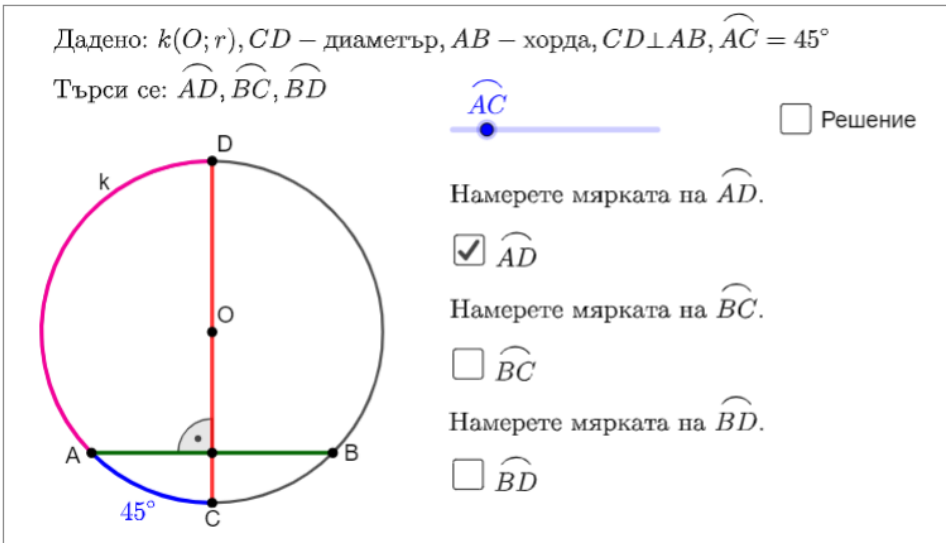


Аплетът дава възможност във фронтална беседа учениците да решат задачата и да се коментира даденото решение.

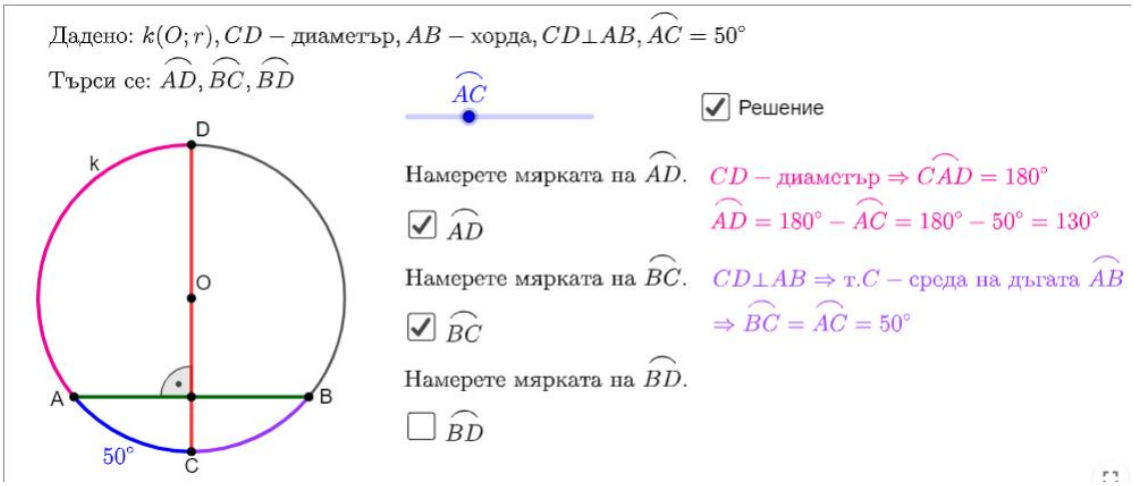
Задача 2 дава възможност да се затвърдят понятията дъга от окръжност, диаметър, полуокръжност, както и *Теорема 2: В окръжност диаметър е перпендикулярен на хорда, която не е диаметър, тогава и само тогава, когато разполовява определената от хордата дъга.*

Даден е диаметър перпендикулярен на хорда и дъга $\widehat{AC}$, която чрез плъзгач може да се промени. Получават се набор от еднотипни задачи с различни стойности на дадената дъга.

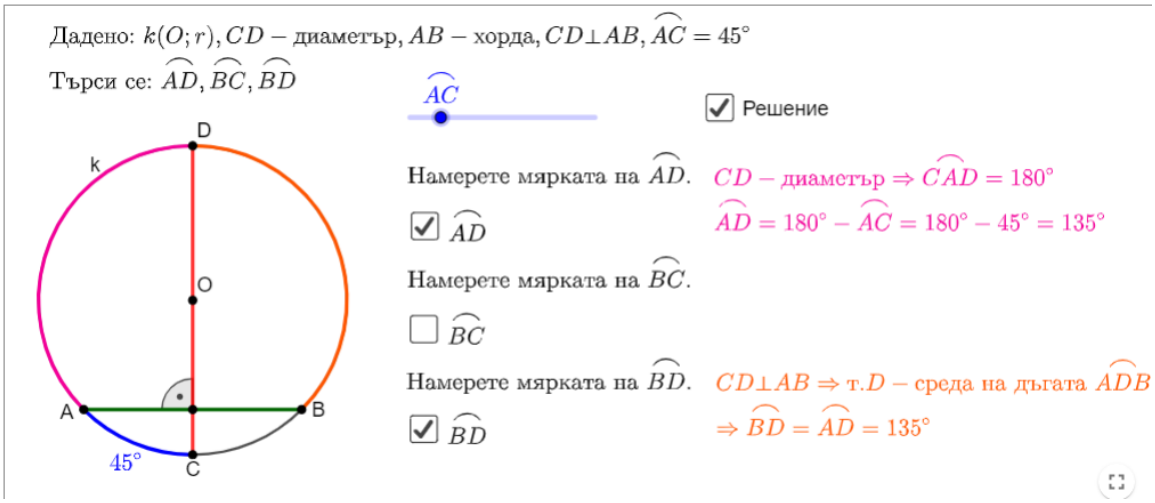
С полета за отметка търсените дъги се визуализират на чертежа и се оцветява в червено диаметъра CD, което насочва учениците да предложат решение на задачата.



С отметка на „Решение“ става видим записът за намиране на дъга с поставена отметка.

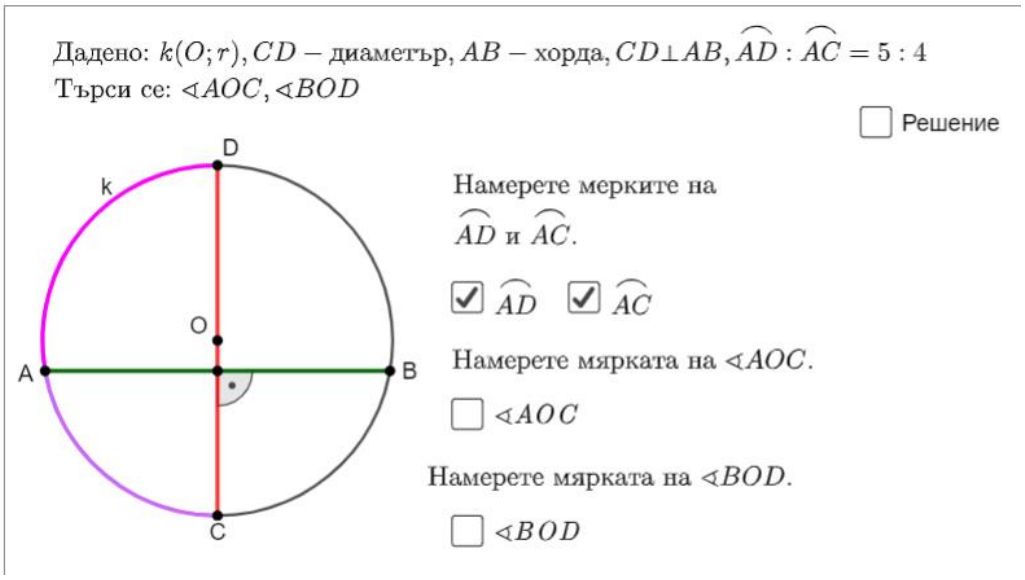


Дъгата $\overset{\frown}{BD}$ може да се намери по различни начини. Решението, което е дадено е с прилагане на *Теорема 2*. Затова е добре да има отметка и дъгата $\overset{\frown}{AD}$.

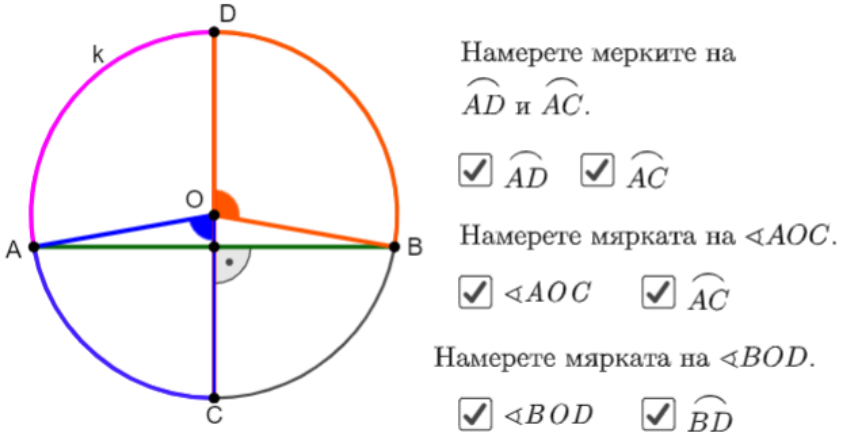


Задача 3 дава възможност да се затвърдят понятията дъга от окръжност, диаметър, полуокръжност, централен ъгъл и съответна дъга, както и теоремата за градусна мярка на централен ъгъл и *Теорема 2: В окръжност диаметър е перпендикулярен на хорда, която не е диаметър, тогава и само тогава, когато разполовява определената от хордата дъга.*

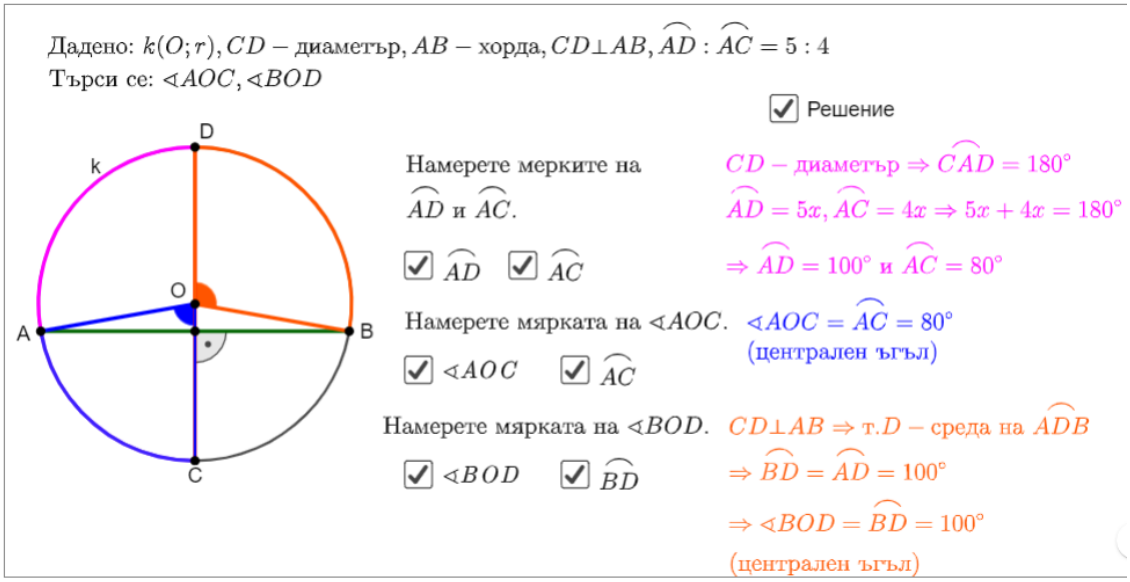
Вниманието на учениците може да се насочи първо към даденото отношение на дъгите $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{AC}$. С кутиите с отметка дъгите се визуализират и диаметъра CD се оцветява в червено, което следва да ги насочи, че двете дъги правят една полуокръжност и сбора им 180°. И така могат да намерят техните мерки.



С последователно активиране на полета за отметка за ъглите и съответните им дъги, учителя може да насочва учениците при решаване на задачата.



С поставянето на отметка на „Решение“, срещу активираните дъги и ъгли, става видим запис на решението за тях.



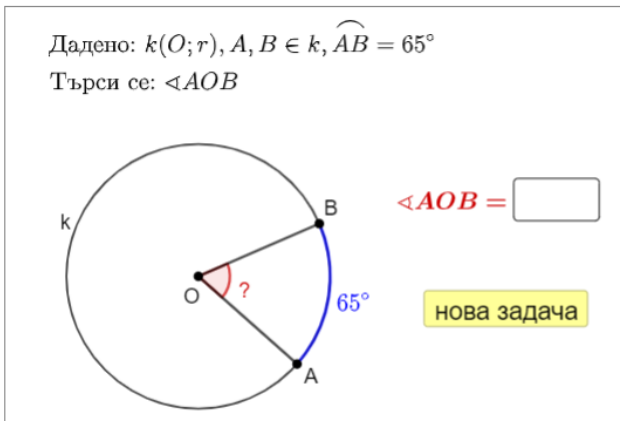
5.3. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

За упражнение в час или за самостоятелна работа в подстраница „ЦЕНТРАЛЕН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА“ са разработени задачи с кратък отговор. Всяка задача е представена с аплет, съдържащ условие на задачата, динамичен чертеж и поле за въвеждане на отговора. След въвеждане и потвърждаване с Enter: при верен отговор се появява съобщението „Правилно!“, при грешен отговор – „Опитай отново!“. Това дава възможност ученикът да получи веднага обратна връзка дали се е справил със задачата, както и при грешен отговор да въведе нов. Бутонът „нова задача“ генерира задача с други стойности на дадените дъги или централни ъгли. Заложени са около десет различни

стойности за дадените дъги или централни ъгли, което дава възможност учениците да упражнят и затвърдят прилагането на теоремите.

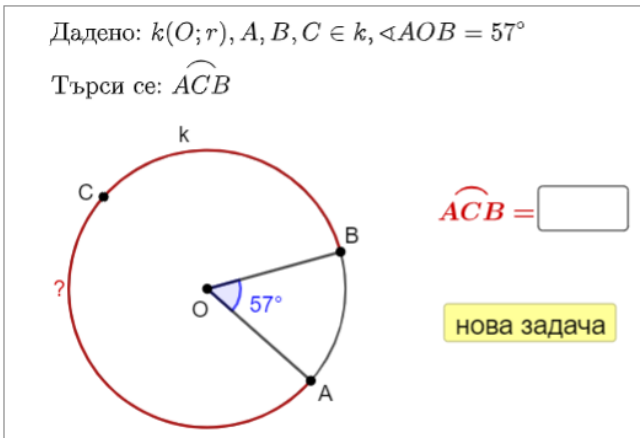
С първата задача ученикът може да упражни намирането на мярката на централен ъгъл по дадена мярка на съответната му дъга.

Задача 1



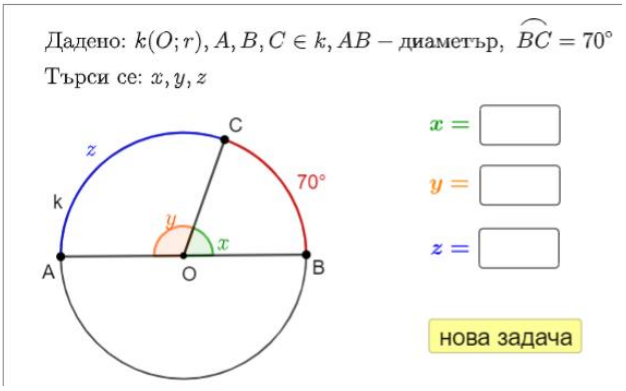
Във втората задача учениците трябва да използват знанието, че мярката на окръжността е 360°.

Задача 2

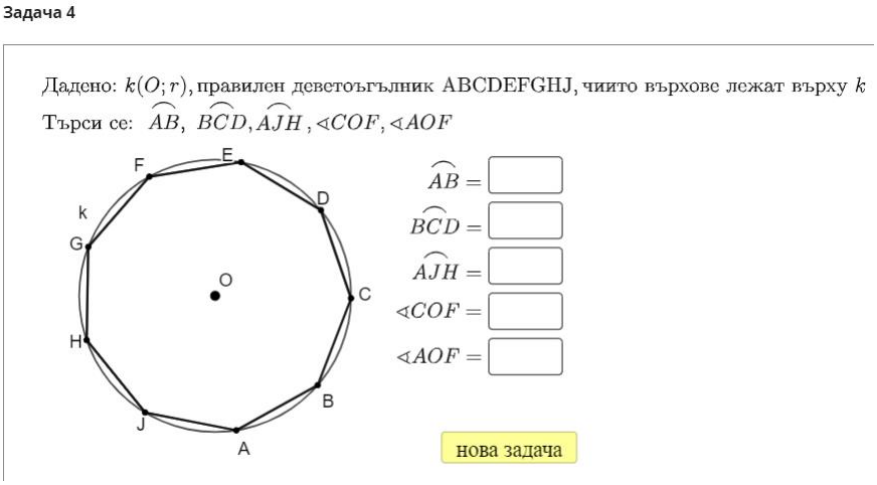


В третата задача освен намирането на мярката на централен ъгъл и мярката на съответната му дъга, се използва и знанието за мярката на полуокръжност.

Задача 3

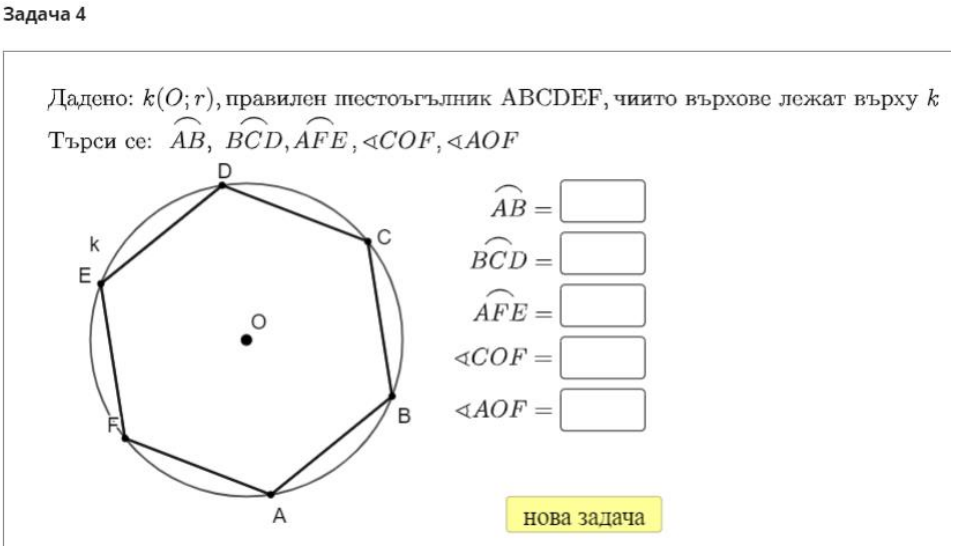


В четвъртата задача е даден правилен деветоъгълник, чиито върхове лежат на окръжност. Търсят се три дъги и два централни ъгъла.

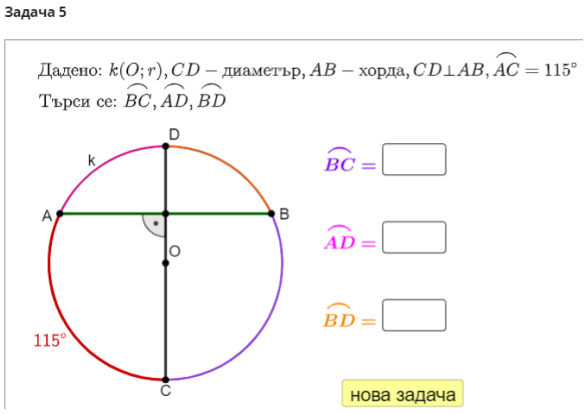


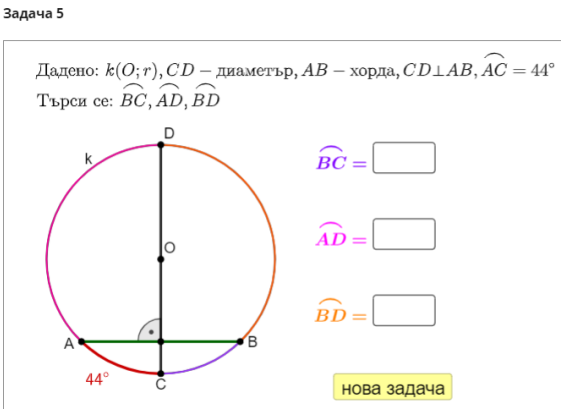
С бутона „нова задача“ се генерира нов правилен многоъгълник, който може да е: шестоъгълник, осмоъгълник, десетоъгълник, дванадесетоъгълник.

