Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Факултет по Математика и Информатика

Катедра: Обучение по математика и информатика

Специалност: Иновации и мултидисциплинарност в задължителната подготовка по математика, информатика и информационни технологии

ДИПЛОМНА РАБОТА

/Магистърска степен/

Тема на дипломната работа:

Метод на инверсията при решаването на задачите за построение и технологии за изследването им

Дипломант: Цветелина Мирославова Йорданова, *фак. №* 1MI300012

Научен ръководител: доц. д-р Таня Тонова, *катедра* „Обучение по математика и информатика“

Консултант: доц. д-р Филип Петров, *катедра* „Обучение по математика и информатика“

София, 2024

Съдържание

– *Увод* – 8

Цел на дипломната работа 10

Задачи на дипломната работа 10

Обект на дипломната работа 10

Предмет на дипломната работа 10

– *Глава I. Избор на средства* – 11

– *Глава II. Методически насоки* – 16

– *Глава III. Метод на инверсията* – 20

1. Свойства на инверсията 20

2. Степен на точка относно окръжност 24

3. Построяване на образ на точка при инверсия 25

I. Построяване на образ на точка, *външна за инверсионната окръжност* 25

II. Построяване на образ на точка, *вътрешна за инверсионната окръжност* 26

4. Построяване на образ на права при инверсия 27

I. Построяване на образ на права, *минаваща през центъра на инверсията* 27

II. Построяване на образ на права, *неминаваща през центъра на инверсията* 27

5. Построяване на образ на окръжност при инверсия 29

I. Построяване на образ на окръжност, *минаваща през центъра на инверсията* . 29

II. Построяване на образ на окръжност, *неминаваща през центъра на инверсията* 30

III. Образ на окръжност, *ортогонална на инверсионната окръжност* 31

6. Инверсията относно окръжност и симетрията относно права 33

Задача 3.1. 35

Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава III. 36

Глава IV. - Приложение на метода на инверсията в геометрията на пергела - 37

Задача 4.1. 38

Задача 4.2. 42

Задача 4.3. 43

Задача 4.4. 44

Задача 4.5. 45

Задача 4.6. 47

Задача 4.7. 48

Задача 4.8. 50

Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава IV. 52

- Глава V. Аполониеви задачи - 54

Задача 5.1. 57
Задача 5.3. 57
Задача 5.6. 63
Задача 5.7. 69
Задача 5.8. 76
Задача 5.9. 85
Задача А. 94
Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава V. 109
- Глава VI. Задачи, решаването на които може да се сведе до решаването на Аполониеви задачи – 111
Задача 6.1. 111
Задача 6.2. 114
Задача 6.3. 117
Задачи за упражнение 120
Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава VI. 121
– Глава VII. Помощи задачи – 122
Задача 7.1. 122
Задача 7.2. 123
Задача 7.3. 124
Задача 7.4. 127
Задача 7.5. 128
Задача 7.6. 130
Задача 7.7. 131
Задача 7.8. 133
Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава VII. 135
Приложения към дипломната работа 135
– Заключение – 136
– Библиография – 137

Списък с фигурите

Фигура 1: Метод на инверсията ... 20
Фигура 2: Ъгъл между две окръжности ... 21
Фигура 3: Ортогонални окръжности ... 22
Фигура 4: Ъгъл между права и окръжност ... 22
Фигура 5: Ортогонални права и окръжност ... 23
Фигура 6: Запазване на ъглите при инверсия – 2 ... 23
Фигура 7: Запазване на ъглите при инверсия – 1 ... 23
Фигура 8: Успоредни образи при инверсия ... 24
Фигура 9: Степен на външна за инверсионната окръжност точка ... 24
Фигура 10: Степен на вътрешна за инверсионната окръжност точка ... 25
Фигура 11: Построяване на образ на външна за инверсионната окръжност точка ... 25
Фигура 12: Построяване на образ на вътрешна за инверсионната окръжност точка ... 26
Фигура 13: Построяване на образ на права, минаваща през центъра на инверсия ... 27
Фигура 14: Построяване на образ на права, неминаваща през центъра на инверсия ... 27
Фигура 15: Образ на права, пресичаща инверсионната окръжност ... 28
Фигура 16: Образ на права, допираща се до инверсионната окръжност ... 28
Фигура 17: Построяване на образ на окръжност, минаваща през центъра на инверсия ... 29
Фигура 18: Образи на окръжности, допиращи се в центъра на инверсия ... 29
Фигура 19: Построяване на образ на окръжност, неминаваща през центъра на инверсия ... 30
Фигура 20: Построяване на образ на окръжност, неминаваща през центъра на инверсия - доказателство ... 31
Фигура 21: Образ на окръжност, ортогонална на инверсионната окръжност ... 32
Фигура 22: Сравнение – образи при инверсия ... 34
Фигура 23: Сравнение – образи при осева симетрия ... 34
Фигура 24: Задача 3.1. – образ на квадрат при инверсия относно вписаната в квадрата окръжност ... 35
Фигура 25: Masscheroni, L. (1797). La geometria del compasso. ... 37
Фигура 26: Задача 4.1. – построение – 1 ... 39
Фигура 27: Построяване на отсечка n пъти по-голяма от дадена ... 40
Фигура 28: Задача 4.1. – построение – 2 ... 41
Фигура 29: Задача 4.2. – построение ... 42
Фигура 30: Задача 4.3. – построение – частен случай ... 43
Фигура 31: Задача 4.3. – построение ... 43
Фигура 32: Задача 4.4. – построение ... 44
Фигура 33: Задача 4.5. – построение – 1 ... 46
Фигура 34: Задача 4.5. – построение – 2 ... 46
Фигура 35: Задача 4.6. – построение ... 47
Фигура 36: Задача 4.7. – построение ... 48
Фигура 37: Задача 4.7. – доказателство ... 49
Фигура 38: Задача 4.8. – анализ ... 50
Фигура 39: Задача 4.8. – построение – 2 ... 50
Фигура 40: Задача 4.8. – построение – 1 ... 50
Фигура 41: Задача 4.8. – построение – 3 ... 51
Фигура 42: Задача 4.8. – построение – 4 ... 51
Фигура 43: Задача 4.8. – построение – 5 ... 51
Фигура 44: Гранични случаи на окръжност ... 55
Фигура 45: Задача 5.3. – 1. случай – построение ... 57
Фигура 46: Задача 5.3. – 2. случай – построение ... 58
Фигура 47: Задача 5.3. – 3. случай – I. начин – построение ... 59
Фигура 48: Задача 5.3. – 3. случай – II. начин – анализ ... 60
Фигура 49: Задача 5.3. – 3. случай – II. Начин – построение – 1 ... 60
Фигура 50: Задача 5.3. – 3. случай – II. начин – построение – 2 ... 60
Фигура 51: Задача 5.3. – 3. случай – III. начин – анализ ... 61
Фигура 52: Задача 5.3. – 3. случай – III. начин – построение ... 62

Фигура 53: Задача 5.6. – 1. случай – построение 63
Фигура 54: Задача 5.6. – 1. случай – единствено решение 63
Фигура 55: Задача 5.6. – 1. случай – безбройно много решения 64
Фигура 56: Задача 5.6. – 2. случай – построение 65
Фигура 57: Задача 5.6. – 3. случай – I. начин – анализ 65
Фигура 58: Задача 5.6. – 3. случай – I. начин – построение – 1 66
Фигура 59: Задача 5.6. – 3. случай – I. начин – построение – 2 66
Фигура 60: Задача 5.6. – 3. случай – II. начин – анализ 67
Фигура 61: Задача 5.6. – 3. случай – II. начин – построение 68
Фигура 62: Задача 5.6. – 3. случай – I. начин – ограничение на динамичен софтуер.................. 69
Фигура 63: Множеството от центровете на окръжностите, които се допират до две дадени концентрични окръжности 70
Фигура 64: Множеството от центровете на окръжностите, които имат даден радиус, и се допират до дадена права 70
Фигура 65: Задача 5.7. – 1. случай – построение 71
Фигура 66: Задача 5.7. – 1. случай – изследване – нула решения 71
Фигура 67: Задача 5.7. – 1. случай – изследване – две решения 72
Фигура 68: Задача 5.7. – 1. случай – изследване – четири решения – 1.................................. 72
Фигура 69: Задача 5.7. – 1. случай – изследване – четири решения – 2.................................. 72
Фигура 70: Задача 5.7. – 2. случай – построение 73
Фигура 71: Задача 5.7. – 3. случай – анализ – 2 74
Фигура 72: Задача 5.7. – 3. случай – анализ – 1 74
Фигура 73: Задача 5.7. – 3. случай – анализ – 3 74
Фигура 74: Задача 5.7. – 3. случай – анализ – 4 74
Фигура 75: Задача 5.7. – 3. случай – частен случай 1 – построение – 1 75
Фигура 76: Задача 5.7. – 3. случай – частен случай 1 – построение – 2 76
Фигура 77: Задача 5.8. – 1. случай – построение 77
Фигура 78: Задача 5.8. – 1. случай – частен случай – построение 77
Фигура 79: Задача 5.8. – 2. случай – I. начин – анализ 78
Фигура 80: Задача 5.8. – 2. случай – I. начин – построение 79
Фигура 81: Задача 5.8. – 2. случай – I. начин – изследване – 1 79
Фигура 82: Задача 5.8. – 2. случай – I. начин – изследване – 2 80
Фигура 83: Задача 5.8. – 2. случай – II. начин – анализ 80
Фигура 84: Задача 5.8. – 2. случай – II. начин – построение – 1 81
Фигура 85: Задача 5.8. – 2. случай – II. начин – построение – 2 81
Фигура 86: Задача 5.8. – 2. случай – II. начин – изследване 82
Фигура 87: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – анализ 82
Фигура 88: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – построение – 1 83
Фигура 89: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – построение – 2 83
Фигура 90: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – построение – 3 83
Фигура 91: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – построение – 4 84
Фигура 92: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – онагледяване на решението........................ 85
Фигура 93: Задача 5.9. – 1. случай – построение 85
Фигура 94: Задача 5.9. – 2. случай – построение 86
Фигура 95: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 1 87
Фигура 96: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 2 87
Фигура 97: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 3 88
Фигура 98: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 4 88
Фигура 99: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 5 89
Фигура 100: Задача 5.9. – 4. случай – I. начин – анализ 89
Фигура 101: Задача 5.9. – 4. случай – I. начин – построение 90
Фигура 102: Задача 5.9. – 4. случай – I. начин – изследване 91
Фигура 103: Задача 5.9. – 4. случай – II. начин – анализ 91
Фигура 104: Задача 5.9. – 4. случай – II. начин – построение – 2 92
Фигура 105: Задача 5.9. – 4. случай – II. начин – построение – 1 92
Фигура 106: Задача 5.9. – 4. случай – III. начин – построение 93

