



**Софийски университет “Св. Климент Охридски”**

**Факултет по математика и информатика**

**Специалност „Математика и информатика”**

**Магистърска програма “Технологии за обучение по математика и  
информатика”**

## **ДИПЛОМНА РАБОТА**

**Тема:**

**Подбор на методи в обучението по математика с цел повишаване резултатите  
на учениците по програмата на Международния бакалавреат**

**Дипломант: Йоана Матеева Калалиш, ф. н. : М-22326**

**Научен ръководител: д-р Борислава Кирилова**

**ФМИ, СУ “Св. Климент Охридски”**

**януари 2023 г.**

**София**

## Съдържание

Въведение .....	2
Глава 1. Представяне на IB математиката в Дипломната програма на Международния бакалавреат, с цел набелязване на ключови моменти, изискващи подбор на методи за повишаване на резултатите .....	4
Място на IB математиката в IB програмата .....	6
Обща информация за предмета IB математика: анализи и подходи .....	8
Съдържание на курса, хорариум и справочник с формули .....	10
Основни цели на курса .....	11
Връзки между предмета IB математика и ядрото на IB програмата .....	14
Използване на технологии и графичен калкулатор .....	20
Оценяване по IB математика: анализи и подходи .....	25
Глава 2. Предложения за методи за обучение, водещи до повишаване на резултатите по IB математика .....	42
Методи за изграждане на връзки между ТОК, CAS и IB математика .....	42
Методи за стимулиране на работата с графичния калкулатор в процеса на обучение ..	45
Методи за трениране на схемите за оценяване на двата външни изпита .....	48
Методи за усъвършенстване на уменията на учителите за аргументирано оценяване на вътрешния елемент .....	51
Методи за повишаване на знанията и уменията на учениците по IB математика .....	53
Глава 3. Анализ на предложените методи .....	61
Заклучение .....	77
Библиография .....	80
Приложение 1. Анкета “Цели на курса по Mathematics: Analysis and Approaches” .....	83
Приложение 2. Анкета “Използване на графичен калкулатор TI-Nspire CX” .....	84
Приложение 3. Примерно оценяване с поставяне на точки .....	85

## Въведение

В гимназиалния етап на средното образование няколко училища в България предлагат Дипломната програма на Международния бакалауреат или International Baccalaureate Diploma Programme (съкр. IB програма). Тя е насочена към ученици, обучаващи се в 11. и 12. клас, и дава възможност на завършилите я да получат така наречената IB диплома за средно образование. Законът за предучилищно и училищно образование е устроен така, че съвместяването на обучението по IB системата и българската система е напълно възможно. Все повече ученици и техните родители се интересуват от Международната програма на ИВО, тъй като, най-просто казано, тя отваря врати към престижните световни университети.

Едно от училищата, което предлага IB програмата е Частна профилирана гимназия “Меридиан 22”, където работя в настоящия момент като учител по IB математика от април 2016 г. Главната ми цел е подготовка на учениците по този предмет, за да постигнат отличен резултат в края на втората година от обучението си. Стремехът за висока оценка не е породен само от амбицията на учениците, а от изискванията за прием, които световните университети поставят към тях. В резултат на това високите постижения на учениците са нещо, за което учителят носи огромна отговорност. Той трябва да подбере правилните методи, за да обучи всички записали се в IB програмата, независимо от базисните им знания, умения, навици за учене, мотивация и други фактори, които оказват влияние върху образователния процес.

Темата за резултатите от едно обучение, независимо дали е училищно или университетско, е била винаги актуална. Образователните институции и фирми се класират на базата на резултатите и реализациите на своите възпитаници. Колкото по-нагоре в класацията е едно

училище, толкова по-престижно и търсено става то. В първа глава от изложението е доказана тази хипотеза. Интересът за избор на средно училище води след себе си и до високи приходи за учебното заведение, независимо дали е в държавния, общинския или частния сектор. Образователните методи са ключът към успеха на обучението. Затова акцентът в тази дипломна работа ще падне точно върху подбора на методите в обучението по ІВ математика, които водят до повишаване на резултатите. Изследователската ми цел е насочена към търсене на методи в обучението по математика, които се прилагат от други образователни институции и специалисти, или предлагане на методи, които използвам в работата си през последните 2 години - 2021-2022 и 2022-2023 учебна година. Целевата група от ученици, подлежаща на изследването, е на възраст 16 - 18 години. Те се бучават в ІВ програмата в 11. и 12. клас. Задачите, които си поставям, са следните:

- запознаване с програмата по математика към Международния бакалауреат - учебна програма на курса, оценяване и др., с цел набелязване на дейности, изискващи прилагането на методи за повишаване на резултатите от обучението;
- проучване и подбор на методи за обучение и добри практики, които отговарят на набелязаните дейности, специфични за предмета математика към Международния бакалауреат;
- анализиране на ефективността на избраните методи чрез провеждане на анкета, даваща възможност на целевата група да степенува очаквания резултат от въвеждането на съответните методи в обучението им по математика.

Настоящото изследването би могло да бъде полезно на други ІВ училища, тъй като групата от ученици, с която работя, включва и чужденци, обучавали се по други образователни

системи. Всяко дете в IV програмата е различно и именно подборът на методи за успешно обучение трябва да обхване тези особености в учениците.

**Глава 1. Представяне на IV математиката в Дипломната програма на  
Международния бакалавреат, с цел набелязване на ключови моменти,  
изискващи подбор на методи за повишаване на резултатите**

Преди да насоча изложението към математиката в Дипломната програма на Международния бакалавреат, е важно да защитя хипотезата, изказана във въведението, че колкото по-нагоре в класацията е едно училище спрямо резултатите на възпитаниците си, толкова по-търсено става то. Тъй като училищата в България, предлагащи Дипломната програма на Международния бакалавреат, са само няколко, не е възможно да търся зависимост между резултатите от международната диплома за средно образование, които учениците в тези гимназии получават и съответно степента на желание за прием в същите училища. Затова сходна проверка би била следната: да се направи проучване за средния резултат от държавния зрелостен изпит по български език и литература за 2020-2021 учебна година, както и за бала за кандидатстване след завършен 7. клас за 2021-2022 учебна година. Целта е да установя дали резултатът от матурата в края на една учебна година е определящ за търсенето на училище след завършен 7. клас през последвалата учебна година. Ако е така, то училищата с най-висок резултат от ДЗИ по БЕЛ (според който се прави класацията) следва да имат и най-висок състезателен бал за приема си в 8. клас. Информацията за първите 5 най-добри училища в София, които са с най-висок среден резултат от ДЗИ-БЕЛ, както и съответната им позиция в класирането спрямо бала за прием в 8. клас, е обобщена в *Таблица 1.1*. В извадката не попадат частните гимназии,

тъй като те имат собствена политика за прием в 8. клас и не използват бала след завършен 7. клас.

Средно училище в София	2020-2021 учебна година		2021-2022 учебна година	
	Позиция сред всички държавни и общински средни училища, според средния резултат от ДЗИ-БЕЛ	Среден резултат по ДЗИ-БЕЛ	Позиция сред всички държавни и общински средни училища, според състезателния бал след завършен 7. клас	Състезателен бал след завършен 7. клас за прием в 8. клас
91. Немска езикова гимназия	1	5.63	4	452
164. Испанска езикова гимназия	2	5.62	3	464
73. Средно училище	3	5.58	5	447
СМГ	4	5.42	1	480
НПМГ	5	5.36	2	476

Таблица 1.1. "Топ 5" на средните държавни или общински училища с най-висок среден резултат от ДЗИ-БЕЛ (2020-2021) и най-висок състезателен бал след завършен 7. клас (2021-2022) (Данибон, 2021, 2022)

От Таблица 1.1 става ясно, че има абсолютно съответствие между първите 5 училища с най-висок среден резултат от ДЗИ-БЕЛ, тъй като те са същите 5 с най-висок състезателен бал за прием след завършен 7. клас. От тук следва, че високите резултати от завършването на средното образование са определящи за търсенето на училище.

След като доказах колко са важни резултатите от едно оценяване, то мога да насоча вниманието към математиката в Дипломната програма на Международния бакалавреат, защото именно методите за повишаване на постиженията на учениците по този предмет са

обект на изследователската тези. Програмата по IB математика е много различна от тази в българската образователна система. Целта на автора не е да съпостави двата курса, а да стигне до важни изводи за това как учениците могат да повишат резултатите си по IB математика. Крайната оценка, която получава всеки ученик, е комплексна, зависеща от вътрешно и външно оценяване и за да набележа мерки за повишаването ѝ, е необходимо да разкрия същината на курса по IB математика. Затова първата задача е да разгърна представата за предмета, какво е мястото му в IB програмата, съдържанието и елементите му на оценяване. На всеки етап от тази глава вниманието се фокусира върху дейности, от които зависи сформиранието на финалната оценка и съответно изискващи предприемане на мерки от страна на учителя за повишаване на ефективността.

### Място на IB математиката в IB програмата

Курсът по IB математика в Дипломната програма на Международния бакалауреат се нарича Mathematics: analysis and approaches или преведено математика: анализи и подходи. Той е един от шестте основни предмета, които учениците избират да изучават, *Изображение 1.1*.



*Изображение 1.1. “Моделът на Дипломната програма”(IBO,Mathematics: AA guide,2019,с. 2)*

Попада в групата “математика” (вижда се в тъмносино на *Изображение 1.1*), където още се включва и предметът математика: приложения и интерпретации. През последните

години повечето ученици от Частна профилирана гимназия с чуждоезиково обучение “Меридиан 22” избират Математика: анализи и подходи. Заглавието на курса говори само по себе си, че фокусът на този предмет е насочен върху теории, които показват как един проблем може да се реши чрез правилен подбор на подходи за неговото представяне, разбиране, анализиране и достигане до необходимия или очаквания краен резултат. Този курс по математика е по-скоро практически насочен и за да стане ясно какви са спецификите му, къде са слабите и силните страни при усвояването му от учениците, ще представя съдържанието му, като наблегна на трудностите, които учениците изпитват, за да го изучат ефективно. За целта ще използвам един основен документ за методическа информация, така нареченото Ръководство по предмета IB математика: анализи и подходи, достъпно на уебсайта на организацията IBO за всички училища, лицензирани по тази програма. В него се дава подробна информация за учебната програма, формата и изискванията на вътрешното и външното оценяване и как предметът математика се вписва в цялостната идеология на обучението по дипломната програма на Международния бакалавреат. “Този документ цели да даде насоки за планирането, преподаването и оценяването на предмета в училище.” (IBO, Mathematics: AA guide, 2019, с. 1). Освен него на същия сайт се публикуват ежегодно доклади с анализ на проведените изпити по този предмет, в които се разписват основните силни и слаби страни на кандидатите при решаването на задачите от изпитите. Тези доклади са изключително полезни за учителя, защото служат като коректив и дават насоки какво е необходимо да се подобри в бъдеще. Друг източник на методическа информация е Teacher support material (прев. от англ. език: Материал в помощ на учителя). Описанието за него, което IBO дава, е следното: “Това ръководство е направено в полза както на новите, така и на опитните учители, които



трябва да изградят своя курс, така че да отговаря на целите и предметната дейност на IB математиката.” (IBO, Mathematics: analysis and approaches teacher support material, 2019, с. 2). Разбира се, основен източник на научна информация е самият учебник, по който преподавам. Той е разработен както на хартиен носител, така и в електронен вариант и дава възможности за много интерактивни функционалности.

Езикът, на който се преподава IB математика: анализи и подходи, е английски. Курсът се предлага на две нива - стандартно и високо. Учениците имат право на избор на ниво, записвайки се в IB програмата. Аз ще разгледам изцяло стандартното ниво, тъй като то е най-предпочитано от учениците в Гимназия “Меридиан 22”, чрез които провеждам това изследване.

### **Обща информация за предмета IB математика: анализи и подходи**

Предметът IB математика с пълно наименование IB математика: анализи и подходи е предназначен за ученици, които предпочитат да бъдат откриватели, за да конструират свободно математически аргументи и да развият математическото си мислене като силно тяхно качество. Освен това, изучавайки този предмет, те получават възможността да изследват реални и абстрактни приложения, със или без помощта на технологии. Учениците се учат как да описват света около себе си, решавайки практически проблеми. Те дават сами отговор на въпроса: “Къде конкретна тема по математика е приложима в реалния живот?”.

Предметът IB математика: анализи и подходи е разработен така, че да отговори на нуждите за аналитична експертиза в свят, в който развитието на иновациите е изключително зависимо от дълбочината на познанията по математика на всеки човек. Този курс включва

както базови математически теми като Функции, Тригонометрия, Вероятности, така и такива, които изискват изследване, предположения, доказателства като например Редици.

Курсът изисква използването на технологии. Те всъщност не са препоръчителни, а задължителни, като дори единият от двата финални изпити на външното оценяване включва задачи, които не могат да се решат без графичен калкулатор. Всеки ученик използва само разрешените от IBO модели на графичен калкулатор, имащи много функционалности (TI-Nspire CX, HP Prime, Casio FX-CG 50). Но за ролята на калкулатора като предпоставка за успешен подход за усвояване и разбиране на определени теми, ще отделя специално внимание.

“Обучението по математика се уповава на запознаването и непрекъснатото използване на 12 основни понятия. Чрез тях се показват връзки както между отделните изучавани теми, така и между математиката и другите предмети в IB програмата. Тези понятия са: приближение, промяна, равенство, обобщение, моделиране, модели, величина, връзки, представяне, пространство, система и валидност.” (IBO, Mathematics: analysis and approaches guide, 2019, с. 13) Разбирането на тези понятия от учениците е от съществена важност. Под разбиране имам предвид не само разчитане на тяхната дефиниция, а вникване в дълбочина. Например, кога два елемента се считат за равни? Дали когато са визуално абсолютно еднакви, или когато използването им води до един и същ резултат? Давайки отговор на такъв тип въпроси, учениците успяват да вникнат в същността на математиката отвъд написаното в учебниците. Това ги прави донякъде откриватели и им носи удовлетворение и желание да учат. Именно една от основните цели на всеки учител е да провокира интерес към предмета си, защото ако той се изучава с желание, то постигането на високи резултати става по-лесно осъществимо.

## Съдържание на курса, хорариум и справочник с формули

Курсът по IV математика: анализи и подходи се състои от 5 основни глави:

- Числа и алгебра;
- Функции;
- Геометрия и тригонометрия;
- Вероятности и статистика;
- Математически анализ.

Всяка глава включва теми, които развиват някои от 12-те основни понятия, споменати по-горе.

Времето, предназначено за целия курс през двете години на 11. и 12. клас, е 150 астрономически часа, 30 от които са планирани за работа по така нареченото вътрешно оценяване, също и за разработване на проучвания, моделиране и изследвания. 120 остават за преподаване на учебното съдържание. Общият брой учебни часове за една седмица се равнява на 3.5. В Гимназия “Меридиан 22” хорариумът, разпределен по този предмет, е 4 учебни часа на седмица и е съвместен с българската програма под формата на ИУЧ (избираеми учебни часове) и ФУЧ (факултативни учебни часове).

Учениците разполагат със справочник с формули. От тях не се иска да помнят основните формули, нито пък да ги откриват всеки път. Още от първите часове по математика, учителят предоставя за ползване справочника както в редовните си часове, така и по време на изпити. Този ресурс аз приемам като успешно средство при преподаването на математика, тъй като благодарение на достъпа до формулите, учениците се фокусират върху разбирането и усвояването на методите за решаване на определен тип задачи, а не върху наизустяването на формулите, които са общодостъпни.

## Основни цели на курса

“Основната цел при изучаването на предмета Математика: анализи и подходи

е да даде възможност на учениците да:

1. развият любопитство и удовлетворение от математиката, да оценят нейната сила и елегантност;
2. развият разбиране на понятията, принципите и същността на математиката;
3. комуникират ясно на математически език; сбито, но съдържателно и убедително в различни ситуации;
4. развият логическо и креативно мислене, упоритост и постоянство при решаването на задачи, за да придобият увереност при използването на математиката;
5. използват и усъвършенстват абстрактното си мислене;
6. оценяват как процесите на развитието на технологиите и на математиката си влияят;
7. прилагат уменията си в алтернативни ситуации в други области на познанието, както и в бъдещи открития в локалните и глобални общности, в които се намират;
8. оценяват моралните, социалните и етични въпроси, които се пораждат в работата на математиците;
9. оценяват универсалността на математиката и нейните мултикултурни, интернационални и исторически перспективи;
10. оценяват приноса на математиката към другите науки и предмети в IB програмата;
11. развиват умения за критическо и рефлексивно мислене както върху собствената си работа, така и върху тази на техните съученици;

12. разширяват независимо и съвместно познанията си по математика”. (IBO, Mathematics: analysis and approaches guide, 2019, с. 22)

Всички тези цели са заложи в всяка една тема от курса. Постигането им чрез правилните подходи е както изискване, така и необходимост. Не всички ученици обаче успяват да развият изброените умения. Тези, които не се справят добре по предмета и съответно постигат ниски академични резултати, може би покриват само до 3 - 4 от дузината поставени цели (този извод е доказан след направено авторско проучване, описано в *Таблица 1.2* на следващата страница). Това води до мисълта, че учителят трябва да подбере подходи за преподаване, така че да превърне целите в достъпни и разбираеми, а и желани от страна на учениците. Още в самото начало на 11. IB клас преподавателят презентира предмета си и изброява целите на обучението по IB математика, за да може учениците да са наясно към какво се стремят.

За да защитя хипотезата, че по-силните ученици покриват повече цели, и обратното, по-слабите - сравнително по-малко цели, през края на 2021-2022 учебна година проведох анкета на завършващите 11. IB клас с идеята да установя дали има зависимост между годишната им оценка по предмета и колко от изброените цели учениците считат за постигнати. Очакването ми е, че учениците с по-високо академично представяне по математика осъзнават изискванията на курса, разчитат правилно поставените цели в началото на 11. IB клас и са способни да оценят дали за една година са ги покрили.

Резултатът от анкетата “Цели на курса по IB Mathematics: Analysis and Approaches” (Приложение 1) потвърждава предположението ми, че когато ученикът е успешен, (има висок годишен резултат), то неминуемо стига до извода, че е покрил повече от целите на курса по математика, защото ги е разбрал, вникнал е в същността им, видял е, че учейки

математика е способен да демонстрира описаните в целите умения, знания и дейности. На *Таблица 1.2* се вижда годишната оценка на всеки ученик от изследваната група, както и броят на покритите според него цели. Учениците с по-висока оценка по математика твърдят, че са покрили повече цели, и обратното.

Тук е важно да спомена, че оценките в ІВ програмата варират от 1 до 7, като 1 е най-ниската, а 7 - най-високата (оценяването по ІВ математика е описано в отделна точка). Независимо дали ученикът е получил 1 като годишна оценка в 11. клас, той продължава обучението си в 12. клас на ІВ програмата.

Ученик	Годишна оценка по математика за 2021-2022	Брой постигнати според ученик цели от обучението му по предмета
1	6	12
2	6	12
3	6	10
4	5	8
5	4	4
6	4	5
7	3	3
8	3	3
9	3	2

*Таблица 1.2. Информация за годишните оценки по математика на 11. ІВ клас за 2021-2022 учебна година и съответния брой цели на курса, които всеки ученик преценява, че е покрил*

След като установих, че повишаването на академичното ниво на учениците води до осъществяването на целите от обучението по ІВ математика, въпросът, който възниква, е какви методи учителят трябва да подбере, за да сведе обучението по ІВ математика до покриването на целите на курса, щом те са ключови, за доброто представяне на всеки

обучаващ се. Дали всички тези цели са осъществими само и единствено чрез засилено обучение по предмета, или има и други фактори, които провокират интереса и любовта на учениците към математиката, така че да я направят желана за учене? За да отговоря на тези въпроси, ще представя една от особеностите на IB програмата като цяло, а именно ядрото на програмата (задължителните предметите, заемащи централно място в програмата, свързани с всички останали 6 групи от предмети, *Изображение 1.1*, страница 6): Theory of knowledge, TOK (превод от англ. език - Теория на познанието), Creativity, activity and service, CAS (превод от англ. език - Креативност, физическа активност и принос към обществото) и дипломната работа Extended Essay, EE (превод от англ. език - разширено есе), как те са внедрени в програмата по IB математика и как чрез тях се постигат някои от основните цели на курса.