Предизвикателство беше разработването на аплета, тъй като при правилния шестоъгълник и осмоъгълник липсва точката J. Исках да задам в „Търси се“ различни дъги зададени с три точки – и по посока на часовниковата стрелка ($\widehat{BCD}$), и по посока обратна на часовниковата стрелка ($\widehat{AJH}$). Така че при правилния шестоъгълник и осмоъгълник, тъй като няма няма връх J, търсена дъга се променя на $\widehat{AFE}$.

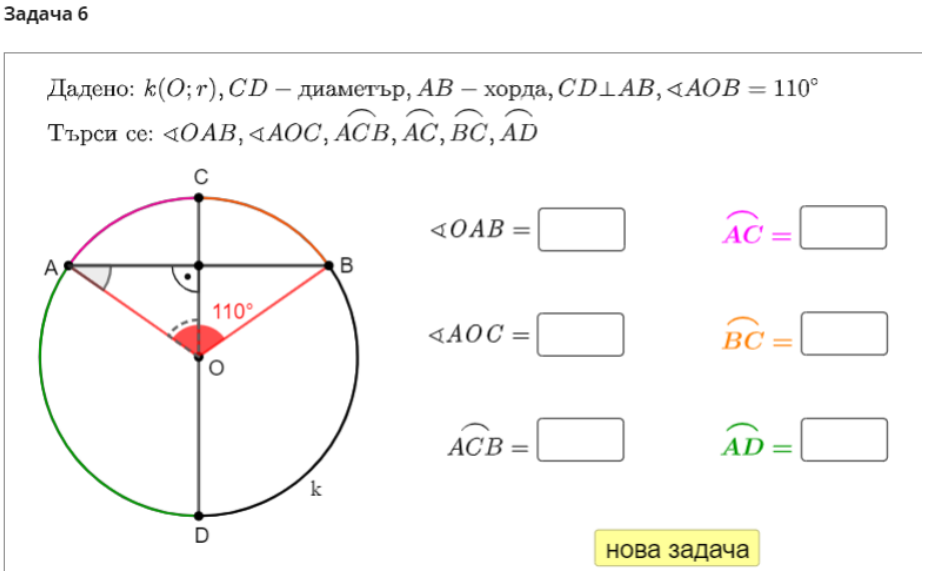


При решаването на пета задача се упражнява *Теорема 2* и знанието за мярката на полуокръжност 180°. За по-голяма нагледност дъгите са с различен цвят.





Последната задача е с най-голяма сложност, търсят се повече елементи от чертежа. Даден е централен ъгъл $\sphericalangle AOB$ и освен прилагането на *Теорема 2*, учениците могат да затвърдят знанието, че ΔAOB е равнобедрен, тъй като $AO = BO = r$. За по-голяма нагледност търсените дъги са в различен цвят и търсените ъгли са означени на чертежа.



6. ВПИСАН ЪГЪЛ

В тази тема учениците трябва да усвоят понятието вписан ъгъл. Компетентности като очаквани резултати от обучението са: учениците да разпознават вписан ъгъл в окръжност, твърденията за него и да умеят да ги прилагат.

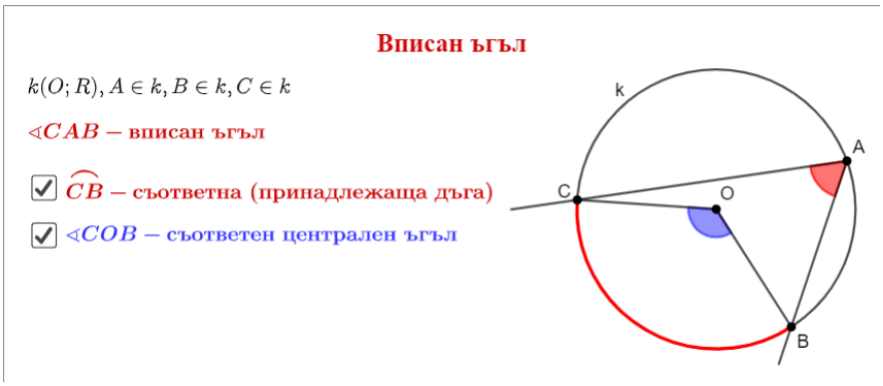
За постигане на необходимите знания и умения по темата е разработено съдържание, реализирано като:

- ✓ ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ – представена в уеб страница „ВПИСАН ЪГЪЛ“;
- ✓ ЗАДАЧИ – представени в подстраница „ВПИСАН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ“;
- ✓ ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА – представени в подстраница „ВПИСАН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА“

6.1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ

Уеб страница „ВПИСАН ЪГЪЛ“ съдържа динамични чертежи, които могат да подпомогнат учителя за онагледяване, въвеждане и изясняване на новото понятие вписан ъгъл. Аплети с динамични чертежи дават възможност, чрез експериментиране с динамичните обекти в тях, да се достига до формулировката и да се представи доказателството на теоремата за мярката на вписан ъгъл, както и да се покаже връзката между вписан и централен ъгъл.

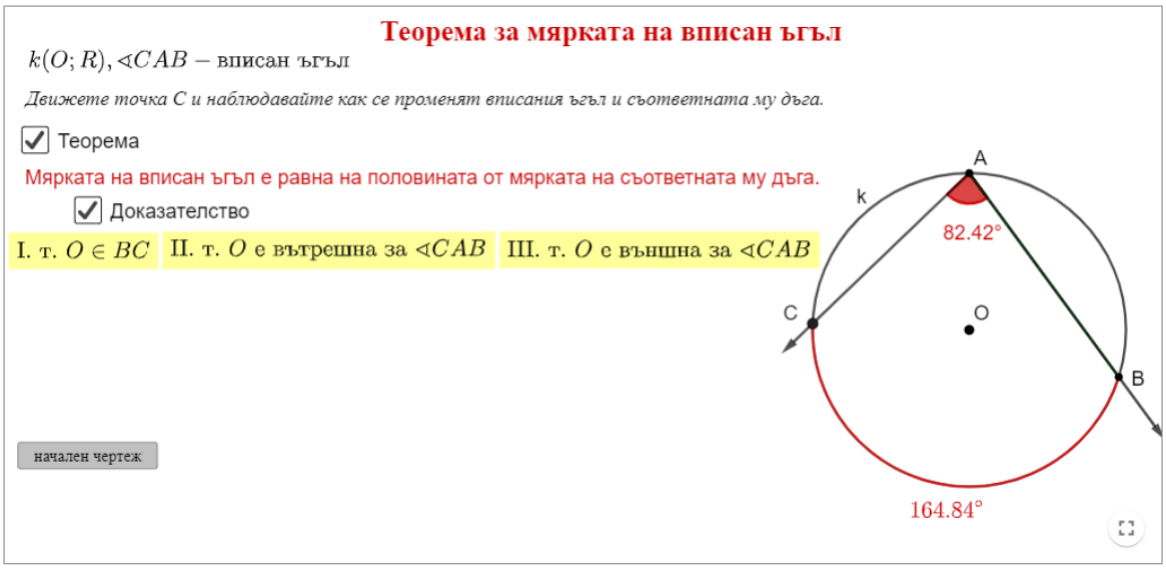
За въвеждане и изясняване на понятието **вписан ъгъл** може да се използва аплет „Вписан ъгъл“. Динамичният чертеж дава възможност да се онагледи понятието: *Ъгъл, чийто връх лежи на окръжността, а раменете му я пресичат, се нарича вписан ъгъл в тази окръжност.*



С полета за отметка може да се визуализират съответната дъга $\widehat{CB}$ – вътрешна за ъгъла (не съдържа върха му A) и централния ъгъл $\sphericalangle COB$ - съответен на вписания $\sphericalangle CAB$.

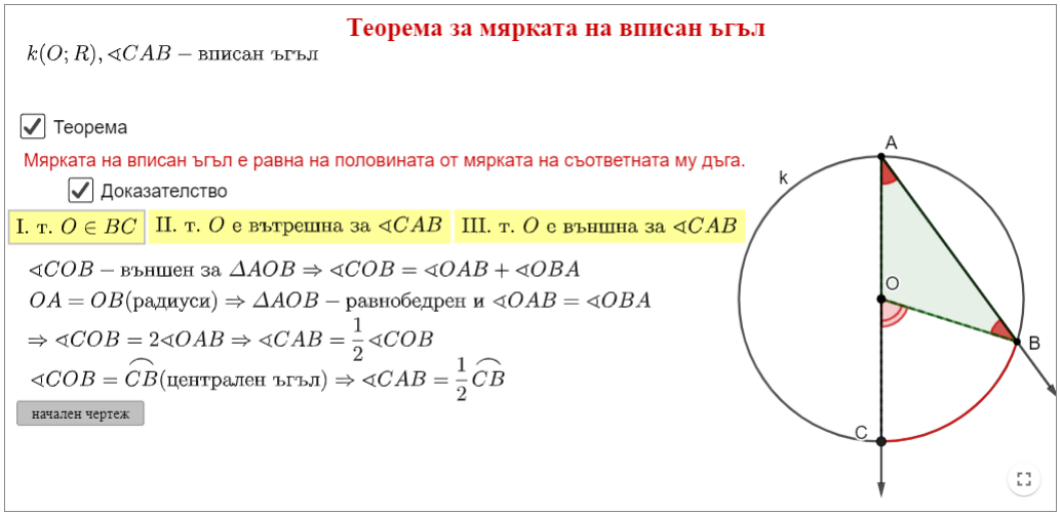
Експериментирайки с динамичните точки A, B и C, може да се пояснят понятията съответна дъга и съответен централен ъгъл.

Аплетът „Теорема за мярката на вписан ъгъл“ дава възможност да се направи първоначален експеримент с движение на точка C, което променя мярката на вписания ъгъл $\sphericalangle CAB$ и да се потърси зависимост между нея и мярката на съответната му дъга $\widehat{CB}$. С полета за отметка се визуализират самата *Теорема: Мярката на вписан ъгъл е равна на половината от съответната му дъга* и доказателството й.

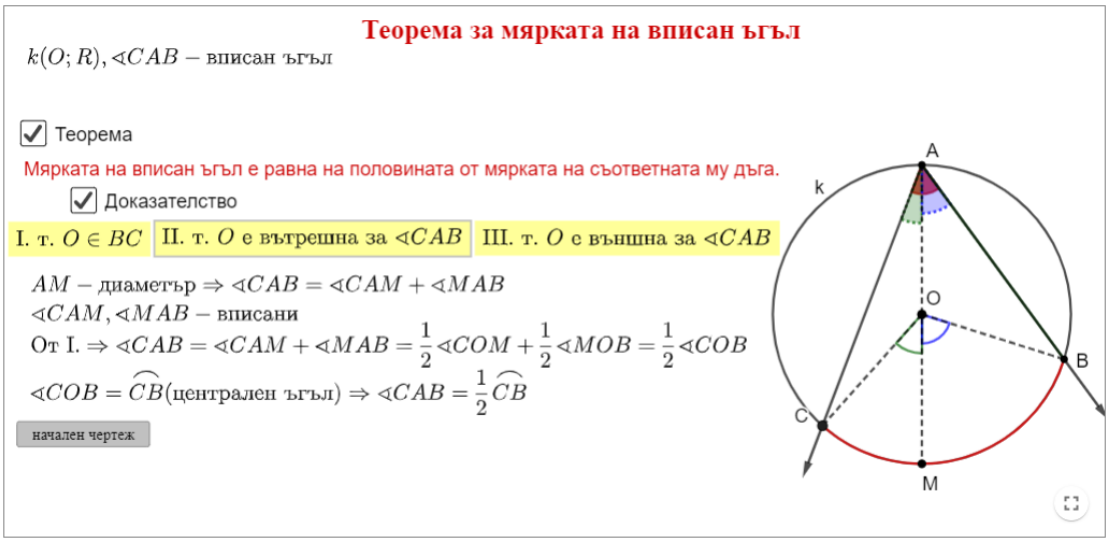


Доказателството е разгледано в три случая (бутони, означени са с римски цифри), които представят различните възможности за взаимното положение на раменете на ъгъла и центъра на окръжността. При разглеждането на случай от доказателството, мерките на вписания ъгъл $\sphericalangle CAB$ и съответната му дъга $\widehat{CB}$ не са видими на чертежа.

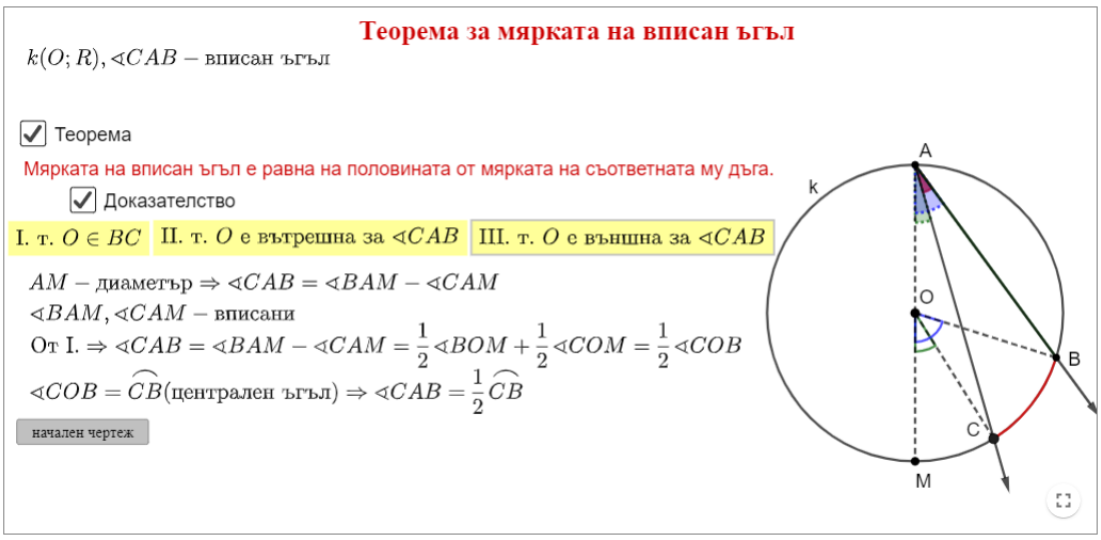
I. т. $O \in BC$: Чертежа се променя, така че рамото AC на вписания ъгъл $\sphericalangle CAB$ минава през центъра на окръжността. Тогава централния ъгъл $\sphericalangle COB$ е външен за ΔAOB (триъгълника е оцветен) и $\sphericalangle COB = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA$. Двата ъгъла са означени на чертежа като равни, тъй като $OA = OB$ (радиуси) и ΔAOB е равнобедрен. Така $\sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\sphericalangle OAB$ и от $\sphericalangle COB = \widehat{CB}$ следва $\sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\widehat{CB}$.



II. т. O е вътрешна за $\sphericalangle CAB$: Чертежа се променя, така че центърът на окръжността т. O е вътрешна за $\sphericalangle CAB$. Тъй като AM е диаметър на окръжността и ъглите $\sphericalangle CAM$ и $\sphericalangle MAB$ (двата ъгъла са означени на чертежа с различен цвят) са вписани и за тях можем да приложим доказаното в I. случай. Доказваме, че $\sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\widehat{CB}$.



III. т. O е външна за $\sphericalangle CAB$: Чертежа се променя, така че центърът на окръжността т. O е външна за $\sphericalangle CAB$, AM е диаметър. Тогава $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BAM - \sphericalangle CAM$ (двата ъгъла са означени на чертежа с различен цвят) – вписани ъгли и за тях можем да приложим доказаното в I. случай. Доказваме, че $\sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\widehat{CB}$.

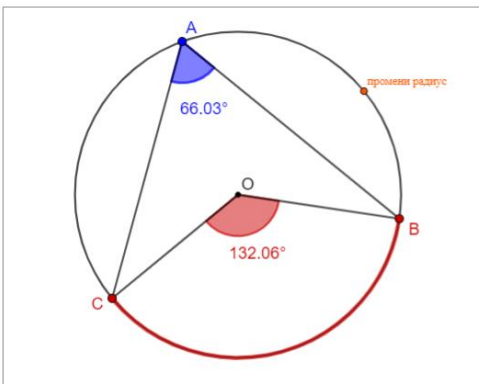


Бутонът „начален чертеж“ връща точката C в начална позиция, скрива теоремата, доказателството и всички допълнителни построения.

Разработени са три аплета, които да подпомогнат учителя да демонстрира и онагледи следствия на *Теорема*.

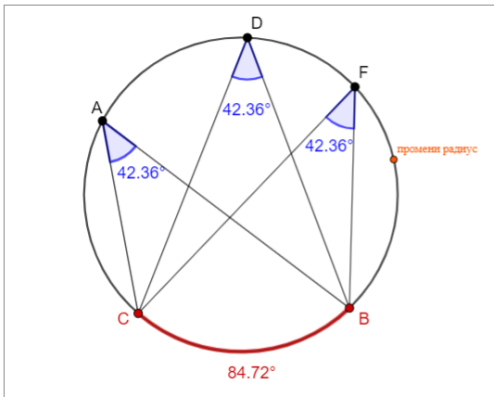
Следствие 1: Вписаният ъгъл е равен на половината от съответния му централен ъгъл.

Динамичните точки A, B, C и „промени радиус“ дават възможност с чертежа да се експериментира и да се наблюдава зависимостта между мерките на вписания ъгъл и на съответния му централен ъгъл.



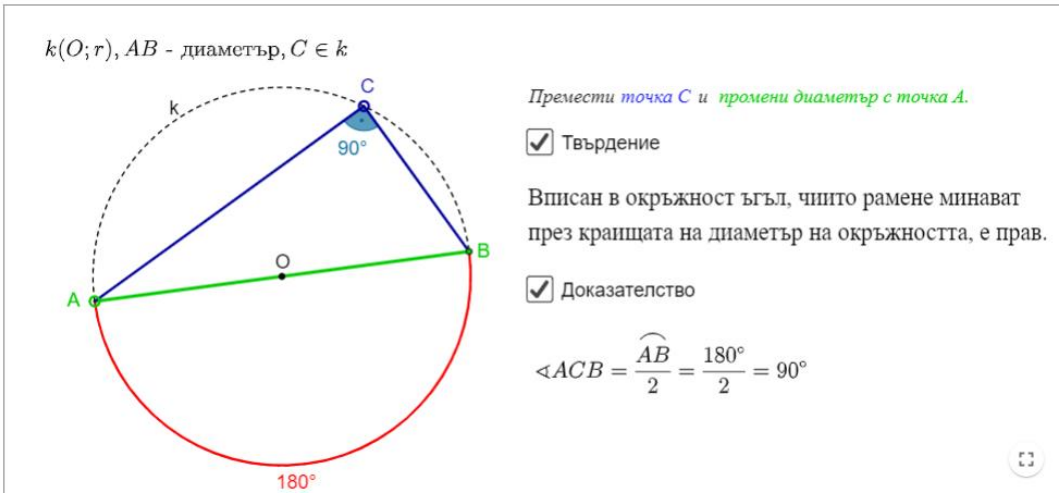
Следствие 2: Всички вписани ъгли в една окръжност, които имат една и съща съответна дъга са равни.

Дадени са три вписани ъгъла с една и съща съответна дъга. С динамичните точки A, B, C, D, F и „промени радиус“ се задават различни ситуации, при които се наблюдава равенство на мерките на ъглите.



Следствие 3: Вписан в окръжност ъгъл, чиито рамене минават през краищата на диаметър на окръжността, е прав.

Учениците са провокирани с динамичните точки C и A да променят чертежа, да извършат наблюдение за мярката на $\sphericalangle ACB$ и да формулират твърдение. С полета за отметка може да се визуализира самото твърдение и доказателството, като преди доказателството да е видимо, те могат да предложат свое такова.



6.2. ЗАДАЧИ

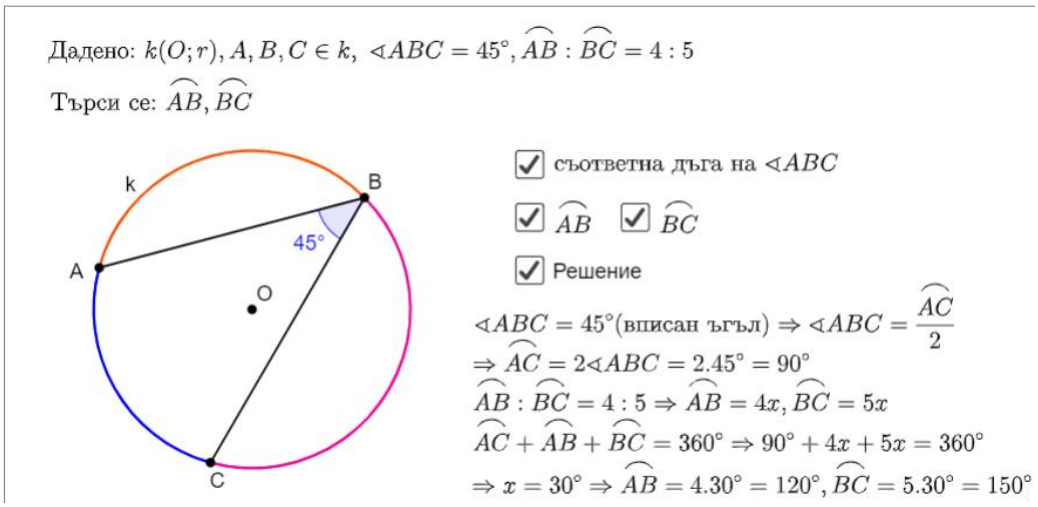
В подстраница „ВПИСАН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ“ са разработени задачи с динамични конструкции, които дават възможност за първоначално приложение и затвърдяване на знанията за вписан ъгъл, съответна дъга на вписан ъгъл и формиране на умения за прилагане на теоремата за вписан ъгъл.