Фигура 107: Задача А. – 1. случай – построение 94
Фигура 108: Задача А. – 2. случай – построение 95
Фигура 109: Задача А. – 3. случай – анализ 95
Фигура 110: Задача А. – 3. случай – построение 96
Фигура 111: Задача А. – 4. случай – построение 96
Фигура 112: Задача А. – 5. случай – анализ – 1 97
Фигура 113: Задача А. – 5. случай – построение – 1 98
Фигура 114: Задача А. – 5. случай – построение – 2 98
Фигура 115: Задача А. – 5. случай – анализ – 2 99
Фигура 116: Задача А. – 5. случай – помощно построение 99
Фигура 117: Задача А. – 5. случай – изследване – 1 100
Фигура 118: Задача А. – 5. случай – изследване – 2 100
Фигура 119: Задача А. – 5. случай – изследване – 3 101
Фигура 120: Задача А. – 5. случай – изследване – 4 101
Фигура 121: Задача А. – 5. случай – построение – 4 102
Фигура 122: Задача А. – 5. случай – построение – 3 102
Фигура 123: Задача А. – 5. случай – анализ – 3 103
Фигура 124: Задача А. – 5. случай – построение – 5 103
Фигура 125: Задача А. – 5. случай – анализ – 4 104
Фигура 126: Задача А. – 5. случай – построение – 6 104
Фигура 127: Задача А. – 5. случай – анализ – 5 105
Фигура 128: Задача А. – 5. случай – построение – 7 106
Фигура 129: Задача А. – 5. случай – построение – 8 106
Фигура 130: Задача А. – 5. случай – построение – 9 107
Фигура 131: Задача А. – 5. случай – построение – 10 107
Фигура 132: Задача А. – 5. случай – изследване – 5 108
Фигура 133: Задача 6.1. – анализ 111
Фигура 134: Задача 6.1. – построение – 1 112
Фигура 135: Задача 6.1. – построение – 2 112
Фигура 136: Задача 6.1. – построение – 3 113
Фигура 137: Задача 6.1. – изследване – 1 113
Фигура 138: Задача 6.1. – изследване – 2 114
Фигура 139: Задача 6.2. – анализ 115
Фигура 141: Задача 6.2. – построение – 1 116
Фигура 140: Задача 6.2. – построение – 2 116
Фигура 142: Задача 6.2. – изследване 117
Фигура 143: Задача 6.3. – построение – 1 118
Фигура 144: Задача 6.3. – построение – 2 119
Фигура 145: Задача 6.3. – построение – 3 119
Фигура 146: Задача 6.3. – построение – 4 120
Фигура 147: Задача 6.3. – доказателство 120
Фигура 148: Задача 7.1. – построение – 1 122
Фигура 149: Задача 7.1. – построение – 2 123
Фигура 150: Задача 7.2. – анализ 124
Фигура 151: Задача 7.3. – построение – 1 125
Фигура 152: Задача 7.3. – построение – 2 125
Фигура 153: Задача 7.3. – построение – 3 126
Фигура 154: Задача 7.3. – построение – 4 126
Фигура 155: Задача 7.3. – построение – 5 127
Фигура 156: Задача 7.4. – построение 128
Фигура 157: Задача 7.5. – построение 129
Фигура 158: Задача 7.6. – построение 130
Фигура 159: Задача 7.6. – изследване – 1 130
Фигура 160: Задача 7.6. – изследване – 2 131
Фигура 161: Задача 7.7. – построение – 1 132
Фигура 162: Задача 7.7. – построение – 2 132

Фигура 163: Задача 7.7. – следствие – 1 133
Фигура 164: Задача 7.7. – следствие – 2 133
Фигура 165: Задача 7.8. – построение 134

– Увод –

Геометричните построения имат хилядолетна история. Те са тясно свързани с развитието на много раздели на математиката. Има исторически сведения, според които още през VI-V в. пр. н. е. изтъкнатите гръцки геометри Питагор, Хипократ и Евклид са работили върху построителни задачи. През IV в. пр. н. е. е била наложена схема за решение на всяка построителна задача в обособени части. Те са *анализ*, *построение*, *доказателство* и *изследване*. През вековете тази схема се е утвърдила и днес се счита за традиционна норма.

От решаването на геометрични задачи могат да се извлекат множество ползи. *Определено може да се каже, че на творците на теорията на геометричните построения не е липсвала нито изобретателност, нито фантазия. Те са били в състояние да решават сложни задачи, а създадените от тях изящни методи и разсъждения впечатляват и днес* (Табов, 1990). Неслучаен е фактът, че решенията на много тригонометрични задачи са били излагани в геометричен вид. За немалък период от време геометрията и геометричното мислене са имали сериозен превес над алгебрата.

Построителните задачи имат своето традиционно място в училищното образование. В световен мащаб те винаги са били съществена част от обучението по геометрия. Един от първите примери за добре изградена дидактическа система от задачи за построение на български език е (Александров, 1881). В книгата геометричните задачи за построение са подредени не само по техните степени на трудност и сложност, но и разделени в раздели в зависимост от методите, които се използват за достигане до тяхното решение. След публикуването на труда на И. И. Александров геометричните задачи за построение се утвърдили като неразделна част от учебния материал по геометрия в България.

В края на XIX и началото на XX век се заражда световна реформа в математическото образование, с която се предлагат опити за включване на все повече елементи от висшата математика в гимназиите (Ганчев и др., 1981). Целта е била математиката в училище да се осъвремени и да се доближи повече до тогавашните достижения на науката (напр. теория на множествата и математическата логика). Това налага въвеждане на много нови знания, с което неминуемо обемът на някои традиционни отпада. Обемът на построителните задачи също е бил засегнат.

През 1961 г. е била направена преоценка на цялостната работа по математика в България. Тогава е започнало отново да се отделя по-голямо внимание на построителните задачи (Ганчев и Петров, 1966). Стремежът е подобряване на резултатите, които по онова време са били далеч от задоволителни. Вероятно за вземането на тези решения са оказали влияние някои научни изследвания, в които е отчитано благоприятното влияние, което оказват построителните задачи за развитието на учениците. Един такъв пример е изследването на (Александров, 1962), където е проучено как построителните задачи подпомагат интелектуалното развитие на учениците. Отчетено е, че построителните задачи развиват логическото мислене на учениците, понеже за решаването на такива задачи се изисква съобразителност, находчивост и добро разбиране на аксиоматичния апарат, върху който са изградени.

От друга страна се знае, че тези задачи са трудни за учениците (Ганчев и Петров, 1966). Основен фактор за това е, че те много силно зависят една от друга и се преизползват. Затова при изучаването на задачи за построение не трябва да се допускат никакви съществени пропуски. За сметка на това задълбоченото преминаване през една добре изградена дидактическа система от задачи за построение обаче може да окаже много благоприятно влияние върху интелектуалното развитие, изобретателността и творчеството.

В днешни дни изглежда историята се повтаря. Построителните задачи отново са с изключително намален обем. В момента в общообразователната подготовка се изучават единствено в 7. клас, като са включени само основните построителни задачи, без да се разглеждат по-специални техники и методи. Това се осъществява в рамките на само няколко последователни учебни часа. Времето обикновено не е достатъчно дори за провеждане на достатъчно упражнения за затвърждаване на знанията. А според изменената учебна програма, която влиза в сила през учебната 2023/2024 г., построителните задачи напълно отпадат. Изучаването на еднаквости в равнината се осъществява в 8. клас, но не се разглежда използването им при решаването на построителни задачи. Основна аргументация зад тези промени са незадоволителните резултати от няколко поредни Национално външни оценявания след 7. клас и ниските резултати в международни изследвания като PISA и TIMMS. На политическо ниво се смята, че учениците са претрупани с прекалено много знания и учебните програми трябва да бъдат „олекотявани“. Оттук насетне е редно да се помисли какъв точно учебен материал следва да се съкрати. Вероятно решението да се премахват построителните задачи е свързано с вече споменатия факт, че обикновено се оценяват като труден за преподаване материал. Така се заражда тенденцията все повече и повече децата се занимават с по-абстрактната алгебра, отколкото с нагледната геометрия. Авторът на дипломната работа е на мнение, че това по-скоро ще задълбочи проблемите, отколкото да ги разреши. Предстои времето да покаже дали тази хипотеза е вярна и дали след години няма да бъдем отново свидетели на нова реформа, подобна на онази от 60-те години на миналия век. За да може подобно нещо да се върне на дневен ред обаче, трябва да има достатъчно капацитет (учебни ресурси и кадрови), с който да се осъществи. Това означава, че е добре висшите училища да поддържат едно поне базово ниво на грамотност за преподаване на построителни задачи при бъдещите учители.

Хилядолетната работа на геометрите е натрупала арсенал от много интересни задачи за построение с елегантни решения. Не са много обаче универсалните методи за решение на такива задачи, като например методите на геометричните трансформации (Табов, 1990). Според (Александров, 1962) от съществено значение за решаването на построителни задачи е осъзнатото прилагане на конкретен метод.

Като пример за изобретателността на творците на теорията на геометричните построения и интересна задача за построение с красиво решение може да бъде дадена задачата, решена от Аполоний Перг и носеща неговото име – *задачата на Аполоний* или още *Аполониевата задача*, чието условие е следното:

Да се построи окръжност, която се допира до три дадени окръжности.

Дипломната работа акцентира върху метода на инверсията при решаването на задачи за построение. Инверсията се използва за интерпретиране на неевклидовата геометрия на Лобачевски-Бояй (Лобачевски и Бояй, 1984) в Евклидовата равнина. Освен това тя намира приложение при изучаването на функции на една променлива, аргументите и стойностите, на които са комплексни числа, и др. Аполониевите задачи могат да бъдат решени сравнително лесно чрез методът на инверсията. Методът на инверсията е един от основните методи за решаване на построителни задачи (Петров, 1969). Също той се явява и много полезен инструмент, с който може серия от задачи да се унифицират и да се сведат като задачи-компоненти за други, по-сложни задачи. Това мнение е подкрепено в (Александров, 1962).

Цел на дипломната работа е да се разработи дидактическа система от построителни задачи по метода на инверсията, придружена от интерактивни електронни учебни ресурси, която да послужи за разширяването на знанията и кръгозора на бъдещите учители.