### **Връзки между предмета IB математика и ядрото на IB програмата**

#### **ТОК и IB математика**

Теория на познанието е задължителен предмет, чиято роля е фундаментална. “Той изучава произхода на познанието и дава отговор на въпроса: “Как знаем това, което твърдим, че ни е известно?”. За да се постигне тази цел на ТОК, учениците се окуражават да анализират твърдения и да изследват въпроси относно конструкцията на познанието.” (IBO, Mathematics: analysis and approaches guide, 2019, с. 3) Освен това “ТОК предметът цели да установи връзки между различни области на общоизвестни познания като например биология, физика, математика и да ги отнесе към личните области на познание на всеки ученик, така че той да успее да опознае собствените си виждания и да съумее да ги различи от тези на останалите хора.” (IBO, Mathematics: analysis and approaches guide, 2019, с.3)

Като общоизвестна област на познанието математиката, изглежда, че дава сигурност, и работи с твърдения, които в други дисциплини липсват, но също в много случаи ни предоставя средства за дискутиране или оспорване на тези твърдения. Все още математиката дава важни познания за света и приложенията ѝ в науките и технологиите са били винаги основната сила, задвижваща научните открития.

Фундаментален въпрос за всички хора е дали математическото познание наистина съществува независимо от нашата представа за него. Има ли математическа теорема или формула, която “чака да бъде открита”, или всичко това е творение на човека? Такъв тип въпроси се разискват в часовете по ТОК от учениците и това ги провокира да търсят интересното в математиката. Любопитството им да отговорят на загадки заражда любов към предмета и дава възможност за постигане на някои от основните цели, което само по себе си е предпоставка за повишаване на резултатите на учениците.

Ето примери за въпроси, обсъждани както в часовете по ТОК, така и по ІВ математика:

- “Откъде идват числата?”
- Математиката език ли е?
- Как работи интуицията по математика?
- Възможно ли е да знаем неща, за които нямаме никакъв опит и реални наблюдения като например безкрайността?
- Каква е връзката между реални ситуации и математически модели?” (Awada, Buchanan и др., 2019, с. 4, 11, 22, 32, 72)

В работата с ученици понякога се пренебрегва ролята на ТОК и учителят не успява да въвлече класа в интересни математически дискусии по теми извън учебния план. Това обаче рефлектира негативно върху постигането на някои от основните цели като развитие



на любопитство и удовлетвореност от математиката и разбиране на нейната същност. При подбор на методите за повишаване на резултатите трябва да се има предвид тази връзка между ТОК и IB математика и как тя може да бъде засилена.

### **CAS и IB математика**

Креативност, физическа активност и принос към обществото, или накратко CAS е задължителен предмет в IB програмата, който подобно на ТОК е свързан с всички предмети, в това число и с IB математиката. “CAS програмата акцентира върху развитието на самоличността на учениците. Тя въвлеча децата в широк обхват от дейности извън академичните. Трите елемента на CAS са креативност (изкуства и други преживявания, които провокират креативното мислене), физическа активност (спорт и здралословен начин на живот) и принос към обществото (доброволчески дейности, които имат възпитателна цел).” (IBO, Mathematics: analysis and approaches guide, 2019, с. 3)

Познанията по математика са ключов елемент към опознаването на света, в който живеем. Математическите умения и техники, които учениците усвояват, им дават възможност да оценят заобикалящия ги свят, което от своя страна им помага да развият, планират и получат опит в CAS програмата, правейки различни проекти. Това тяхно извънкласно творчество и активност развива някои от целите на курса по IB математика, като например да прилагат уменията си в алтернативни ситуации и да оценяват моралните, социалните и етични въпроси, пораждащи се от разработките на математиците. Пример за CAS практика, свързана с IB математиката, е следният:

“Учениците могат да направят проучване в класовете си, да създадат база данни и да анализират резултатите, за да предложат решение на възникнал училищен проблем. Например възможността за сервиране на пресни плодове и зеленчуци, колко би струвало

това, възможно ли е да се направи благотворителна кампания за подпомагане на ученици, изпитващи финансови затруднения. За целта трябва да се приложат математически познания от статистика, графики на функции и др.” (IBO, Mathematics: analysis and approaches guide, 2019, с. 10)

Проектите по CAS, съотнесени към математическите умения на учениците, са още една предпоставка за провокиране на интереса им към усъвършенстване на техните познания, с цел да могат да ги приложат в реална ситуация. Следователно ключът към по-високи резултати по IB математика се крие и в обогатяване на CAS практиките във и извън училищната среда.

### **ЕЕ и IB математика**

“Разширеното есе, или ЕЕ, е задължителен елемент от работата на всеки IB ученик. Представлява дипломна работа с обем до 4000 думи по един от шестте предмета в IB програмата. Работата по ЕЕ дава уникалната възможност на учениците да изследват академична област, към която проявяват личен интерес. Писането на дипломната работа развива у учениците умения за правене на проучване, критическо мислене, планиране на работен процес.” (IBO, Extended essay guide, 2016, с. 15) Ако някой кандидат избере да пише разширено есе по математика, той трябва да демонстрира познания и разбиране на теориите, средствата и техниките, специфични за тази дисциплина, фокусирайки се върху определен изследователски въпрос. Примери за теми на математическо есе са:

- Простите числа в криптографията;
- Използване на теория на графите за минимизиране на разходи;
- Използване на експоненциални функции при изчисляване на правилната дозировка на медикаменти за лечение.

Писането на ЕЕ е предизвикателство, особено за учениците търсещи повече от училищното ниво на математиката. Този елемент дава възможност за постигане на цели като комуникиране на математически език, развиване на логическо и креативно мислене, използване и усъвършенстване на абстрактното мислене, всички те, водещи до повишаване на резултатите по ІВ математика.

В опита си досега съм била ръководител на 2 разширени есета по математика.

При първия ми опит ученикът постигна оценка D, а при втория - най-високата A<sup>1</sup>. Темата на първия беше “Триизмерни мозайки: Приложение на теоремата за съществуване и единственост на Платоновите тела”. Изследването в тази област затрудни ученика, от една страна, защото той изпитваше затруднения по математика, и от друга страна, защото неговата сила и интерес не бяха насочени към геометрията. От този първи опит като ръководител на есе стигнах до заключението, че изследователският въпрос трябва да вълнува ученика, за да може той да пожелае да търси информация и да се развива математически, пишейки този вид дипломна работа. Въпреки това самото писане на разширено есе по математика вдъхнови ученика и той се реализира след няколко години като един от малкото учители по ІВ математика в България.

Вторият ученик, с когото работихме по ЕЕ, избра тема, близка до него. Тя показваше интердисциплинарна връзка между физиката и математиката: “Използване на векторите за изчисляване на електромагнитното поле на намагнетизирана сфера”. Спазвайки всички строги правила за писане на ЕЕ, под мое ръководство този кандидат успя да разгърне потенциала си и да развие математическите си умения, постигайки отличен краен резултат.

В световен мащаб едва “15.5 %” (ІВО, Final statistical bulletin, 2022, с. 12) от учениците са

---

<sup>1</sup> Оценката по ЕЕ, за разлика от тези по шестте предмета в ІВ програмата, се обозначава с буквите А, В, С, D, Е, като А е най-високата, а D е най-ниската. При оценка Е не се получава ІВ диплома за средно образование.

получили оценка А на дипломната си работа по математика през 2022. Същият ученик кандидатства и записва специалност “Теоретична математика” в един от най-силните в тази област световни университети, Warwick, Великобритания.

Следователно, като успешна практика за повишаване на резултата по IB математика от гледна точка на писане на разширено есе, мога със сигурност да кажа, че два основни фактора оказват съществена роля: първо - изборът на математика като предмет за разширено есе само от ученици, имащи широк интерес към тази дисциплина; второ - правилният подбор на тема и изследователски въпрос, отговарящи на интересите и уменията на ученика по математика.

След като разгледах подробно връзката между IB математиката и трите елемента от ядрото на IB програмата и стигнах до заключението, че взаимодействието между ТОК и CAS с IB математиката трябва да бъде усилено с цел това да доведе до повишаване на резултатите на учениците по математика, ще насоча вниманието към още едно специфично средство в IB математиката - използването на графичен калкулатор като задължителна технология по предмета, внедрена в обучението при решаването на определен тип задачи. От ключово значение за постигане на високи резултати в курса по IB математика е именно усвояването на техниките за правилното използване на калкулатора, тъй като един от двата финални изпити на външното оценяване е базиран на решаване на задачи с помощта на калкулатора.

### **Използване на технологии и графичен калкулатор**

“Използването на технологии е неразделна част от курса по IB математика” (IBO, Technology in the DP Mathematics classroom, 2018), както споделя мнението си ръководителят на катедрата по IB математика, Каспър Бисман, в Международно училище “Гленунга”, Австралия. “Развиването на умение за оценяване, как технологичният прогрес

и математиката си взаимодействат, е една от основните цели на обучението.” (IBO, Mathematic: analysis and approaches guide, 2019, с. 18) Точното прилагане на технологиите, подходящата и ефективната им употреба както за изследване на непознати за учениците математически области, така и за решаването на задачи в час, се явява като един от изпитните елементи по предмета IB математика. Основно умение е усвояването на използване на различни технологии. За всяка една тема, включена в учебното съдържание, се предвижда време и занимания, които развиват това умение.

Технологиите са мощно средство в математиката. В последните години те стават все по-достъпни както от учителите, така и от учениците. Осмислената употреба на технологиите прави математиката по-разбираема и мотивира за повечето ученици.

Като учител по IB математика аз използвам такива средства в различни случаи, като:

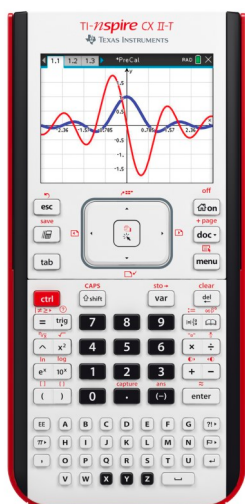
- да демонстрирам гледната си точка;
- да адресирам към погрешни схващания;
- да визуализирам нещо;
- да стимулирам разбирането на основните математически понятия, което иначе би било ограничено заради дълги изчисления или отнемащи време алгебрични действия;
- да подкрепя учениците си при отправяне на предположения и даване на обобщения;
- видимо да направя връзки между различни математически представи и подходи.

От своя страна, учениците използват технологии, за да се ангажират в образователния процес по най-разнообразни начини, като:

- развиват и подобряват тяхното собствено разбиране за математическите понятия;
- правят изследвания за математически модели;

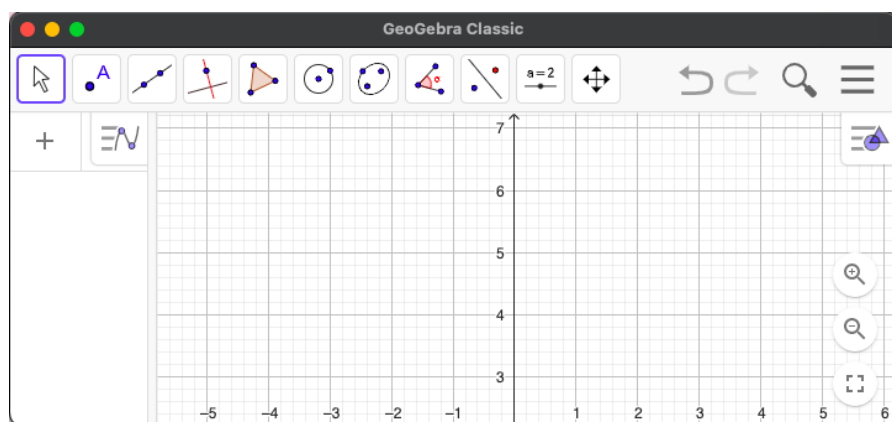
- тестват предположения и правят обобщения;
- визуализират интерпретации;
- работят по проекти;
- организират и анализират данни.

Много теми от учебното съдържание по ИВ математика са сведени до необходимостта от използването на технологии като графичен калкулатор TI Nspire CX, *Изображение 1.2*, динамичен софтуер за чертане Geogebra, *Изображение 1.3*, електронна таблица Excel или Google Spreadsheet, *Изображение 1.4*, STEM интерактивни симулации, *Изображение 1.5*.



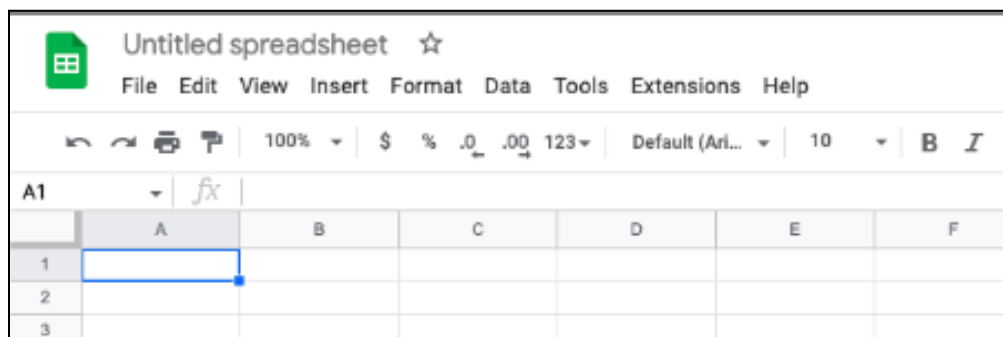
*Изображение 1.2.*

*Графичен калкулатор TI-Nspire CX*

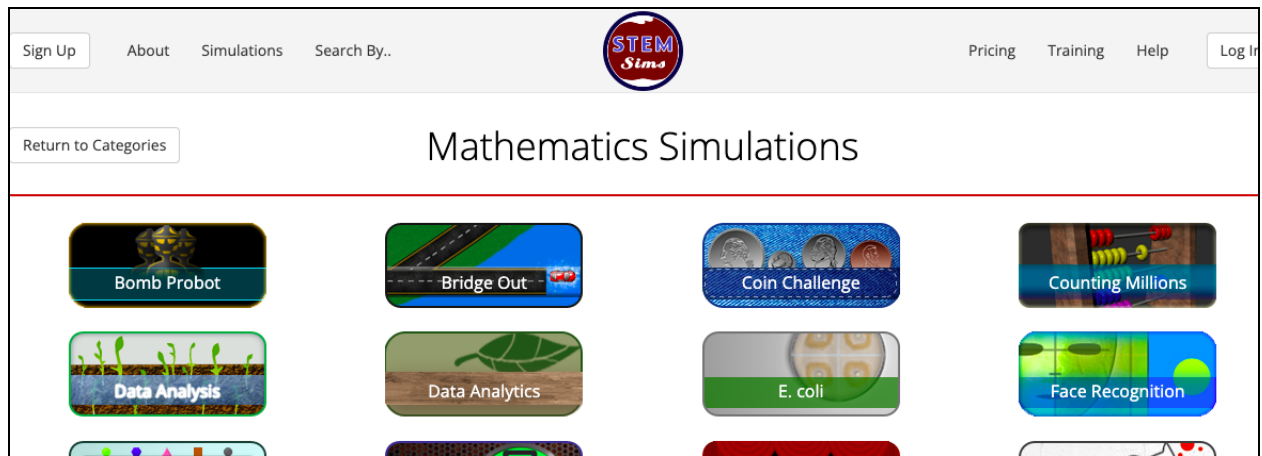


*Изображение 1.3.*

*Динамичен софтуер GeoGebra*



*Изображение 1.4. Google spreadsheet*



Изображение 1.5. STEM симулации<sup>2</sup> по математика

Използването на технологии в часовете по IV математика може да се разглежда както като необходимост или предимство, така и като пример кога не се налага това, а чисто и просто да се демонстрират само аналитични действия, най-често алгебрични такива, неизискващи никакви допълнителни технологични ресурси.

За да бъде един ученик успешен в работата си по IV математика, той трябва да се научи да преценява необходимостта от използването на графичен калкулатор, тъй като единствено това технологично средство е позволено при явяване на финалния изпит. Крайните изпити в курса по IV математика са два, като основната разлика между тях е, че на първия е забранена употребата на графичен калкулатор, а на втория е разрешена.

Наблюденията ми през годините показват, че учениците се справят по-добре на първия изпит без калкулатор. Защо ли се случва това, и то във времена на широко разпространение на технологиите, към които имат интерес най-вече подрастващото поколение? Би следвало да е точно обратното - вторият изпит по математика да е по-силният, с по-високи резултати от учениците, тъй като на него те могат да демонстрират уменията си за използване именно на технологиите, на които са обучени в

<sup>2</sup> STEM симулации - интерактивни математически и научни видеоклипове, в които потребителят може да избира отговор от предложени няколко такива, като това му действие води до съответна развръзка

час. За да отговоря на този въпрос, проведох анкета сред учениците от 11. ІВ и 12. ІВ клас на настоящата учебна година. Предложих различни опции за това каква може да е причината учениците да изпитват затруднения при работата си с калкулатора, което несъмнено би довело до по-ниските им резултати на втория изпит по ІВ математика. Резултатите от анкетата “Използване на графичен калкулатор TI-Nspire CX” (Приложение 2) се виждат на *Графики 1.1* и *1.2*.



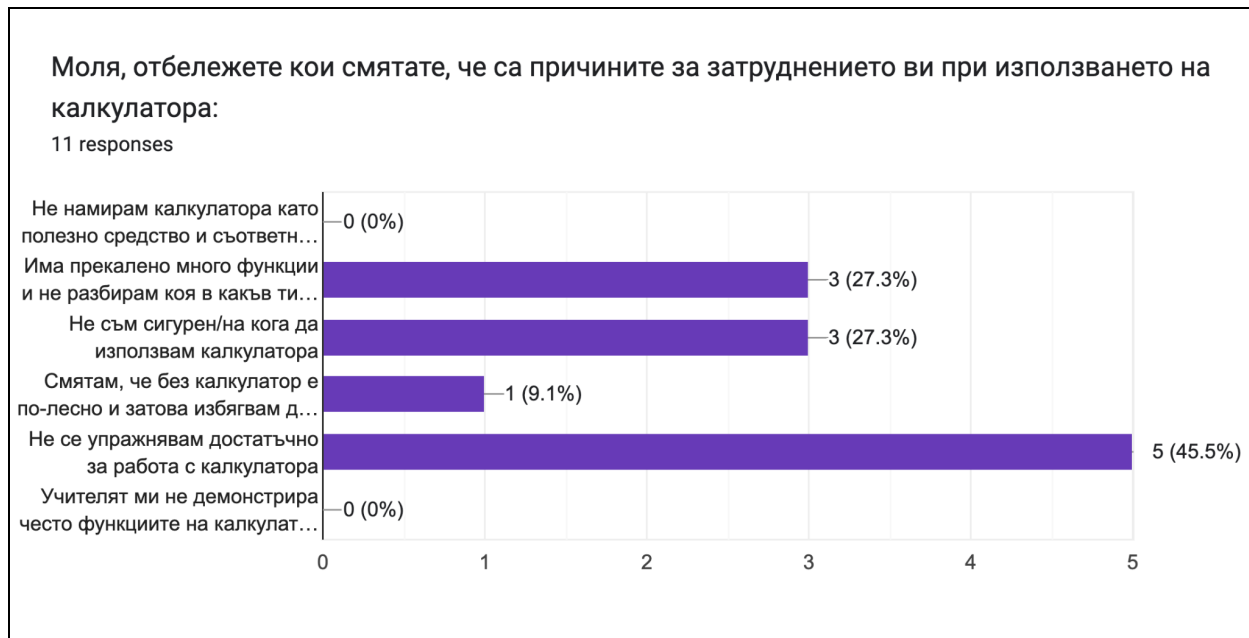
*Графика 1.1. Процент ученици, изпитващи или не затруднение при работата си с графичния калкулатор*

*Графика 1.1* показва, че близо 1/4 от учениците изпитват затруднения при работата си с графичния калкулатор. Може би точно тази част от кандидатите не успяват да се справят и с втория изпит по математика, изискващ да приложат усвоените техники за работа с функционалностите на калкулатора.