Всеки аплет съдържа: условие на задачата, динамичен чертеж, полета за отметка за активиране на елементи от чертежа, поле за отметка „Решение“.

Аплетите дават възможност задачите да се разработят колективно с класа, учениците да предложат решение, да се коментира решението. С отметка „Решение“, то може да се види частично или изцяло.

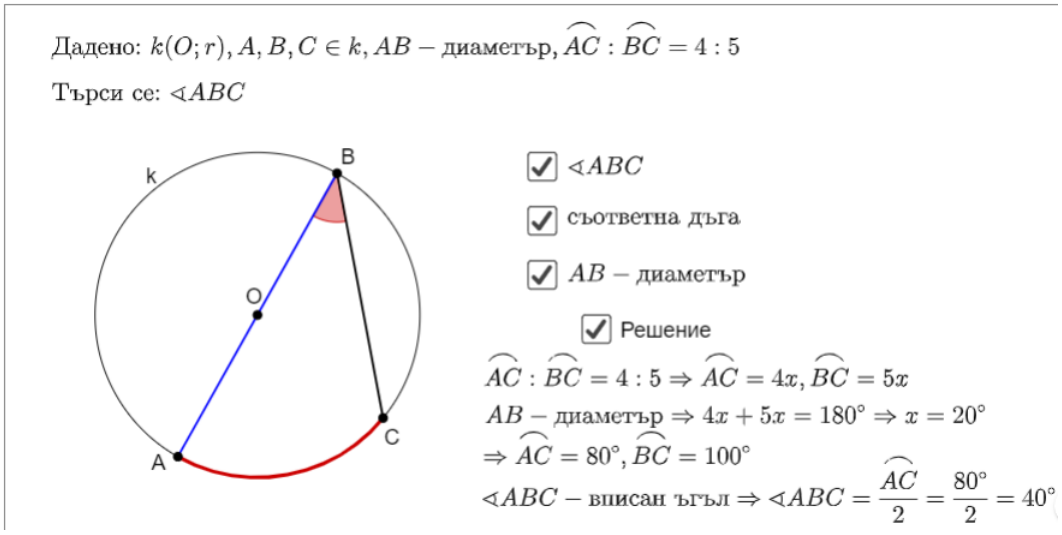
Задача 1 дава възможност да се затвърдят: понятията вписан ъгъл и съответна дъга на вписан ъгъл; теоремата за вписан ъгъл; знанието за мярката на окръжността 360°.

Даден е ъгъл $\sphericalangle ABC$ и отношение на дъгите, които раменете му отсичат от окръжността. Учениците могат да определят вида на ъгъла. С отметка в полето „съответна дъга $\sphericalangle ABC$“ може да се насочат учениците да използват, че е дадена мярката на $\sphericalangle ABC$, който е вписан и така могат да намерят мярката на съответната му дъга, която е два пъти по-голяма от мярката на ъгъла. С полета за отметка дъгите $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$ се оцветяват в различен цвят на чертежа, за да се насочи вниманието към даденото им отношение. С поле за отметка „Решение“ става видим и пълнят му запис.



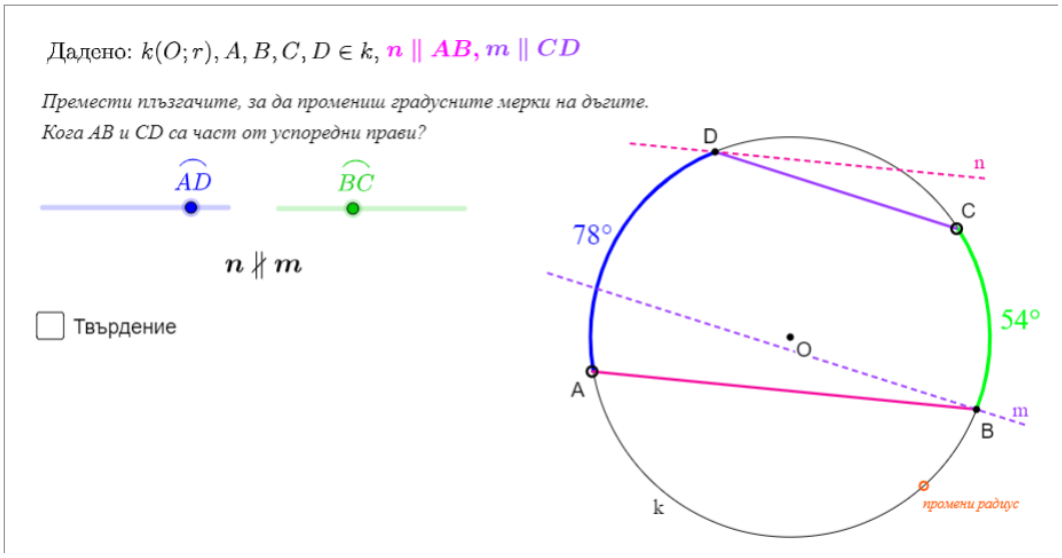
Задача 2 дава възможност да се затвърдят: понятията вписан ъгъл и съответна дъга на вписан ъгъл; теоремата за вписан ъгъл; знанието за мярката на полуокръжност 180°.

Чрез последователно активиране на полета за отметка за търсеният ъгъл $\sphericalangle ABC$, съответната му дъга $\widehat{AC}$ и диаметъра AB, учителя може да насочва учениците при решаване на задачата. След определяне на ъгъла като вписан и $\widehat{AC}$ за съответна дъга, вниманието им може да се насочи към факта, че сумата на дъгите $\widehat{AC}$ и $\widehat{BC}$ е 180° – мярката на полуокръжност и от дадено им отношение можем да намерим техните мерки. С поле за отметка „Решение“ става видим и пълнят запис на решението.

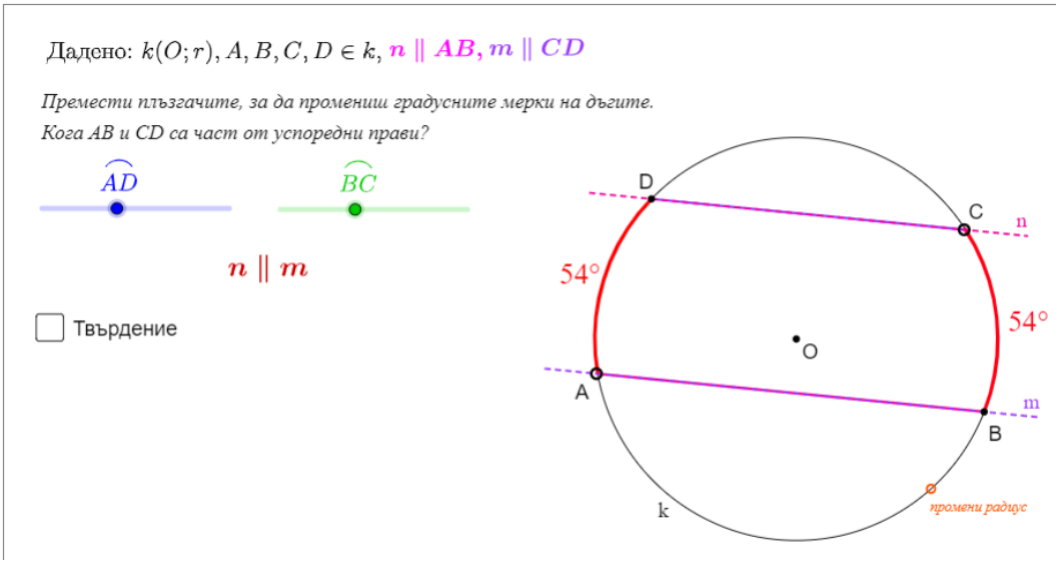


Задача 3 дава възможност да се онагледи и докаже твърдението, че две хорди са успоредни, ако дъгите заключени между тях са равни.

Аплетът дава възможност да се направи експеримент. Чертежа може да се променя с динамичните точки A, C и „промени радиус“. С плъзгачи мерките на дъгите $\widehat{AD}$ и $\widehat{BC}$ се променят и се наблюдава кога хордата AB става част от правата m – успоредна на хордата CD и хордата CD става част от правата n – успоредна на хордата AB.

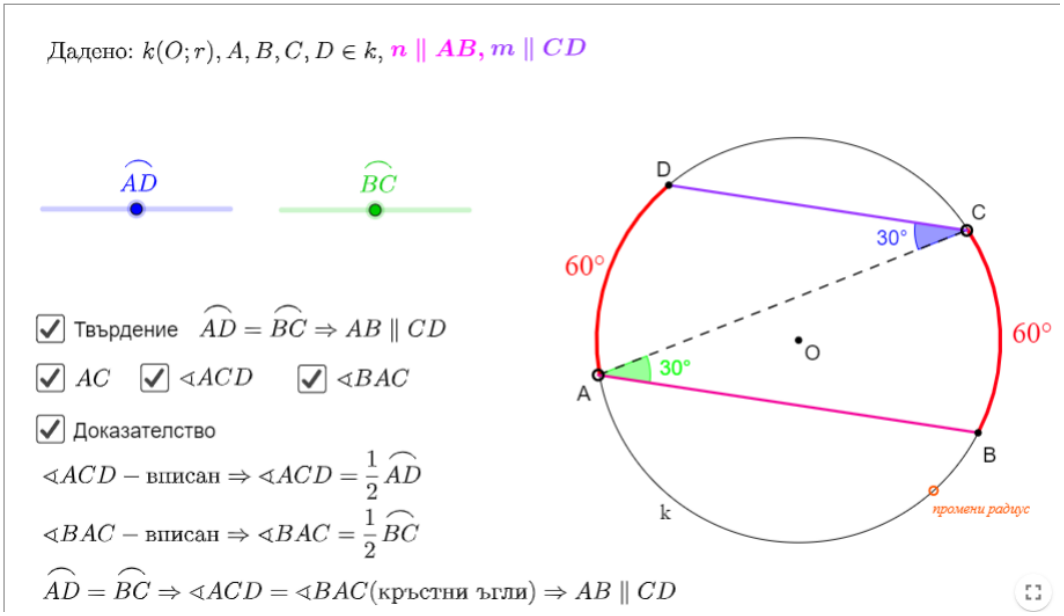


При равни мерки на дъгите $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{BC}$, те се оцветяват в червено и текста „$n \nparallel m$“ се променя на „$n \parallel m$“. Хордите AB и CD са успоредни. Учениците може да формулират твърдение.



С полета за отметка може да се визуализира твърдението, допълнително построение – хордата AC, означението на ъглите $\sphericalangle ACD$ и $\sphericalangle BAC$ и на учениците да се даде възможност да докажат твърдението.

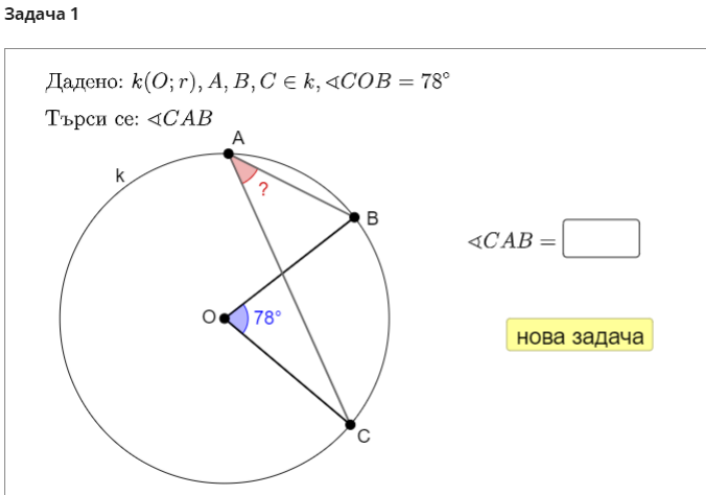
За по-добра нагледност, при активно „Доказателство“, правите m и n, текстовете „$n \parallel m$“ и „*Премести плъзгачите, за да промениш градусните мерки на дъгите. Кога AB и CD са част от успоредни прави?*“ се скриват.



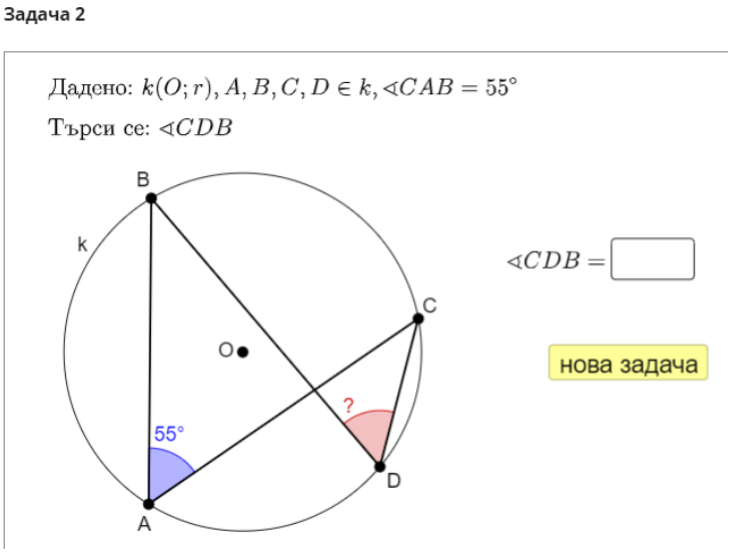
6.3. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

За упражнение в час или за самостоятелна работа в подстраница „ВПИСАН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА“ са разработени задачи с кратък отговор. Всяка задача е представена с аплет, съдържащ условие на задачата, динамичен чертеж и поле за въвеждане на отговора. След въвеждане и потвърждаване с Enter: при верен отговор се появява съобщението „Правилно!“, при грешен отговор – „Опитай отново!“. Това дава възможност ученикът да получи веднага обратна връзка дали се е справил със задачата, както и при грешен отговор да въведе нов. Бутонът „нова задача“ генерира задача с други стойности за дадените дъги или ъгли, избрани на случаен принцип от заложените около десет различни възможности.

С първата задача ученикът може да упражни намирането на мярката на вписан ъгъл по дадена мярка на съответният му централен ъгъл.

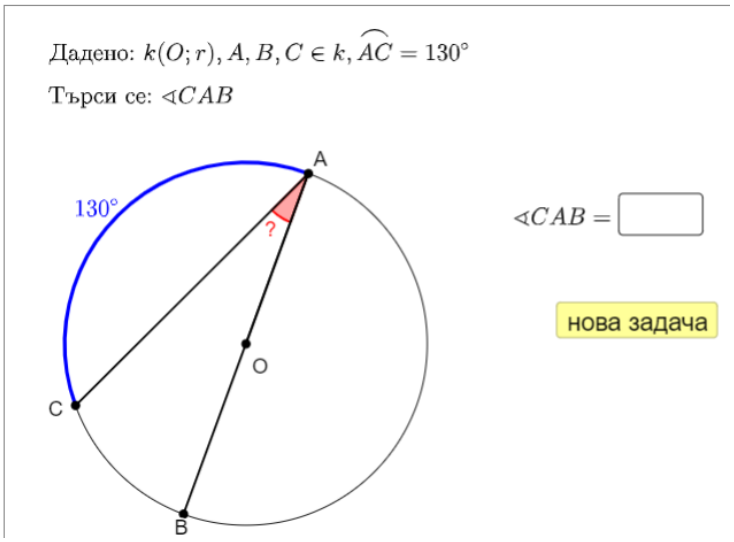


Във втората задача може да се упражни следствието „*вписани ъгли с една и съща съответна дъга са равни*“ и по дадена мярка на вписан ъгъл да се определи градусната мярка на вписан ъгъл със същата съответна дъга.



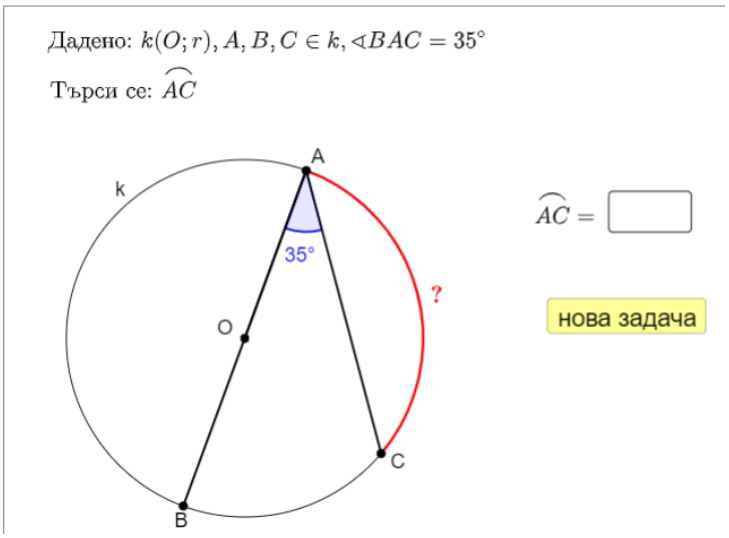
С третата задача учениците могат да затвърдят прилагането на теоремата за мярката на вписан ъгъл. Да актуализират и упражняват знанието, че диаметър дели окръжност на две полуокръжности с мерки от 180°, което да използват за намиране на съответната дъга на търсения вписан ъгъл.

Задача 3



С четвъртата задача учениците могат да упражнят намирането на мярката на съответна дъга при даден вписан ъгъл и знанието за мярката на полуокръжност 180°.

Задача 4

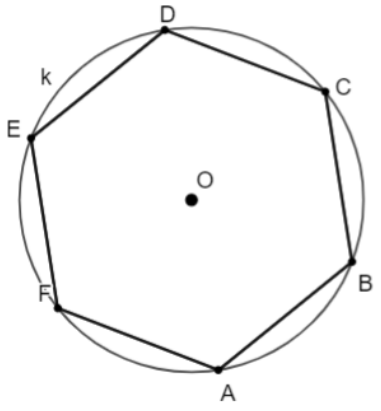


С решаването на пета задача учениците ще актуализират знанията си за правилен многоъгълник и ще затвърдят прилагането на теоремата за мярката на вписан ъгъл. Даден правилен многоъгълник, който може да е: шестоъгълник, деветоъгълник, десетоъгълник, чиито върхове лежат на окръжност. Търсят се мерките на вписани ъгли. С бутона „нова задача“ се генерира нов правилен многоъгълник, като това променя и текста в условието на задачата: “шестоъгълник ABCDEF”, “деветоъгълник ABCDEFGHJ”, “десетоъгълник ABCDEFGHJK”.

Търсените ъгли $\sphericalangle CAD, \sphericalangle CFD$ и $\sphericalangle AEC$ не се променят при различен правилен многоъгълник. При правилен деветоъгълник и десетоъгълник се търсят $\sphericalangle AHC, \sphericalangle BJE$, а при правилен шестоъгълник се търсят $\sphericalangle AFC, \sphericalangle BFE$, тъй като точките H и J не съществуват.

Задача 5

Дадено: $k(O;r)$, правилен шестоъгълник ABCDEF, чиито върхове лежат върху k
Търси се: $\sphericalangle CAD, \sphericalangle CFD, \sphericalangle AEC, \sphericalangle AFC, \sphericalangle BFE$

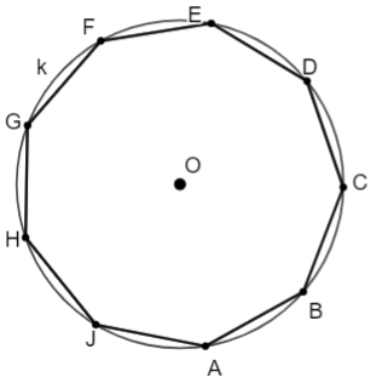


$\sphericalangle CAD =$ ☐
$\sphericalangle CFD =$ ☐
$\sphericalangle AEC =$ ☐
$\sphericalangle AFC =$ ☐
$\sphericalangle BFE =$ ☐

нова задача

Задача 5

Дадено: $k(O;r)$, правилен деветоъгълник ABCDEFGHJ, чиито върхове лежат върху k
Търси се: $\sphericalangle CAD, \sphericalangle CFD, \sphericalangle AEC, \sphericalangle AHC, \sphericalangle BJE$



$\sphericalangle CAD =$ ☐
$\sphericalangle CFD =$ ☐
$\sphericalangle AEC =$ ☐
$\sphericalangle AHC =$ ☐
$\sphericalangle BJE =$ ☐

нова задача

7. ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ

В тази тема учениците трябва да усвоят понятието периферен ъгъл. Компетентности като очаквани резултати от обучението са: учениците да разпознават периферен ъгъл в окръжност, твърденията за него и да умеят да ги прилагат.