Задачи на дипломната работа са:

1. Извършване на литературен преглед за теоретичната основа на метода на инверсията и неговите приложения;
2. Създаване на дидактическа система от задачи с приложение на метода на инверсията в построителни задачи, които се решават само с помощта на пергел;
3. Създаване на дидактическа система от някои Аполониеви задачи и техните решения с помощта на метода на инверсията;
4. Създаване на интерактивни онагледявания на създадените задачи с помощта на интерактивен геометричен софтуер.

Обект на дипломната работа е методът на инверсията за решаване на построителни задачи и приложението му в обучението по математика.

Предмет на дипломната работа е създаването на учебен ресурс за подготовка на бъдещи и допълнителна квалификация за действащи учители по математика, с който да се разшири техният научен мироглед и да бъдат мотивирани да поддържат историческата традиция с преподаване на построителни задачи (например, в кръжочна форма на обучение).

– Глава I. Избор на средства –

Класическите технически средства за решаване на построителни задачи са линия и пергел. В днешно време програми за чертаене позволяват на учениците да решават задачи за построение във виртуална среда на компютър. Това свързва класическите методи с технологичните иновативни инструменти. В дипломната работа е използвана популярна интерпретация чрез интерактивното геометрично приложение *Geogebra*. То е безплатно и достъпно за ученици, и може лесно да бъде внедрено в процеса на преподаване. *Geogebra* предоставя възможност за създаване на интерактивни чертежи, които са полезни в образователен контекст, тъй като учениците могат да експериментират и да наблюдават визуално промените. *Ученето чрез експериментиране* (или още *изследователски подход в обучението*) е метод, който се стимулира творчеството и преоткриването на знания (Гроздев и Деков 2014). Той отнема повече учебно време, но за сметка на това води до по-трайно усвояване на учебния материал. Изследването, което ще бъде разгледано в [Глава II. „*Методически насоки*“], е най-трудният етап при решаването на задачите за построение. Използването на *Geogebra* цели да го подпомогне.

Употребата на интерактивно приложение също подпомага евристичните подходи, разширявайки уменията на учениците в няколко аспекта. Евристиката развива творческото мислене на учениците, а задачите за построение са имено такива – развиващи мисленото и позволяващи на учениците да „излязат“ от рамката, в която често биват поставяни (Тонов, 2012).

Потребителите на *Geogebra* имат достъп до конструкционния протокол към всеки чертеж. Той им показва последователното изчертаване на отделните елементи, което от една страна спомага за по-лесното разбиране на извършеното построение, а от друга позволява да бъде експериментирано с промени.

Геометричните задачи за построение често се считат за сложни не само от учениците, но и от преподавателите. Основна причина за това е елементът на досещането. Обикновено когато се види готовото решение, всичко е ясно и се приема със задоволство. Проблемът идва при следващата задача, където въпреки натрупания опит, често отново обучаваните не успяват да намерят самостоятелно решение. Затова при построителните задачи е нужна сериозна инвестиция в дидактическите похвати, като най-важно е да се изградят силни връзки между задачите и да се употребява непрекъснато похватът на пропедевтиката. Конкретно при преподаването с помощта на интерактивен софтуер, основен проблем би било, ако компютърът се превърне от помощник в „решавач на задачи“.

Съществуват известни технологични ограничения при използване на интерактивни приложения за решаването на построителни задачи. Конкретно инверсията е геометрично преобразуване, при което стъпките при построяването на образа на дадена точка се определят от това дали точката е външна или вътрешна за инверсионната окръжност. Това ще бъде разгледано в [Глава III. „*Метод на инверсията*“]. Тази разлика предизвиква известни затруднения при техническата реализация. Ако се разгледа друго геометрично преобразуване, например осева симетрия, построяването на образа на дадена точка ще се извършва еднозначно, независимо от дадено условие.

Проверка дали дадена точка е вътрешна за инверсионната окръжност, лежи на нея или е външна за инверсионната окръжност може да бъде извършена чрез сравнение на дължините на две отсечки, едната от които свързва центъра на инверсионната окръжност с дадената точка, а другата е радиусът на инверсионната окръжност. В последствие при построяването на образа на друг обект следва въвеждане на нова условие. Въвеждането на голям брой условия за извършване на съответното построение в задача за построение чрез метода на инверсията, когато дадените обекти и инверсионната окръжност не са фиксирани, е задача, която измества фокуса от основните етапи при извършване на построението. Поради тази причина при някои от чертежите в дипломната работа обектите, които са дадени, както и инверсионната окръжност, са фиксирани. Чрез това се преодолява проблемът с намирането на образа на дадена точка, но има големият недостатък, че отсъства възможността за извършване на експеримент. Затова в някои интерактивни чертежи обектите не са фиксирани и съответно обучаваният може да експериментира. Има и целенасочено заложени софизми. При промяна на положението на някои обекти визуално се създава представа, че задачата няма решение, т.е. върху чертожната повърхност конструкцията, която е създадена, не е изпълнима. Това обаче в действителност не е така и може да се съобрази лесно с логически разсъждения. Такива елементи от обучението се използват, за да се демонстрират технологичните ограничения и да се засили вниманието на обучаваните, че не трябва да се предоверяват на компютъра. В [Глава III. „*Метод на инверсията*“] към построяване на образ на окръжност, неминаваща през центъра на инверсия и в задача 4.5. от [Глава IV. „*Приложение на метода на инверсията в геометрията на пергела*“] и към задача 5.6., поместена в [Глава V. „*Аполониеви задачи*“] след излагане на приложението на съответната задача са направени допълнителни коментари с такава насока.

Дидактическата система от задачи е методически обоснована съвкупност от задачи, която се стреми до осигури постигане на планирани резултати в обучението (Асенова и Маринов, 2019). Една добре изградена дидактическа система от задачи може да допринесе значително за качеството и ефективността на образователния процес. За постигането на тази цел обаче изготвянето на системата е добре да съблюдава определен технологичен подход (Нинова и Кадиев 2021).

В (Петров, 1969) са разгледани подробно решенията на всяка една задача от групата на *Аполониевите задачи*, които ще бъдат разгледани подробно в [Глава V. „*Аполониеви задачи*“]. Вниманието е фокусирано върху един основен подход. Започва се с излагане на решения на частни случаи на задачите, в които не се използва методът на инверсията, отделя се внимание на хомотетията и нейното приложение при решаване на *Аполониевите задачи* и след това се въвеждат знания за геометричното преобразувание инверсия. В края на труда се показва решение на *Задачата на Щайнер* и на пространствения аналог на *Аполониевата задача – Задачата на Ферма.*

В (Костовски, 1964) е разработена дидактическа система от задачи, насочена към приложението на инверсията в геометрията на пергела. Тя включва построяване на инверсните образи на точки, прави и окръжности, задача за намиране на центъра на начертана окръжност и задача за построяване на описана около триъгълник окръжност. Описва се общият метод за решаване на задачите за построение само с пергел чрез използването на инверсия и се илюстрира неговото приложение в конкретна задача. Този труд е насочен към цялостно разглеждане на геометричните построения само с пергел.

В (Мартинов, 1973) съдържанието е насочено към различните видове геометрични преобразувания и техните приложения. Инверсията е включена към групата на конформните изображения и е отделено внимание на нейното приложение при решаването на задачи за построение. Така отново присъства дидактическа система от задачи, в която основно са изложени решенията на задачи, които се свеждат до решаването на *Аполониеви задачи*. Третата подред задача, например, е насочена към намирането на общите точки на права и парабола, зададена с фокуса и директрисата си, т.е. отсъства елементът на подреждане на задачите по сложност.

В (Петров и Ганчев, 1966) се обособяват отделни глави за различни методи, които могат да бъдат използвани при решаването на задачи за построение. Методът на инверсията там отсъства, а решенията на някои *Аполониеви задачи* са поместени в главата „*Задачи, при решаването на които се използват няколко метода*“, но решенията им не съдържат използване на метода на инверсията. И тук, както при (Петров, 1969), при извършването на анализ е използвана хомотетия.

Дидактическата система от задачи на (Банков и Витанов, 2003), насочена към използването на инверсия, стартира с намиране на образи на дадени обекти, т.е. с базови задачи, при които се изисква директно приложение на отделните стъпки в конструкциите за построяване на образи. Продължава се със задачи за намиране на центъра на дадена инверсия и задачи за доказателство, в които трябва да се използват свойствата на инверсията. След тези задачи са поместени условията на *Аполониевите задачи*, както и условията на задачи, които се свеждат до тяхното решаване. В края на дидактическата система отново присъстват задачи за доказателство, за които е нужно прилагане на повече теоретични знания.

В (Табов и Лазаров, 1990) не се разглеждат доказателствата на теоремите за образите на точки, прави и окръжности при инверсия, а се представят съкратено конструкциите. Изложено е решението само на една задача от групата на *Аполониевите задачи*, а към задачите за упражнение са включени гранични случаи на задачата на Щайнер.

В дипломната работа е направен опит да се синтезират достиженията на съществуващите дидактически системи от задачи и да се разширят към по-задълбочено демонстриране на използването на метода на инверсията. Първо се въвеждат теоретични знания за самия метод. След това се разглежда приложението на инверсията в геометрията на пергела. Първите задачи към тази глава, както и при (Костосвски, 1964), са обвързани с намирането на инверсни образи на точки, прави и окръжности, след това се преминава към решаването на задачи за намиране на пресечните точки на две прави и на права и окръжност, а накрая се излагат решенията на задачи за намирането на центъра на дадена окръжност и построяването на окръжност, минаваща през три неколинеарни точки. Обобщаването на общия метод за решаване на построителни задачи само с помощта на пергел чрез метода на инверсията също присъства.

Дидактическата система от задачи в дипломната работа продължава с разглеждането на решенията на *Аполониевите задачи*. Илюстрирани са решенията на четири задачи от тази група, а последната решена задача е *Аполониевата задача*. С цел да бъдат подкрепени простотата и изяществото на метода на инверсията от страна на автора на дипломната работа са разгледани и други начини за решение на тези задачи. Другите начини за решение изискват направата на по-сложен анализ, базиращ се на използването на повече теоретични знания. В (Петров, 1969) също се излага друг начин на решение на задачите, като се започва с метод, различен от инверсия и съответно той е основен фокус. В дипломната работа задачите също първо са решени по алтернативен начин, а след това чрез метода на инверсията, но основният фокус е насочен към метода на инверсията.