Какви може да са причините за това, учениците посочват следните отговори в *Графика 1.2*:

- 27.3% отбелязват, че калкулаторът има прекалено много функции и не разбират коя в какъв тип задачи трябва да използват;
- също 27.3% изпитват неувереност кога да използват калкулатора;
- най-голям процент, отговарящ почти на половината от анкетираните, 45.5%, показва, че учениците не се упражняват достатъчно за работа с калкулатора.





Графика 1.2. Причини за затруднение при работата с графичния калкулатор TI-Nspire CX

Това проучване води до важния извод, че учителят в IB програмата по математика трябва да подбира методи, стимулиращи индивидуалната практика на учениците за работа с графичния калкулатор, от която зависи тяхната успеваемост и резултата на втория изпит по IB математика. Освен това трябва да отдели достатъчно време, за да запознае учениците с всички функционалности на калкулатора, кои от тях биха влезли в употреба и кои не е необходимо учениците да разучават на училищен етап.

За да приключи представянето на предмета IB математика: анализи и подходи, с оглед набелязване на ключови моменти, изискващи подбор на методи за повишаване на резултатите на учениците, е необходимо да запозная читателя и със спецификата на оценяването в процеса на обучение. Това ще даде представа кои са особеностите при поставянето на финалната оценка по IB математика, от какво зависи тя и възможно ли е на практика да поставим очаквания за повишаване на тази оценка независимо от базисните

знания по математика на включилите се в ИВ програмата ученици? Въпрос ли е само на изграждане на математически познания у учениците и тяхното правилно и целенасочено обучение по предмета в училище?

### **Оценяване по ИВ математика: анализи и подходи**

Оценяването в процеса на обучение е дейност, водеща до няколко резултата.

1. То е средство за измерване на постиженията на всеки учител спрямо групата, на която преподава.

Ако преобладаващите оценки в края на учебната година са сравнително ниски, то най-вероятната причина за това може да е недостатъчната работа на учителя с групата от ученици, бързото преподаване на материала без отделяне на време за упражнения и за усвояване на нови знания, и др.

2. Оценяването изгражда представата на ученика за степента на неговото лично развитие в дадена учебна област.

Текущите оценки мога да бъдат стимулиращи, ако са добре аргументирани от преподавателя. Ако те обаче не са защитени от учителя и ученикът не е убеден, че ги е “заслужил”, то той може да изгуби изцяло мотивацията си за учене по даден предмет. Оценяването само по себе си не бива да се използва като средство за наказание, а като инструмент за несубективно измерване на знанията. Погрешното прилагане на оценяването, като например поставяне на слаба оценка за говорене в час или за липса на концентрация, води до демотивация на ученика. Той изгражда погрешната представа, че оценката невинаги измерва само развитието на знанията му по предмета. Затова учителят

има изключително отговорната задача да придаде правилния смисъл на оценяването, така че то да бъде стимулиращо и ефективно.

### 3. Оценяването е статистически показател за сложността на даден изпитен елемент.

Когато се конструира тест или изпит, схемата за оценяване трябва да отговаря на нивото на очаквани знания и умения. Обикновено се наблюдава нормално статистическо разпределение на крайните резултати при една сравнително голяма група от ученици като един клас например. Ако разпределението не е нормално, а преобладават по-ниските оценки, то може да се счита, че изпитът не е конструиран правилно и е с повишена трудност, и обратното, ако налице са по-високите оценки, то най-вероятно изпитните елементи са били прекалено лесни.

За да обобщя, бих казала, че процесът на оценяване е комплексен и резултатите от него могат да предопределят бъдещето на един ученик, затова то е от изключителна важност.

В IB системата оценяването е строго регламентирано в така наречения документ Diploma Programme Grade Descriptors (превод от англ. език: Описание на оценките в Дипломната програма). В него са описани нивата на владееене на математически умения и знания, съответстващи на целите оценки от 1 до 7, като 1 е най-ниската, а 7 най-високата. Тази седембална система гарантира възможността за статистическо нормално разпределение на крайните резултати.

Ето какви знания и умения трябва да демонстрира един ученик, за да достигне най-високото ниво по математика - оценка 7: “Демонстрира задълбочени познания и цялостно разбиране на учебната програма; успешно конструира и прилага математически аргументи на сложно ниво в голямо разнообразие от контексти; успешно използва техники

за решаване на проблеми в предизвикателни ситуации; разпознава модели и структури, прави обобщения и обосновава изводи; разбира и обяснява значението и валидността на резултатите и прави пълни и уместни заключения; комуникира математиката по ясен, ефективен и стегнат начин, използвайки правилни техники, нотация и терминология; демонстрира способност за интегриране на знания, разбиране и умения от различни области на курса; използва технологията правилно в предизвикателни ситуации - използва ефективно функционалността на калкулатора, когато е необходимо.” (IBO, Diploma Programme Grade Descriptors, 2017, с. 2) Най-ниската оценка 1 се покрива при: “много елементарни знания и разбиране на въпроса или задачата; отговори, които са с много ограничена валидност; много ограничени правомощия за изразяване както устно, така и писмено; широко разпространени пропуски за точност и яснота; липса на осъзнаване на контекста и оценяване на ефекта върху аудиторията/читателя; много елементарна структура.” (IBO, Diploma Programme Grade Descriptors, 2017, с. 3)

Предметът IB математика: анализи и подходи се оценява както текущо чрез различни форми на изпитване - тестове, проекти, презентации, домашни работи, пробни изпити, работа в час, водене на папка и др., така и финално - в края на 12. клас, *Таблица 1.3.*

Само финалните изпитни елементи образуват окончателната оценка по IB математика - външно и вътрешно оценяване.

Образуване на крайната оценка по IB математика: анализи и подходи	
Изпитен елемент	Тежест към крайната оценка
Външно оценяване	80 %
Първи изпит (без графичен калкулатор) (90 минути)	40 %

Втори изпит (с графичен калкулатор) (90 минути)	40 %
Вътрешно оценяване Математическо проучване	20 %

Таблица 1.3. Образуване на крайната оценка по ІВ математика

От Таблица 1.3 се вижда, че по-голяма тежест дават двата изпита, които се проверяват от външни екзаминатори. От 2017 година насам аз работя като ІВ проверител и оценявам ползата от тази дейност, тъй като имам възможността да наблюдавам работата на ученици по целия свят и да съизмеря тяхната успеваемост спрямо тази на моите ученици.

Правилната и целенасочена подготовка и трениране на изпитните формати гарантира висок резултат. ІВ дипломната програма предвижда вътрешен календар, в който са разписани дати за пробни изпитни сесии. Те се провеждат точно по изискванията на ІВО и представляват симулация на реалната изпитна сесия. За целта учителите могат да използват вече дадени изпити от изминали години. Подготовката за изпитите не се свежда само до многократно решаване на задачи, а до вникване в системата на оценяване, ключова за постигане на по-висок резултат. Именно това следва да разгледам, като набележа кои моменти изискват подбор на методи за повишаване на успеваемостта на учениците по ІВ математика.

### **Особености на външното оценяване**

Подготовката за двата изпита е продължителен процес, започващ още в началото на 11. ІВ клас. Основното помощно средство на всеки учител е учебникът по ІВ математика, съдържащ примерни изпитни задачи в края на всеки раздел, *Изображение 1.6.*

## Exam-style questions

**9 P1:** A function  $f$  is defined by

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}.$$

Find expressions for:

- a  $f'(x)$
- b  $\int f(x) dx$  (3 marks)

**10 P1:** The velocity,  $v \text{ ms}^{-1}$ , of a particle at time  $t$  seconds is given by  $v = 40 - 3t$ .

- a Find an expression for the acceleration of the particle in  $\text{ms}^{-2}$ . (2 marks)
- b Let  $s$  represent the displacement, in metres, of the particle from the origin at a time  $t$ .  
Given that  $s = 10$  when  $t = 1$ , find an expression for  $s$  as a function of  $t$ . (4 marks)

Calculus

Изображение 1.6. “Примерни изпитни задачи” (Awada, Buchanan и др., 2019, с. 461)

Точките, които формират оценката, не се дават само за верен краен резултат, а са най-разнообразни и конструирани така, че да откриват ключови компетентности у учениците - прилагане на правилен метод (оценка М - method mark), използване на получен дори и грешен отговор за последващо действие (оценка FT - follow through mark), точност на изчисляването (оценка А - accuracy mark), обосновка и правилно аргументиране при задачи за доказване (оценка R - reasoning mark).

Всички видове оценки са описани в критериите за оценяване към изпитите в края на 12. IB клас.

За повишаване на резултата от външното оценяване учителят трябва да подбере методи, които да развиват математическите умения на учениците, да стимулират трупането на знания, да активизират системната работа по математика и дългосрочното запаметяване на

математически методи, теории и типове задачи, тъй като изпитите са в края на втората година и обхващат всичко, изучено в този период. От друга страна обаче, методите за обучение трябва да са насочени и върху трениране на учениците как да разчитат правилно критериите за оценяване, за да получат максимален брой точки от различните видове такива - дали за метод, или за аргументация, или за точност на изчисленията.

Отличната крайна оценка от изпитите е компилация от натрупани математически знания и умения и от стратегическото владение на типовете оценки с цел извличане на максималния брой точки. За да стане ясно как един ученик може да получи почти максимална оценка, без да е достигнал до правилен отговор, а само владее тънкостите на типовете оценки, ще дам следния пример за задача и нейното решение.

“Задача 10.” (IBO, Mathematics Standard level Paper 1, 2016, с. 12)

Нека  $f(x) = \sqrt{4x + 5}$ , за  $x \geq -1.25$ .

(а) Намерете  $f'(1)$ . [4 точки]

Нека е дадена функцията  $g$  и точка  $R$ , лежаща на нейната графика.  $x$  – координатата на точка  $R$  е 1. Уравнението на допирателната към графиката на  $g$  в точка  $R$  е  $y = 3x + 6$ .

(б) Напишете стойността на  $g'(1)$ . [2 точки]

(в) Намерете  $g(1)$ . [2 точки]

(г) Нека  $h(x) = f(x) \times g(x)$ . Намерете уравнението на допирателната към графиката на  $h(x)$  в точка с  $x$  – координата равна на 1. [7 точки]

- Ето какво следва да е решението със съответните типове оценки (в синьо):

$$(a) f(x) = \sqrt{4x + 5} = (4x + 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4x + 5)^{-\frac{1}{2}} \times 4$$

*М1 за правилен метод на диференциране*

*А1 за правилен множител в производната:  $\frac{1}{2}(4x + 5)$*

*А1 за правилен множител в производната: 4*

$$f'(1) = \frac{1}{2} \times 9^{-\frac{1}{2}} \times 4 = \frac{2}{3}$$

*А1 за правилен краен отговор*

$$(б) g'(1) = 3$$

*М1 за разпознаване, че  $g'(1)$  е наклонът на допирателната*

*А1 за правилен краен отговор*

$$(в) g(1) = 3 \times 1 + 6 = 9$$

*М1 за разпознаване, че R е точка от допирателната*

*А1 за правилен краен отговор*

$$(г) h(x) = f(x) \times g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) \quad \text{М1 за прилагане на правилото за умножение}$$

$$h'(1) = f'(1) \times g(1) + f(1) \times g'(1) =$$

*А1 за правилно заместване с 1*

$$= \frac{2}{3} \times 9 + 3 \times 3 = 15$$

*А1 за правилен краен отговор*

Уравнението на допирателната:

$$y = mx + c$$

$$m = h'(1) = 15$$



$$x = 1, y = h(1) = f(1) \times g(1) = 3 \times 9 = 27 \quad \text{AI за } f(1) = 3$$

$$\text{AI за } h(1) = 27$$

$$\Rightarrow 27 = 15 \times 1 + c \Leftrightarrow c = 12 \quad \text{MI за заместване на } x, y \text{ и } t$$

$$\text{Отговор: } y = 15x + 12 \quad \text{AI за правилен краен отговор}$$

*Общ брой точки 15 от 15 възможни*

- Ето примерно решение при грешен отговор от (а). В червено са оценките, получени въпреки грешния отговор от (а):

$$(a) f(x) = \sqrt{4x + 5} = (4x + 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(1) = 2 \quad \text{0 точки - грешен краен отговор, липсва метод за диференциране}$$

$$(б) g'(1) = 3 \quad \text{MI за разпознаване, че } g'(1) \text{ е наклонът на допирателната}$$

*AI за правилен краен отговор*

$$(в) g(1) = 3 \times 1 + 6 = 9 \quad \text{MI за разпознаване, че } R \text{ е точка от допирателната}$$

*AI за правилен краен отговор*

$$(г) h(x) = f(x) \times g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) \quad \text{MI за прилагане на правилото за умножение}$$

$$h'(1) = f'(1) \times g(1) + f(1) \times g'(1) = \quad \text{AI за правилно заместване с } 1$$

$$= 2 \times 9 + 3 \times 3 = 27$$

*Дава се FT оценка за използване на отговора от (а), независимо че е грешен, но всички последващи действия са верни, със стойността  $f'(1)=2$ . Точките до края на задачата се присъждат.*

*AI за правилно изчисление на  $h'(1)=27$  при  $f'(1)=2$ , FT*

Уравнението на допирателната:

$$y = mx + c$$

$$m = h'(1) = 27$$

*Приема се*

$$x = 1, y = h(1) = f(1) \times g(1) = 3 \times 9 = 27 \quad \text{AI за } f(1) = 3$$

$$\text{AI за } h(1) = 27$$

$$\Rightarrow 27 = 27 \times 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

*MI за заместване на  $x$ ,  $y$  и  $m = 27$ , FT*

$$\text{Отговор: } y = 27x$$

*AI за правилен краен отговор при  $m=27$ , FT*

*Общ брой точки 11 от 15 възможни*

От дадения пример се вижда, че дори ученикът да допусне грешка в началото на задачата, той може да продължи решението си, използвайки грешен отговор, но прилагайки правилните методи и последващи верни изчисления. Защо IB системата за оценяване е разработена по този начин? Обяснението, което бих дала, е следното. Ключовите компетентности на владеене на математически знания и умения у учениците трябва да бъдат разграничавани и еднакво оценявани. Ако един ученик има умения за правилен подбор на методи, но в същия момент прави изчислителни грешки, това означава ли, че той нищо не знае по математика и трябва да бъде оценен с 0 точки, щом не е получил

правилния отговор? Ако ученик умее да дава аргументирана обосновка на действията си в една задача, но не владее техниката за изписване на решението, това значи ли, че той не може да решава задачи? Именно тези въпроси са изходни в представата какво трябва да е едно оценяване, така че то да измери по-най правилния начин личното развитие на всеки кандидат в даден предметна област.

Ето тук е ключовият момент, в който участие взема учителят. По време на работата си в клас, както и при решаване на примерни изпити, той трябва непрекъснато да прилага схемата за оценяване с различните типове оценки, така че да демонстрира многократно как силата на уменията и знанията на ученика не е само в получаването на верен краен резултат, а също и в действията, свеждащи една задача до финал. Следователно подборът на подходящи методи за обучение с цел повишаване на текущите резултати и тези от външните изпити трябва да е фокусиран и върху практики, насочващи вниманието на учениците към схемите за оценяване и получаването на възможно най-голям брой точки дори и при допускане на грешки.

### **Особености на вътрешното оценяване**

“Вътрешното оценяване е неизменна част от курса по ІВ математика. То позволява на учениците да демонстрират уменията и знанията си, и да преследват своя личен образователен интерес без времеви ограничения. Вътрешното оценяване, доколкото е възможно, трябва да бъде въввлечено в учебния процес и да не бъде отделено като дейност, водена след приключването на курса.” (ІВО, Mathematics: analysis and approaches guide, 2019, с. 80) За целта са предвиден около 15 астрономически часа за работа по този елемент в часовете.

Типът на изпитната работа се нарича математическо проучване. То се базира на изследване върху област от математиката и се оценява по 5 строго определени критерия. Разработва се изцяло от ученика. Учителят играе важна роля в етапа на планиране и на същинската работа по писане на изследването. Той трябва да дава подходящи насоки, да индикира наличието на грешки, но не и да ги поправя, да предлага източници на информация.

Дейностите, които ученикът ще разгледа в своето проучване, може да са свързани със задачи от тип математическо моделиране, изследване или приложения. ИВО предоставя списък с идеи (стимули) в документа Teacher support material (превод от англ. език: Материал в помощ на учителя), достъпен на уебсайта на Организацията, като например теми, свързани със спорт, музика, храна, икономика, архитектура и др. Важна стратегия за учителя е да подбере методи, които да развият умения у учениците за писане на такъв вид изследователска работа. Това би довело до повишаване на тяхния резултат от вътрешното оценяване, което от своя страна неизменно води до по-висока крайна оценка по предмета.

Обемът на проучването е между 12 и 20 страници, като има задължителни изисквания за структурата и формата, подобни на тези при писането на дипломна работа.

Тъй като математическото проучване има тежест 20 % от финалната оценка по предмета, то не бива да се подценява. Напротив, тази писмена работа дава възможност на ученика да повиши резултата си по математика, защото работи съпровождан и подкрепян от своя учител през цялото време. Няма времеви рамки за писането на документа, а само краен срок за предаване, който е в края на втората година от обучението в дипломната програма на ИВО. Това още повече дава възможност да се изработи прецизно и съобразено с всички критерии. Тоест, добра стратегия би била учениците да насочат вниманието, силите, знанията и уменията си именно към създаването на успешно математическото проучване.

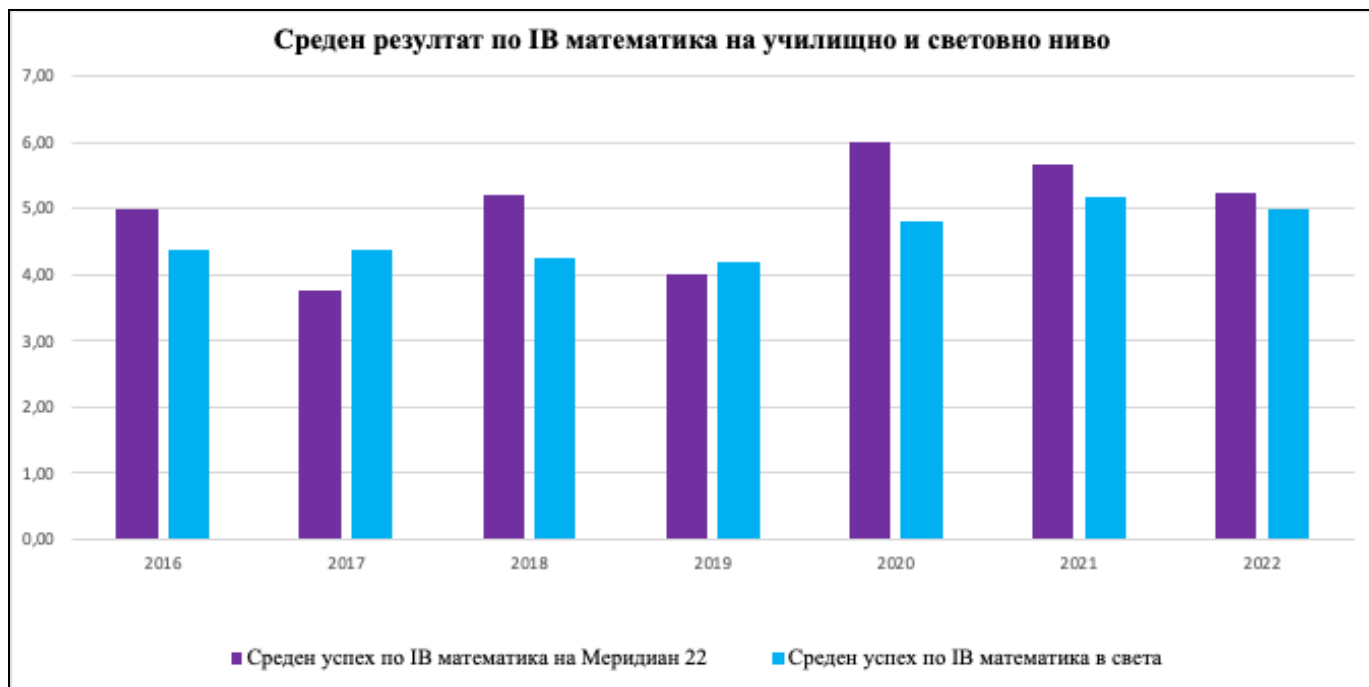
Като учител по ІВ математика непрекъснато се обогатявам и удовлетворявам от дейността си на супервайзер при писането на вътрешния елемент. След като учениците предадат писмената си работа, задачата ми е да я оценя, прилагайки критериите от ръководството по ІВ математика. Случайна извадка от няколко задания се изпращат на ІВО за външно модериране, на базата на което се преразглеждат всички оценки, които учителят е поставил. Ако разликата между неговото оценяване и това на външния екзаминатор е минимална от 2-3 точки при възможни максимални 20, това би означавала, че работа му е била успешна, разгълкувал е и е приложил коректно критериите за оценяване.