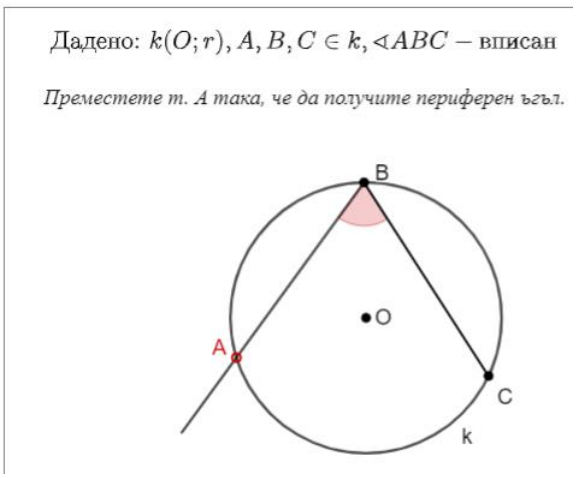
За постигане на необходимите знания и умения по темата е разработено съдържание, реализирано като:

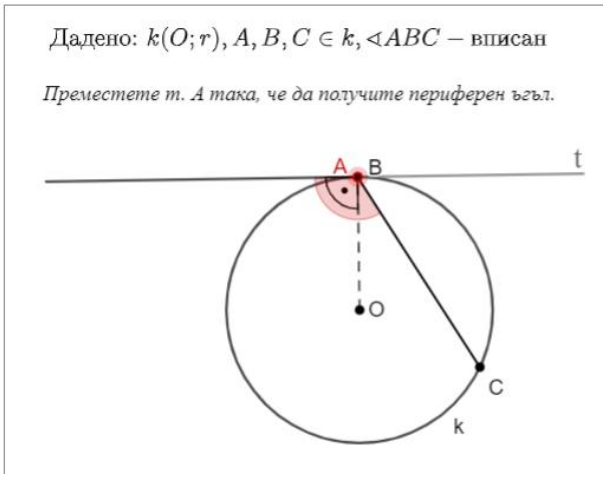
- ✓ ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ – представена в уеб страница „ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ“;
- ✓ ЗАДАЧИ – представени в подстраница „ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ“;
- ✓ ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА – представени в подстраница „ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА“

7.1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ

Уеб страница „ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ“ съдържа динамични чертежи, които могат да подпомогнат учителя за онагледяване, въвеждане и изясняване на новото понятие периферен ъгъл. Аплети с динамични чертежи дават възможност, чрез експериментиране с динамичните обекти в тях, да се достига до формулировката и да се представи доказателството на теоремата за мярката на периферен ъгъл, да се покаже връзката между периферен и централен ъгъл, да се демонстрира как от вписан ъгъл може да се получи периферен.

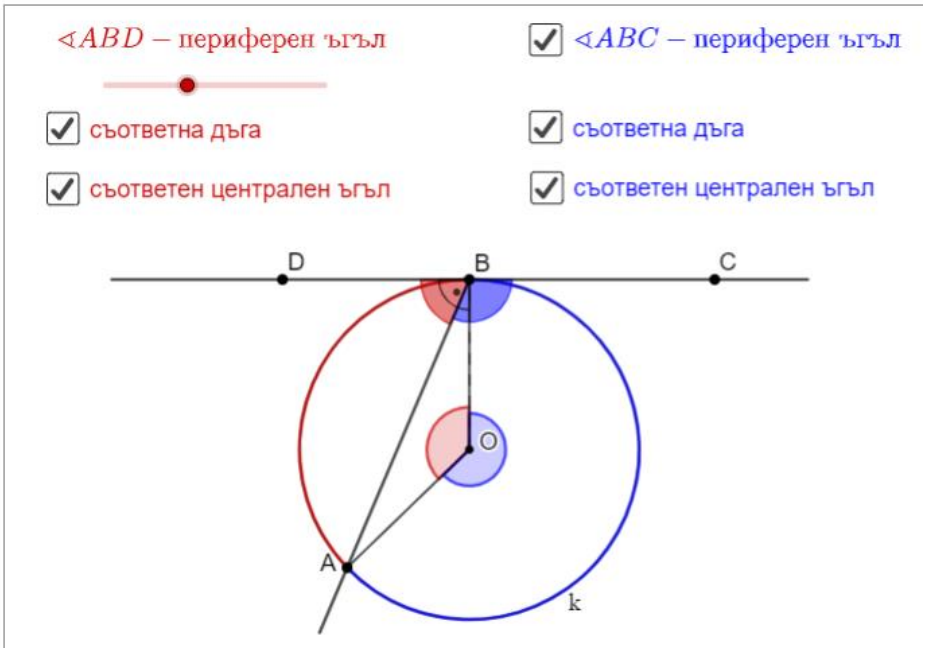
Учителя може да използва първият аплет за да въведе понятието периферен ъгъл: *ъгъл, чийто връх лежи на окръжността, едното му рамо е допирателна, а другото пресича окръжността*. Учениците вече познават вписан ъгъл и с динамичния чертеж може да наблюдават експеримент: как от даден вписан ъгъл $\sphericalangle CAB$ може да получим периферен. Чрез движение на точка A разтваряме едното му рамо към периферията на окръжността. Така стигаме до положение, в което рамото става допирателна до k (а другото рамо пресича k).



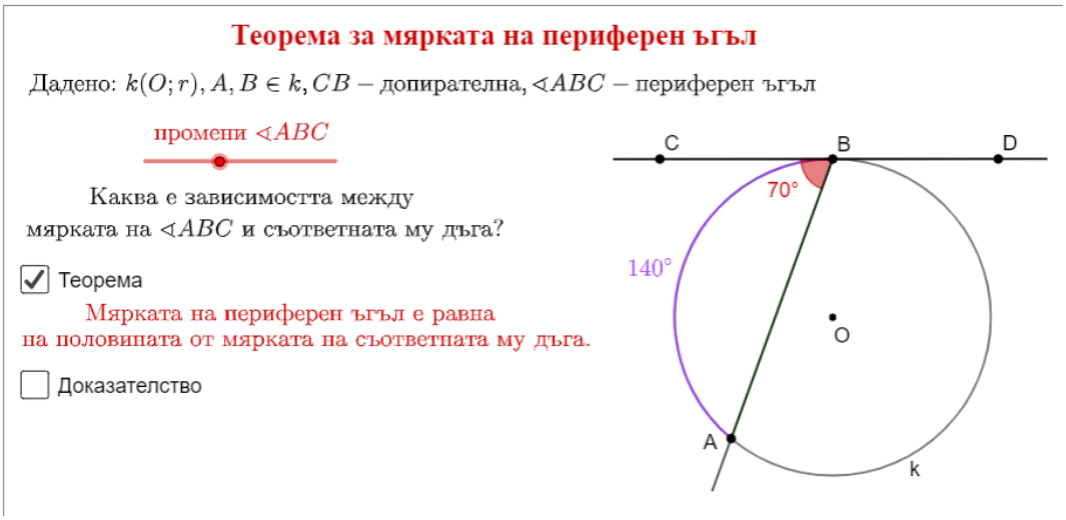


Когато ъгълът стане периферен се появява радиуса OB и правата t. Това дава възможност да припомним, че допирателната към окръжност е перпендикулярна на радиуса, построен в допирната точка.

С втория аплет може да се пояснят понятията съответна дъга и съответен централен ъгъл. С плъзгач се променя даден периферен ъгъл $\sphericalangle ABD$. С поле за отметка може да се види, че има и друг периферен ъгъл $\sphericalangle ABC$. Т.е. когато имаме допирателна и хорда в допирната точка се получават два периферни ъгъла.

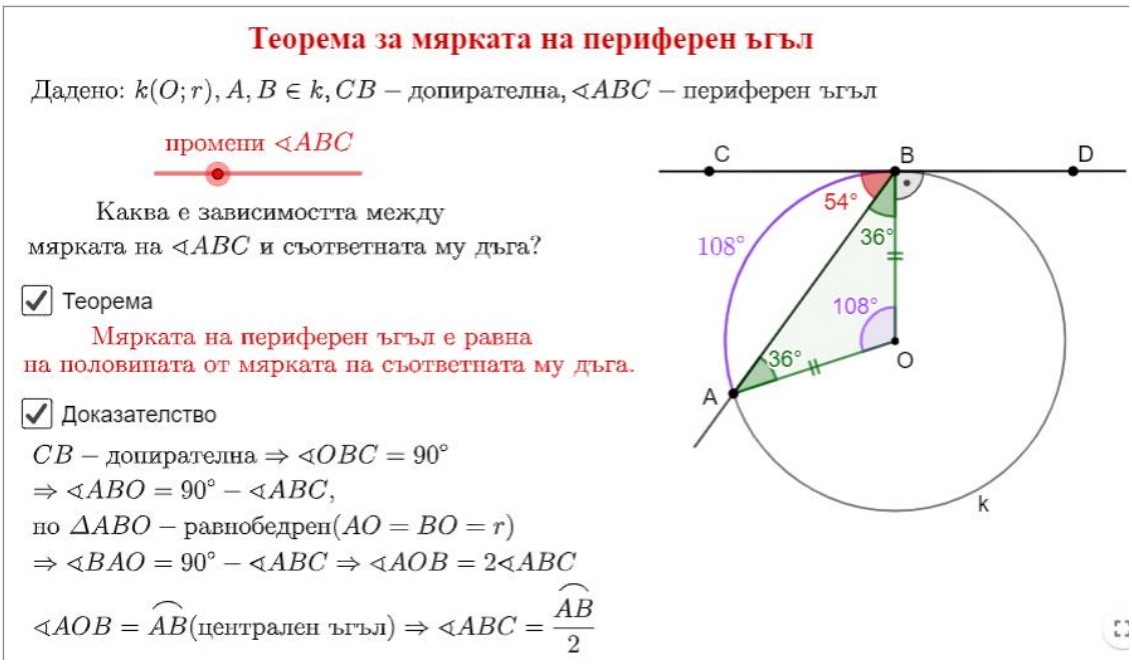


Аплетът „Теорема за мярката на периферен ъгъл“ дава възможност да се направи експеримент с плъзгача „промени $\sphericalangle ABC$“, който променя мярката на периферния ъгъл $\sphericalangle ABC$, и да се потърси зависимост между нея и мярката на съответната му дъга $\widehat{AB}$. С полета за отметка се визуализират самата *Теорема: Мярката на периферен ъгъл е равна на половината от мярката на съответната му дъга*.

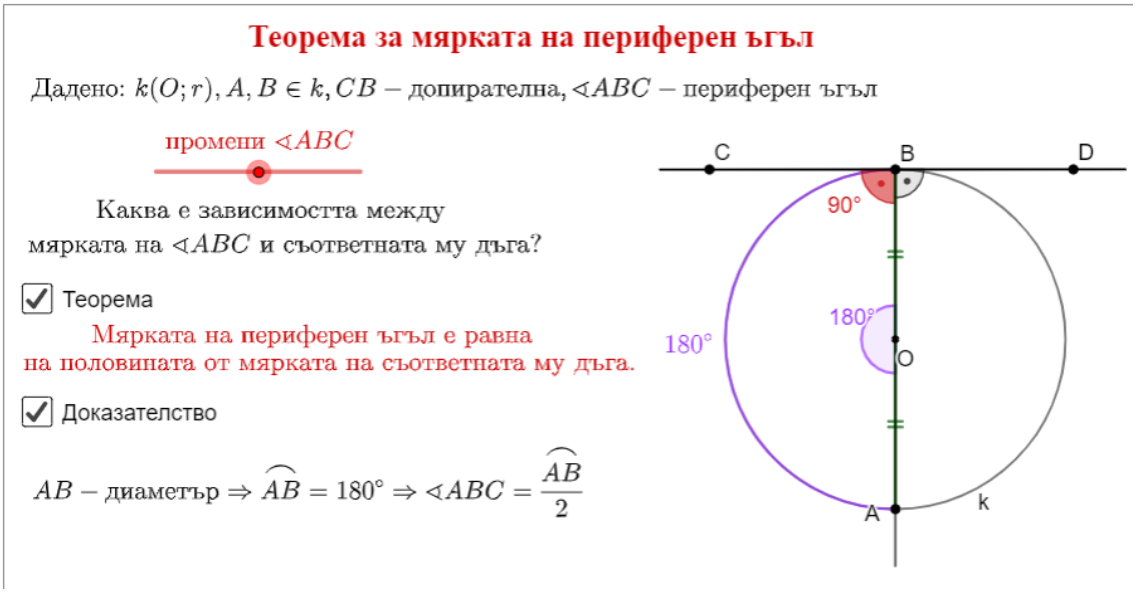


Доказателството на теоремата е разгледано за три случая, зависещи от мярката на $\sphericalangle ABC$, която се променя с плъзгача „промени $\sphericalangle ABC$“.

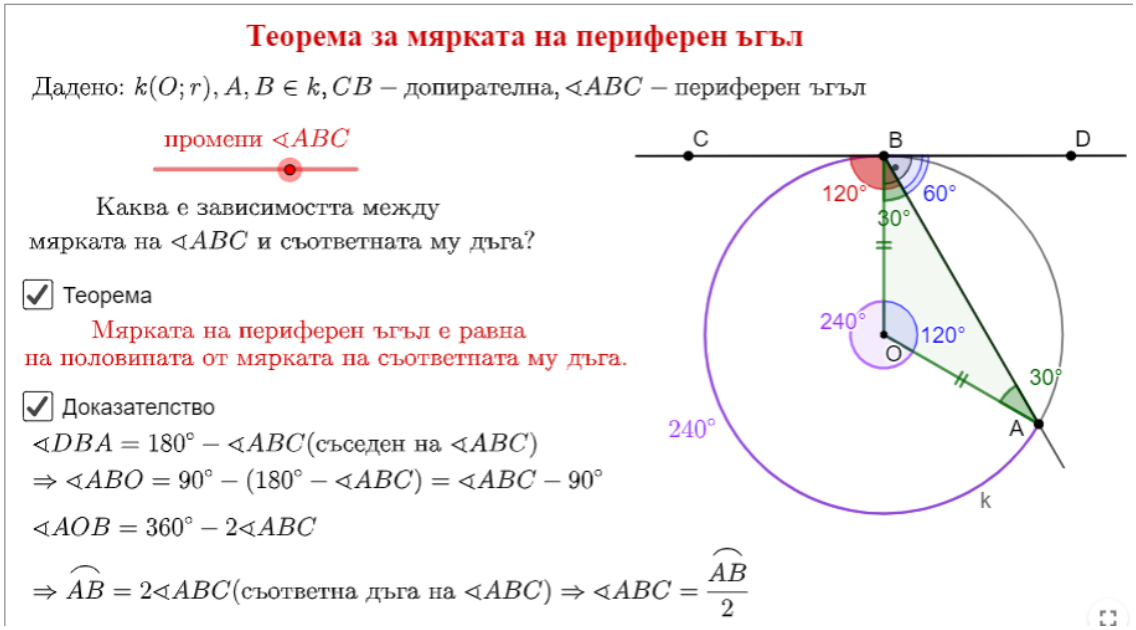
I. $\sphericalangle ABC < 90°$: За да се онагледи доказателството, на чертежа се означават: $\sphericalangle OBD = \sphericalangle OBC = 90°$, ΔABO – равнобедрен със страни $AO = BO = r$, централния ъгъл $\sphericalangle AOB$, дъгата $\widehat{AB}$.



II. $\sphericalangle ABC = 90°$: AB е диаметър на окръжността и дъгата $\widehat{AB}$ е полуокръжност с мярка 180°, откъдето получаваме $\sphericalangle ABC = 90° = \frac{\widehat{AB}}{2}$.



III. $\sphericalangle ABC > 90°$: За да се онагледи доказателството, на чертежа се означават: $\sphericalangle OBD = 90°$, ΔABO – равнобедрен със страни $AO = BO = r$, централния ъгъл $\sphericalangle AOB$, дъгата $\widehat{AB}$, съседния на $\sphericalangle ABD$.



7.2. ЗАДАЧИ

В подстраница „ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ“ са разработени задачи с динамични конструкции, които дават възможност за първоначално приложение и затвърдяване на знанията за периферен ъгъл, съответна дъга на периферен ъгъл и формиране на умения за прилагане на теоремата за периферен ъгъл.

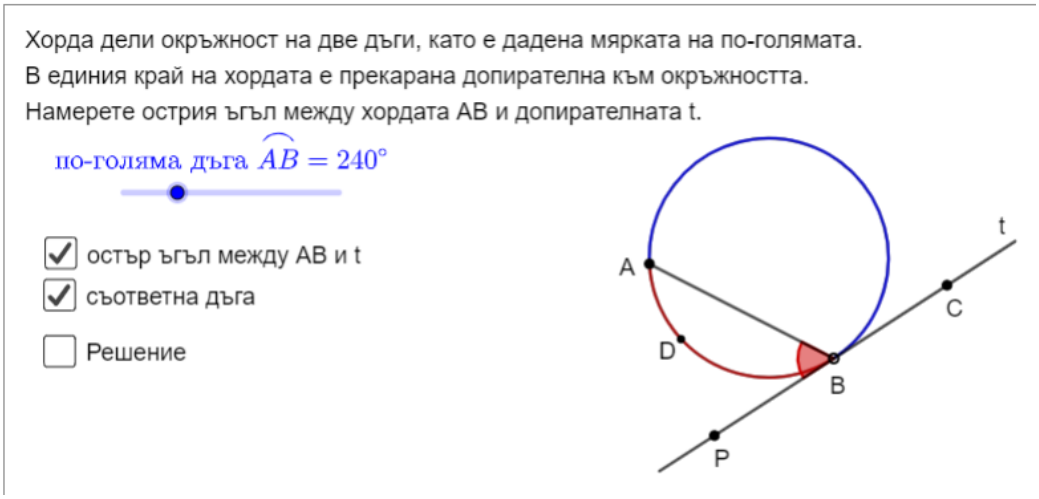
Всеки аплет съдържа: условие на задачата, динамичен чертеж, полета за отметка за активиране на елементи от чертежа, поле за отметка „Решение“.

Аплетите дават възможност задачите да се разработят колективно с класа, учениците да предложат решение, да се коментира решението. С отметка „Решение“, то може да се види частично или изцяло.

Задача 1 дава възможност да се затвърдят понятията периферен ъгъл, съответна дъга на периферен ъгъл и да се приложи първоначално теоремата за мярката на периферен ъгъл.

В задачата хорда дели окръжност на две дъги (точка B може да се премести). С плъзгач дадената „по-голяма дъга $\widehat{AB} = 240°$“ може да се променя и така се получава набор от еднотипни задачи. С последователно активиране на дадените полета за отметка и с подходящи въпроси, учителя може да насочва учениците при решаване на задачата. В хода на решението се припомня, че мярката на окръжността е 360°.

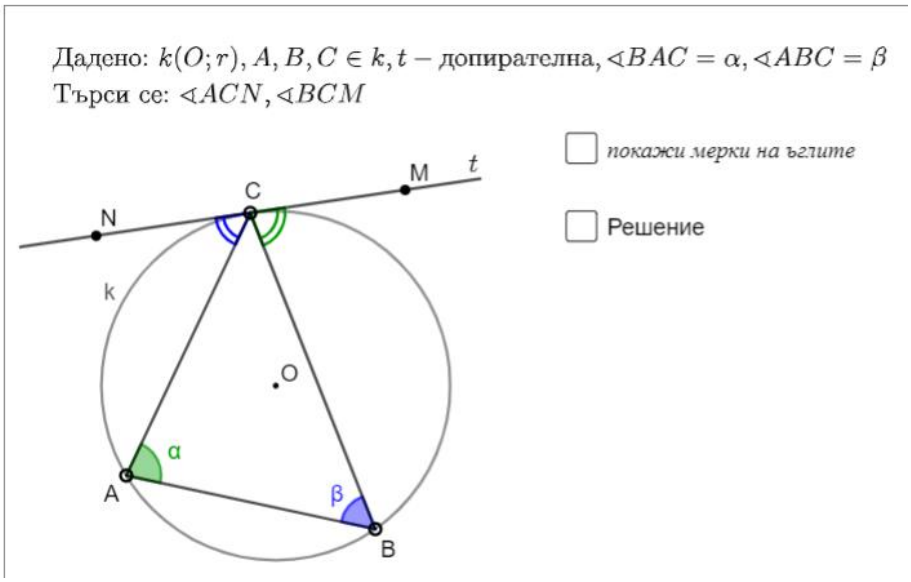
Задача 1



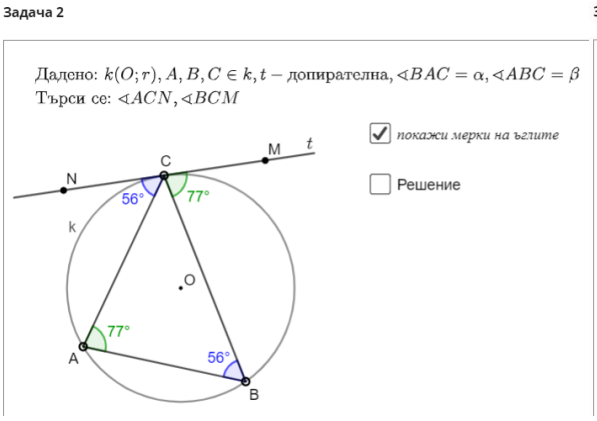
Чрез **Задача 2** се онагледява връзката между вписан и периферен ъгъл с обща съответна дъга и може да се затвърдят двете понятия и твърденията за тях.