В четвъртата глава се разглеждат задачи, които се свеждат до решаването на *Аполониеви задачи*. Целта е да се затвърди приложението на метода на инверсията чрез решаването им с него. В условията на тези задачи участват криви от втора степен, което усложнява техния анализ. По този начин задачите в дипломната работа са подредени по степен на сложност и трудност. Без този елемент подборът на съдържанието съвпада с това на (Мартинов, 1973). Включени са задачи за упражнение към [Глава V. „*Аполониеви задачи*“] и към [Глава VI. „*Задачи, решаването на които се свежда до решаването на Аполониеви задачи*“].

Тъй като дипломната работа не е насочена към разглеждане на основни задачи за построение (Петров и Ганчев, 1966) или задачи, решими с помощта на други методи, в нея са поместени само някои задачи, които са използвани при решенията на *Аполониевите задачи* или пък решенията на такива задачи, до които *Аполониевите задачи* се свеждат. Тези задачи са включени в [Глава VII. „*Помощни задачи*“]. Някои от тях имат следната формулировка:

- „*Към дадена окръжност да се прекара допирателна в дадена нейна точка.*“
- „*През външна точка за дадена окръжност да се построи допирателна към окръжността.*“
- „*Да се построи обща допирателна на две окръжности.*“
- „*Към дадена окръжност да се прекара допирателна, успоредна на дадена права.*“ и др.

Помощните задачи са необходими за разбирането на по-сложните концепции. При затруднение с решаването на някои от тези задачи, може да бъде направена препратка към задачите, включени в посочената по-горе глава.

Разнообразието от задачи и различното ниво на трудност на задачите, включени в дипломната работа, позволяват те да бъдат адаптирани според нивото на подготовка на обучаващите се. Приложението на тези задачи може да помогне за поддържане на мотивацията на учениците. Когато учениците са ангажирани и мотивирани, съществува по-голяма вероятност те да постигнат по-добри резултати. *Всяка задача от системата от задачи има отношение* *към цялата система от задачи, но най-силно е изразена връзката ѝ с предходната и със следващата такава* (Кадиев, 2020).

Междупредметните връзки предоставят възможност да се възприемат по-лесно знанията, включени в определена тема. Изборът на стратегия за решаването на дадена задача с тяхна помощ се осъществява по-лесно. Изучаването на определен метод без разбиране и изградени умения за успешното му прилагане не е ефективно.

След отделните етапи от схемата за решаване на построителни задачи [Препратка към Глава II. „*Методически насоки*“] е описано какво е приложението на всяка от задачите, т.е. към него присъстват вътрешни и външни междупредметни връзки (описано е коя задача се свежда до използването на разглежданата или пък къде намират приложение определени подходи, използвани за решаването на задачите).

– Глава II. Методически насоки –

Необходимост е бъдещите преподаватели по математика да притежават умения за правилно съчетаване на учебните средства, с които разполагат. Дидактическите системи от задачи в дипломната работа сами по себе си представляват съвкупност от задачи, чрез която определена цел може да бъде постигната. Съчетани с интерактивните ресурси и използването на геометричен софтуер те дефинират постигането на нова цел.

Интерактивните уебсайтове, видео уроци, онлайн учебниците и други технологични средства в днешно време предоставят на учителите широк спектър от ресурси. Възможността за избор на разнообразни задачи и учебни материали може да подпомогне учениците да развиват не само знания, но и умения като критично мислене и умения за разбирането на по-сложни концепции. Интерактивните ресурси могат да направят обучението по-занимателно и ангажиращо, като същевременно стимулират интереса и мотивацията на учениците. Използването им може да се осъществи само и единствено при наличието на достатъчно теоретични познания от страна на учителите – познания относно учебното съдържание и познание на методиката за преподаване. Важно е учителят да бъде информиран за най-новите тенденции в образованието, отразяващи съвременните възможности, но е и толкова важно той да притежава умения за тяхното използване.

Една комбинация от различни учебни материали и методи може да подкрепи различните стилове на учене, а това от друга страна да доведе до постигането на по-високи академични резултати само ако тя е ефективна. Интерактивните ресурси трябва да бъдат интегрирани в учебния план така, че да допълват и подкрепят основните цели и теми на учебния материал.

Учителите трябва да бъдат обучени и подкрепени в използването на интерактивни ресурси, за да могат ефективно да ги интегрират в учебния процес. Освен това те трябва да умеят да извършват правилен подбор на интерактивни ресурси, гарантирайки, че те са педагогически обосновани, точни и адаптирани към учебната цел.

Задачите, включени в дипломната работа, могат да се използват по време на провеждането на извънкласни дейности по математика (например, в кръжочна форма), тъй като на този етап методът на инверсията не присъства в програмите за общообразователна подготовка по математика.

Дидактическата система от задачи е подходяща за ученици в 9. или по-горен клас. В 8. клас учениците са изучавали допирателни към окръжност, централни ъгли, дъги и хорди, видовете ъгли, свързани с окръжността, общи допирателни на две окръжности, както и вписани и описани многоъгълници. Също така са получили базови знания около изучаването на еднаквости (МОН, 2017), т.е. те са запознати с един от видовете геометрични преобразувания. Инверсията е геометрично преобразувание, което не е еднаквост. Това би разширило значително общия мироглед към геометричните преобразувания.

Методът на инверсията има също съществено приложение в състезателната математика. Пример за това е следната задача:

Условие на английски език: Let ABC be an acute triangle with $AB > AC$. Let Γ be its cirumcircle, H its orthocenter, and F the foot of the altitude from A. Let M be the midpoint of BC. Let Q be the point on such that $\sphericalangle HQA = 90°$ and let K be the point on such that $\sphericalangle HKQ = 90°$. Assume that the points A, B, C, K and Q are all different and lie on in this order. Prove that the circumcircles of triangles KQH and FKM are tangent to each other. (IMO 2015/3)

Условие на български език: Нека ABC е остроъгълен триъгълник и $AB > AC$. Нека Γ е центърът на описаната около триъгълника окръжност, H е неговият ортоцентър и F е петата на височината, спусната от върха A. Нека още M е средата на BC. Нека Q е такава точка, че $\sphericalangle HQA = 90°$ и нека K е такава точка, че $\sphericalangle HKQ = 90°$. Да приемем, че всички точки A, B, C, K и Q са различни. Докажете, че описаните окръжности около триъгълници KQH и FKM се допират една към друга. (IMO 2015/3)

Употребата на инструмента *GeoGebra* от страна на учениците би следвало да е интуитивна и да не изисква специално обучение. Някои от основните инструменти ще се използват и ще се дискутират на принципа „при настъпила нужда“. Така технологичното средство се слива по естествен път с основния учебен материал и знанията не се разкъсват. Работата е със заготовки, които се използват интуитивно – например, инструментите „*Плъзгач*“ и „*Поле за отметка*“. И двата са използвани като основно средство при създаването на чертежите. С помощта на инструмента *плъзгач* се постига поетапна поява на отделните елементи, участващи в графичните построения към решенията на задачите, а чрез *полетата за отметка* се визуализират отделни етапи от построението или пък отделни случаи, разгледани в конкретната задача. Някои от задачите съдържат множество стъпки при построението, а това води до наличие на множество обекти върху чертожната повърхност и неяснота.

От друга страна е препоръчително учителите да познават в по-дълбоки детайли работата с *GeoGebra*, защото се очаква от тях не само да използват готови ресурси, но и дълбоко да разбират заложеното съдържание и сами да създават такива.

Преди да се стартира с разглеждането на конкретни построителни задачи, пред учениците трябва да бъдат изложени и отделните етапи от схемата за решаване на задачи за построение:

- *Анализ* – съдържа в ясен вид, както общата идея и плана на решението, така и обосновката и доказателството на отделните детайли. Извършва се анализ на връзките на дадените елементи с тези, които трябва да бъдат построени, като се предполага, че фигурата е известна, т.е. търсената фигурата се начертава, отбелязват се върху чертежа дадените елементи, а след това се търсят горепосочените връзки между съответните елементи;
- *Построение* – описание на последователно прилагане на основни операции и графично изпълнение;

- *Доказателство* – доказателство, че построението довежда до фигура със свойствата, които се изискват (доказателство на верността на построението). Ходът на разсъжденията на доказателството е обратен на хода при търсене на решението на задачата. (Александров, 1962);
- *Изследване* – изследват се началните условия, при които задачата има единствено решение, няколко решения, безброй много решения или няма решение. Този елемент понякога може да бъде изпуснат, ако е много сложен или е идейно далечен от извършеното построение (Табов, 1990).

Задачите за построение, включени в дипломната работа, са непозиционни и когато читателят прави изследване върху броя на решенията, различните еднакви фигури, които са решения на дадената задача, се разглеждат като едно решение, а нееднаквите фигури, които удовлетворят нейното условие – като различни решения (Ганев и Петров, 1966).

Запознаването на учениците със свойствата на инверсията и построяването на образи може да се осъществи също чрез експериментиране, т.е. готовите чертежи или видеата да бъдат използвани и учениците сами да трябва да достигнат до описание на стъпките за намирането на образите на дадени обекти.

Когато се решава задача за построение, трябва да има стремеж тя да се сведе към друга, по-проста, която вече е позната за ученика. Такова привеждане на една задача към друга може да стане с помощта на трансформация (Александров, 1962).

Преподавателят трябва да покаже на учениците, че инверсията е такова преобразуване, чрез което задачите от една страна могат да се сведат до други по-прости, а от друга е преобразуване, което прави решенията на задачите сами по себе си много по-лесни в сравнение с използването на други начини на решение. Това може да се осъществи чрез няколко въвеждащи примерни задачи с ниска сложност.

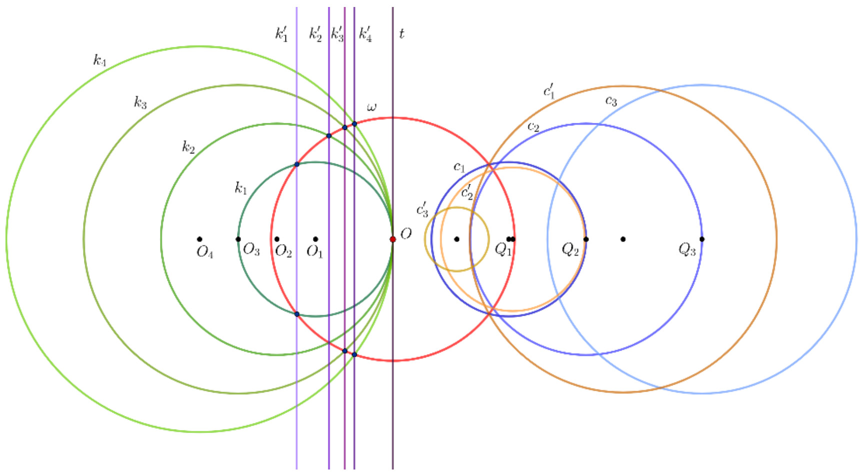
Препоръчително е процесът на решаване на задачите да се осъществява паралелно с използването на динамичните чертежи в *Geogebra*, тъй като това предоставя възможност за експериментиране и динамично изследване на реализираните геометрични концепции. Файловете, прикрепени към дипломната работа, са допълнителен учебен ресурс, но би било полезно някои от чертежите да бъдат изпълнени самостоятелно от страна на учениците. Те биха могли да бъдат използвани в няколко аспекта:

- Преди извършването на анализа, за да подпомогнат учениците сами да преоткрият някое от опорните знания;
- След извършването на анализа като вид проверка на генерирани хипотези;
- При изследване на броя на решенията на конкретна задача.