Тук има един важен момент. Оценяването на математическото проучване изисква аргументация на поставените от учителя точки по петте критерия. Ако преподавателят просто “наслага” точките, без да вмъкне коментари, външният модератор няма да има доказателство защо учителят е преценил така. Тоест, екзаминаторът може спокойно да постави друга оценка, рачитайки на своята интуиция. Затова един ІВ учител по математика е добър професионалист, когато чрез точни аргументи успее да защити оценката на математическото проучване. От тук следва, че при подбор на методи за повишаване на резултатите учителят трябва да заложи изисквания към собственото си усъвършенстване при оценяването на вътрешния компонент, а не просто да разчита, че някой външен проверител ще приеме неговата гледна точка и тълкуване на критериите. В повечето случаи става точно обратното, външната модерирана оценка е по-ниска от тази на учителя, което не е в полза на ученика.

### **Статистика за резултатите по ІВ математика през последните 7 години**

След като представих особеностите на оценяването по предмета ІВ математика: анализи и подходи, ще дам информация за резултатите на учениците, на които съм преподавала от

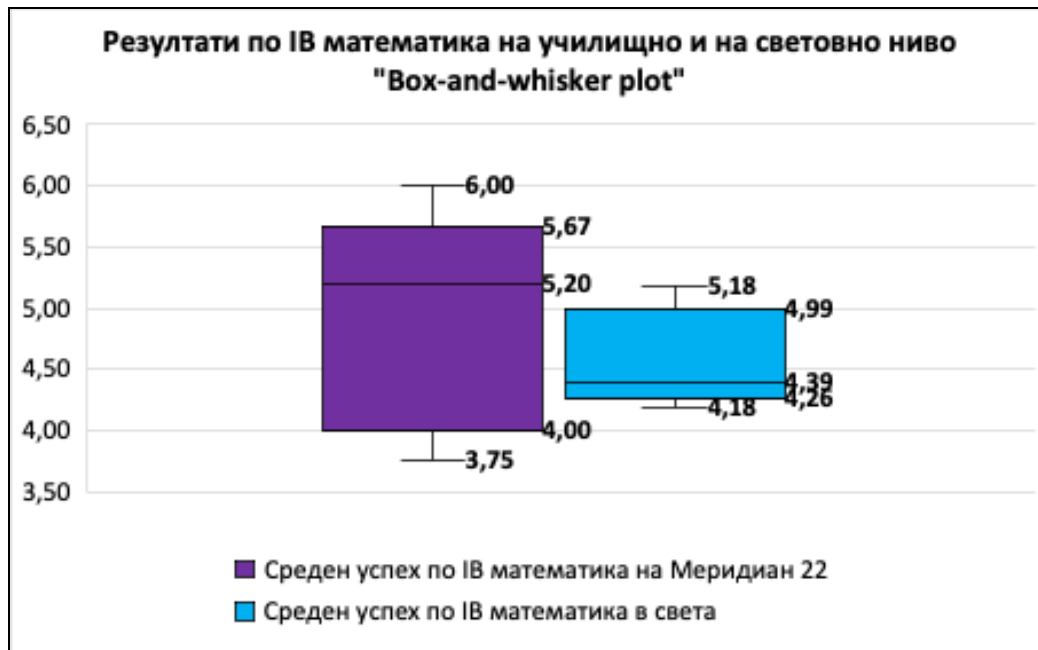
2016 година насам, когато започнах работа по IB програмата в училище “Меридиан 22”. Целта е да установя дали се наблюдава някаква закономерност от спад или растеж на оценките, с оглед на опита, който съм придобила през годините. Тази ежегодна статистика е достъпна в системата за администриране на IB изпитите, до която достъп имат само координаторите на IB дипломната програма ([ibis.ibo.org](http://ibis.ibo.org)), *Графика 1.3*.



*Графика 1.3. Среден успех по IB математика в периода 2016-2022*

От *Графика 1.3* се вижда, че няма определена тенденция на растеж или спад през седемте години в резултатите на училищно ниво. Те са по-скоро колебливи и варират от резултат малко под 4 и достигайки 6. На световно ниво средните оценки имат по-малка вариация в интервала малко над 4 до малко над 5.

На *Графика 1.4* се виждат 5-те статистически характеристики за двете групи данни (средни училищни и средни световни резултати), получени на базата на средните резултати по години от *Графика 1.3*: минимум, първи квантил, медиана, трети квантил и максимум (разположени от долу нагоре).



Графика 1.4. Среден успех по IB математика на "box-and-whisker plot"

Закономерностите, които се наблюдават са следните:

- по-високи училищни резултати в сравнение със световните поради по-голям максимум и медиана (максимуми:  $6,00 > 5,18$ ; медиани:  $5,20 > 4,39$ );
- по-голяма широчина на средните 50% от данни на училищно ниво (между първи квантил 4,00 и трети квантил 5,67), сравнение с тези на световно ниво (между първи квантил 4,26 и трети квантил 4,99).

Тези две закономерности доказват като цяло по-високи резултати на училищно ниво, както и наличие на резултати близки до 5,20 и нагоре, отново на училищно ниво.

През последните 3 години обаче се наблюдава понижаване на средния резултат на учениците от Гимназия "Меридиан 22" (на *Графика 1.3* последните 3 стълба на лилавата хистограма намаляват височината), който може да се дължи на различни фактори.

1. Наличието на базисни знания и умения по математика на учениците при постъпването им.

Забелязва се, че резултатите от Националното външно оценяване след 7. клас по математика са сравнително ниски. Справка за средния резултат в проценти за страната от НВО по математика през последните 4 години сочи следното: “33.62% - 2019 г.; 36.33% - 2020 г.; 37.94% - 2021 г.; 35.32% - 2022 г.” (Дишева, Статистика от успеваемостта от НВО, 2022). Проблемът с нивото на владеене на предмета започва още от основния курс и рефлектира в гимназиалния етап. Д-р Петър Петров, асистент в “Тракийски университет” към катедра Информационни технологии разглежда детайлно причините за тази тенденция:

“Всеизвестно е, че редица мащабни изследвания в света (включително и най-новите), като PISA 2000 на ОИСП (програма за международно оценяване на учениците) и сравнителното проучване TIMSS (за периода 1995 – 2007), което е с четиригодишен цикъл на провеждане, показват постоянно влошаване на качеството на обучението по математика след четвърти клас в България, особено през последните 10 години. Кои са причините за това състояние на обучението по математика в училище? Те са много. Считаме, че една от главните е степента на теоретическата разработеност на методиката на обучението по математика...” (Петров, П., 2017) Много е трудно, почти невъзможно, да се работи с ученици, при които липсва основа. Натрупването на нови знания заляга върху вече заучените такива и ако те са минимални, проблемът се задълбочава. С такива ученици трябва да се работи допълнително и това не винаги е възможно, защото образователната система поставя естествени времеви ограничения на взаимодействието ученик-учител. В IB програмата са описани необходимите минимални знания и умения за ниво на владеене на предмета при постъпване в началото на 11. клас, но те не са със задължителен характер. Учителят трябва да съумее да работи независимо от разнородната група. Донякъде крайният успех, виждащ



се на *Графика 1.3*, може да зависи от това какви ученици са попаднали в класа, с добра основа по математика или не. Добрият професионалист обаче трябва да категоризира правилно учениците според нивото им по математика. По време на час той не може да отдели време за работа с по-слабите ученици, защото това би ощетило цялостната дейност на класа, но има начин да се помогне на изпитващите затруднения ученици. Ако училището предоставя допълнителна подкрепа под формата на консултации или извънредни седмични часове извън редовните, то това би дало възможност на учителя да отдели повече време на тази група деца, които имат пропуски.

## 2. Брой на учениците през годините.

Извадката на *Графики 1.3 и 1.4* се базира на различен брой ученици през годините. Колкото по-голям е класът, толкова по-представителна ще е извадката. В IV класовете обикновено се работи с около 10 ученици, което не е достатъчно, за да се даде реалистична представа за средния краен резултат по IV математика.

Следователно, за да подберем точните методи за повишаване на резултатите, е по-разумно да заложим на системната и комплексна работа по предмета през всяка една година, с всеки един клас. Учителският опит в преподаването на математиката е необходимост, но той може и да ни подведе, ако разчитаме само на него. Важно е педагогическият специалист да прилага умения за работа с различни ученици, а не да залага на заучени общоприети практики, които не могат да покрият спецификите на групите - брой ученици, базисни знания, режим на обучение и др. Или накратко казано, това, че учителят е с голям преподавателски стаж, не означава непременно, че е добър в предаването на знания на учениците при един разнороден клас. Лесно би било той да обучи талантливите и изявените ученици, но ролята на учителя е да обхване всички ученици.

В първата глава от изложението в тази дипломна работа представих предмета IB математика, всички негови особености и връзки с IB програмата. В резултат на това набелязах няколко важни момента, изискващи предприемане на мерки за повишаване на резултатите от обучението. Те са следните:

- покриване на целите на курса, провокиращи интереса, любопитството и любовта към IB математиката чрез методи за повишаване на взаимодействието между ТОК, CAS и IB математика;
- практики, водещи до засилена работа с графичния калкулатор;
- методи за трениране на схемите за оценяване за получаване на максимален брой точки;
- усъвършенстване на учителя за правилно разчитане и оценяване на вътрешния елемент - математическото проучване;
- мерки, водещи до по-задълбоченото и трайно усвояване на математическите знания и умения в обучението през двете години на IB програмата.

Изброените видове мерки обхващат различни дейности и за да открия най-полезните и ефективни такива, водещи до едно успешно обучение, ще проуча какво правят други училища или експерти в образователната система, както и ще представя добри практики от моята работа като IB учител по математика. Крайната ми цел е да подбера мерки, които отговарят на набелязаните от мен области и да защитя ефективността им чрез проучване и анкетиране.

## Глава 2. Предложения за методи за обучение, водещи до повишаване на резултатите по IB математика

### Методи за изграждане на връзки между ТОК, CAS и IB математика

Много IB училища в света разработват система за осъществяване на взаимодействие и имплементиране на ТОК и CAS в IB програмата, в това число и в IB математиката.

KIP International school в Индия е изградило онлайн библиотека с ТОК ресурси, свързани с математиката като предмет. На сайта си е включило редица линкове към полезни електронни списания или уебсайтове, от които учениците мога да черпят идеи за най-разнообразни ТОК проекти с математическа насоченост. Пример за това е “Списание плюс – Вероятно най-добрият уебсайт по математика в интернет пространството – предоставящ статии, които изследват ТОК въпроси за приложната страна на математиката...”. (KIP International School: Library, 2022)

Конкретен пример за това как познанието по математика влиза в реалния живот, е следният от “Списание плюс”:

“На фона на многото противоречия Световното първенство по футбол през 2022 г. започна и действието вече се премести на футболните игрища в многото новопостроени стадиони в Катар. Но как тези стадиони са превърнати от

архитектурни скици в реални сгради?...Пол Шепърд от университета в Бат, експерт в изграждането на футболни стадиони като известния стадион Емирейтс в Лондон...разказва какви неща са важни при изграждането на стадион, как математиката е неразделна част от



*Стадион Емирейтс, Лондон*

процеса на проектиране и защо работата му изисква от него да слуша белгийско техно.”  
(Plus magazine, Stadium maths, 2022)

Много други полезни ресурси публикува КИТ International school. Възпитаниците на това ИВ училище имат достъп до полезна и точна информация, което понякога представлява препятствие поради хилядите уебсайтове и невъзможността да разберем кои от тях са наистина достоверни.

Друг пример за полезна практика е кооперирането с организации и фирми, предоставящи директна помощ при изграждането на ТОК и CAS връзки. Такава е организацията IBMastery: “Ние от IBMastery целим да помогнем на ИВ учениците да се чувстват изключително добре подкрепени. Ние им помагаме да постигнат своите ИВ цели, но също така да развият навиците, уменията и стратегиите, за да бъдат успешни дълго след като завършат. Всеки месец обслужваме около 120 000 ученици и по целия свят.” (IBMastery, 2022). Организацията предлага платен абонамент срещу предоставянето на статии на различна тематика - произход на математически дефиниции, открития, базирани на математиката, неразрешими загадки като “Парадоксът на Зенон за Ахил и костенурката” и др. Учениците могат да използват тези ресурси при проектите си по ТОК и CAS, да се вдъхновяват или директно да черпят информация за личните си разработки.

Друга интересна възможност е включването в планирани дейности - физически или виртуални, предоставяни от фирми, работещи в сферата на образованието. Такава например е организацията Hodder Education. Тя има разработена програма за провеждането на семинари, тип симулации по CAS, по време на които учениците могат да пресъздадат условия за възникване на проблеми и тяхното разрешаване, изискващи познанията им по математика. Примери за такива семинари са посочени в програмата на

Hoddert Education за ноември 2016, Таблица 2.1.

Дейност	Процес	CAS област, които се развиват
Рампа за инвалидни колички	Учениците работят с департамента по дизайн и конструират рампа за училището или дома	креативност, физическа активност, принос към обществото
Статистическо упражнение	Учениците работят с известни личности от спортни клубове, за да анализират своята физическа подготовка и състояние	креативност, физическа активност, принос към обществото
Клуб по математика	Учениците обучават по-малките за справяне с математически предизвикателства	креативност, принос към обществото
Финансови сметки	Учениците се обучават да ръководят и поддържат финансова сметка за някаква благотворителна кампания	принос към обществото

“Таблица 2.1. Обучителни семинари - симулации от Hodder Education” (Hodder Education, 2016, с. 12)

Представените няколко примера за практики при включването на ТОК и CAS в програмата по IB математика показват, че на училищно ниво могат да бъдат предприети мерки, които да повишат взаимодействието между ядрото на Дипломната програмата и курса по математика. Освен всичко, което образователната институция може да предостави на своите ученици, училището би могло да се кооперира с фирми или организации, директно предлагащи помощ в провеждането на IB програмата. Такъв тип метод за обучение извън училищната среда е интересен, различен и води до приобщаването на учениците към по-големи общности от техни връстници, имащи сходни интереси и желания за образование и реализация.

Всички гореизброени мерки в обучението по математика биха могли да доведат до повишаване на резултата на учениците, засилвайки техния интерес, любопитство и удовлетвореност от работата си по предмета. Именно това са част от основните цели на курса по IV математика, от които установих, че зависи успеваемостта на учениците.

### **Методи за стимулиране на работата с графичния калкулатор в процеса на обучение**

Графичният калкулатор сам по себе си е средство за обучение по математика, което би могло да сведе трудните за разбиране понятия и действия до нещо на практика лесно осъществимо чрез интегрирането на технологии. Тази идея за взаимодействие между математиката и технологиите е заложена също в STEM образованието. Точно от него може да се потърсят методи за стимулирането на работата с графичния калкулатор.

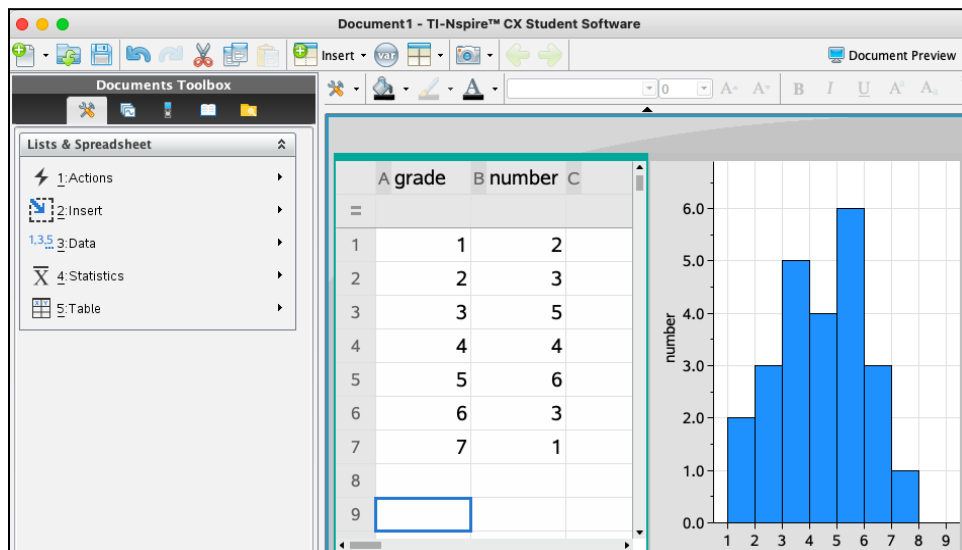
STEM образование е съкращение, което означава наука, технологии, инженерство и математика. “Значимото място на математиката в STEM е свързано с изучаване на самата математика по нов, интересен, интерактивен начин. STEM отхвърля информативното научаване на знания по правила, формули и схеми, като предлага изследователския подход в обучението по математика за разбиране на математическите понятия и твърдения от учениците чрез преоткриването им при решаване на реални проблеми и разкрива интегрираността на знанията от различните области на познанието. Срещата на учениците с приложенията на математиката в живота им дава отговори на въпроса: Защо уча математика?” (Гълабова, Д., 2022)

Използването на графичния калкулатор може да се стимулира чрез STEM практика, като се разработи свой собствен STEM урок от класа. Ето и пример: учениците да получат задание - заснемане на кратка видеодемонстрация за намиране на лице на затворена от криви

област, след което те да презентират видеото пред съучениците си. По този начин те ще усвоят тази функционалност на калкулатора, влизайки в ролята на обучаващи.

Друг начин за насърчаване на използването на калкулатора, взимстван от STEM практиките, е моделът 1:1: “1:1(едно към едно) е модел на организация на учебния процес, при който всеки ученик и учител имат свое електронно устройство и свързан към него персонален профил. Моделът разглежда използването на дигиталните технологии като ресурс и платформа, а не като самоцел.” (Център за творческо обучение, 2022)

Пример за модел 1:1, пренесен в ИВ програмата, е следният: по време на час учителят може да демонстрира решаването на задача с помощта на разработеното компютърно приложение, еквивалент на графичния калкулатор TI-Nspire CX. Едновременно с него учениците повтарят действията на личните си устройства - лаптоп или таблет. Те могат да споделят получения резултат на момента през приложението Airdrop. Това би насърчило учениците да работят по поставената задача чрез софтуера на калкулатора, за да не са само наблюдатели или слушатели. Поставени в позицията на експериментатори, те следва да изпробват функционалностите на графичния калкулатор и да ги възприемат и запомнят още по време на часа, *Изображение 2.1.*



*Изображение 2.1.  
Пример за  
статистически модел  
на данни, разработен  
чрез приложението  
на TI-Nspire CX*

Друг метод за активното включване на калкулатора в учебния процес е изпълняването на заданията, посочени в учебника по ІВ математика. Те са така разработени, че да поставят учениците в непозната среда на нещо неизучено до момента, в която трябва да се приложат функциите на графичния калкулатор с цел експериментиране, даване на хипотеза и достигане до краен резултат и обобщение, *Изображение 2.2.*

### Investigation 4

- 1 Use your GDC to graph  $f(x) = (x)^2$  and  $g(x) = (-x)^2$ . Explain why it appears that there is only one graph.
- 2 For each pair of the functions given below, the graph of  $g$  can be obtained through a **vertical** stretch or compression of the graph of  $f$ . Graph each pair of functions on your GDC and write down the scale factor for the **vertical** stretch or compression.
  - a  $f(x) = x^2$  and  $g(x) = \frac{1}{4}x^2$
  - b  $f(x) = x^2$  and  $g(x) = 4x^2$
- 3 You could rewrite the functions  $g$  in question 2 as  $g(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$  and  $g(x) = (2x)^2$ . The graph of  $g$  can be obtained through a **horizontal** stretch or compression of the graph of  $f$ . Graph each pair of functions on your GDC and write down the scale factor for the **horizontal** stretch or compression.
  - a  $f(x) = x^2$  and  $g(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$
  - b  $f(x) = x^2$  and  $g(x) = (2x)^2$

*Изображение 2.2. “Изследване 4 - трансформации на функции с помощта на TI-Nspire CX”*

(Awada, Buchanan и др., 2019, с. 137)

Освен подбор на методи за стимулиране на работата с графичния калкулатор с цел усъвършенстване на неговата употреба трябва да се набележат и мерки, даващи насоки на учениците кога да прибегнат до калкулатора в работата си. От Анкетата “Използване на графичния калкулатор TI-Nspire CX” стана ясно, че някои ученици изпитват затруднения при разграничаването на задачи тип със или без калкулатор. За да се разреши този проблем, учителят може да приложи следния метод - да решава задачите в два варианта, със или без калкулатор, като фокусира върху силните и слабите страни на двата метода. Да обясни на класа, че ако такава задача се даде на първия ІВ изпит (без калкулатор), то



прилагат вариант 1 за решаването ѝ, ако пък се падне на втория IB изпит (с калкулатор), то прилагат вариант 2. Често практикувам двувариантен модел на решение при тестове и пробни изпити. Минусът е, че отнема повече време, но пък обогатява уменията на учениците за справяне със задачи, изискващи употребата на графичния калкулатор.