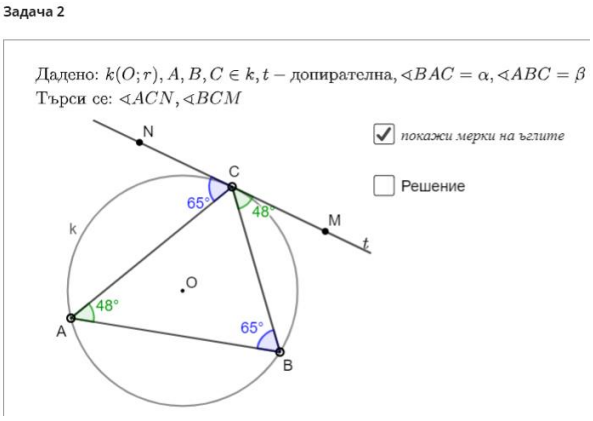
В първоначален чертеж са означени дадените вписани ъгли $\sphericalangle BAC = \alpha, \sphericalangle ABC = \beta$ и търсените периферни ъгли $\sphericalangle ACN, \sphericalangle BCM$.

Задача 2

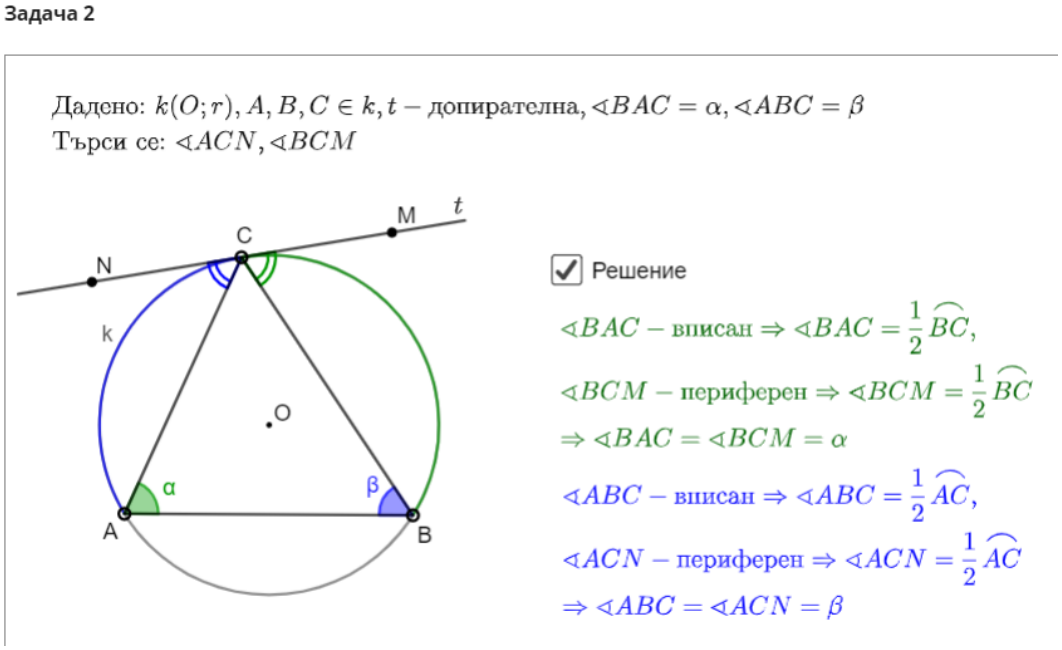


С отметка на „*покажи мерки на ъглите*“ и преместването на точките A, B, C може да се направи експеримент, че за различни вписани ъгли, равенството им със съответният им периферен ъгъл се запазва.





Учениците могат да предложат решение. С отметка на „Решение“ се визуализира първоначалният чертеж с означени дадените вписани ъгли α и β, търсените ъгли, съответните им дъги, както и пълният запис на решението.

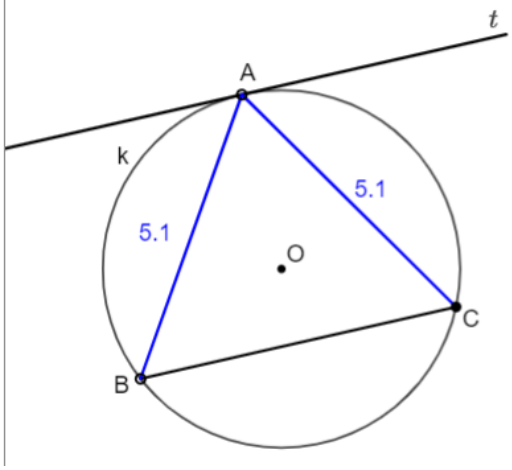


Задача 3 дава възможност да се затвърди теоремата за мярката на периферен ъгъл, връзката между периферен и вписан ъгъл с обща съответна дъга, както и да се актуализират знанията за ъгли, свързани с успоредни прави.

С преместването на точките A и B може да се експериментира с чертежа и да се наблюдава, че равенството на страните AB и AC се запазва в различно положение на точките A и B.

Задача 3

Дадено: $k(O;r), A, B, C \in k, t$ – допирателна, $BC \parallel t$
Докажете, че: ΔABC – равнобедрен



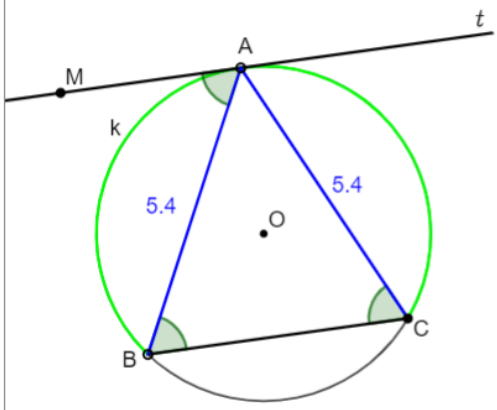
Премести точки A и B. Виж как се променят страните на триъгълника.

☐ Насоки

На учениците може да се даде възможност да предложат доказателство. С отметка на „Насоки“ се означават на чертежа ъглите $\sphericalangle CBA, \sphericalangle BCA, \sphericalangle BAM$, което може да ги подпомогне в доказателството. При отметка на „Доказателство“ се означават на чертежа дъгите $\widehat{BA}$ и $\widehat{AC}$ и се вижда запис на едно от възможните доказателства.

Задача 3

Дадено: $k(O;r), A, B, C \in k, t$ – допирателна, $BC \parallel t$
Докажете, че: ΔABC – равнобедрен



Премести точки A и B. Виж как се променят страните на триъгълника.

☑ Насоки

☑ Доказателство

$BC \parallel t \Rightarrow \sphericalangle CBA = \sphericalangle BAM$ (кръстни ъгли)

$\sphericalangle CBA$ – вписан $\Rightarrow \sphericalangle CBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

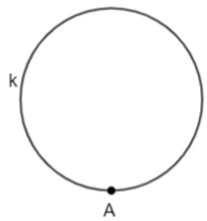
$\sphericalangle BAM$ – периферен $\Rightarrow \sphericalangle BAM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BA}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BA} \Rightarrow AC = AB$

Задача 4 дава възможност да се онагледи случая, в който страните на триъгълник са допирателни към окръжност. Тогава има три двойки равни периферни ъгли.

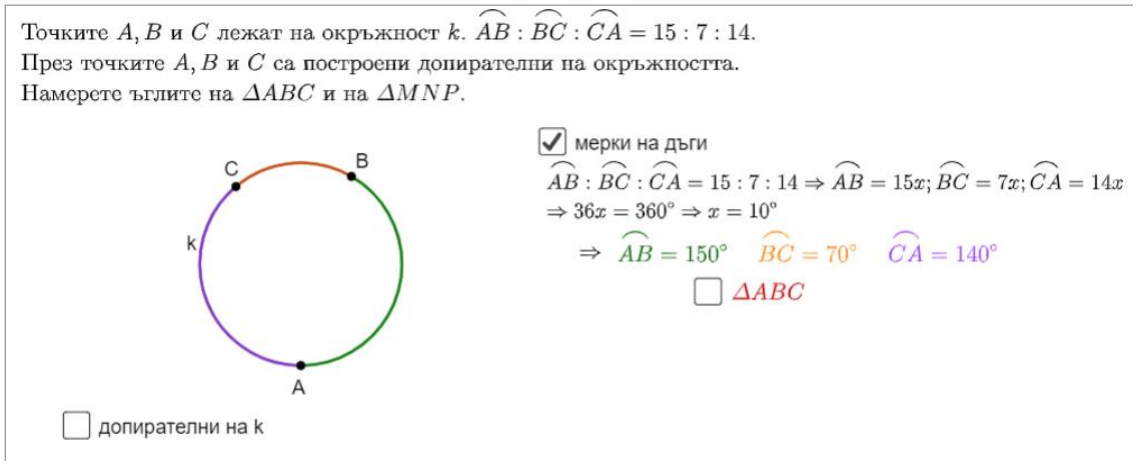
Точките A, B и C лежат на окръжност k. $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA} = 15 : 7 : 14$. През точките A, B и C са построени допирателни на окръжността. Намерете ъглите на ΔABC и на ΔMNP.

☐ мерки на дъги

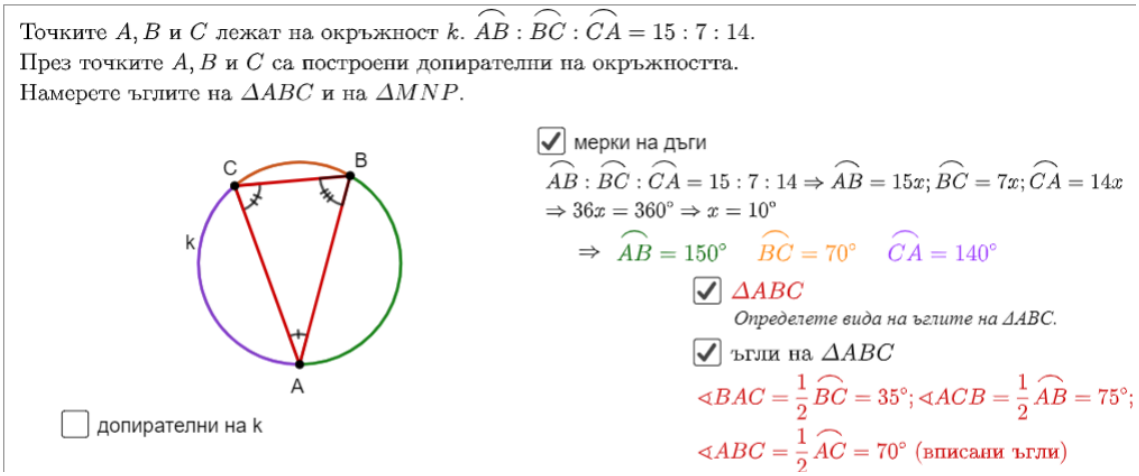


Дизайна на аплета дава възможност решаването на задачата да се реализира на последователни части. Всяка част от решението съдържа текст и съответни означения на чертежа и се визуализира чрез поле за отметка.

С отметка на „мерки на дъги“ може да се види как се намират мерките на дъгите от даденото отношение и дъгите се визуализират на чертежа в различни цветове. Появяват се полета за отметка „ΔABC“ и „допирателни на k“, чрез активирането на които се проследява решението за ъглите на ΔABC и за ъглите на ΔMNP.

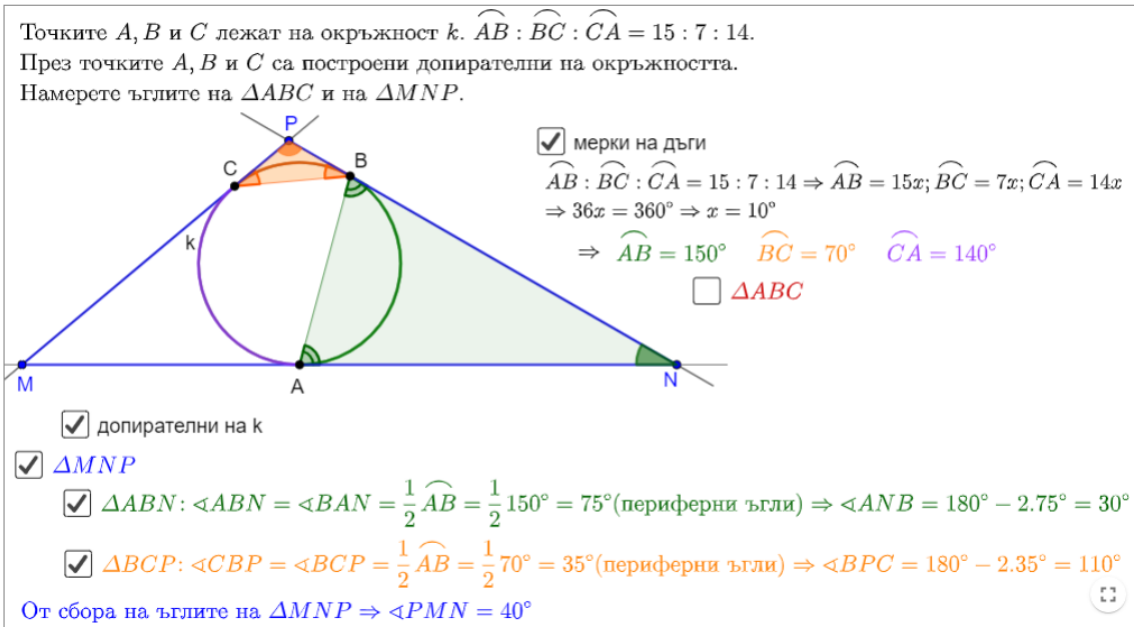


С отметка на „ΔABC“ се визуализира триъгълника и се означават ъглите му, които се търсят. Във фронтална беседа учениците могат да определят вида им и техните мерки, като така се поддържат знанията за вписан ъгъл и за теоремата за мярката на вписан ъгъл. С отметка на „ъгли на ΔABC“ се вижда запис на решението, което може да се коментира с класа.



Решенията за ΔABC и ΔMNP могат да се видят поотделно или едновременно. Но при едновременното визуализиране на двете решения чертежът ще е претрупан от допълнителните означения.

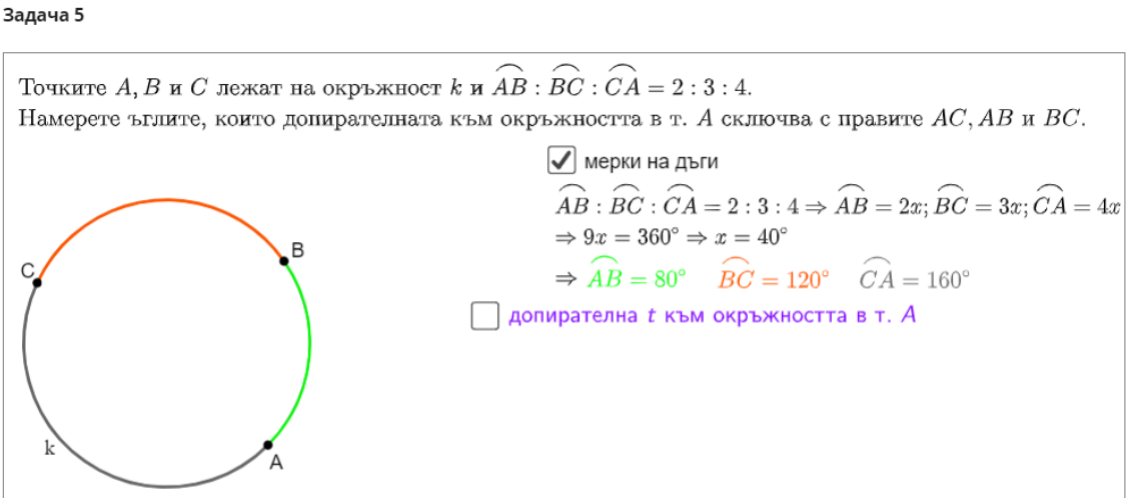
С полета за отметка последователно може да се визуализират на чертежа допирателните, ΔMNP, ΔABN, ΔBCP и съответните решения.



Задача 5 дава възможност да се затвърди теоремата за мярката на периферен ъгъл.

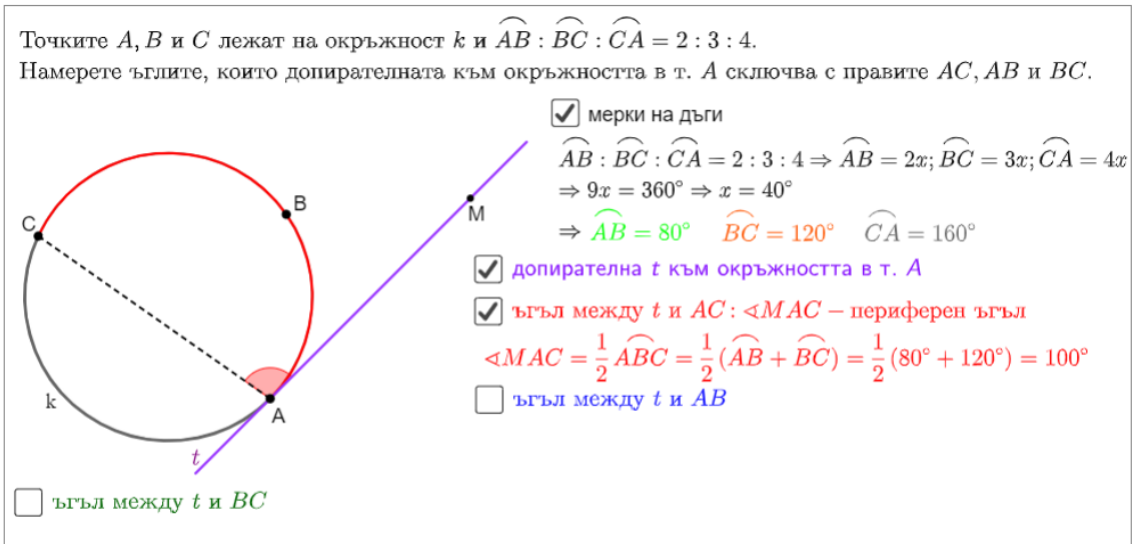
Дизайна на аплета дава възможност решаването на задачата да се реализира на последователни части. Всяка част от решението съдържа текст и съответни означения на чертежа и се визуализира чрез поле за отметка.

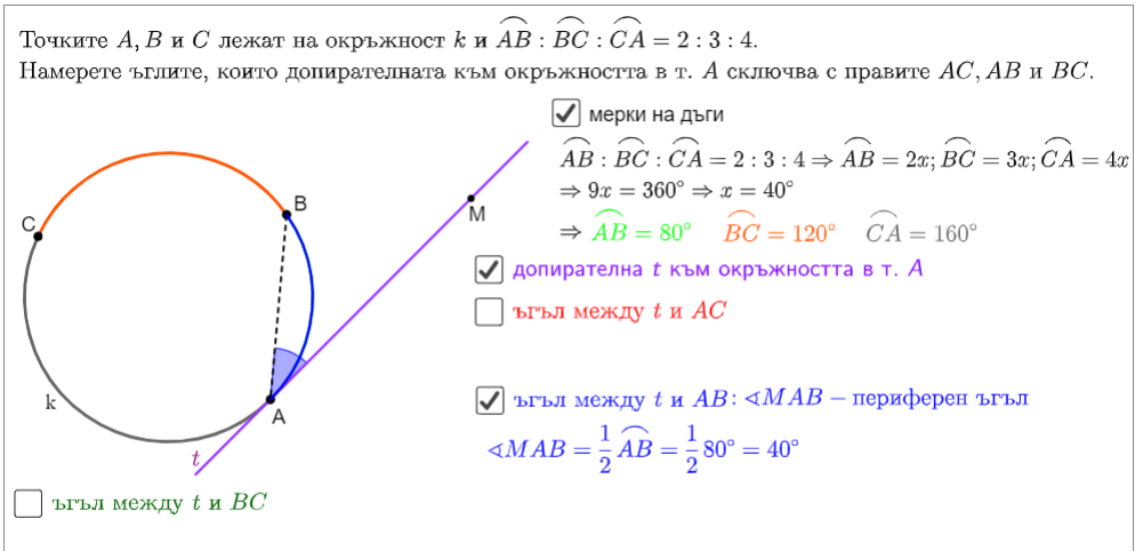
С отметка на „мерки на дъги“ може да се види как се намират мерките на дъгите от даденото отношение и дъгите се визуализират на чертежа в различни цветове.