Важно е да се покаже също, че при построителните задачи невинаги решенията са единствени. Неслучайно в [Глава V. „*Аполониеви задачи*“] са илюстрирани повече от два начина на решение – учениците трябва да бъдат насърчавани да търсят алтернативни решения на задачите, с което да развиват своята фантазия.

В ресурсните файлове има и видеоклипове, съдържащи последователното извършване на построенията, включени в дипломната работа. Те са предназначени основно като помощно средство за учителите – чрез тях може набързо да се припомни даден конструкционен протокол. Мултимедийните клипове могат да послужат и като помощно средство за учениците по време на самоподготовка, но тази тяхна употреба трябва да бъде ограничена и да се подхожда внимателно. Причината е, че учениците често се изкушават да преглеждат клиповете още в самото начало, т.е. преди да са вложили достатъчно самостоятелно усилие да се опитат да решат задачата сами. Последното не е особено полезно за тяхното интелектуално развитие.

– Глава III. Метод на инверсията –



Фигура 1: Метод на инверсията

Нека $\omega(O;r)$ е окръжност с център точката O и радиус r.

Определение 3.1. Геометрично преобразуване, което при дадена т. O за всяка точка X от равнината, където $X \neq O$, съпоставя т. X' такава, че $\overline{OX}.\overline{OX'} = r^2$, се нарича *инверсия* относно окръжността $\omega(O,r)$.

- Точката O се нарича *център (полюс)* на инверсията.
- Окръжността ω се нарича *основна окръжност* на инверсията (също се среща като *инверсионна окръжност*).
- Числото r^2 се нарича *степен* на инверсията.
- Точките X и X' се наричат *взаимно инверсни*.
- Отбелязва се φ_ω или φ_O (Банков и Витанов, 2003).

Използването на инверсия при решаването на построителни задачи изисква познания за нейните основни свойства, както и познания относно намирането на образ на точка, права и окръжност в резултат на това геометрично преобразуване. Затова ще бъдат изложени свойствата на инверсията и основни конструкции за намирането на образите на горепосочените обекти.

Нека е дадена инверсия φ_ω с инверсионна окръжност $\omega(O,r)$.

1. Свойства на инверсията

Основните свойства на инверсията са:

- Ако $\varphi_\omega(X) = X'$, то $X' \in OX^{\rightarrow}$, т.е. при инверсия точка, нейният образ и центърът на инверсията са колинеарни;
- Ако $\varphi_\omega(X) = X' \Rightarrow \varphi_\omega(X') = X$, т.е. инверсията е *инволюция* ($\varphi_\omega = {\varphi_\omega}^{-1}$ или ${\varphi_\omega}^2 = id$);

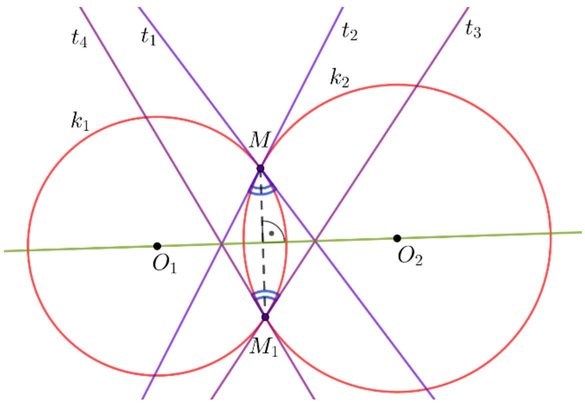
- Ако $\varphi_\omega(F) = F'$, където F е дадена фигура, то фигурите F и F' се наричат *взаимно инверсни*. (Петров, 1969)

- $\varphi(X) = X \Leftrightarrow X \in \omega$, т.е. една точка е двойна при инверсия тогава и само тогава, когато лежи върху инверсионната окръжност:
- Ако $\varphi_\omega(X) = X'$ и $OX < r$, то $OX' > r$, т.е. ако точка е вътрешна за окръжността ω, то образът ѝ е външна точка;
- Ако $\varphi_\omega(X) = X'$ и $OX > r$, то $OX' < r$, т.е. ако точка е външна за окръжността ω, то образът ѝ е вътрешна точка. (Банков и Витанов, 2003)

Преди да се дефинира следващото свойство, трябва да се даде определение за ъгъл между две окръжности и ъгъл между права и окръжност.

Определение 3.2. *Ъгъл между две окръжности* се нарича ъгълът между допирателните, прекарани в тяхната обща точка.

- Ако двете окръжности имат две общи точки и се построят допирателните им в тези точки, съществуват два ъгъла между окръжностите, които са равни помежду си. Това е така, тъй като симетрията относно централата на двете окръжности изобразява единия ъгъл в другия (Мартинов, 1973).

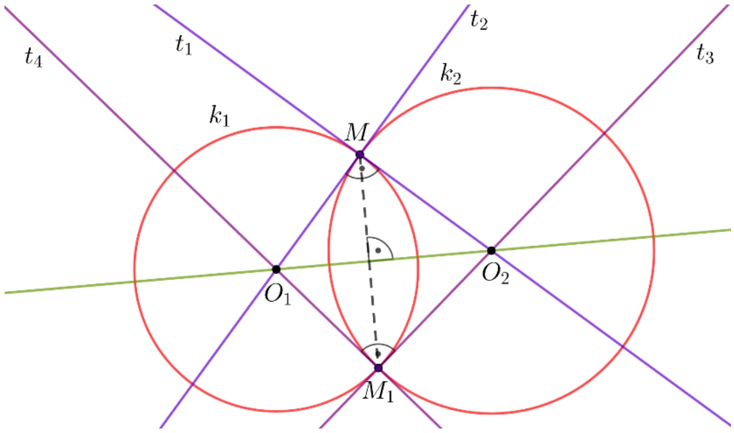


Фигура 2: Ъгъл между две окръжности

- Ако окръжностите се допират, ъгълът между тях е равен на нула.
- Ако окръжностите не се допират, между тях няма ъгъл.

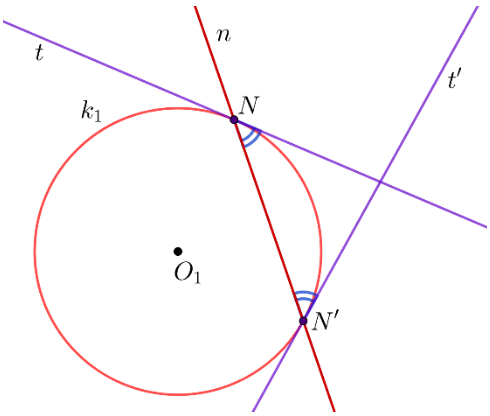
Определение 3.3. Окръжности, които се пресичат под прав ъгъл, се наричат *ортогонални*.

Твърдение 3.1. Две окръжности са ортогонални, ако радиусите от центъра на едната до пресечните точки са допирателни към другата, и обратно.



Фигура 3: Ортогонални окръжности

Определение 3.4. *Ъгъл между права и окръжност* се нарича ъгълът между правата и тангентата към окръжността, прекарана в тяхната обща точка.

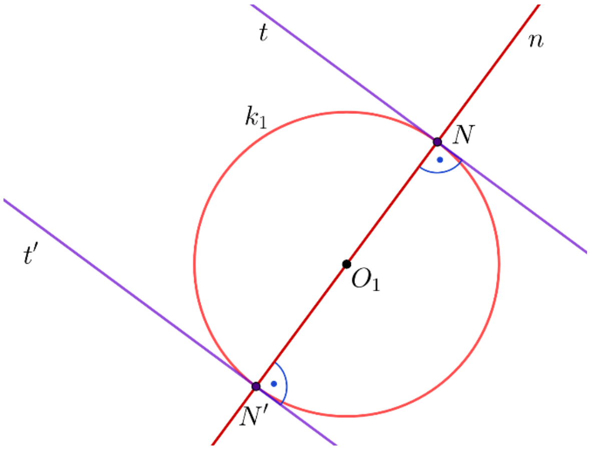


Фигура 4: Ъгъл между права и окръжност

- Ако правата е тангента към окръжността, ъгълът между тях е равен на нула.

Определение 3.5. Права и окръжност, които се пресичат под прав ъгъл, се наричат *ортогонални*.

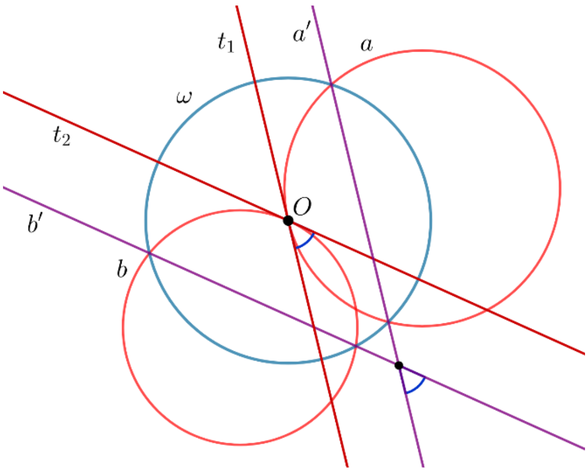
Твърдение 3.2. Права и окръжност са ортогонални помежду си тогава и само тогава, когато правата минава през центъра на окръжността.



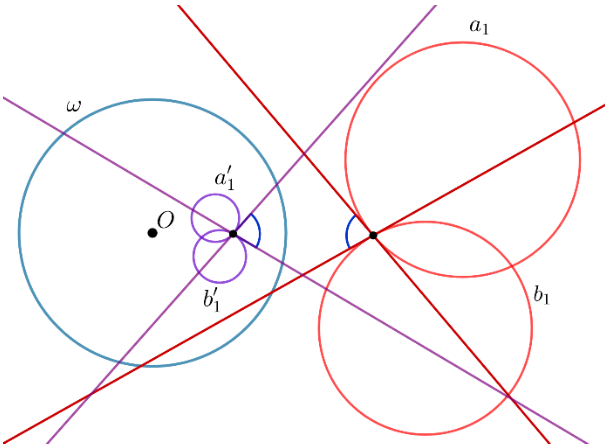
Фигура 5: Ортогонални права и окръжност

В сила е следното важно свойство на инверсията:

- Ако a и b са прави или окръжности, то $\sphericalangle(a;b) = \sphericalangle(\varphi_\omega(a);\varphi_\omega(b))$.