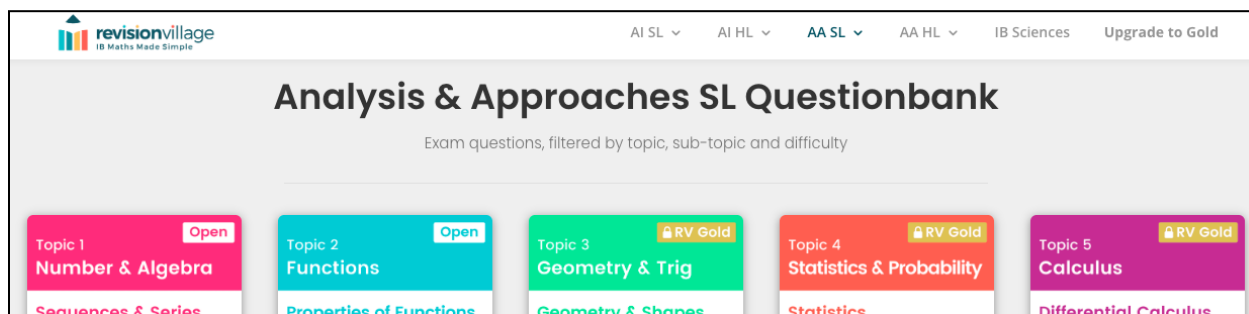
От гореизброените методи за обучение, някои взимствани от STEM образованието, други разработени по време на професионалния ми опит като учител, достигам до заключението, че стимулирането на работата с графичния калкулатор е не само осъществимо, но и водещо до покриването на някои от основните цели на курса - приложение на уменията в алтернативни ситуации и оценяване как развитието на технологиите и математиката си взаимодействат. В резултат на успешната работа с калкулатора TI-Nspire CX учениците следва да повишат оценката си по IB математика.

### **Методи за трениране на схемите за оценяване на двата външни изпита**

В първата част от изложението стана ясно, че начинът на оценяване на задачите с цялото разнообразие от оценки за метод, точност, обосновка и други, е направен в полза на ученика и цели да измери всички техни знания и компетенции по предмета. Ключова роля играе учителят, който трябва да приложи необходимите методи, за да развие именно уменията у всеки ученик да извлича максималната оценка при изписване на решението. Най-прекият път за това е чрез практикуване на схемите за оценяване.

Редица електронни платформи дават възможност за упражняване на изпитни задачи, които са се падали на предишни сесии. Те се разработват така, че да служат като сомоучители и да “обясняват” на потребителите правилните решения, защо се стига до тях и критериите за оценяване. С помощта на тези сайтове учениците могат да практикуват наученото, като това се случва вкъщи по време на подготовката им за тест или изпит.

Revision Village е уебсайт, предоставящ онлайн достъп до примерни изпитни задачи, систематизирани в банка с различни типове въпроси, *Изображение 2.3*.



*Изображение 2.3. “AA SL Questionbank” (Revision Village, 2022)*

Абонаментът за него е платен, но е добра инвестиция за всеки IB ученик. Учителят също може да използва ресурсите на сайта при подготовка за тест или пробен изпит, като в класната стая избере съответния изучен материал и конкретни задачи. Те са групирани по трудност. Към всяка задача има видеорешение, както и схема за оценяване, *Изображение 2.4*.

**Question 1**  
IB Math AA SL Exam Questionbank → Sequences & Series (Medium Questions)

[Maximum mark: 6]

SL Difficulty: Medium

AA Formula Sheet

[Mark Scheme](#)

[\(a\) Video Solution](#)

[\(b\) Video Solution](#)

The Australian Koala Foundation estimates that there are about 45 000 koalas left in the wild in 2019. A year before, in 2018, the population of koalas was estimated as 50 000. Assuming the population of koalas continues to decrease by the same percentage each year, find:

(a) the exact population of koalas in 2022; [3]

(b) the number of years it will take for the koala population to reduce to half of its number in 2018. [3]

*Изображение 2.4. “Sequences and series (Medium Questions): Question 1” (Revision Village, 2022)*

Друг метод за практикуване на схемите за оценяване е чрез директното поставяне на оценки от ученик към съученик. Този метод описва Симон Желязков, учител по английски език в 119. СУ, в статията си към уебсайта [prepodavame.bg](http://prepodavame.bg): “Моите ученици влизат с

ентузиазъм в класната стая, със завършено домашно и готови да задават още въпроси. Не са го направили, защото искат шестица, а защото ще научат нещо. Да, ама не. Просто хубав сън. Реалността е, че си проверяват оценките постоянно. И задават въпроси като: “Колко точки ще ми вземете за...” Тогава решавам да им възложа те да се оценят взаимно.” (Желязков, С., 2022) В статията той описва честата си практика да поставя задача към учениците си, те да влязат в ролята на оценяващи на работата на приятелите си в класа. Целта е да намерят грешките и да точкуват правилно решенията според критериите. Този метод на оценяване от ученик към ученик реално изисква прилагането на схемите за оценяване и въпреки че Симон Желязков практикува тази система в часовете си по предмета английски език, тя би могла да сработи успешно по всеки един предмет в ІВ програмата, включително и по ІВ математика. Учениците ще придобият опит в поставянето на различните видове оценки, така че да са коректни спрямо съучениците си.

Друг метод, който прилагам, откакто съм екзаминатор, е следният: При връщане на тестове или пробни изпити маркирам грешките на учениците и поставям съответните точки точно по начина, както би направил един проверител - без да решава задачите, нанасяйки само корекции. Когато върна писмената работа на учениците, те питат: “Защо имам тези точки за метод или обосновка?” Винаги отделям по 1 учебен час за обсъждане на тестовете, като целя да отговоря на всички въпроси, за да изясня схемата за оценяване. Учениците ми придобиват навик да боравят с типовете оценки. Примерно оценяване на тест на ученик със снимка на работата му се вижда в *Приложение 3*.

Изброените методи за трениране на схемите за оценяване са разнообразни и биха били интересни за учениците, тъй като ги поставят в друга роля, не просто на обучаващи се, а на личности, чието мнение се цени и следва да бъде определящо за личните им развитие.

Практикуването на специфичното оценяване по предмета ІВ математика е от съществено значение. То изгражда умения у учениците за извличане на максимално наученото от тях и води до повишаване на резултатите им.

### **Методи за усъвършенстване на уменията на учителите за аргументирано оценяване на вътрешния елемент**

Работата по изготвянето на вътрешното оценяване от страна на учителя в ролята му на супервайзер е от съществено значение. От неговата аргументация зависи до каква степен поставените точки по критериите ще бъдат потвърдени от външните проверители. Колкото повече професионален опит натрупва един ІВ учител по математика, толкова повече следва да се развива способността му за коректно и прецизно оценяване на математическото проучване.

За да започне преподавателската си дейност в световната мрежа от ІВ училища и за да се развива и усъвършенства впоследствие, всеки учител следва да премине обучение за придобиването на сертификат като учител по ІВ математика. Така е разработена ІВ системата, откакто съществува. По време на обучението от водещи експерти и преподаватели се покриват редица модули, един от които е свързан с всички особености на вътрешното оценяване. Тогава учителите се учат как да оценяват математическото проучване и аргументирано да защитават поставените от тях точки. В професионалната ми кариера като ІВ учител по математика съм преминала през две такива обучения и благодарение на изключителните лектори и техния богат опит съм получила съвети и инструкции как да оценявам. Затова смея да твърдя, че преминаването през такъв уъркшоп за по-неопитни учители е успешен метод, водещ до тяхното усъвършенстване като проверители на вътрешното оценяване.

Друг алтернативен подход за трениране на вътрешното оценяване е запознаването на учениците с петте критерия и примерното оценяване на математическо проучване, изработено през предишна година. По време на час учителят може да разгледа предоставената в учебника информация в раздел “Математическо проучване”, *Изображение 2.5*, да покаже примерна работа и заедно с класа да я оцени, прилагайки критериите и описвайки избора си на точки по всеки един от тях. По този начин ще осъществи две дейности едновременно. От една страна, ще запознае кандидатите с изискванията за писане на математическото проучване. От друга страна, ще обогати своите умения, като пред учениците покаже как се оценява и по-важното - защо се оценява точно с толкова точки.

## Internal assessment criteria

Your exploration will be assessed by your teacher, against the criteria given below. The IB external moderator will use the same assessment criteria.

The final mark for each exploration is the sum of the scores for each criterion. The maximum possible final mark is 20. This is 20% of your final mark for Mathematics: analysis and approaches Standard level.

The criteria cover five areas, A to E

<b>Criterion A</b>	Presentation
<b>Criterion B</b>	Mathematical communication
<b>Criterion C</b>	Personal engagement
<b>Criterion D</b>	Reflection
<b>Criterion E</b>	Use of mathematics

*Изображение 2.5. “Критерии за вътрешното оценяване” (Awada, Buchanan и др., 2019, с. 629)*

Изброените методи за усъвършенстване на уменията на учителя за аргументирано оценяване са както изискване от страна на ИВО, така и необходимост. Стремещт на учителя да подкрепи своите кандидати е строго индивидуален. Той може да не го направи, да спести време от детайлно описание на оценките си по критериите, но до какво ще

доведе това? Проект “SINUS” от 2003 г. към Седмата рамкова програма на Европейския съюз, с ръководител от българска страна акад. Петър Кендеров, има за цел да изследва нови подходи в математическото образование. Едно от най-важните заключения в резултат на направеното петгодишно проучване сред 180 училища от всякакъв вид е следното: “За всеки, който се занимава с образование е ясно, че сами по себе си иновативните учебни програми и образователни стандарти не са гаранция за постигане на положителни промени в преподаването. Качеството на обучението се подобрява или влошава в зависимост от личността на преподавателя. Обучението зависи от професионализма и мотивацията на самите преподаватели. Ефективни промени са възможни...Основната предпоставка за успеха обаче е в това да накараш участващите преподаватели да повярват твърдо в съответните идеи и активно да се включат в процеса на реализиране на промените.” (Баптист, П., 2003, с. 7) Именно това “активно” участие се изисква и от учителите по ІВ математика. Добрият професионалист по ІВ математика осъзнава ролята си на супервайзер на вътрешния елемент като определяща крайната оценка на учениците си. Благодарение на неговата обосновка те могат да повишат резултата си, затова той следва да се стреми именно към тези мерки за усъвършенстване на уменията си за оценяване.

### **Методи за повишаване на знанията и уменията на учениците по ІВ математика**

Усвояването на нови знания по математика е процес, развиващ се с течение на години. Последният етап, обучението по ІВ математика в 11. и 12. клас, е най-значим и определящ успеха на международната диплома за средно образование на всеки кандидат. За да постигне висок резултат, ученикът трябва да е натрупал достатъчно знания и умения за решаването на различни типове задачи, за да може да ги приложи по време на финалните си изпити. Как обаче се осъществява едно успешно обучение на практика? Д-р Борислава

Кирилова, асистент в СУ “Св. Климент Охридски” към катедра “Математика и информатика” описва метода формативно оценяване, като в статията си споделя мнението, че “за да се минимизира осезаемата разлика в усвояването на учебно съдържание, е необходимо да бъдат разнообразени вече прилаганите методи и подходи. Също така, с цел постигане на по-високи резултати от отделните групи ученици, се счита че трябва да се даде повече време за осъществяване на процеса на обучение. Някои от ключовите елементи за постигане на тези цели се крие в една успешно изградена и разработена методика за прилагане в класната стая.” (Кирилова, Б., 2016).

Всички училища имат практики за повишаване на ефективността от учебния процес. Министерството на образованието и науката в България изисква изготвянето на такъв документ от образователните институции. На локално ниво, спрямо особеностите на всяко училище откъм поток ученици, учебни планове, педагогически специалисти, база за работа и други, училищата в България съставят така наречените “Мерки за повишаване на качеството на образованието”. В тях са заложили цели и конкретни дейности за изпълнението им. Част от тези мерки могат да бъдат включени и в ИВ програмата като например:

- “1. Използване на различни форми и начини за практическо прилагане на учебното съдържание...
- 8. Поставяне на ученика в активна позиция по отношение на усвояването на нови знания и практическата им приложимост...
- 10. Изнасяне на уроци в извънучилищна среда...” (ЧПГЧО “Меридиан 22”, 2022)

Тези мерки обаче звучат много общо и за да влязат в употреба, е необходимо да бъдат конкретизирани.

- Дейност 1 - използване на различни форми и начини за практическо прилагане на учебното съдържание

Учителят по математика може да постави проекти на учениците си за изготвяне на реални математически модели на природни процеси като изменението на денонощната или годишната температура, моделирано от тригонометрична функция, или експоненциалния растеж на бактерии, наблюдаван под микроскоп в часовете по биология и др. Работейки по такъв тип изследователска работа, учениците ще трябва да приложат наученото от часовете в ситуация от живота, което ще осмисли усвояването на тези математически теории. Именно така ще запаметят точно този вид знания и умения, защото са приложими. “Институтът по математика и приложения (ИМА)” към Oxford Academic, Великобритания, публикува както редица научни статии по математика, така и такива в помощ на учителите. В журнала “Математическо моделиране в Международния бакалауреат” авторът потвърждава позицията за важността от изучаването на математиката през погледа на нейните приложения: “Математическото моделиране се възприема като един от начините за въвеждане на повече дейности от реалния живот в уроците по математика...Обучението чрез прилагане на знания в реална ситуация е трайно и водещо до развиване на способностите на всеки млад човек...” (ИМА, 2002, с. 80)

- Дейност 8 - поставяне на ученика в активна позиция по отношение на усвояването на нови знания и практическата им приложимост

Има редица практики, които изграждат новите знания чрез директното им откриване от учениците. В ИВ програмата такава мярка е още по-възможна благодарение на графичния калкулатор. Учителят може да постави задача на класа - учениците сами да изследват отместването на една графика в зависимост от промяна на функцията  $y$ . Така те ще



наблюдават закономерности и ще установят от какво зависи всяка трансформация. Когато една нова теория бъде открита чрез експеримент, тя остава по-трайно в съзнанието на ученика. Това от своя страна води до стабилното усвояване на новите знания, свързани с нея.

Поставянето на ученика в активна позиция е много близко до така нареченото учене чрез преживяване. “Учение чрез правене е педагогически метод, основан на идеята, че можете да научите нещо по-добре и по-бързо, ако го практикувате – ако „го правите“, както подсказва името. Методът, описан от американския философ, психолог и образователен реформатор Джон Дюи, изглежда доста ясен. Когато се опитвате да го приложите на практика обаче, може да разберете, че не е толкова очевидно, колкото изглежда.” (Teacher Training College, 2022) Този иновативен подход в образованието е доказал ефективността си и бива прилаган все повече в последните години.

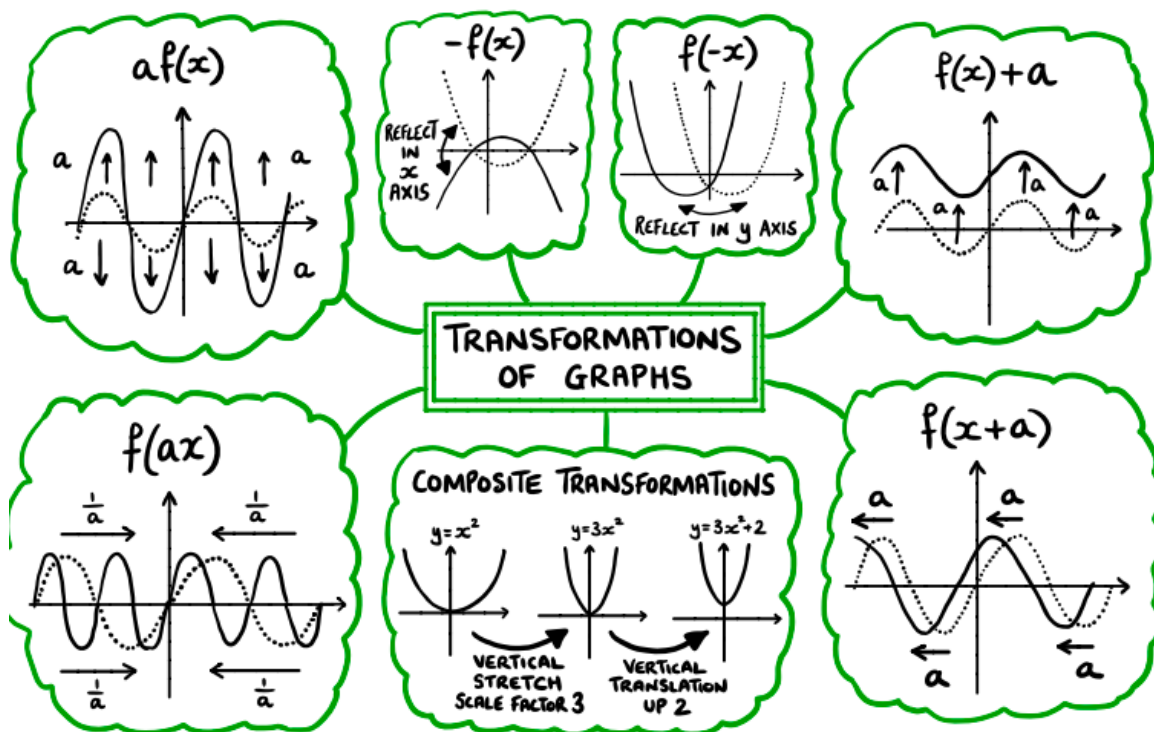
- Дейност 10 - изнасяне на уроци в извънучилищна среда

Тя би могла да се осъществи чрез организиране на посещение на учениците в най-различни фирми, чиито дейности са свързани с технологии, статистика, експерименти и др. Например учителят може да заведе класа в статистическа агенция. Там да се направи презентация за статистиката, която навлиза в ежедневието ни - от промяна на цените на горивата, до растеж или спад в броя на населението на България и др. Реално учениците ще станат свидетели на необходимостта от усвояването на математически знания и умения, защото тяхната бъдеща професия може да зависи от това. Така тяхната мотивация за учене ще се усили.

Дотук разгледах примери за методи в обучението, които са заложили в училищните

политики на образователната ни система. Какво друго може да се направи по време на час, така че ученето да стане по-достъпно и водещо до придобиване на трайни знания?

IBO дава конкретен отговор на този въпрос чрез разработването на така наречените мисловни карти. Те са достъпни на уебсайта на организацията и са публикувани под формата на постери, *Изображение 2.6*.