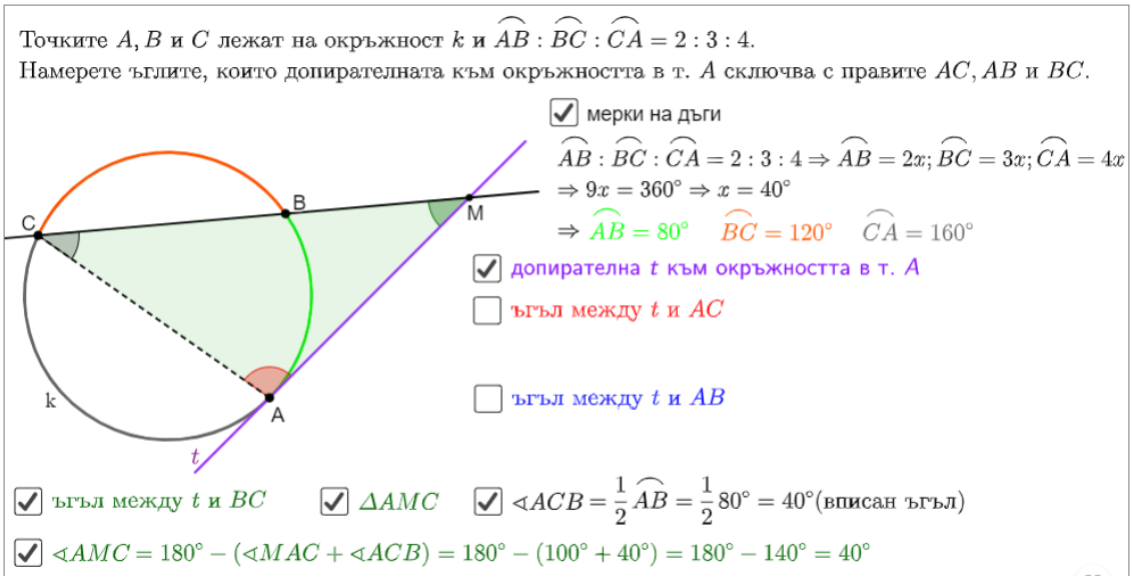


С полета за отметка последователно може да се визуализират на чертежа допирателната, ъгъл между t и AC, ъгъл между t и AB, ъгъл между t и AC и съответните решения.

Решението за всеки от търсените ъгли може да се види самостоятелно или едновременно с другите решения. По-нагледно е всяко решение да се разглежда самостоятелно, за да не е претрупан чертежа.



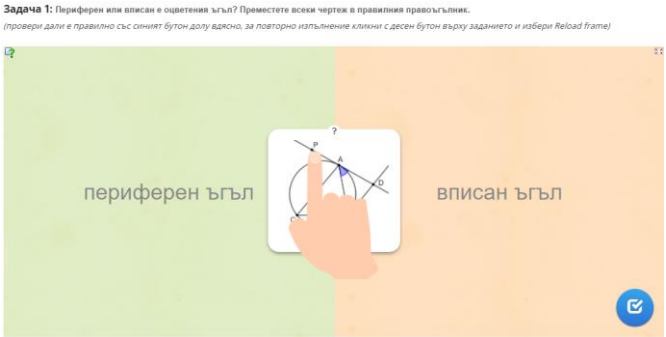


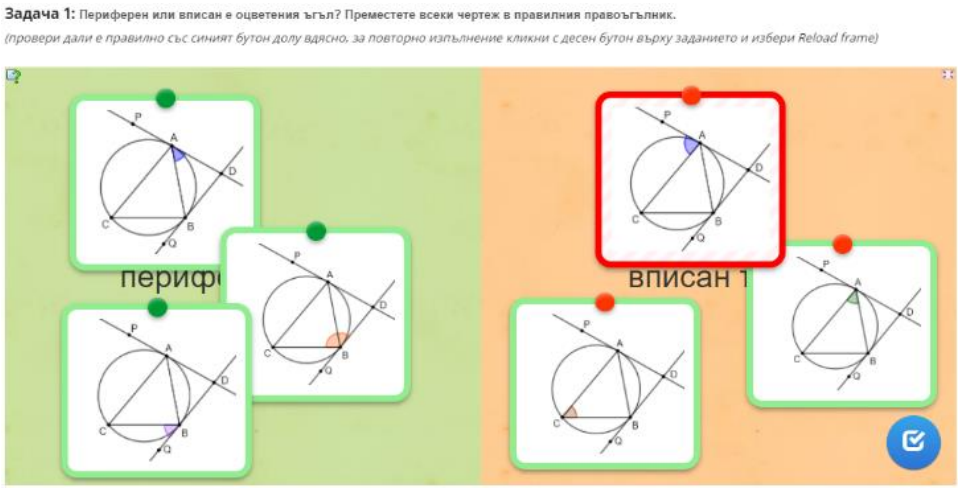


7.3. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

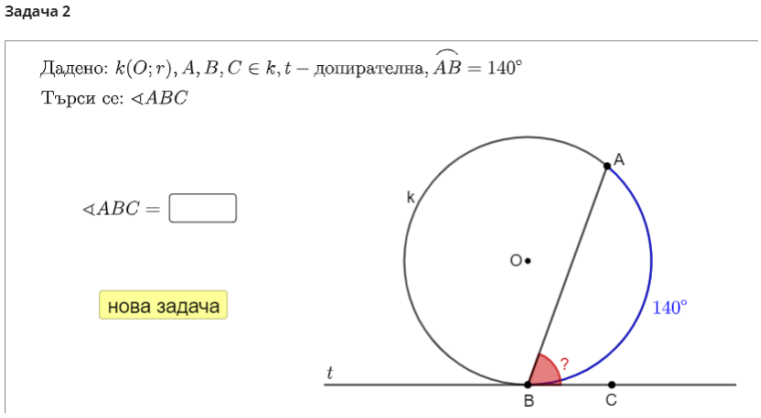
За упражнение в час или за самостоятелна работа в подстраница „ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ – ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА“ са разработени задачи с кратък отговор. Всяка задача е представена с аплет, съдържащ условие на задачата, динамичен чертеж и поле за въвеждане на отговора. След въвеждане и потвърждаване с Enter: при верен отговор се появява съобщението „Правилно!“, при грешен отговор – „Опитай отново!“. Това дава възможност ученикът да получи веднага обратна връзка дали се е справил със задачата, както и при грешен отговор да въведе нов. Бутонът „нова задача“ генерира задача с други стойности за дадените дъги или ъгли, избрани на случаен принцип от заложените около десет различни възможности.

Първата задача е създадена с LearningApps.org и дава възможност да се упражни разпознаването на периферния ъгъл.





С втората задача може да се затвърди умението за прилагане на теоремата за мярката на периферен ъгъл.



Чрез третата задача може да се затвърди връзката между периферен и централен ъгъл.

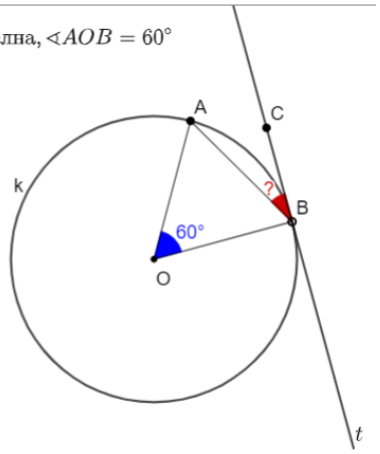
Задача 3

Дадено: $k(O;r), A, B, C \in k, t$ – допирателна, $\sphericalangle AOB = 60°$

Търси се: $\sphericalangle ABC$

$\sphericalangle ABC =$ ☐

нова задача



С четвърта задача се затвърдяват уменията за прилагане на теоремата за мярката на периферен ъгъл и се поддържат знанията за дъги от окръжност.

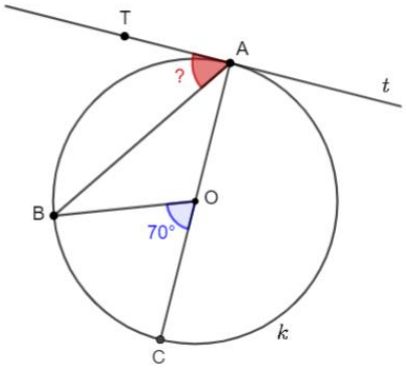
Задача 4

Дадено: $k(O;r), A, B, C \in k, t$ – допирателна, $\sphericalangle COB = 70°$

Търси се: $\sphericalangle BAT$

$\sphericalangle BAT =$ ☐

нова задача



Чрез петата задача може да се затвърди теоремата за мярката на периферен ъгъл, връзката между периферен и вписан ъгъл, както и да се поддържат знанията за ъгли свързани с успоредни прави.

Задача 5

Дадено: $k(O;r), A, B, C \in k, t$ – допирателна, $AB \parallel t, \sphericalangle ACT = 50°$

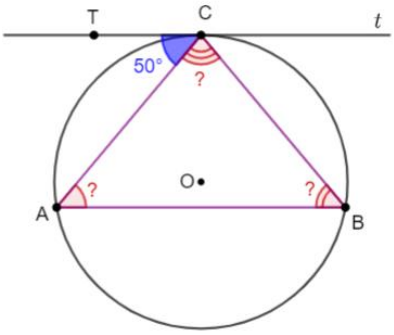
Търси се: $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC, \sphericalangle BCA$

$\sphericalangle BAC =$ ☐

$\sphericalangle ABC =$ ☐

$\sphericalangle BCA =$ ☐

нова задача



Шестата задача дава възможност да се затвърдят теоремите за мерките на периферен и вписан ъгъл и знанията за дъги в окръжност.

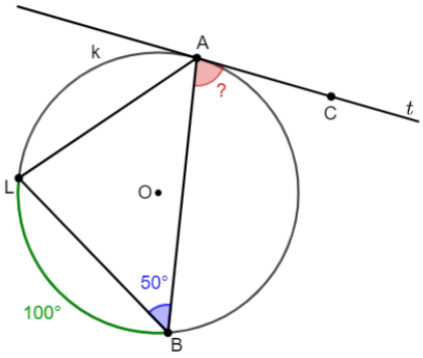
Задача 6

Дадено: $k(O;r), A, B, L \in k, t$ – допирателна, $C \in t, \sphericalangle ABL = 50°, \overset{\frown}{BL} = 100°$

Търси се: $\sphericalangle BAC$

$\sphericalangle BAC =$

нова задача



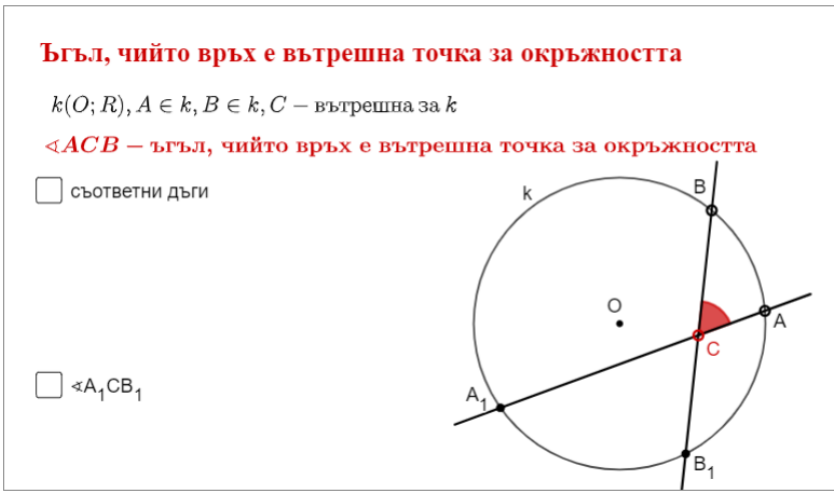
8. ЪГЛИ, ЧИИТО РАМЕНЕ ПРЕСИЧАТ ОКРЪЖНОСТ

В тази тема учениците трябва да усвоят понятията ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжността и ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжността. Компетентности като очаквани резултати от обучението са: учениците да разпознават ъгли, чиито върхове са вътрешни или външни за окръжност, а раменете им пресичат окръжността, теоремите за мерките им и да умеят да ги прилагат.

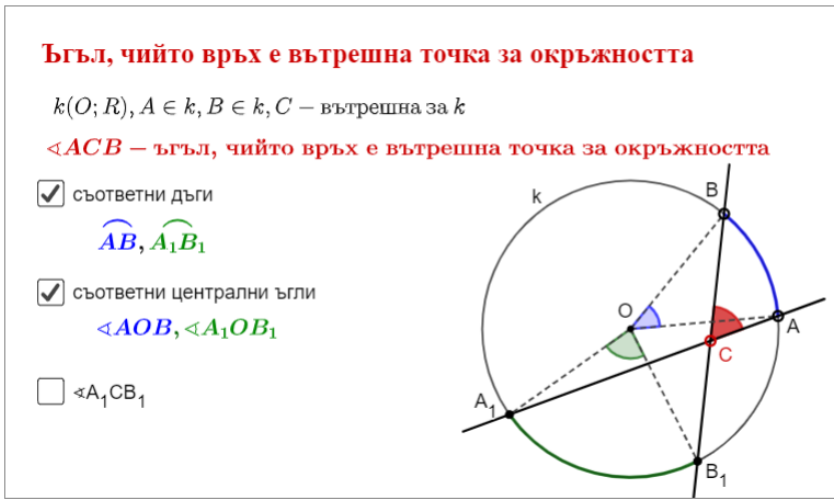
8.1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ

Уеб страница „ЪГЛИ, ЧИИТО РАМЕНЕ ПРЕСИЧАТ ОКРЪЖНОСТ“ съдържа динамични чертежи, които могат да подпомогнат учителя за онагледяване и изследване на свойствата на ъгли, раменете на които пресичат окръжност, в зависимост от положението на върха на ъгъла. Аплети с динамични чертежи дават възможност, чрез експериментиране с динамичните обекти в тях, да се достига до формулировката и да се представи доказателството на теоремите за мерките на ъгли, чиито върхове са вътрешни или външни за окръжност, а раменете им пресичат окръжността.

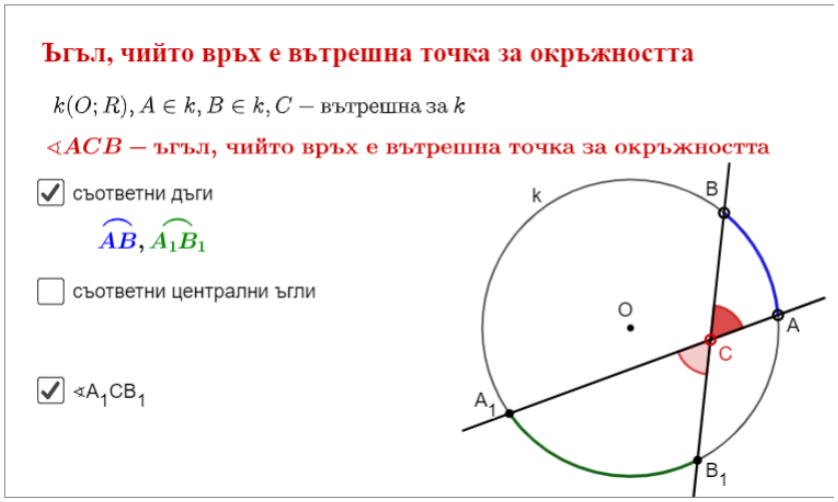
Първият аплет „Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжността“ дава възможност да се онагледи ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжността, а раменете му я пресичат.



С чертежа може да се експериментира, като се преместват точките A, B и C. При всяка своя позиция точката C е вътрешна за k. С полета за отметка може да се визуализират съответните дъги $\widehat{AB}$ и $\widehat{A_1B_1}$ и да се обърне внимание, че съответните дъги са две, тъй като дотук изучените ъгли (централен, вписан и периферен) имаха по една съответна дъга. С поле за отметка може да се визуализират и съответните централни ъгли $\sphericalangle AOB, \sphericalangle A_1OB_1$.

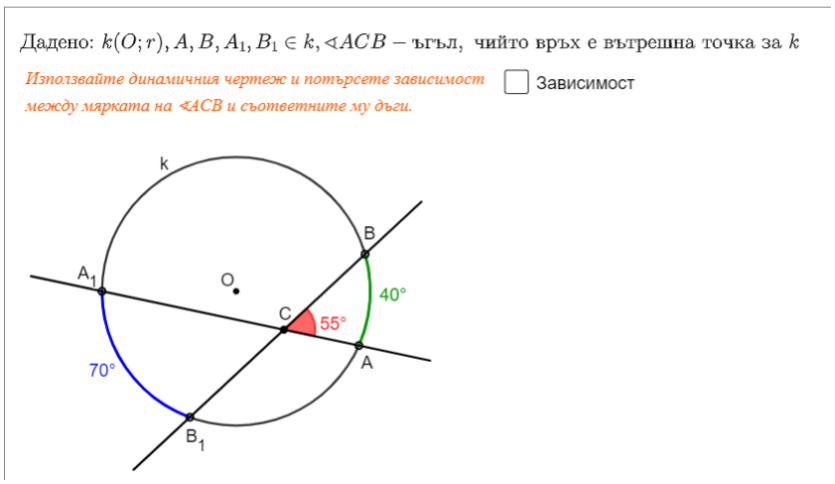


С поле за отметка може да се визуализира $\sphericalangle A_1CB_1$ – противоположен ъгъл на дадения $\sphericalangle ACB$ следователно равен на него и със същите съответни дъги.

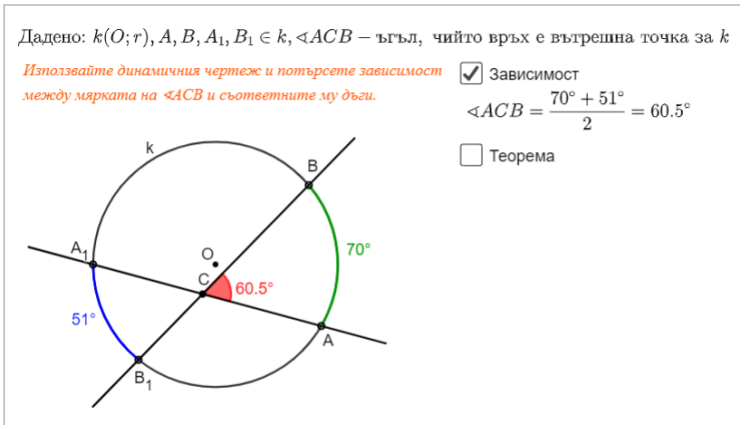


За онагледяване на ***Теорема 1*** е конструиран аплет, който дава възможност да се направи експеримент с движение на точките A, B, A_1 и B_1 , така че да се променя мярката на ъгъл $\sphericalangle ACB$ и да се потърси зависимост между нея и мерките на съответните му дъги $\widehat{AB}$ и $\widehat{A_1B_1}$. При всяка позиция на точките, точка C е вътрешна за окръжността.

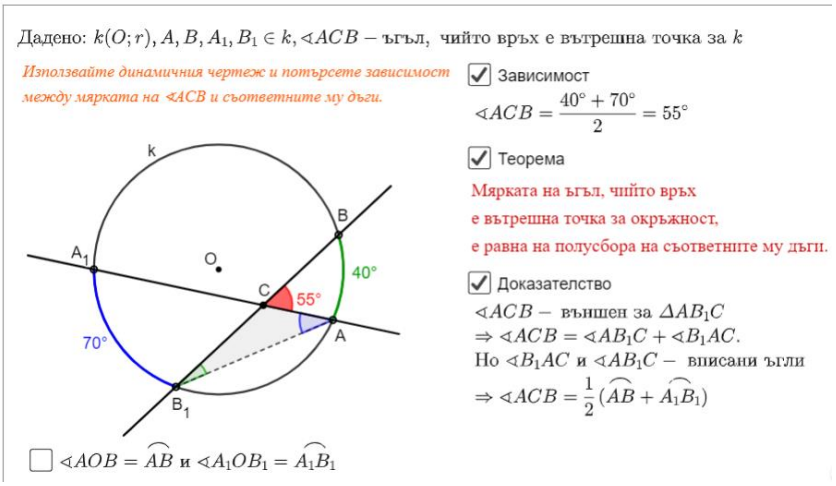
Теорема 1



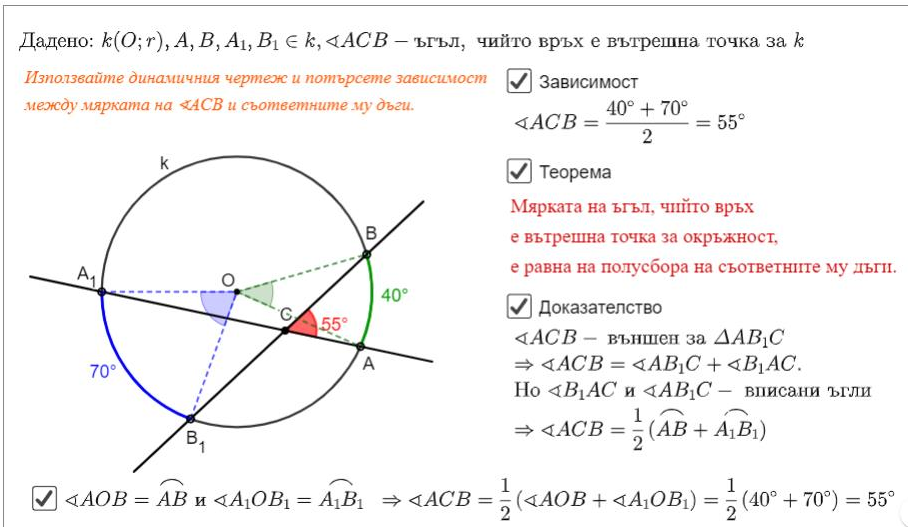
След наблюдение учениците може да изкажат хипотеза. За да може по-лесно да се пресмята полусбора на дъгите, мерките на дъгите са цели числа, а мярката на ъгъла е с един знак след запетаята. Така не се получава разминаване от закръгляне. Например: ако дъгите са 51° и 70°, ъгъла е с мярка 60,5°.