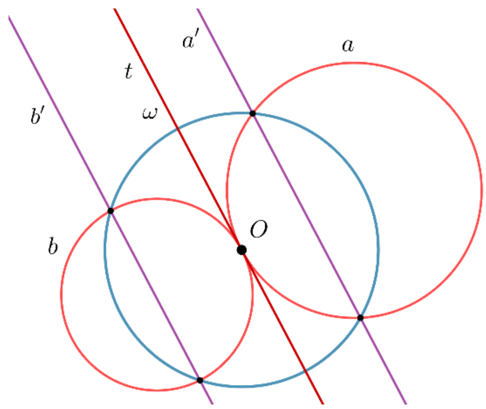
Фигура 7: Запазване на ъглите при инверсия – 1



Фигура 6: Запазване на ъглите при инверсия – 2

Определение 3.6. Еднозначно обратимо изображение, което трансформира произволен ъгъл в равен на него ъгъл, се нарича *конформно изображение*.

Инверсията е конформно изображение, което *не е подобност*. Това свойство е доказано в (Мартинов, с. 97, 1973) и (Петров, с. 73, 1969). От методическа гледна точка е удачно преглед на доказателството да се извърши след запознаване с намирането на образ на права и окръжност при инверсия. Интересно наблюдение е, че ако допирната точка на права и окръжност или на две окръжности е център на инверсия, то образите им са две успоредни прави (Табов, 1990 г.).

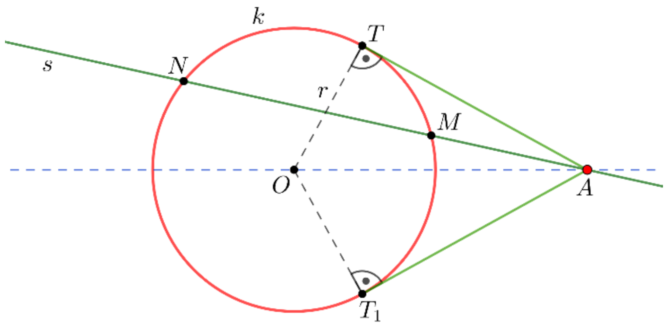


Фигура 8: Успоредни образи при инверсия

2. Степен на точка относно окръжност (Банков и Витанов, 2003) и (Петров, 1969)

Определение 3.7. Нека в равнината са дадени окръжност $k(O, r)$ и точка A. Числото $AO^2 - r^2$ се нарича *степен на точката A относно окръжността k*.

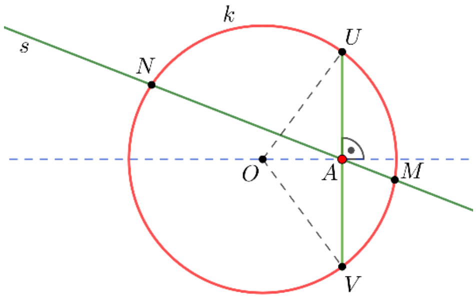
- Ако точката A е външна за окръжността k, степента ѝ относно тази окръжност е положителна и е равна на дължината на отсечката от допирателната t, прекарана през т. A към k, с краища A и допирната точка T на t и k: $AO^2 - r^2 = AT^2 = AM.AN$, където $s \cap k = \{M, N\}$, s – секуща през т. A.



Фигура 9: Степен на външна за инверсионната окръжност точка

- Ако точката А лежи върху окръжността k, степента ѝ е равна на нула.
- Ако точката A е вътрешна за окръжността k, степента ѝ относно k е отрицателна и е равна на – $(AO^2 - r^2)$. Абсолютната стойност на степента на A е равна на квадрата на

дължината на половината на хордата с най-малка дължина UV, прекарана през A, т.е. $AO^2 - r^2 = AU.AV = AU^2 = DM.DN$:



Фигура 10: Степен на вътрешна за инверсионната окръжност точка

Понятието *степен на точка относно окръжност* ще бъде използвано при извършване на построенията към задачите от [Глава V. „*Аполониеви задачи*“].

3. Построяване на образ на точка при инверсия

Нека X е произволна точка от равнината, а $\varphi_\omega(X) = X'$ е нейният образ при инверсията φ_ω. В сила са следните свойства:

- Ако дадена точка X съвпада с центъра на инверсия, не съществува точка, за която равенството $\overline{OX}.\overline{OX'} = r^2$ да е изпълнено. Следователно центърът на инверсия *не* притежава образ (Петров, 1969).
- Ако точката X е от инверсионната окръжност, то $X \equiv X'$.

Познати са две конструкции за построяване на образ на външна и вътрешна за инверсионната окръжност точка.

I. Построяване на образ на точка, *външна за инверсионната окръжност*

Нека X е точка, *външна* за окръжността ω.

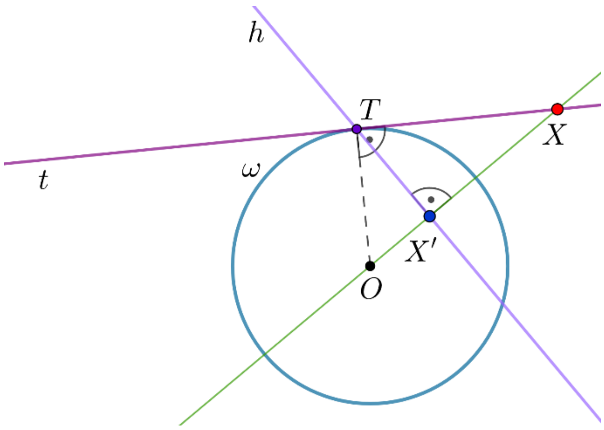
Построение:

1. допирателна t през т. X към окръжността ω;

2. $t \cap \omega = T$;

3. $h\begin{cases} \ni T \\ \perp OX \end{cases}$;

4. $\varphi_\omega(X) = X' = h \cap OX$ – ортогоналната проекция на точката T върху правата OX.



Фигура 11: Построяване на образ на външна за инверсионната окръжност точка

Доказателство: Разглеждаме ΔOXT и $\Delta OTX'$:

$\sphericalangle OTX = \sphericalangle OX'T = 90°$ и $\sphericalangle XOT = \sphericalangle X'OT$

$\Rightarrow \Delta OXT \sim \Delta OTX' \Rightarrow \frac{OX}{OT} = \frac{OT}{OX'} \Rightarrow OX.OX' = OT^2 = r^2$.

Освен това $X' \in OX^{\rightarrow} \Rightarrow \varphi_\omega(X) = X'$.

Стъпките от конструкцията могат да бъде използвани и за построяване на образ на вътрешна за окръжността ω точка, но в обратен ред.

II. Построяване на образ на точка, *вътрешна за инверсионната окръжност*

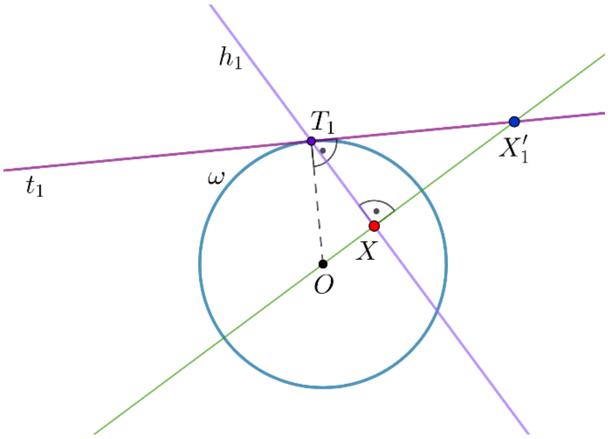
Нека X е точка, *вътрешна* за окръжността ω.

Построение: 1. Издига се перпендикуляр h от точката X към правата OX;

2. $h \cap \omega = \{T, T_1\}$;

3. допирателната t_1 в точката T_1;

4. $\varphi_\omega(X) = X_1' = t_1 \cap OX$.



Фигура 12: Построяване на образ на вътрешна за инверсионната окръжност точка

Доказателство: Доказателството може да бъде извършено по същия начин, както в първия случай (Банков и Витанов, 2003).

Приложение: Построяването на образ на точка служи за построяване на образите на права и окръжност при инверсия.

Твърдение 3.3. При дадени две различни точки, образът на по-близката до центъра на инверсия се трансформира в по-далечна.

Доказателство: Нека $OX < OY$, $\varphi_\omega(X) = X'$ и $\varphi_\omega(Y) = Y'$.

Тогава от $OX.OX' = OY.OY'(= r^2)$ и от $OX < OY$ следва, че $OX' > OY'$.

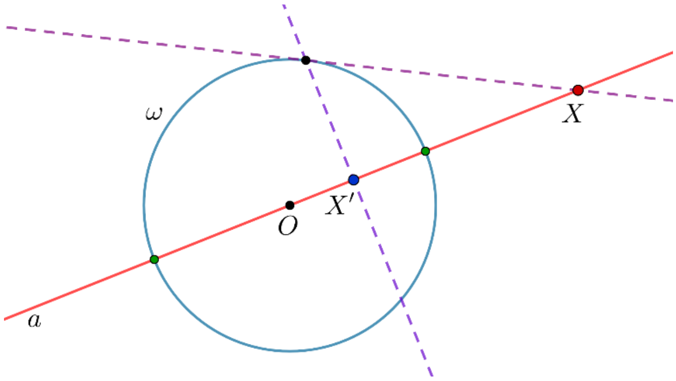
4. Построяване на образ на права при инверсия

Нека е дадена правата a. Трябва да се построи $\varphi_\omega(a) = a'$.

I. Построяване на образ на права, *минаваща през центъра на инверсията*

Теорема 3.1. Образът на права, минаваща през центъра на инверсия (без точката O), е същата права (без точката O).

Доказателство: От свойствата на инверсията знаем, че точка, нейният образ и центърът на инверсията са колинеарни, т.е. ако $X \in a$, то $\varphi_\omega(X) = X' \in OX^{\rightarrow} \Rightarrow X' \in a \Rightarrow a = XX' \Rightarrow$ правата a (без точката O) се изобразява в същата права (без точката O):



Фигура 13: Построяване на образ на права, минаваща през центъра на инверсия

Трябва да се отбележи, че правата се изобразява в същата права, но само пресечните точки на правата и инверсионната окръжност са двойни.