*Изображение 2.6. "Functions mind map" (IBO, Mathematics mind map, 2019)*

Мисловните карти са инструмент, който дава възможност на учениците да изразят мислите си по креативен и организиран начин. Те представят едновременно голямата картина на познанието и детайлите свързани с нея. Прилагат се успешно при водене на записки, решаване на проблеми, генериране на идеи, запаметяване на информация и други. Учителят би могъл да използва мисловните карти от IBO, като ги постави в класните стаи и те да служат като директен източник на информация. От друга страна обаче, би могъл да възложи на учениците да направят свои собствени мисловни карти по модела на тези от

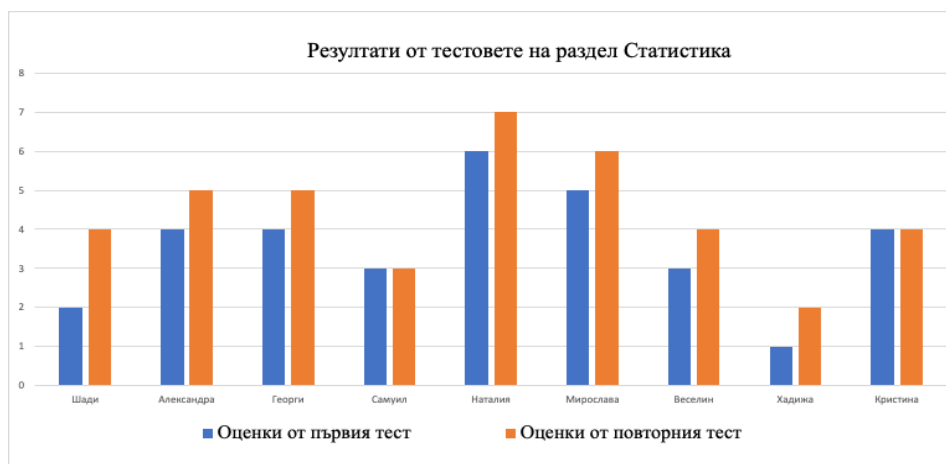
ИВО. Освен, че сами ще открият връзки между различните математически понятия и тяхната употреба, учениците ще визуализират представата си за теорията, която изучават. Така по-трайно биха я запаметили и приложили впоследствие. В доклад към 31. Пролетна конференция на съюза на математиците в България, Цветанка Иванова разглежда приложенията на мисловните карти и достига до извода, че “ “картите на ума” като един от новите методи на съвременното учене увеличават възможностите на учениците за запаметяване и възпроизвеждане на информация; предполагат естетическо удоволствие и създават възможност за умствена релаксация; позволяват да се развива интелекта им и тяхната визуализация.” (Иванова, Цв., 2002)

Освен изброените методи, които биха могли да се считат за по-иновативни и интересни за учениците, съществуват и редица традиционни. Тяхната ефективност е затвърдена през годините и всяко дете, попаднало в българската образователна система, е преживяло тези подходи за обучение от страна на учителите си.

Един традиционен метод за упражняване на изученото по ИВ математика е поставянето на задачи за домашна работа, което дава възможност на учениците да затвърдят знанията си. Въпросът дали даването на домашна работа е ефективен инструмент, или не, е доста спорен в днешно време. Съществуват образователни системи като Холандската, която се счита за една от най-добрите в света, тъй като се класира с почти “100 % грамотност” (Passport to trade, 2022) на възпитаниците си. Според тази система не се дават домашни работи на деца до 10-годишна възраст, за да може те да получат удоволствие и знания от учебния процес в самото училище. В България обаче е заложено разбирането, че повече знания е равно на повече учене вкъщи. Родителите имат очаквания за редовно поставяне и проверяване на домашните работи. Затова учителите в Гимназия “Меридиан 22”

практикуват ежедневно даване на задачи за домашно и в ИВ програмата. Моят опит сочи, че този метод за обучение е ефективен тогава, когато се намери баланс между обема на поставените задачи и времето, с което учениците разполагат за подготовка вкъщи.

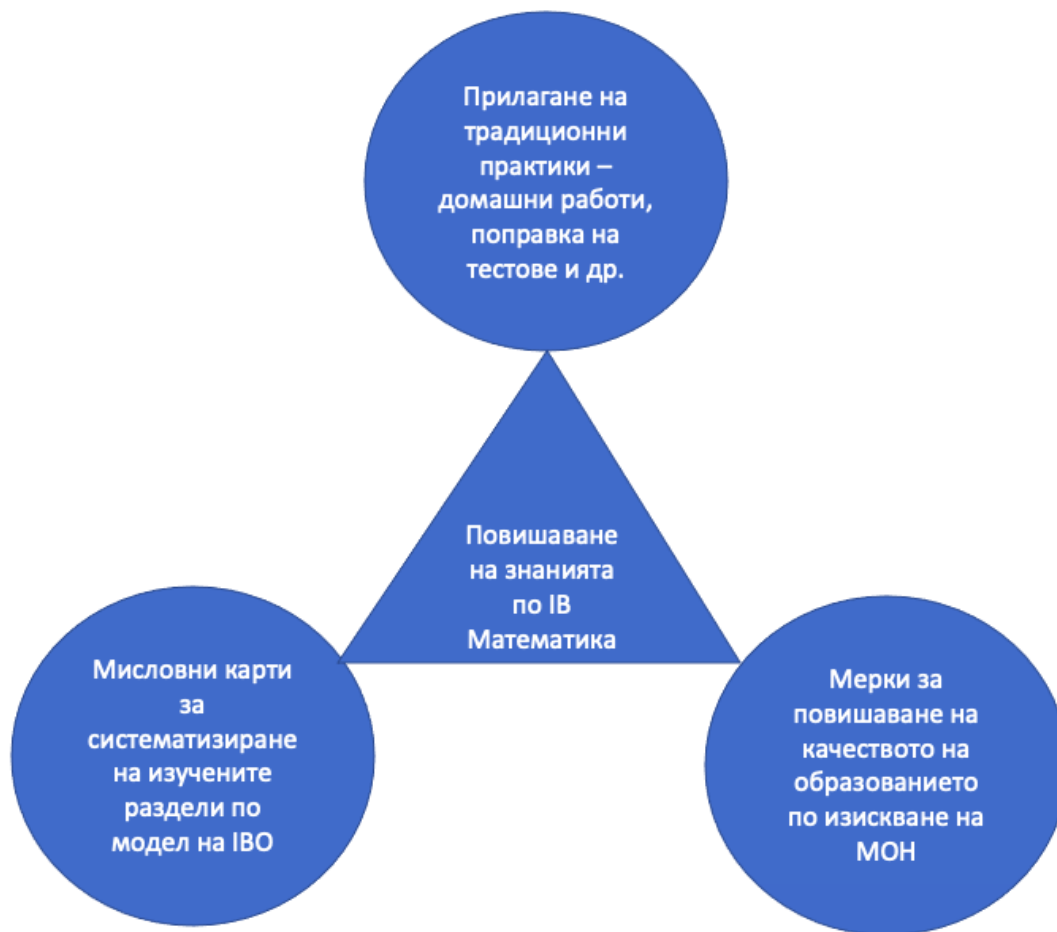
Друг традиционен метод, водещ до повишаване на резултатите по ИВ математика, е даването на повторни тестове. Това е една от техниките за формативно оценяване, която прилагам в практиката си. Когато учениците направят тест и покажат резултат от 4 или по-нисък, ги мотивирам да се подготвят и представят по-добре на повторен тест, като им обяснявам, че оценката измерва моментните им знания и целта ми не е тя да остане окончателна, “казвайки” им, че те знаят за толкова, а да ги стимулира, за да надградят наученото. Ако получат по-висока оценка, тя ще бъде определяща за оформянето на срочния или годишния им успех по предмета. Опитът ми с този метод показва, че всички ученици посрещат идеята за повторен тест положително. Дори някои от тях с резултат 6 се явяват, за да повишат оценката си на 7. В действителност повечето ученици успяват да повишат резултатите си с до 2 единици, *Графика 2.1.*



*Графика 2.1. Резултати от двата теста на учениците от Гимназия “Меридиан 22” за 2021-2022*

Всички ученици са се явили по свое желание, като седем са повишили оценките си, а двама са ги затвърдили. Тази тенденция е трайна и се наблюдава при провеждането на повторни тестове върху всички раздели и с всички класове, с които съм работила.

Обобщение на предложените методи за повишаване на знанията на учениците по математика би могло да се илюстрира чрез *Изображение 2.7*.



*Изображение 2.7. Обобщение на мерките за повишаване на знанията по IB математика*

Всички действия, водещи до ефективно и резултатно обучение, произхождат от отношението на учителя към учебния процес. Той е основната действаща фигура, която развива представата за математика във всеки ученик.

Във втората глава от изложението в тази дипломна работа разгледах мерки, които се прилагат, с цел да повишат както интереса на учениците към математика, така и техните знания и умения. Стабилните базисни знания осигуряват основата, необходима за продължаващо обучение. Училищата имат за задача не само да дадат знания, а да предоставят образование, което само по себе си представлява способност, за да боравим със знанието и да го прилагаме. Програмата по ІВ математика включва елементи като увереност в собствените възможности за справяне с математиката, прилагане на математическите знания към всякакви реални ситуации, способност за използване на математиката като форма на комуникация и изразяване и математическо мислене. Успехът на един ученик по ІВ математика е резултат от взаимодействието между предмета, другите предмети в програмата, общуването в клас, връзката между ученика и учителя, уменията на учителя му и разбира се, изграждането на математически знания от изучения материал. За да разбере нагласата на учениците към предложените мерки в обучението по ІВ математика, проведох анкета, целяща да измери нивото на евентуална значимост на всяка от набелязаните мерки. Учениците са най-важният показател за това дали една училищна практика ще бъде успешна, или не. В следващата трета част от изложението представям резултатите от това проучване и анализ към тях.

### **Глава 3. Анализ на предложените методи**

Предложените мерки биха могли да бъдат категоризирани в две направления:

- целящи да провокират интереса и удоволствието от работата по ІВ математика;
- целящи да стимулират усвояването на трайни знания и умения по предмета.

За да бъде измерена ефективността и на двата типа, формулирах въпросите в анкетата към учениците така, че те да са поднесени чрез примери. По този начин групата, подлежаща на

изследването, би могла да си даде по-ясна представа какво учителят предлага, за да се подобри като цяло работата по ИВ математика.

Мерките за усъвършенстване на уменията на учителите за аргументирано оценяване на вътрешния елемент не са включени в допитването, тъй като прилагането им не зависи от желанието и нагласата на учениците. Освен тях, не е направено допитване и за метод, повишаващ резултата от разширеното есе, елементът от ядрото на ИВ програмата, който е задължителен, но предметът му, както беше споменато в Глава 2., се избира от ученика. За постигането на успешен резултат от писането на разширено есе, стана ясно, че ученикът трябва да избере подходяща тема, отговаряща на неговите интерес в областта на математиката и също така, той да е достатъчно подготвен по предмета, за да е способен да напише такъв вид научна работа.

Към всеки въпрос са предложени 5 нива на измерване на метода:

- 1 - въобще не
- 2 - сравнително малко
- 3 - в някои случаи да, в други не
- 4 - сравнително много
- 5 - абсолютно да

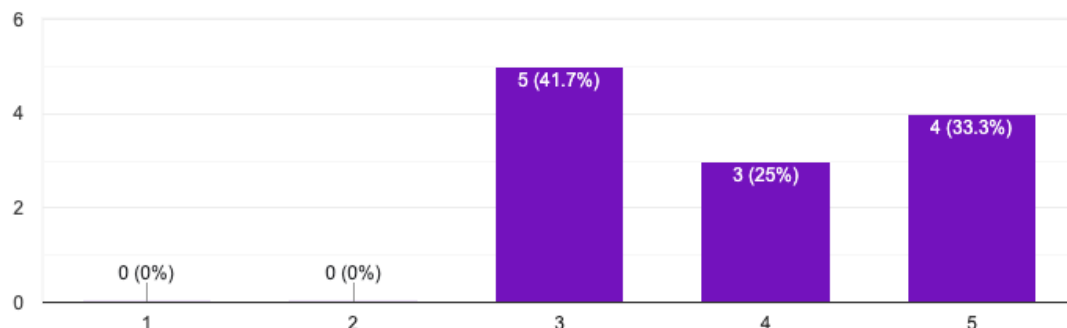
Ето и резултатите от изследването на ефективността на методите с анализ към тях.

1. Метод: Изграждане на онлайн библиотека за достъп до ТОК и CAS ресурси с математическа насоченост.

Въпрос: Училищният ИВ координатор разработва електронна библиотека на уебсайта на Гимназия “Меридиан 22”, предоставяща достъп до проекти по ТОК и CAS с математическа насоченост. До каква степен смятате, че тя би провокирала интереса ви към

IV математиката, търсейки информация там?

12 responses



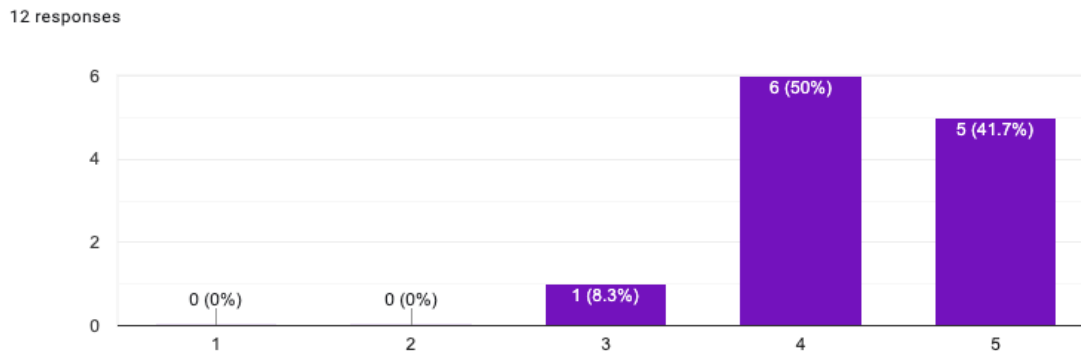
Графика 3.1. Отговори към въпрос 1.

100 % от допитаните дават отговор от средното до максималното ниво. Следователно предложеният метод може да се приеме като подходящ. Учениците са настроени положително към използването на онлайн библиотеки с ресурси по ТОК и CAS с математическа насоченост и повечето от тях (41.7 %) считат, че понякога биха били полезни. Останалите са напълно сигурни, което е достатъчно показателно, за да се предложи такава мярка за повишаване на резултатите по предмета.

## 2. Метод: Платен абонамент към уебсайт с математическа насоченост

Въпрос: Директорът сключва абонамент с платформа, предоставяща онлайн статии с различна математическа тематика извън учебното съдържание, като например: “Топ 10 нерешими задачи в математиката”. До каква степен смятате, че тези статии биха провокирали любопитството ви към предмета?



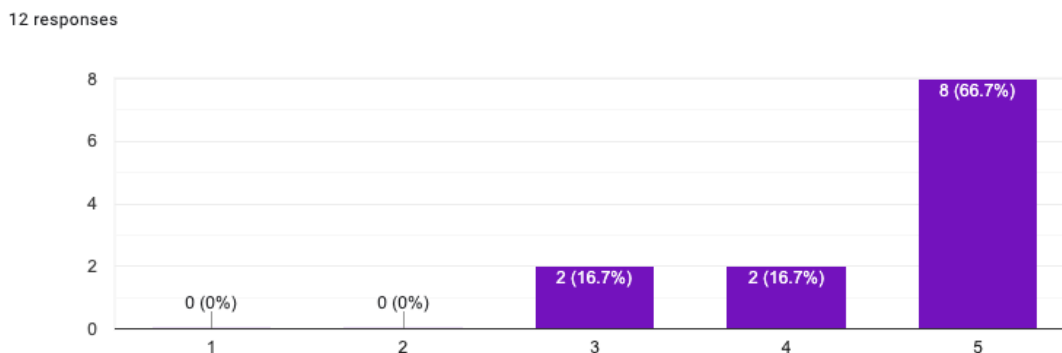


Графика 3.2. Отговори към въпрос 2.

Близо 90 % от учениците одобряват предложениия метод. Те биха проявили интерес към уебсайтове, разглеждащи любопитни математически казуси. Резултатът показва, че тази мярка е добре да се въведе, за да повиши желанието за занимания по математика извън редовните часове.

### 3. Метод: Провеждане на онлайн симулации по ТОК и CAS с математическа насоченост

Въпрос: Училището предлага да се включите в онлайн симулация за проект по CAS на тема: “Изработване на училищен бюджет”. До каква степен смятате, че тази дейност, осъществяваща връзката между IB математиката и CAS, стимулира интереса ви към математиката?

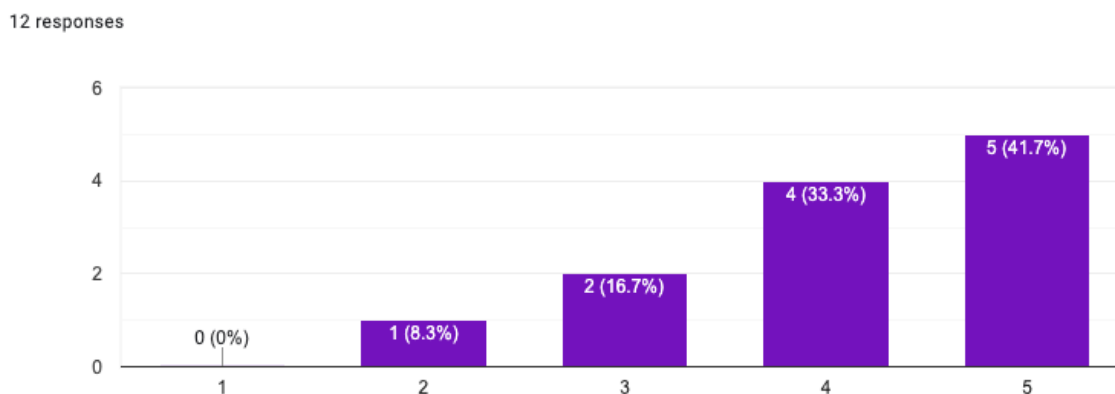


Графика 3.3. Отговори към въпрос 3.

Отговорите клонят към положителната страна на скалата, като тук одобрението на метода за участие в онлайн симулации среща близо 67 % абсолютно съгласие. Следователно този подход може да се счита за успешен и да бъде предложен за реално включване в IB програмата по CAS и математика.

#### 4. Метод: Разработване на урок по модел на STEM

Въпрос: Учителят по IB математика ви поставя за задача да направите кратко видео, в което демонстрирате решението на следната задача чрез TI-Nspire CX: “Намерете лицето на фигурата, ограничена между графиката на функцията  $f(x) = \frac{3e^{-x^2}}{2}$ , абсцисната ос и правите  $x = -1$ , и  $x = 1$ .” До каква степен смятате, че тази задача би развила уменията ви за работа с графичния калкулатор?



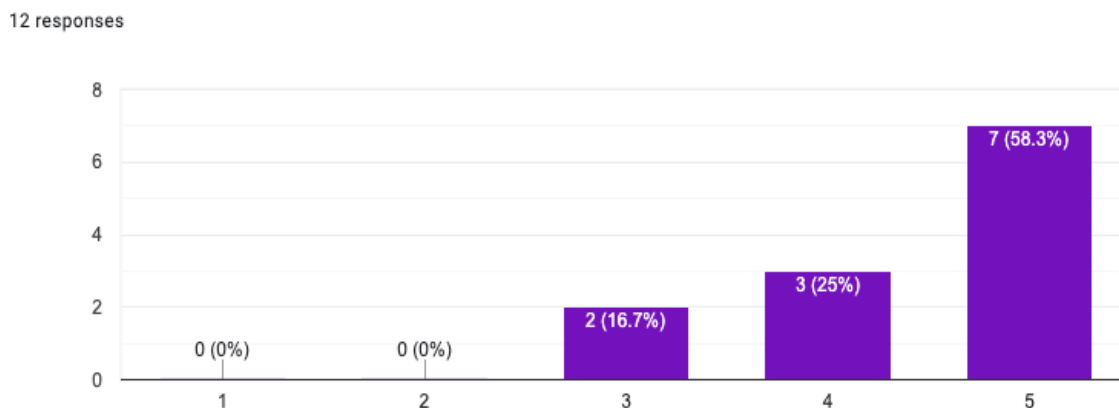
Графика 3.4. Отговори към въпрос 4.