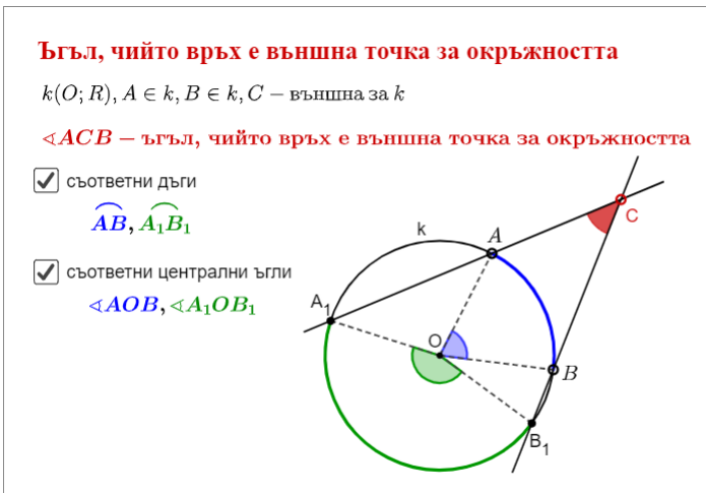
С полета за отметка се визуализират теоремата, доказателството и допълнителни означения на чертежа, което дава възможност доказателството да се коментира с класа.



С отметка на „$\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB}$ и $\sphericalangle A_1OB_1 = \overset{\frown}{A_1B_1}$“ се скриват $\Delta AB_1C, \sphericalangle AB_1C, \sphericalangle B_1AC$ от чертежа, стават видими централните ъгли $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A_1OB_1$ и динамичния текст, който визуализира следната формулировка на теоремата: *Мярката на ъгъл, чиито рамене пресичат окръжност, а върхът му е вътрешна точка за окръжността, е равна на полусбора на съответните му централни ъгли.*

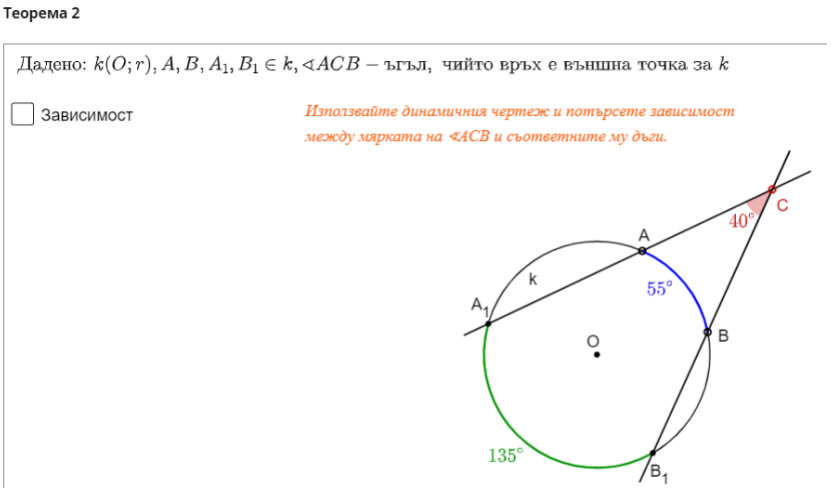


Аплетът „Ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжността“ дава възможност да се онагледи ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжността, а раменете му я пресичат.

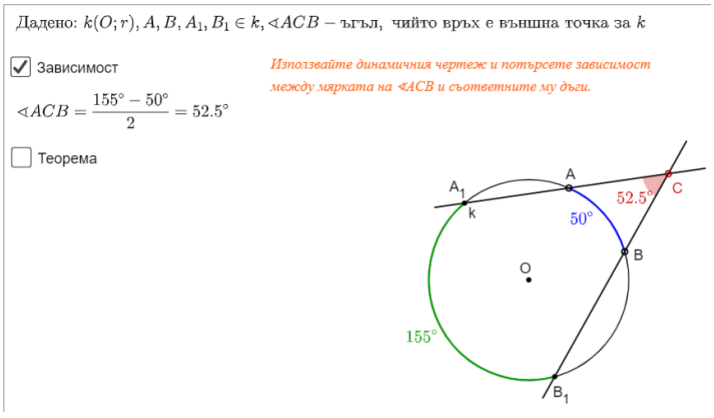


С чертежа може да се експериментира, като се преместват точките A, B и C, като точката C е външна за k при всяка своя позиция. С полета за отметка може да се пояснят понятията съответни дъги и съответни централни ъгли.

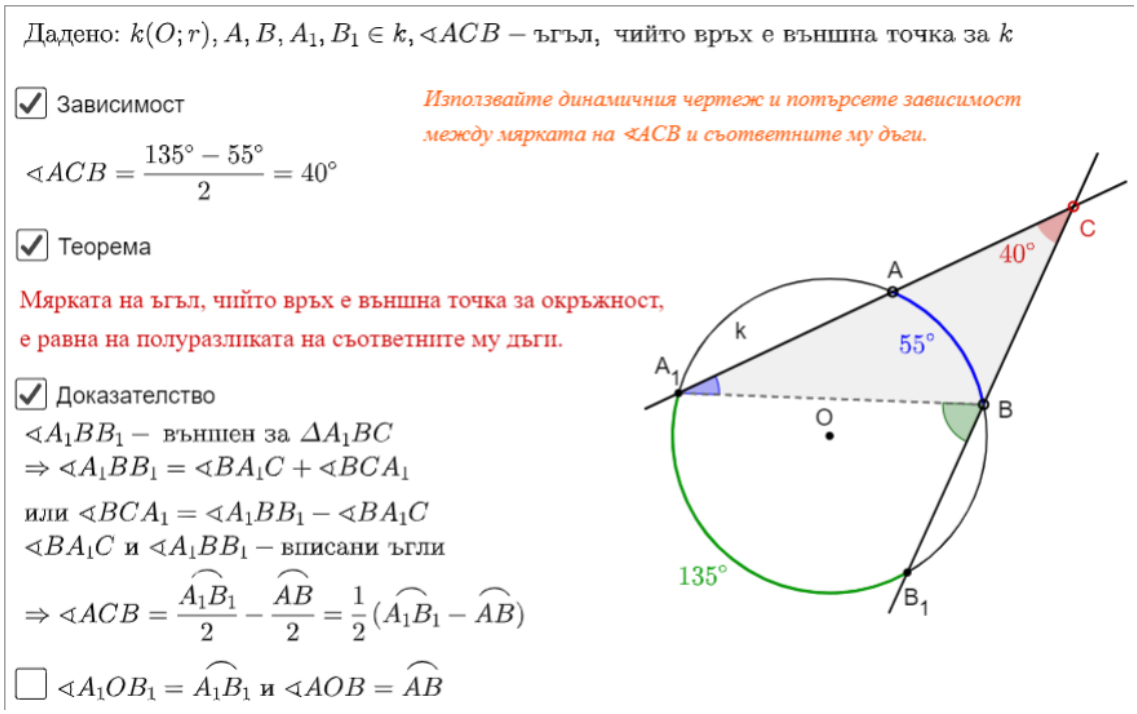
За онагледяване на Теорема 2 е конструиран аплет, който дава възможност да се направи експеримент с движение на точките A, B, C, така че да се променя мярката на ъгъл $\sphericalangle ACB$ и да се потърси зависимост между нея и мерките на съответните му дъги $\widehat{AB}$ и $\widehat{A_1B_1}$. При всяка позиция на точките, точка C е външна за окръжността.



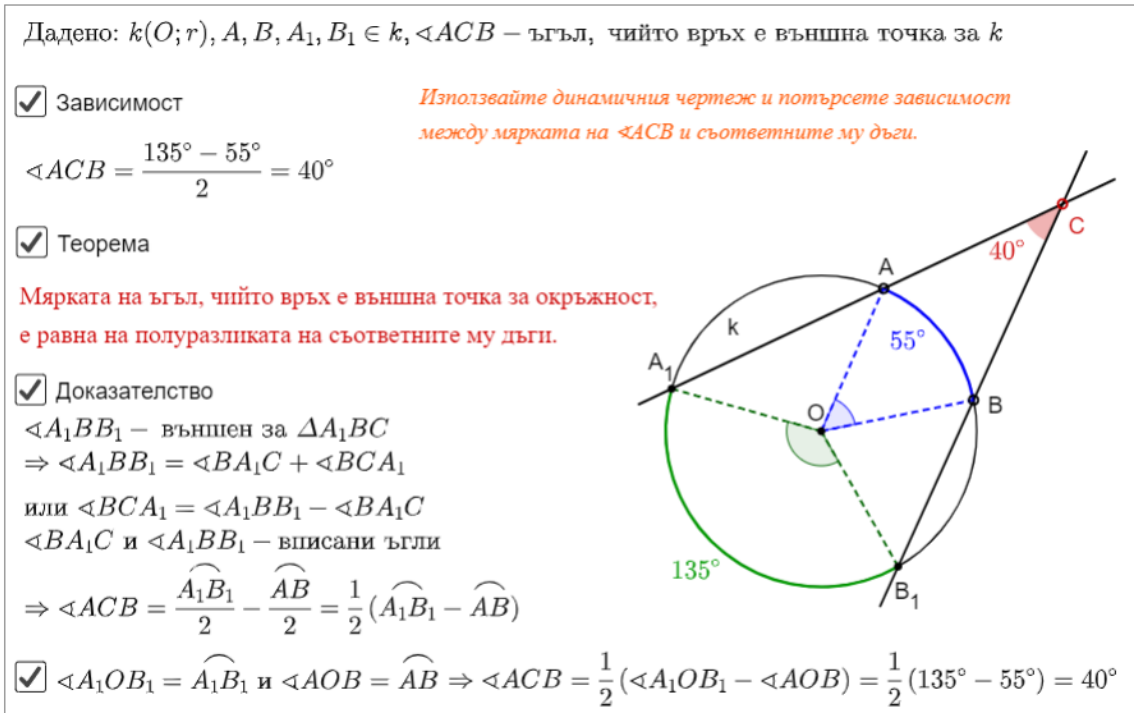
След наблюдение учениците може да изкажат хипотеза. За да може по-лесно да се пресмята полуразликата на дъгите, мерките на дъгите са цели числа, а мярката на ъгъла е с един знак след запетаята. Така не се получава разминаване от закръгляне. Например: ако дъгите са 155° и 50°, ъгъла е с мярка 52,5°.



С полета за отметка се визуализират теоремата, доказателството, допълнителни означения на чертежа, което дава възможност доказателството да се коментира с класа.



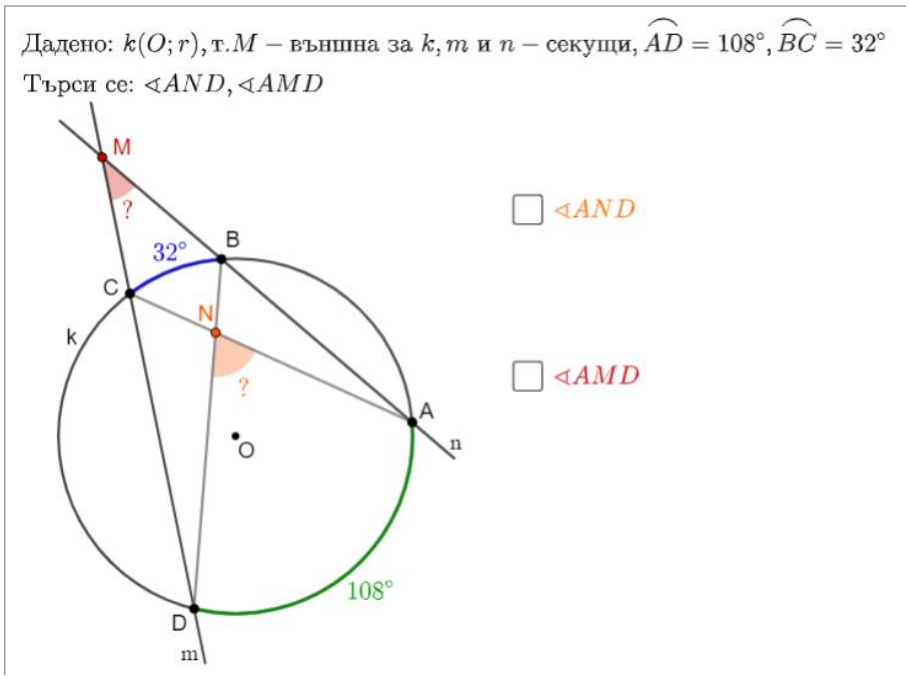
С отметка на „$\sphericalangle A_1OB_1 = \widehat{A_1B_1}$ и $\sphericalangle AOB = \widehat{AB}$“ се скриват $\Delta A_1BC, \sphericalangle BA_1C, \sphericalangle A_1BB_1$ от чертежа, стават видими централните ъгли $\sphericalangle A_1OB_1$ и $\sphericalangle AOB$ и динамичния текст, който визуализира следната формулировка на теоремата: *Мярката на ъгъл, чиито рамене пресичат окръжност, а върхът му е външна точка за окръжността, е равна на полуразликата на съответните му централни ъгли.*



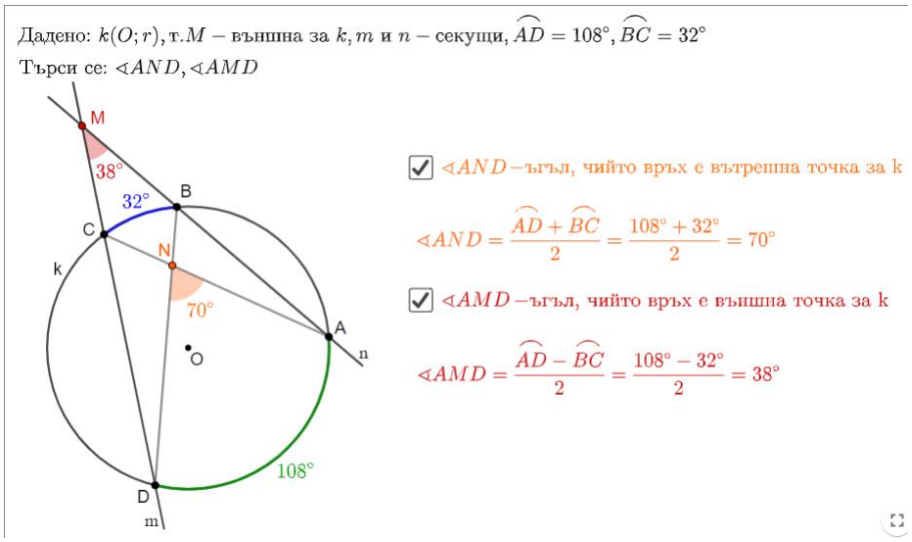
8.2. ЗАДАЧИ

В подстраница „ЪГЛИ, ЧИИТО РАМЕНЕ ПРЕСИЧАТ ОКРЪЖНОСТ – ЗАДАЧИ“ са разработени задачи с динамични конструкции, които дават възможност за първоначално приложение и затвърдяване на знанията за ъгли, чиито рамене пресичат окръжност и формиране на умения за прилагане на теоремите за мерките на ъгли, чиито върхове са вътрешни или външни за окръжност, а раменете им пресичат окръжността.

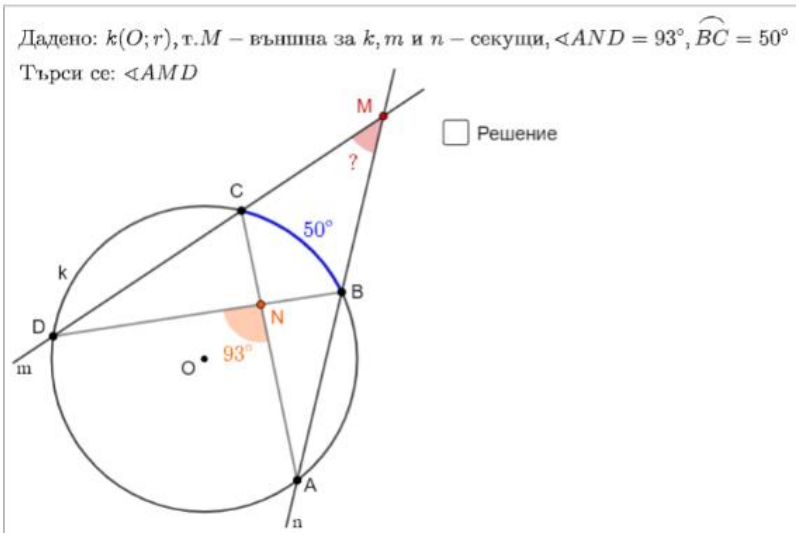
Задача 1 дава възможност да се затвърдят понятията за ъгли, чиито върхове са вътрешни или външни за окръжност, а раменете им пресичат окръжността и първоначално да се приложат теоремите за мерките им. Учителя може да обърне внимание, че търсените ъгли $\sphericalangle AND$ и $\sphericalangle AMD$ имат едни и същи съответни дъги.

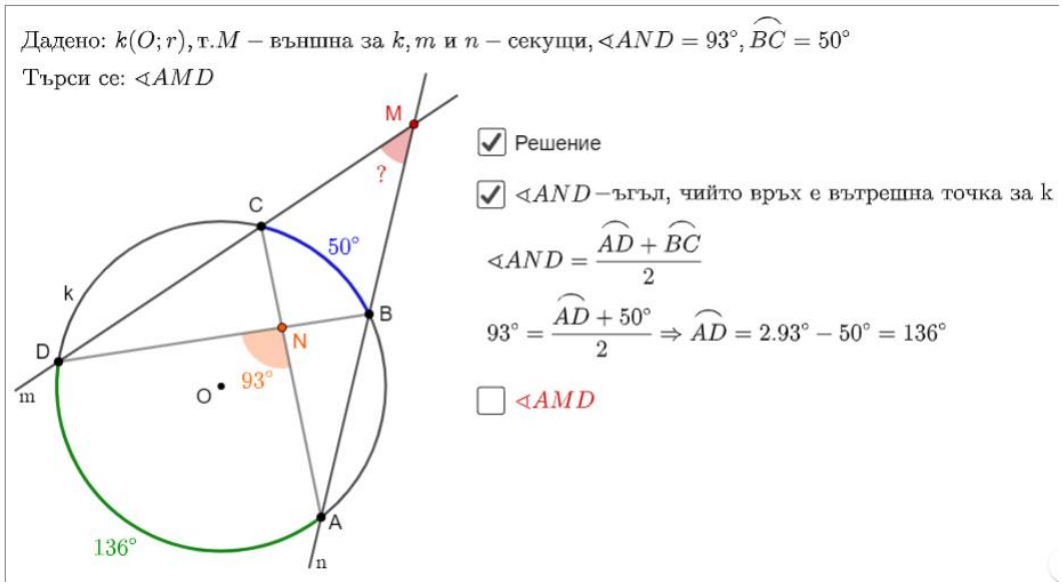


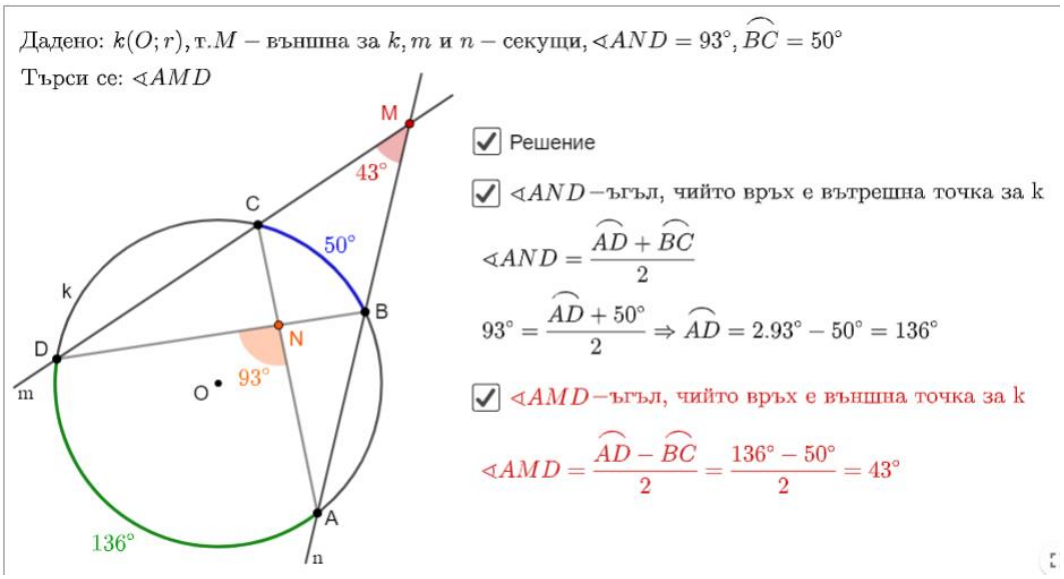
Задачата може да се обсъди колективно с класа, след което да се визуализира решението с дадените полета за отметка.