II. Построяване на образ на права, *неминаваща през центъра на инверсията*

Теорема 3.2. Образът на права, която не минава през центъра на инверсия, е окръжност, минаваща през центъра на инверсия, като правата е успоредна на допирателната към окръжността в центъра на инверсията.

Построение: 1. т. P – ортогоналната проекция на т. O върху a;

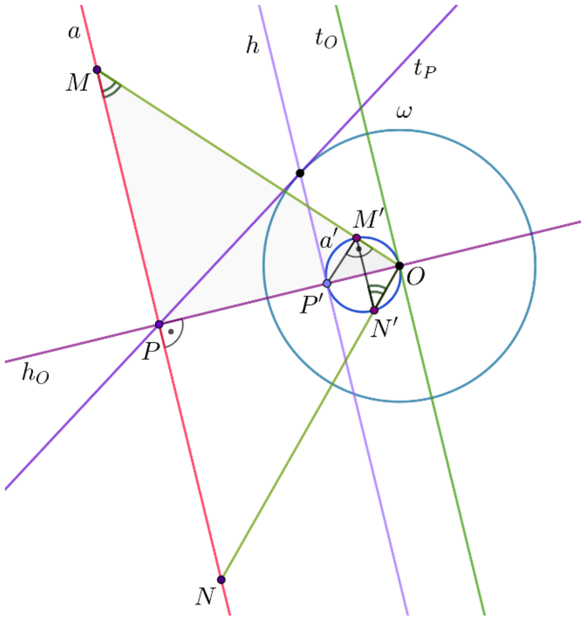
2. $\varphi_\omega(P) = P'$;

3. $\varphi(a) = a'\left(O, \frac{OP'}{2}\right)$.

Доказателство: Нека M е произволна точка от правата a и $\varphi_\omega(M) = M'$.

Тогава $\overline{OM}.\overline{OM'} = \overline{OP}.\overline{OP'} = (r^2)$.

$\Rightarrow \sphericalangle POM = \sphericalangle M'OP'$ *(като съвпадащи или противоположни)* и $\frac{OM}{OP'} = \frac{OP}{OM'}$



Фигура 14: Построяване на образ на права, неминаваща през центъра на инверсия

$\Rightarrow \Delta OPM \sim \Delta OMP' \Rightarrow \sphericalangle OPM = \sphericalangle OM'P' = 90°$

$\Rightarrow$ от образа M' на произволна т. $M \in a$ отсечката OP' се вижда под прав ъгъл

$\Rightarrow M' \in \varphi_\omega(a) = a'$, където a' е окръжността с диаметър OP'.

Обратно, нека точка $N'(\neq O)$ е произволна точка от окръжността a'. Означаваме $N = ON' \cap a$.

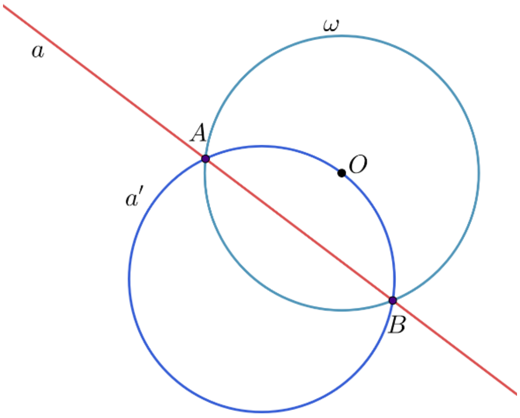
$\Rightarrow \Delta OM'N' \sim \Delta OMN \Rightarrow \frac{ON'}{OM} = \frac{OM'}{ON} \Longrightarrow ON.ON' = OM.OM'$

Но $OM.OM' = r^2 \Rightarrow ON.ON' = r^2 \Rightarrow \varphi_\omega(N') = N$.

Тъй като т. N' е произволна, то $\varphi_\omega(a') = a$.

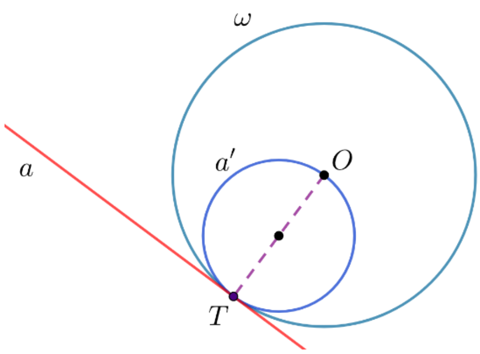
Отсечката OP' е диаметър и $OP' \perp a$. Следователно допирателната в т. O е успоредна на a (Мартинов, 1973) и (Петров, 1969).

Твърдение 3.4. Когато правата a пресича инверсионната окръжност, нейният образ е окръжността, минаваща през трите неколинеарни точки O, A и B, където $a \cap \omega = \{A, B\}$. Това е така понеже точките A и B са двойни при инверсията.



Фигура 15: Образ на права, пресичаща инверсионната окръжност

Твърдение 3.5. Когато правата a се допира до окръжността ω в точката T, нейният образ е окръжността с диаметър OT. Това е така, понеже $T \equiv T' = \varphi_\omega(T)$.



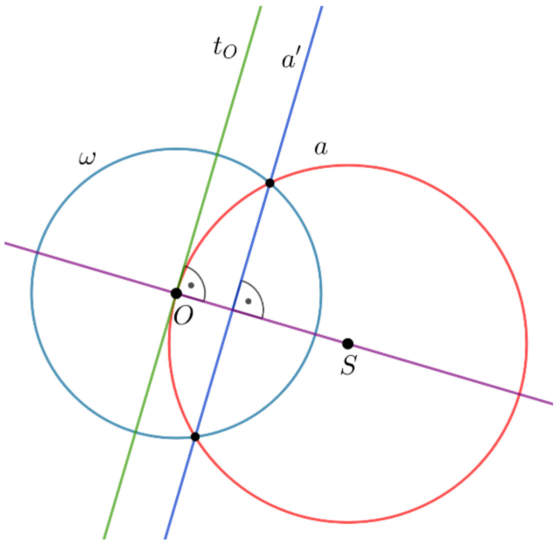
Фигура 16: Образ на права, допираща се до инверсионната окръжност

5. Построяване на образ на окръжност при инверсия

I. Построяване на образ на окръжност, *минаваща през центъра на инверсията*

Теорема 3.3. Образът на окръжност, която минава през центъра на инверсия, е права, неминаваща през центъра на инверсия, успоредна на допирателната към окръжността в центъра.

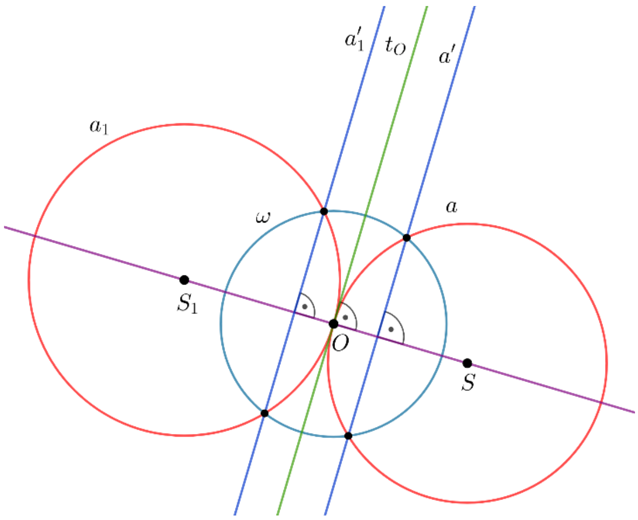
Доказателство: От факта, че инверсията е инволютивно изображение и от втората на част на доказателството, изложено за построяването на образа на права, неминаваща през центъра на инверсия, следва, че образът на окръжност, минаваща през центъра на инверсия, е права, която не минава през него.



Фигура 17: Построяване на образ на окръжност, минаваща през центъра на инверсия

Допирателната t_O към ω в точката O е перпендикулярна на правата, минаваща през т. O и центъра дадената окръжност т. S, но тъй като инверсията е конформно изображение, то $OS \perp a'$, откъдето следва, че $t_O \parallel a'$.

- Следствие от това е, че, ако две окръжности се допират в центъра на инверсия, образите им са две успоредни прави. Обратното също е вярно: образите на две успоредни прави при инверсия са окръжности с допирна точка центъра на инверсия (Петров, 1969).



Фигура 18: Образи на окръжности, допиращи се в центъра на инверсия

II. Построяване на образ на окръжност, *неминаваща през центъра на инверсията*

Теорема 3.4. Образът на окръжност, която не минава през центъра на инверсия, е окръжност, неминаваща през центъра на инверсия, като двете окръжности са хомотетични, а центърът на хомотетията, която изобразява едната в другата окръжност, съвпада с центъра на инверсионната окръжност.

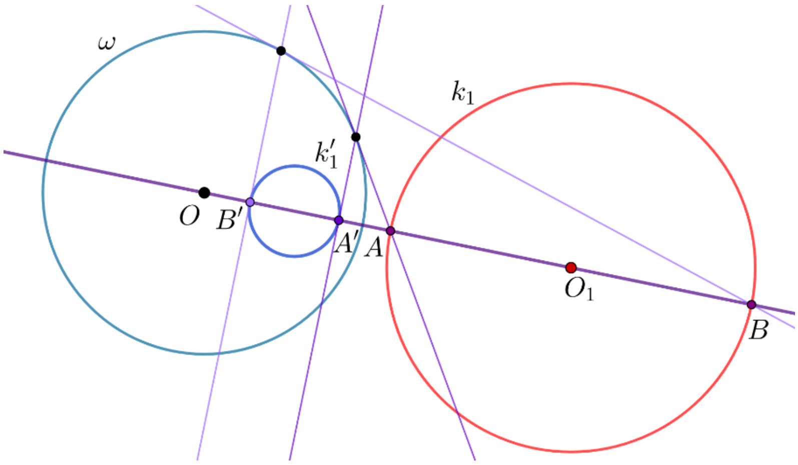
Нека k_1 е окръжност с център т. O_1 и $O \notin k_1$. Трябва да се построи $\varphi_\omega(k_1) = k_1{}'$.

Построение: 1. $OO_1 \cap k_1 = \{A, B\}$;

2. $\varphi_\omega(A) = A'$;

3. $\varphi_\omega(B) = B'$;

4. $\varphi_\omega(k_1) = k_1{}'$, където $k_1{}'$ е окръжността с диаметър $A'B'$.