Интересна е тенденцията за приблизително линеен растеж на процента отговори към високото ниво на одобрение. Мненията са разнообразни, но над 50 % подкрепят идеята за STEM урок чрез графичния калкулатор. Може би причината за наличието на оценки 2 и 3 е настоящото затруднение, което някои ученици изпитват при работата си с TI-Nspire CX.

Този метод за практикуване на калкулатора би могъл да стане подходящ, ако след въвеждането му, учителят демонстрира няколко такива урока (видеа), за да покаже на класа как се прави и че е възможно, интересно и полезно за тях.

#### 5. Метод: Прилагане на STEM модел за учебен час 1:1

Въпрос: За да представи новия урок “Трансформации на функции”, учителят предлага заедно да изследват графиката на  $y = x^2$  през компютърното приложение на TI-Nspire CX, да споделите пред класа какви изображения получавате и каква закономерност установявате. До каква степен смятате, че такъв тип урок би развил уменията ви за работа с графичния калкулатор?



Графика 3.5. Отговори към въпрос 5.

Предложеният метод за учебен час 1:1 по модел на STEM среща позитивна нагласа. Едва 16.7 % изпитват колебание кога такъв урок би допринесъл за развиване на уменията им за работа с графичния калкулатор. След като учителят проведе урок 1:1, отново може да проучи мнението на учениците, да получи обратна връзка от тях дали считат часа за полезен.

6. Метод: Изпълняване на графичните изследвания от учебника по ІВ математика

Въпрос: Учителят предлага да направите “Изследване 3” (Awada, Buchanan и др., 2019, с. 340), показано на следното изображение:

**Investigation 3**

Robin starts a business making fishing rods and has to produce a report at the end of the year to show his stakeholders.

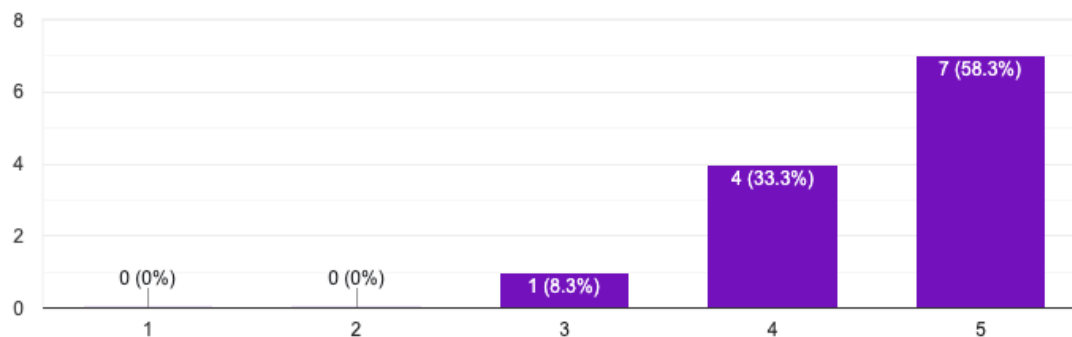
This table was included in his report, and shows the number of rods made ( $x$ ) and the total production cost ( $\$y$ ).

$x$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$y$	100	120	140	144	155	195	250	275	340	360

- 1 Show this data on a scatter diagram.
- 2 Draw a line of best fit on your scatter diagram.

До каква степен смятате, че изпълнението с графичния калкулатор на всички подобни задачи, включени в учебника под формата на “Investigation”, развива уменията ви за работа с TI-Nspire CX?

12 responses



Графика 3.6. Отговори към въпрос 6.

Учениците приемат идеята за работа по така наречените изследвания от учебника, като само 1 от допитаните 12 не е сигурен дали тези упражнения биха били ползотворни, но над 50 % от анкетираните проявяват интерес към предложения метод. Той може да се превърне в успешен и да доведе до развиване уменията за работа с графичния калкулатор,

ако се практикува системно. Тези задания могат да се правят както по време на час, така и за самостоятелна работа вкъщи. Могат да се предават на учителя, който да ги оцени, като това би бил допълнителен стимул за повишаване на текущите резултати.

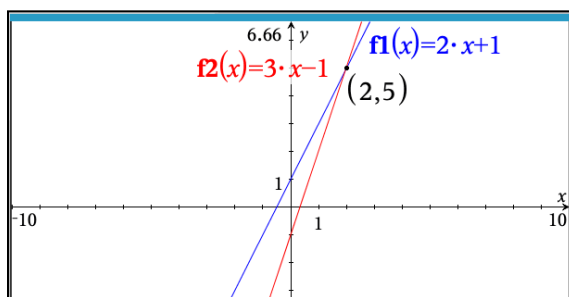
7. Метод: Двувариантен модел на решаването на задачи

Въпрос: Учителят решава следната задача по два начина: “Къде се пресичат правите  $y = 2x + 1$  и  $y = 3x - 1$ ?”

Решение без калкулатор:

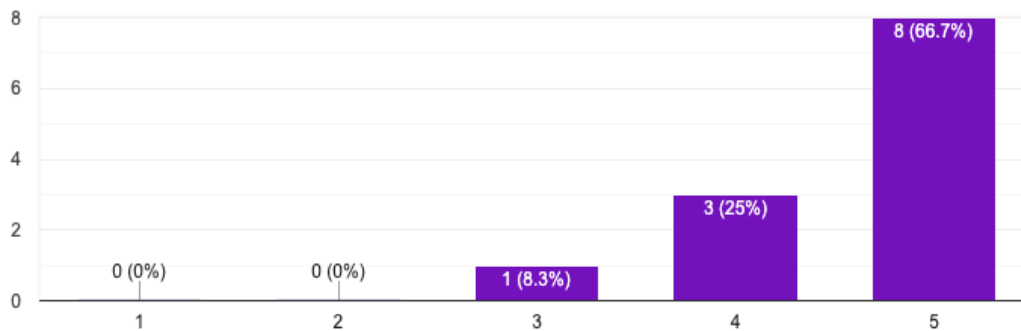
$$2x + 1 = 3x - 1 \Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2; y = 2 \times 2 + 1 = 5$$

Решение с калкулатор:



До каква степен смятате, че решаването на задачите по 2 начина (със/без калкулатор) ще развие умение у вас да преценявате кога да (не) използвате графичния калкулатор?

12 responses

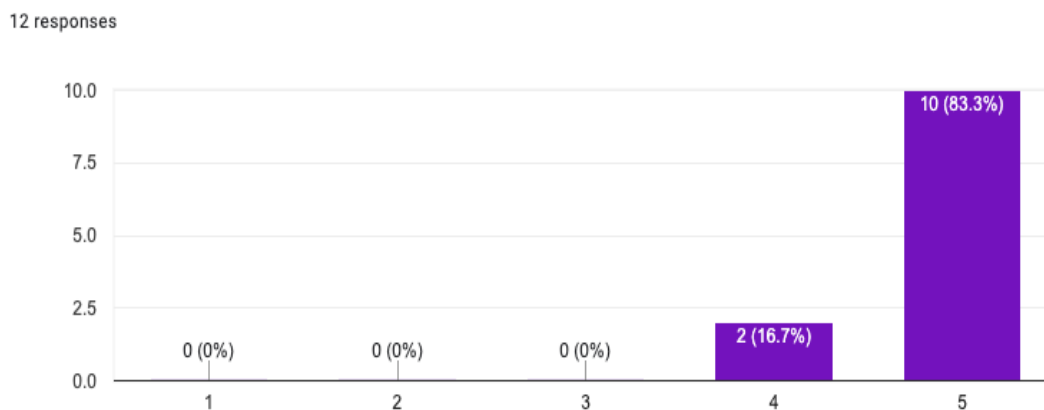


Графика 3.7. Отговори към въпрос 7.

По-голямата група от запитаните смятат, че двувариантният модел на решаване на задачи би им помогнал, за да развият уменията да преценяват нуждата от използването на графичния калкулатор. Определено този метод за работа би бил успешен. В личната си практика го прилагам редовно и наблюдавам интересни ситуации, които провокират желанието на учениците да се научат да се справят и по двата начина.

#### 8. Метод: Използване на платени платформи за упражняване на изпитните формати

Въпрос: Училището закупува абонамент за Revision Village, за да се упражнявате вкъщи при подготовката си за тест или изпит. Там се виждат схемите за оценяване към всяка задача. Бихте ли се възползвали и до каква степен смятате, че тази платформа за самообучение би развила уменията ви за правилно описване на решенията?



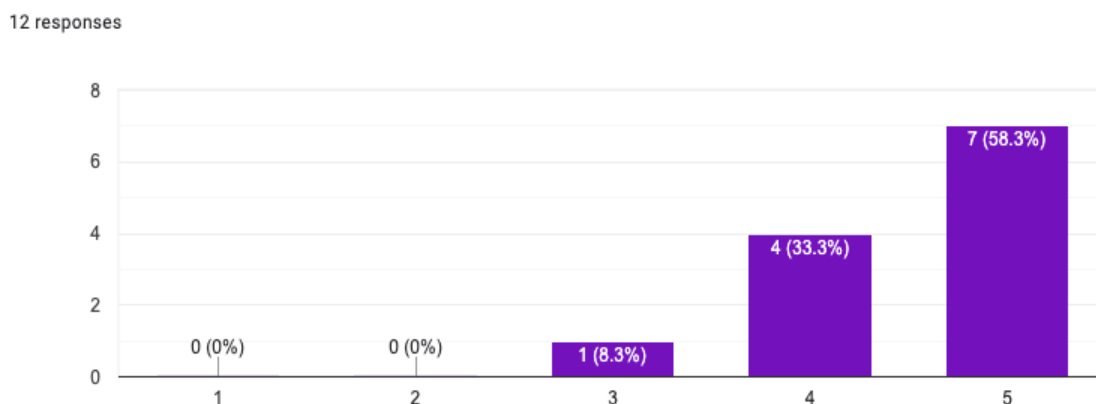
Графика 3.8. Отговори към въпрос 8.

Категоричната позиция на учениците участвали в анкетата е, че уебсайтовете за самоподготовка са полезни. Наблюденията ми през последните години показват, че учениците търсят много често и видеа в интернет пространството, които да им служат като самоучители. Следователно този метод в обучението по ИВ математика трябва да се приложи, защото би довел до повишаване на интереса на учениците за решаване на повече

задачи самостоятелно.

#### 9. Метод: Оценяване на ученик от ученик

Въпрос: Учителят провежда тест. След края на часа записва схемата за оценяване на дъската и раздава тестовете помежду ви на случаен принцип, за да оцени всеки ученик теста на свой съученик. До каква степен смятате, че този метод за оценяване на ученик от ученик би развил уменията ви за разпознаване на различните видове оценки?

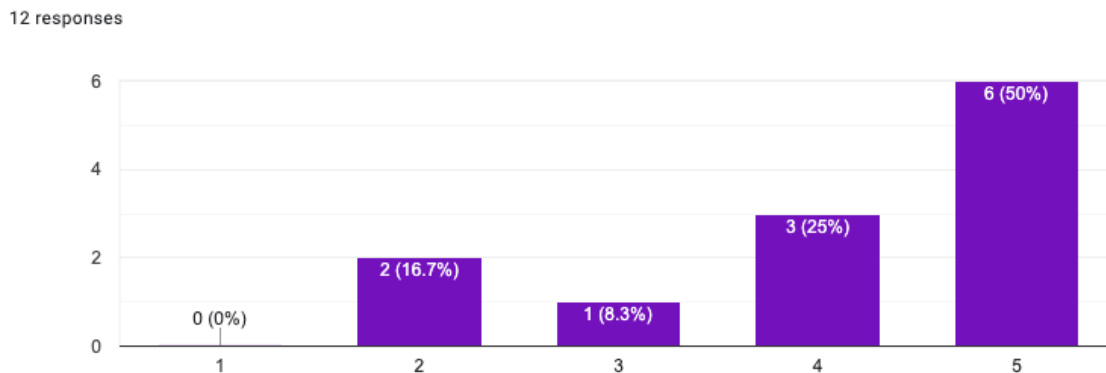


Графика 3.9. Отговори към въпрос 9.

Този метод на взаимодействие между учениците се приема за успешен с близо 60 % на абсолютно съгласие. Ако се приложи на практика, ще се установи дали носи очаквания ефект. Тук възниква и елемент на съпричастност между учениците, защото в тяхна полза би било да не са толкова вискателни в оценяването си, с цел да получат по-висока оценка.

#### 10. Метод: Проверка на тестовете само чрез маркиране на точките

Въпрос: Учителят ви връща тест по ІВ математика, като не са нанесени корекциите и верните решения, а са маркирани само съответните точки. До каква степен това оценяване ще провокира желанието ви да разберете как се прилага схемата за оценяване?



Графика 3.10. Отговори към въпрос 10.

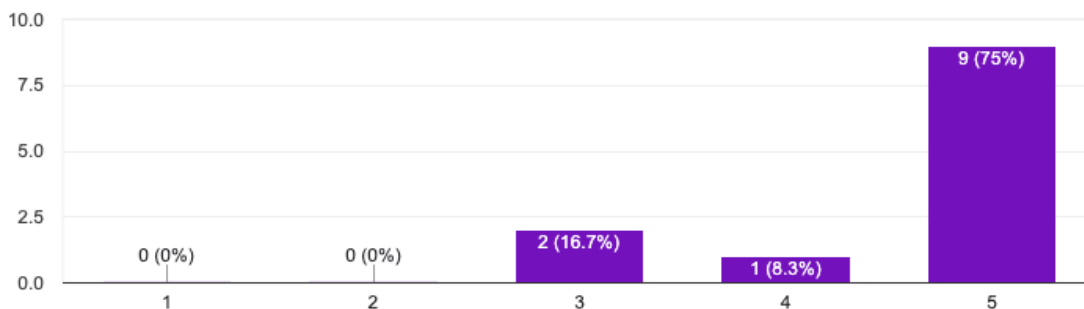
Отговорите на запитаните са колебливи и пръснати по цялата скала с изключение на най-ниското ниво на оценка. Може би причината за това се дължи на настройката на ученика да вижда грешките си и съответните поправки на момента. Обсъждането на решенията на един тест може да има положителен ефект или не, но зависи до каква степен и най-затруднените ученици ще бъдат въввлечени в създамата се дискусия, за да им се изяснят пропуските. Следователно ефективността на тази практика следва да бъде проверена по време на час.

#### 11. Метод: Практическо прилагане на учебното съдържание

Въпрос: Учителят ви поставя проект: “Изследвайте връзката между броя на часовете, които отделяте за сън, и оценките, които получавате в училище на следващия ден.” До каква степен смятате, че такъв тип практическа задача би затвърдила знанията ви по предмета?



12 responses



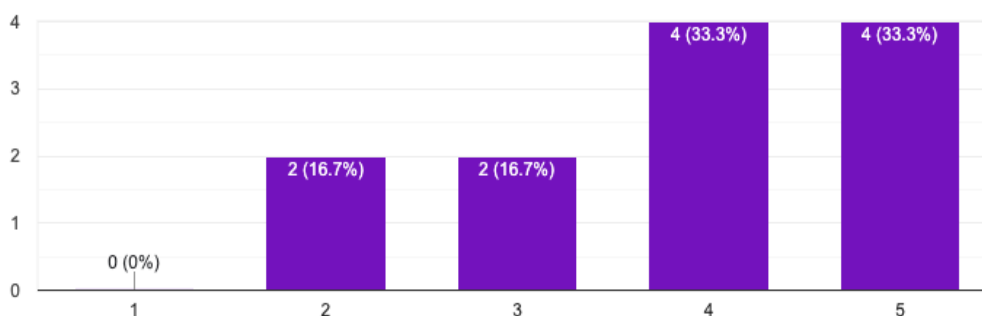
Графика 3.11. Отговори към въпрос 11.

Методът за практическо прилагане на знанията по математика се приема за успешен с 75% положителен отговор. Учениците винаги са изпитвали нуждата да знаят защо трябва да учат определена теория, дали ще им се наложи да я използват на практика. Именно този метод би бил успешен, провокирайки учениците да учат, за да могат.

## 12. Метод: Поставяне на ученика в активна позиция

Въпрос: Учителят ви поставя за задача сами да разработите урока на тема “Графика на експоненциална функция”. До каква степен смятате, че правенето на урок от ученика подпомага разбирането и изучаването на новата теория?

12 responses

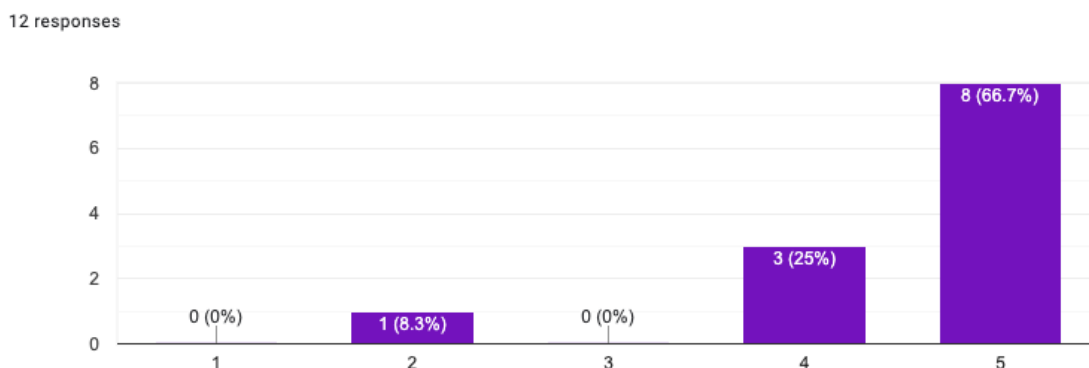


Графика 3.12. Отговори към въпрос 12.

Хистограмата е достатъчно показателна, че учениците изпитват колебания дали разработването на нов урок по математика от тях ще има положителен ефект към усвояването на нови знания. Причината за това би могла да се дължи на практикуването на стандартната практика, в която ученикът е слушател, а не откривател. За да сработи този метод е необходимо да се наложи по-често, докато настъпи момент, в който учениците ще изпитват удовлетворение от самостоятелното им проучване на непознати теми. То неминуемо ще повиши както интереса им към математиката, така и самочувствието им, че могат да развият много повече умения, отколкото ако черпят информация наготово.

### 13. Метод: Изнасянето на урок в извънучилищна среда

Въпрос: Учителят ви предлага да посетите известна хранителна верига. Там служителите ще направят презентация за планиране приходите и разходите, връзката им с потока от клиенти и часовите диапазони с максимално потребление. До каква степен смятате, че този урок извън училище би ви провокирал да учите повече по ИВ математика, защото може да приложите знанията, които получавате на практика, след време?



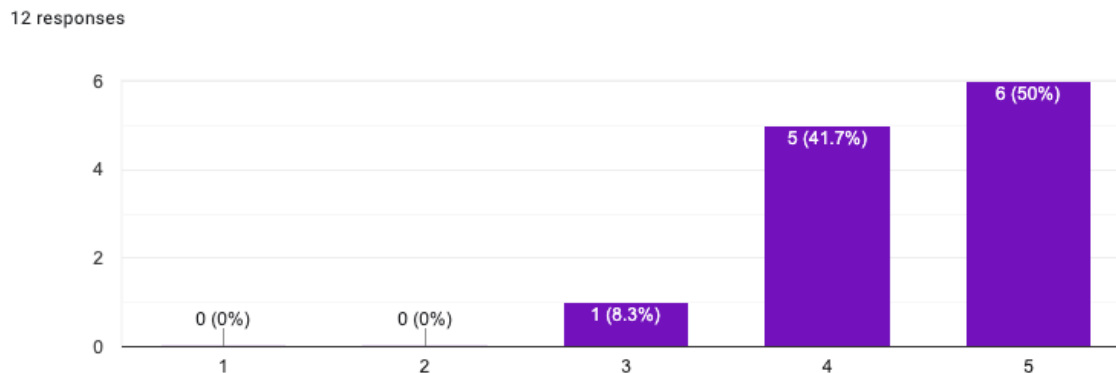
Графика 3.13. Отговори към въпрос 13.