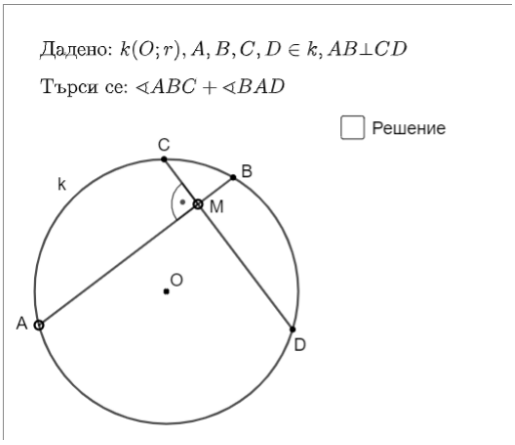
Задача 2 е реализирана с аплет, в който с използването на полета за отметка, учениците могат да се насочат към последователността от действия за решаването на задачата. Във фронтална беседа всеки етап от решението може да се коментира. Задачата е подходяща да се затвърди умението за прилагане на теоремите за мерките на ъгли, чиито върхове са вътрешни или външни за окръжност, а раменете им пресичат окръжността.

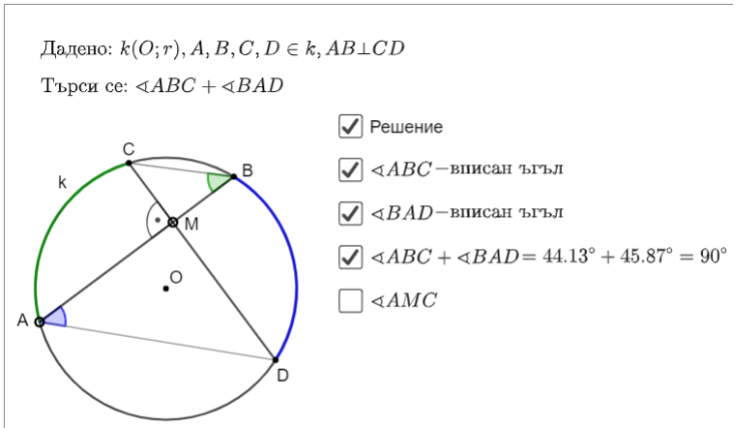


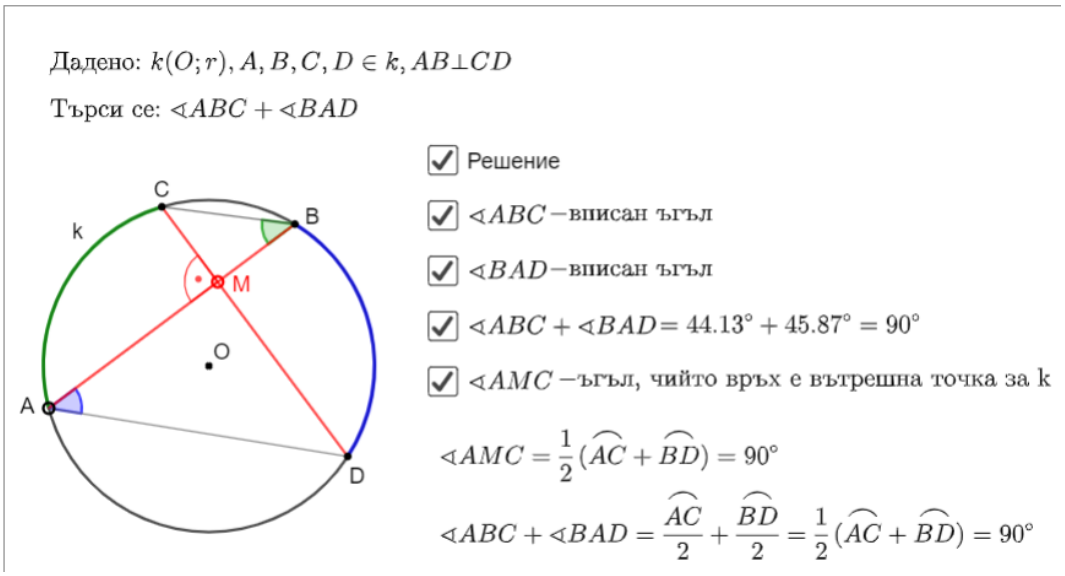




Чрез **Задача 3** се поддържат знанията за хорди в окръжност, вписан ъгъл, теоремата за мярката на вписан ъгъл и се затвърдява теоремата за мярката на ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжността. Динамиката в чертежа се осъществява с точките M и A. Решението може да се реализира на последователни етапи с полета за отметка. На всеки етап на чертежа се означават съответните ъгли и дъги. Във фронтална беседа учениците могат да определят вида на ъглите и да предложат решение. Поставянето на отметка на „$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD$“ позволява при преместването на динамичните точки да се проследи с динамичен текст сбора на търсените ъгли. С отметка на $\sphericalangle AMC$ може да се види пълното решение и да се коментира с класа.

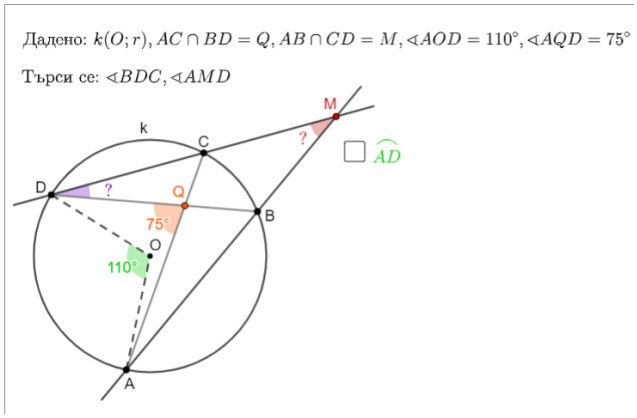


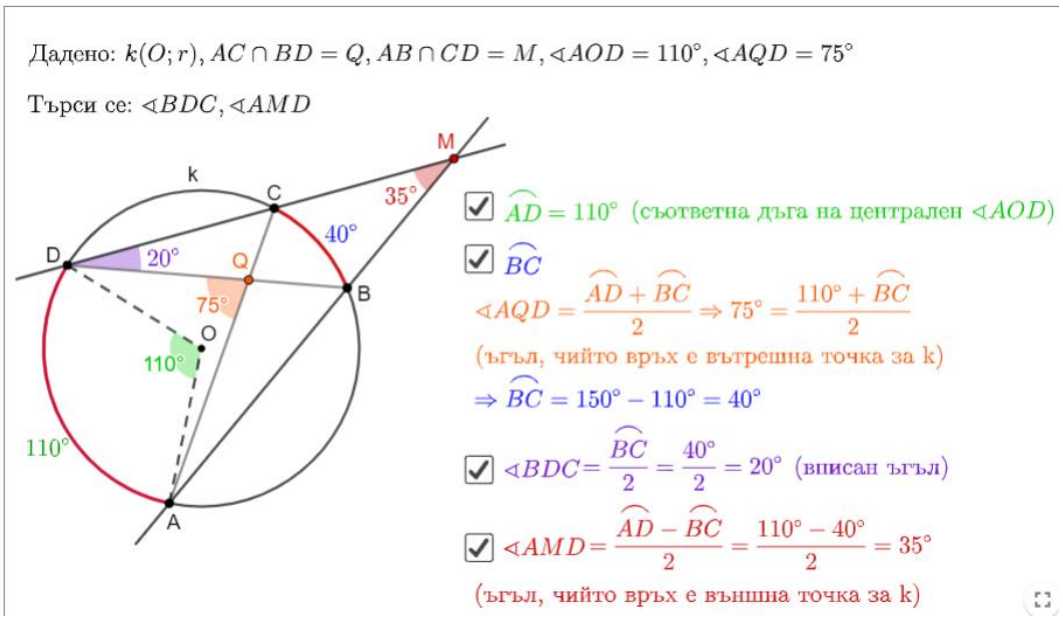




Задача 4 дава възможност да се затвърдят знанията и уменията за прилагане на теоремите за измерване на централен ъгъл, вписан ъгъл и на ъгли, чиито рамене пресичат окръжността.

Дизайна на аплета дава възможност решението на задачата да се реализира на последователни части. Всяка част от решението съдържа текст и съответни означения на чертежа и се визуализира чрез поле за отметка. Така учителя може да насочва учениците да намерят самостоятелно търсеният ъгъл или дъга. Дадените в аплета решения може да се коментират с класа и едновременно с това да се поддържат знанията за централен и вписан ъгъл.



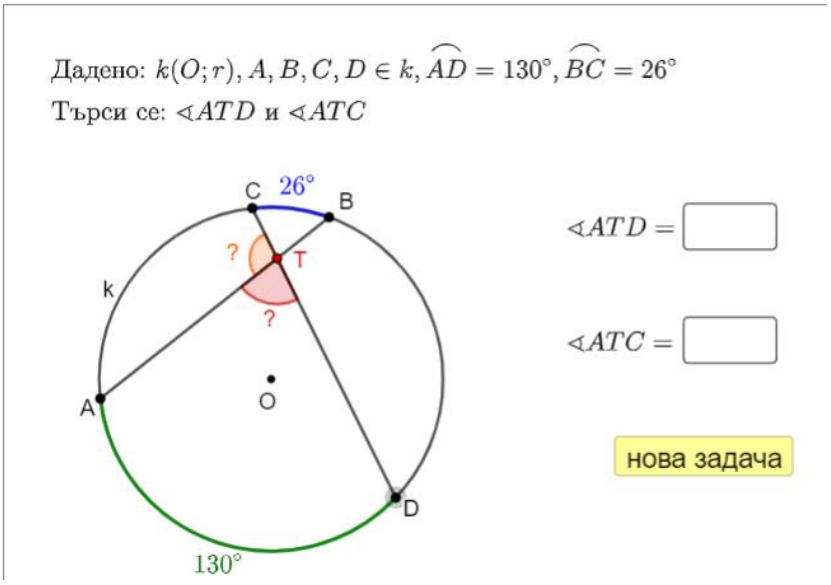


8.3. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

За упражнение в час или за самостоятелна работа в подстраница „ЪГЛИ, ЧИИТО РАМЕНЕ ПРЕСИЧАТ ОКРЪЖНОСТ – ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА“ са разработени задачи с кратък отговор. Всяка задача е представена с аплет, съдържащ условие на задачата, динамичен чертеж и поле за въвеждане на отговора. След въвеждане и потвърждаване с Enter: при верен отговор се появява съобщението „Правилно!“, при грешен отговор – „Опитай отново!“. Това дава възможност ученикът да получи веднага обратна връзка дали се е справил със задачата, както и при грешен отговор да въведе нов. Бутонът „нова задача“ генерира задача с други стойности за дадените дъги или ъгли, избрани на случаен принцип от заложените около десет различни възможности.

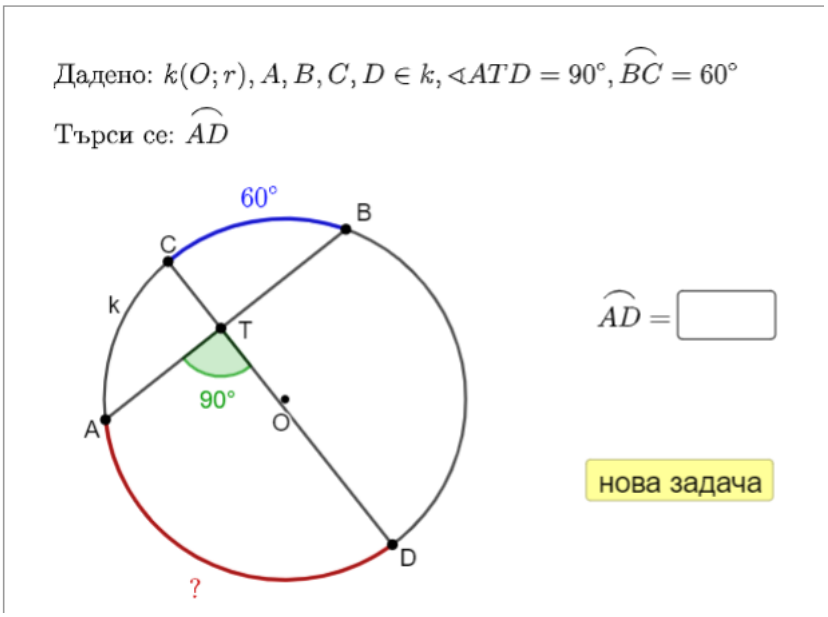
Първата задача е да се затвърди умението за прилагане на теоремата за мярката на ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжността. Със задачата се актуализират и знанията за съседни ъгли.

Задача 1



Във втората задача е дадена мярката на ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжността и се търси мярката на една от съответните му дъги. Ученикът може да затвърди прилагане на теоремата за мярката на ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжността.

Задача 2

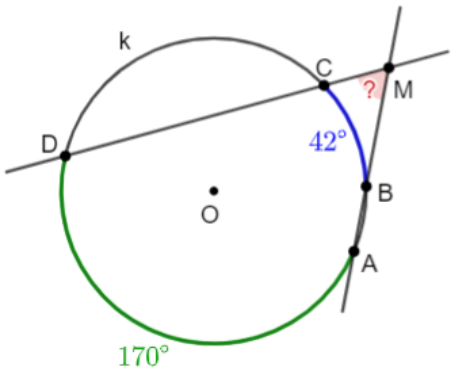


С третата задача може да се затвърди умението за прилагане на теоремата за мярката на ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжността.

Задача 3

Дадено: $k(O;r), A, B, C, D \in k, \overset{\frown}{AD} = 170^\circ, \overset{\frown}{BC} = 42^\circ$

Търси се: $\sphericalangle AMD$



$\sphericalangle AMD =$ ☐

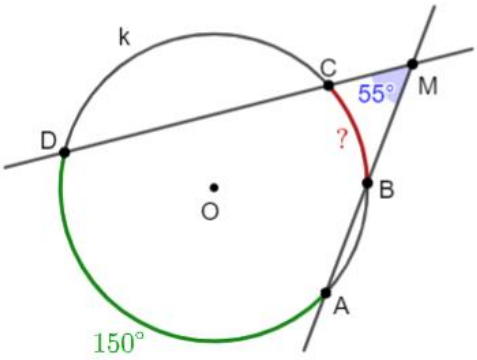
нова задача

В четвъртата задача е дадена мярката на ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжността и се търси мярката на една от съответните му дъги. Ученикът може да затвърди прилагане на теоремата за мярката на ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжността.

Задача 4

Дадено: $k(O;r), A, B, C, D \in k, \sphericalangle AMD = 55^\circ, \overset{\frown}{AD} = 150^\circ$

Търси се: $\overset{\frown}{BC}$



$\overset{\frown}{BC} =$ ☐

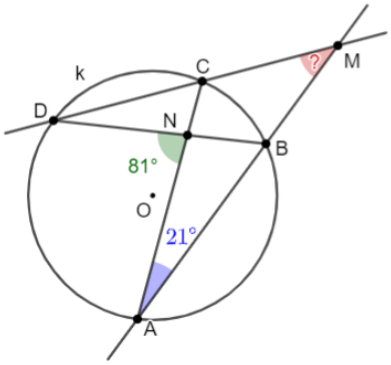
нова задача

В петата задача се търси мярката на ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжността. Дадена е мярката на вписан ъгъл, който има за съответна дъга една от съответните дъги на търсения ъгъл. Даден е и ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжността и има за съответни дъги същите като на търсения ъгъл. Полетата за въвеждане на мерките на дъгите могат да насочат учениците при решаване на задачата.

Задача 5

Дадено: $k(O;r)$, $AC \cap BD = N$, $AB \cap CD = M$, $\sphericalangle BAC = 21°$, $\sphericalangle AND = 81°$

Търси се: $\sphericalangle AMD$



$\overset{\frown}{BC} =$ ☐

$\overset{\frown}{AD} =$ ☐

$\sphericalangle AMD =$ ☐

нова задача

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последните две години в българското училище за некратки периоди от време се осъществяваше обучение от разстояние в електронна среда чрез използване средствата на информационните и комуникационните технологии.

Появи се необходимост участниците в образователния процес да имат умения за работа с електронни устройства, с електронни платформи и образователни ресурси. От друга страна на учениците им бяха необходими умения за самостоятелно учене.

В обучението по математика електронните образователни ресурси могат успешно да подпомогнат учителя при първоначалното представяне на нов материал, при неговото осмисляне и затвърдяване, при изграждането на умения за практическото му приложение в задачи, при проверката на придобити знания.

Разработеният интерактивен уеб сайт е полезен електронен ресурс за учители и ученици в присъствена или дистанционна форма на обучение. Динамични чертежи онагледяват учебното съдържание по темата „Окръжност“ в 8. клас. За създаването им е използван динамичният софтуер GeoGebra, който е предназначен за изучаване и преподаване на математика във всички нива на образованието. Сайтът дава възможност за усвояване на учебното съдържание, чрез прилагане на изследователския подход при откриване и доказване на твърдения. Също така предоставя средства за упражняване и затвърдяване на новите знания.

Използването на интерактивност съдейства за повишаване на равнището на знания, умения и компетенции по математика и формиране на положително отношение на учениците към обучението по математика.

V. Използвана литература

1. Алексиева, Л., Електронни ресурси за онлайн обучение по математика в началните класове – същност, видове, качество, Достъпно от: (https://azbuki.bg/wp-content/uploads/2021/02/Lubka-Aleksieva.pdf)
2. Банков, Кирил, Стоева, Таня, Цветкова, Илиана, Книга за учителя – математика за 8. клас, „Просвета – София" АД, 2017
3. Банков, Кирил, Стоева, Таня, Цветкова, Илиана, Математика за 8. клас, „Просвета – София" АД, 2017
4. Витанов, Т, Кожухарова, Г., Кьосева, М., Книга за учителя – математика за 8. клас, Анубис, 2017
5. Витанов, Т, Кожухарова, Г., Кьосева, М., Математика за 8. клас, Анубис, 2017
6. Кендеров, П. Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci. Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39 пролетна конференция на СМБ, 2010
7. Кендеров, Петър, Сендова, Евгения, Изследователски подход в образованието по математика, Достъпно от: http://www.math.bas.bg/omi/docs/Book-Izsledovatelski-podhod.pdf
8. Ленджова, Владислава, Миленкова, Валентина, Дигиталното образование и неговите измерения в практиката, Достъпно от: https://notabene-bg.org/read.php?id=1167
9. Мажерек, Дариуш, APPLICATION OF GEOGEBRA FOR TEACHING MATHEMATICS. Advances in Science and Technology Research Journal. 2014;8(24):51-54. doi:10.12913/22998624/567,
   Достъпно от: http://www.astrj.com/Application-of-geogebra-for-teaching-mathematics,567,0,2.html
10. Милкоева, Математика за 8. клас, Сънрей, 2017
11. Министерство на образованието и науката, Обучение от разстояние в електронна среда (ОРЕС) 2020-2021: последствия и поглед напред (публ. 23.07.2021 г.), Достъпно от: https://mon.bg/upload/27137/ORES-20_21.pdf
12. Министерство на образованието и науката, Учебна програма по математика за 8. клас, Достъпно от: https://www.mon.bg/bg/1999
13. Паскалева, Здр., Алашка, М., Паскалев, Пл., Математика 8. клас, Архимед, 2017
14. Рааб, Д. Към нов стил на преподаване на математиката или Как да осъществим изследователския и проблемно-ориентирания подход в часовете по математика, Математика и информатика, 2011, кн. 3, с. 25-32

15. Уикипедия [онлайн]: Дистанционно обучение, Достъпно от: https://bg.wikipedia.org/wiki/Дистанционно обучение
16. Уикипедия [онлайн]: Онлайн обучение, Достъпно от: https://bg.wikipedia.org/wiki/Оналайн обучение
17. Чехларова, Т. Геометрични фигури – изследвания с динамични конструкции. Макрос. 2012. Достъпно от: http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/book-geom_figuri.pdf