Изнесените уроци се възприемат изцяло положително, както казват близо 67 % от анкетиранияте. Единствено 1 ученик не смята тази практика за ефективна и за мен би

представлявало интерес да разбере защо. Да се види как математическата теория влиза в живота ни на практика е интересно за учениците. Следователно този метод за обучение извън училище би могъл да се счита за успешен, според мнозинството от анкетирани.

#### 14. Метод: Изготвяне на мисловни карти

Въпрос: Учителят ви поставя за задача да изготвите мисловна карта, показваща приложенията на “Диференциално и интегрално смятане”. До каква степен смятате, че тази дейност би затвърдила знанията ви по предмета?

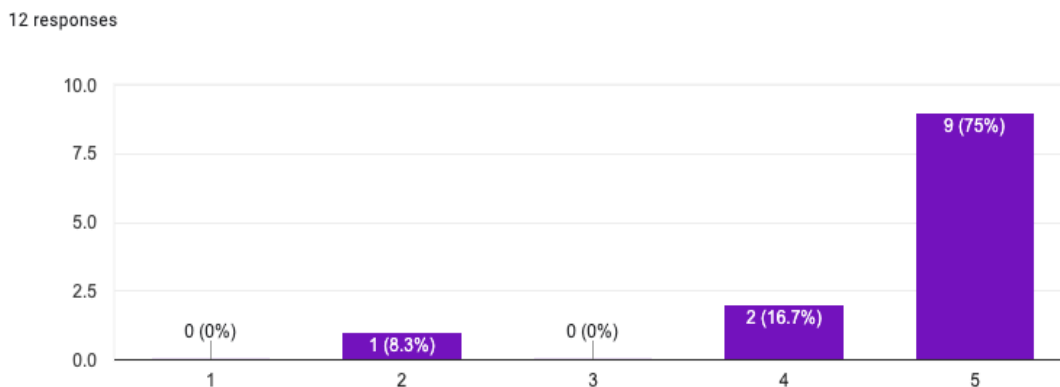


Графика 3.14. Отговори към въпрос 14.

Създаването на мисловни карти среща 50 % абсолютно одобрение сред учениците и близо 90 % позитивна нагласа. Знанията по ИВ математика определно биха могли да се затвърдят чрез този метод.

#### 15. Метод: Поставяне на домашни работи

Въпрос: Учителят ви по ИВ математика не пропуска да даде домашна работа в края на всеки час. До каква степен смятате, че това би затвърдило знанията ви по предмета?

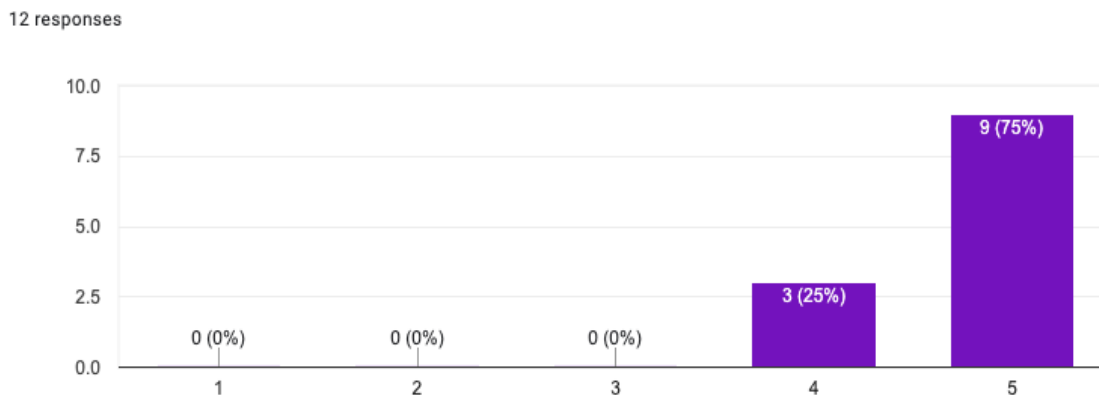


Графика 3.15. Отговори към въпрос 15.

Колкото и да твърдим, че учениците не обичат домашните работи, те изпитват нуждата да им се изискват такива задачи и явно оценяват ефективността от самостоятелната подготовка. Хистограмата показва категоричното мнение на анкетираните - близо 98 % смятат, че домашната работа е необходима, за да затвърждават знанията си по предмета.

#### 16. Метод: Повторно даване на тест

Въпрос: Учителят ви предлага възможност да повишите резултата си върху раздел “Функции и уравнения”, като се явите на повторен тест след няколко дни, достатъчно време, за да се упражнявате повече. До каква степен смятате, че тази практика би довела до по-високото усвояване на знания по ІВ математика?



Графика 3.16. Отговори към въпрос 16.

Методът за повторно даване на тест се приема позитивно. Всички ученици са дали отговор, че биха се възползвали от тази възможност, явно осъзнавайки, че ако учителят им даде повече време за подготовка, те могат да се справят доста по-успешно. Следователно тази практика би довела до повишаване на резултатите. Същите наблюдения имам и аз, тъй като я прилагам най-редовно.

За да направя едно финално обобщение на предложените 16 метода, ще ги разгранича в две категории - такива, получили изцяло средни или положителни оценки 3, 4 или 5, и такива с процент и на негативна оценка 2. Оценка 1 въобще няма, което е показателно за това, че подборът на методите включва само подходящи такива.



*Графика 3.17. Процентно отношение на двете категории методи*

На *Графика 3.17* се вижда процентното отношение на двете категории методи. От нея може да се заключи, че има предпоставка предложените методи да се превърнат в успешни. Този анализ се уповава изцяло на преценката на учениците, сред които е направено запитването за ефективността от изследваните методи. Разбира се, ако проучването се насочи към по-голяма група от ученици, от няколко IV училища, то ще установи дали *Графика 3.17* би изглеждала сходно или не.

## Заклучение

Изследователската цел на дипломната работа на тема “Подбор на методи в обучението по математика с цел повишаване резултатите на учениците по програмата на Международния бакалауреат” беше да открие методи, които представляват доказали се вече успешни практики, водещи до по-качествено образование, за може те да бъдат пренесени в обучението по ІВ математика. Изложението премина през три етапа.

В Първата глава бяха разгледани параметрите на предмета ІВ математика като част от общата програма на Международния бакалауреат. Бяха набелязани основни дейности, които изискват внимание при подбор на методи в обучението по ІВ математика. За да стане ясно какво стои зад теоретичното разбиране на понятието “методи”, бяха разгледани причинно-следствените връзки за постигането на добри резултати по ІВ математика. Тази теоретична част постави основите на изследователската теза.

Във Втората глава се представиха проучвания за методи, които са широко прилагани в световен мащаб не само в обучението по математика, а в цялостно училищно образование. Всеки метод беше анализиран с оглед на възможността му да бъде приложен в работата на учителя по ІВ математика. Подборът на методи беше насочен към няколко дейности, но главно систематизирани в две направления - такива, развиващи интереса и провокиращи любопитството в ученика за работа по ІВ математика и други - директно въздействащи върху учебния процес и целящи да доведат по трайно усвояване на знания и умения по предмета.

В Третата глава се представи практическо изследване на евентуалната ефективност на предложените методи. За целта беше направено собствено проучване под формата на анкета, в което чрез нагледни примери подобрите методи бяха зададени към групата от

анкетирани ученици. Участниците в изследването класифицираха степента на полезност или приложимост на методите с оглед на това, дали те биха довели до по-трайно и успешно обучение по ІВ математика.

От всичко разгледано в изложението става ясно, че два основни фактора са предпоставка за висок резултат - любов и интерес към предмета и количество придобити знания и умения по време на учебния процес през двете години. Дори първият фактор, позитивното отношение към математиката, предхожда втория - трупането на знания. За да е успешно едно обучение, преди всичко трябва да е желано и да е обвито с много точна мотивация от страна на обучаващия се. Само по себе си обучението е всестранен процес, ръководен от учителя и рефлектиращ върху ученика, защото именно той е в центъра на образователната система.

Направеното проучване имаше за цел да установи от какво зависят високите резултати в обучението по ІВ математика и има ли методи, които биха оказали позитивен ефект върху този процес. Определено изследователската цел беше постигната, достигайки се до конкретни идеи за ефективни методи. Принос към този резултат беше собственото проучване в Трета глава, с включен анализ към всяка от предложените мерки за обучение по ІВ математика.

Тезата би могла да бъде доразвита в бъдеще, като проучването се разшири и обхване други ІВ училища. Разликата между едно малко ІВ училище с около 20 на брой ученици в двете години на програмата и голямо ІВ училище, имащо капацитет да обучава над 200 кандидати, е съществена. Освен броят на учениците има значение и техния потенциал, и способността им да учат. В Гимназия “Меридиан 22” няма ученици със специални образователни потребности в ІВ програмата, но тя е насочена и към такива деца. Тоест в

бъдеще биха могли да се проучат нагласите към предложените методи сред ученици, изпитващи обучителни затруднения, защото е важно те да бъдат интегрирани подходящо в образователната система.

Работата по изготвянето на това изследване беше удовлетворяваща и най-важното - значима. То би могло да послужи като основа за бъдещи учители по ІВ математика, за да започнат успешно кариерата си още от самото начало и да подготвят едни добре обучени ученици, обичащи математиката и способни да се реализират поради високите си резултати.



## Библиография

**Awada, N и др.** (2019) *Mathematics: Analysis and Approaches Standard Level: Course Companion*. United Kingdom: Oxford University Press.

**IBMastery.** (2022) *Mathematics notes - Theory of knowledge* [онлайн]. Достъпно на: <https://www.ibmastery.com/blog/mathematics-notes-theory-of-knowledge> [Посетено на 28.11.2022]

**IBO.** (2017) *Diploma Programme Grade Descriptors* [онлайн]. Достъпно на: <https://resources.ibo.org/dp/resource/11162-46482/?> [Посетено на 25.11.2022].

**IBO.** (2016) *Extended essay guide* [онлайн]. Достъпно на: <https://resources.ibo.org/dp/subject-group/Extended-essay-first-assessment-2018/resource/11162-43483/?> [Посетено на 25.11.2022].

**IBO.** (2019) *Mathematics: analysis and approaches guide* [онлайн]. Достъпно на: [https://resources.ibo.org/dp/subject/Mathematics-2021-analysis/works/dp\\_11162-53994?root=1.6.2.2.5.3](https://resources.ibo.org/dp/subject/Mathematics-2021-analysis/works/dp_11162-53994?root=1.6.2.2.5.3) [Посетено на 25.11.2022].

**IBO.** (2019) *Mathematics: analysis and approaches teacher support material* [онлайн]. Достъпно на: [https://resources.ibo.org/dp/subject/Mathematics-2021-analysis/works/dp\\_11162-54449?](https://resources.ibo.org/dp/subject/Mathematics-2021-analysis/works/dp_11162-54449?) [Посетено на 25.11.2022].

**IBO.** (2019) *Mathematics mind map* [онлайн]. Достъпно на: <https://resources.ibo.org/dp/subject/Mathematics-2021-analysis/topic/Mind-map?> [Посетено на 30.11.2022].

**IBO.** (2016) *Mathematics Standard level Paper 1, TZ1* [онлайн]. Достъпно на: [https://freeexampapers.com/exam-papers/IB/Maths/Standard/2016-May/Mathematics\\_paper\\_1\\_TZ1\\_SL.pdf](https://freeexampapers.com/exam-papers/IB/Maths/Standard/2016-May/Mathematics_paper_1_TZ1_SL.pdf) [Посетено на 25.11.2022].

**IBO.** (2018) *Technology in the DP Mathematics Classroom* [онлайн видео]. Достъпно на: <https://resources.ibo.org/dp/subject/Mathematics-2021-analysis/topic/Videos/videos/dp-gen5d-technology-classroom/> [Посетено на 25.11.2022].

**IBO.** (2022) *The IB Diploma Programme and Career-Related Programme Final Statistical Bulletin: May 2022 Assessment Session* [онлайн]. Достъпно на: <https://ibo.org/globalassets/new-structure/about-the-ib/pdfs/final-statistical-bulletin-dp-cp-may-2022.pdf> [Посетено на 25.11.2022].

**IMA.** (2002) *Mathematical modelling in the international baccalaureate, teacher beliefs and technology usage* [онлайн]. Достъпно на:  
<https://academic.oup.com/teamat/article-abstract/21/2/67/1733746?login=true#no-access-message> [Посетено на 30.11.2022].

**Hodder Education.** (2016) *Linking CAS experience and academic subjects* [онлайн]. Достъпно на:  
[https://www.hoddereducation.co.uk/media/Documents/magazine-extras/IB%20Review/IBRev%203\\_2/IBReview3\\_2\\_CAS.pdf?ext=.pdf](https://www.hoddereducation.co.uk/media/Documents/magazine-extras/IB%20Review/IBRev%203_2/IBReview3_2_CAS.pdf?ext=.pdf) [Посетено на 28.11.2022]

**KIT International School India.** (2022) *TOK Resources* [онлайн]. Достъпно на:  
<https://kiitislibrary.weebly.com/ib-tok-in-mathematics.html> [Посетено на 28.11.2022]

**Passport to trade.** (2022) *Холандия: Образование* [онлайн]. Достъпно на:  
<https://businessculture.org/bu/western-europe/netherlands/> [Посетено на 30.11.2022]

**Plus.** (2022) *Stadium maths* [онлайн списание]. Достъпно на:  
<https://plus.maths.org/content/index.php/podcast-5-december-2007-stadium-maths> [Посетено на 28.11.2022].

**Revision Village.** (2022) *Analysis & Approaches SL Questionbank* [онлайн]. Достъпно на:  
<https://www.revisionvillage.com/ib-math-analysis-and-approaches-sl/questionbank/> [Посетено на 29.11.2022]

**Teacher Training College.** (2022) *Three powerful examples of Learning by Doing* [онлайн]. Достъпно на: <https://www.dns-tvind.dk/examples-of-learning-by-doing/> [Посетено на 30.11.2022]

**Баптист, П.** (2003) *Sinus International* (превод Давидова, Т.), София, изд. “Регалия 6”

**Кирилова, Б.** (2017) *Методът формативно оценяване през погледа на Б. Блум*, списание “Образование и технологии”, бр. 7 от 2016 г., София, изд. “Изкуства”, с. 60

**Гълъбова Д.** (2022) *Развиване на STEM компетентности в бъдещи учители по математика в тенденцията на STEM образованието*, сборник “Математика и математическо образование”, април 2022, София, БАН, с. 127

**Данибон.** (2021) *Класация на училищата в България според матурата по БЕЛ в 12. клас (2021)* [онлайн]. Достъпно на:  
<https://danybon.com/obrazovanie/rezultati-dzi-uchilista-predmeti-2021/#> [Посетено на 8.12.2022]

**Данибон.** (2022) *Справка за минималния и максималния бал по паралелки в София към дата 19.07.2022* [онлайн]. Достъпно на: <https://danybon.com/obrazovanie/spravka-min-max-19-july-2022/> [Посетено на 8.12.2022]

**Дидева.** (2022) *Статистика на успеваемостта от национално външно оценяване* [онлайн]. Достъпно на: <https://dideva.alle.bg/> [Посетено на 25.11.2022].

**Желязков, С.** (2022) *“5 начина да изместим фокуса от оценките към ученето”* [онлайн]. Достъпно на: <https://prepodavame.bg/5-nachina-da-izmestite-fokusa-ot-otsenkite-kam-ucheneto/> [Посетено на 29.11.2022]

**Иванова, Цв.** (2002) *Приложение на интелектуалните карти в обучението по математика*, сборник “Математика и математическо образование”, април 2002, София, БАН, с. 254

**Петров, П.** (2017) *Развитие на методиката на обучението по математика*, списание “Математика и информатика”, бр. 1 от 2017 г. , София, изд. “Азбуки”, с. 11

**Център за творческо обучение.** (2022) *Модел 1:1* [онлайн]. Достъпно на: <https://cct.bg/stem/model-1-1/> [Посетено на 28.11.2022]

**ЧПГЧО Меридиан 22.** (2022) *Мерки за повишаване на качеството на образованието* [онлайн]. Достъпно на: <https://highschool.meridian22-edu.com/new-page-24/measures> [Посетено на 30.11.2022]

## Приложение 1. Анкета “Цели на курса по Mathematics: Analysis and Approaches”

Моля, сложете отметка на тези от целите, които мислите, че сте успели напълно или до някаква степен да покриете през първата година (11. IB): \*

- Да развиете любопитство и удовлетворение от математиката, да оцените нейната сила и елегантност
- Да развиете разбиране на понятията, принципите и същността на математиката
- Да комуникирате ясно на математически език; сбито, но съдържателно и убедително в различни ситуации
- Да развиете логическо и креативно мислене, упорство и постоянство при решаването на задачи, за да придобиете увереност при използването на математиката
- Да използват и усъвършенстват абстрактното си мислене
- Да оцените как процесите на развитието на технологиите и на математиката влияят един на друг
- Да прилагате уменията си в алтернативни ситуации, в други области на познанието, както и в бъдещи открития в локалните и глобални общности, в които се намират
- Да оценяват моралните, социалните и етични въпроси, които се пораждат в работата на математиците
- Да оценяват универсалността на математиката и нейните мултикултурни, интернационални и исторически перспективи
- Да оценяват приноса на математиката към другите науки и предмети в IB програмата
- Да развиете умения за критическо и рефлексивно мислене, както върху собствената си работа, така и върху тази на техните съученици например
- Да разширите независимо и съвместно познанията си по математика

## Приложение 2. Анкета “Използване на графичен калкулатор TI-Nspire CX”

Затруднява ли ви изцяло или понякога използването на графичния калкулатор TI-Nspire CX по математика? \*

Да

Не

Моля, отбележете кои смятате, че са причините за затруднението ви при използването на калкулатора: \*

Не намирам калкулатора като полезно средство и съответно нямам интерес да се науча как да го използвам

Има прекалено много функции и не разбирам коя в какъв тип задачи да приложя

Не съм сигурен/на кога да използвам калкулатора

Смятам, че без калкулатор е по-лесно и затова избягвам да го използвам

Не се упражнявам достатъчно за работа с калкулатора

Учителят ми не демонстрира често функциите на калкулатора и аз не мога да ги усвоя добре

### Приложение 3. Примерно оценяване с поставяне на точки

TEST 4 SL – CHAPTER 5: DIFFERENTIATION

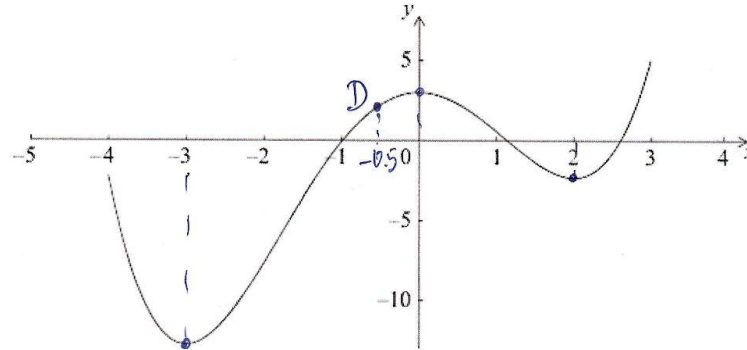
DATE: 2.11.22

46 minutes

NAME: Khadija Alyeva

1. (without GDC) A function  $f$  is defined for  $-4 \leq x \leq 3$ . The graph of  $f$  is given below.

315



The graph has a local maximum when  $x = 0$ , and local minima when  $x = -3, x = 2$ .

- (a) Write down the  $x$ -intercepts of the graph of the derivative function,  $f'$ . (3)
- (b) Write down all values of  $x$  for which  $f'(x)$  is positive. (2)
- (c) At point D on the graph of  $f$ , the  $x$ -coordinate is  $-0.5$ . Explain why  $f''(x) < 0$  at D. (1)

(Total 6 marks)

Working

(a)  $f' = 0$  at  $x = -3, 0, 2$  (local min/max)  
 A1 A1 A1

(b)  $f' > 0$  for  $x \in [-1; 1]$  wrong RO  
 AO

(c) Look at graph, point D.  $\Rightarrow f''(x) < 0$ . wrong  
 RO