Фигура 19: Построяване на образ на окръжност, неминаваща през центъра на инверсия

Забележка: При инверсия образът на центъра на дадена окръжност не е център на образа на окръжността, т.е. образът на т. O_1 не е център на окръжността $k_1{}'$ (Табов, 1990).

Доказателство: Нека т. P е произволна точка от окръжността k_1 и $\varphi_\omega(P) = P'$.

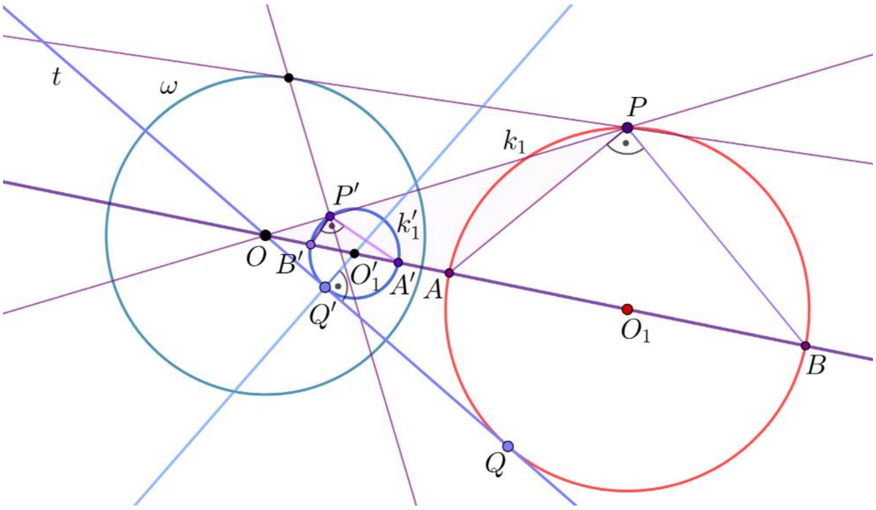
Тогава $OA.OA' = OP.OP'(= r^2) \Rightarrow \frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'} \Rightarrow \Delta OPA \sim \Delta OA'P' \Rightarrow \sphericalangle OAP = \sphericalangle OP'A'$.

По аналогичен начин от подобието на триъгълниците OPB и $OB'P'$ се получава, че $\sphericalangle OPB = \sphericalangle OB'P'$.

Следователно $\sphericalangle OPB - \sphericalangle OPA = \sphericalangle OB'P' - \sphericalangle OA'P'$.

За ΔABP : $\sphericalangle APB = \sphericalangle OPB - \sphericalangle OPA = 90°$.

За $\Delta A'B'P'$: $\sphericalangle A'P'B' = \sphericalangle OB'P' - \sphericalangle OA'P'$ ($\sphericalangle OB'P'$ е външен)



Фигура 20: Построяване на образ на окръжност, неминаваща през центъра на инверсия - доказателство

Оттук следва, че $\sphericalangle APB = \sphericalangle A'P'B' = 90°$. Когато точката P се движи по дадената окръжност, нейният образ P' при инверсията φ_ω ще описва окръжност, на която отсечката $A'B'$ е диаметър.

Обратно, нека QQ' е обща външна допирателна на k_1 и $k_1{}'$ ($Q \in k_1, Q' \in k_1{}'$).

Тогава точките Q и Q' ще бъдат взаимно инверсни. Перпендикулярът, издигнат от точката Q' към правата OO_1, ще я пресече в точката $O_1{}'$, която е център на окръжността, инверсна на k_1 (Костовски, 1964).

Ако се допусне, че $k_1{}'$ минава през т. O, т. O също ще бъде обща пресечна точка на $k_1{}'$ и правата OO_1. Получава се, че окръжността и правата имат три общи точки, което е невъзможно (Петров, 1969).

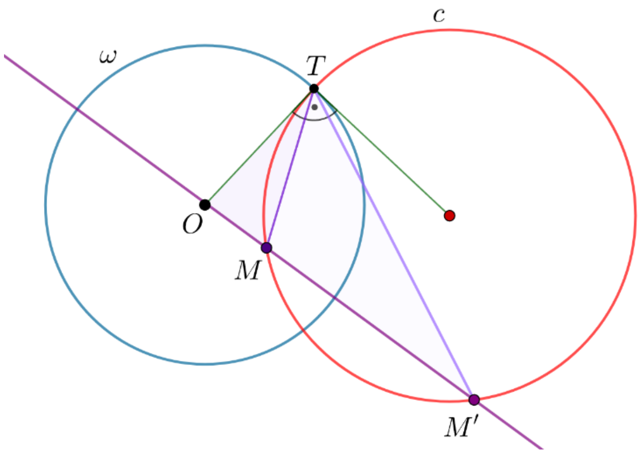
III. Образ на окръжност, *ортогонална на инверсионната окръжност*

Теорема 3.5. Окръжност, която е различна от инверсионната, е двойна (инварианта) при инверсия тогава и само тогава, когато е ортогонална на инверсионната окръжност.

Доказателство: Нека $\omega \perp c$ и едната от пресечните точки на тези две окръжности е T. Нека още т. M е произволна точка от окръжността c. С M' се означава втората пресечна точка на правата OM с окръжността c (ако OM е допирателна към c приемаме, че $M \equiv M'$).

Тъй като радиусът OT на ω е допирателна към c, то $OM.OM' = OT^2 = r^2$.

Следователно $\varphi_\omega(M) = M' \Longrightarrow$ всяка точка от окръжността c се изобразява в точка, която също лежи на нея, т.е. $\varphi_\omega(c) = c$.



Фигура 21: Образ на окръжност, ортогонална на инверсионната окръжност

Нека сега $\varphi_\omega(c) = c$. Трябва да се докаже, че $\omega \perp c$.

От това, че c е различна от инверсионната окръжност следва, че съществува точка M от c, която не лежи върху ω и не е двойна за инверсията. Окръжността c обаче е инвариантна при инверсията, което показва, че образът M' на т. M също е точка от окръжността c. От друга страна т. M' лежи на правата OM. Получава се, че M' е пресечна точка на c и OM.

Тогава от свойството на секущата е изпълнено равенството $OM.OM' = r^2$, а от свойство на инверсията следва, че една точките M и M' е външна за окръжността ω, а другата – вътрешна. Следователно c и ω се пресичат. Нека едната от пресечните им точки е T. Тъй като $OT = r$, то $OM.OM' = OT^2$.

Последното равенство може да се запише във вида $\frac{OT}{OM} = \frac{OM'}{OT}$. Оттук следва, че $\Delta OMT \sim \Delta OTM'$.

От подобието на триъгълниците следва, че $\sphericalangle OTM = \sphericalangle OM'T$.

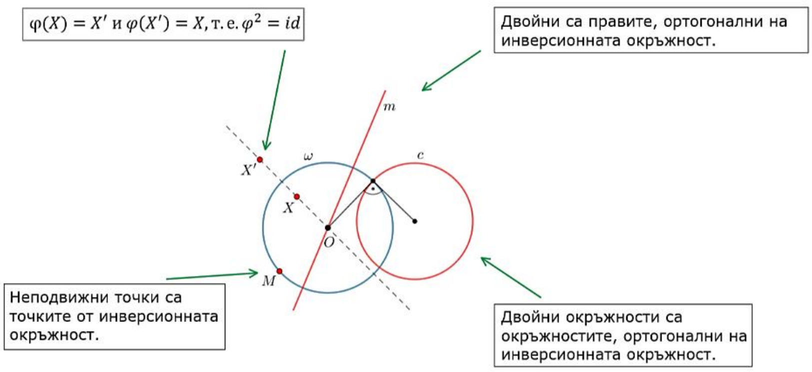
Но $\sphericalangle OM'T = \frac{1}{2}\widehat{MT} \Rightarrow \sphericalangle OTM = \frac{1}{2}\widehat{MT}$, което показва, че $\sphericalangle OTM$ е периферен за c, т.е. OT е тангента за c. Следователно c и ω са ортогонални помежду си. Това е показано в (Банков и Витанов, 2003) и (Петров, 1969).

6. Инверсията относно окръжност и симетрията относно права

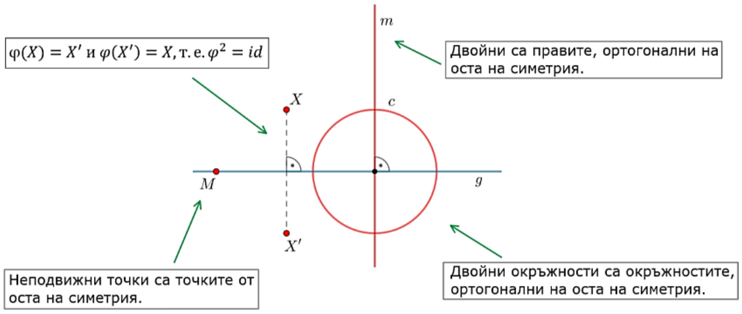
Инверсията относно окръжност и симетрията относно права имат много общи свойства. С помощта на *Таблица 1.* някои от тях са изложени синтезирано.

Таблица 1: Сравнителна таблица: инверсия относно окръжност и симетрия относно права

<table>
<tr><th></th><th>инверсия</th><th>осева симетрия</th></tr>
<tr><td>инволютивно изображение</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ако φ е инверсия относно окръжност (симетрия относно права), а F е произволна фигура, от от $\varphi(F) = F'$ следва $\varphi(F') = F$. Или още: ако φ е инверсия относно окръжност (симетрия относно права), то $\varphi^2 = id$.</td></tr>
<tr><td>неподвижни точки</td><td>точките от инверсионната окръжност</td><td>точките от оста на симетрия</td></tr>
<tr><td colspan="3">Точките от инверсионната окръжност (оста на симетрия) са неподвижни при инверсията (симетрията относно права).</td></tr>
<tr><td>образ на точка</td><td>вътрешността на инверсионната окръжност се изобразява във външността и обратно</td><td>местата на двете полуравнини, определени от оста, се сменят</td></tr>
<tr><td colspan="3">Окръжността на инверсия (оста на симетрия) разделя равнината на две области и всяка от тях при инверсията (симетрията относно права) се трансформира в другата.</td></tr>
<tr><td>двойни прави</td><td>правите, минаващи през центъра на инверсия (правите, ортогонални на инверсионната окръжност)</td><td>правите, ортогонални на оста на симетрия</td></tr>
<tr><td>двойни окръжности</td><td>окръжностите, ортогонални на инверсионната окръжност и инверсионната окръжност</td><td>окръжностите, чиито центрове лежат на оста на симетрия (окръжностите, ортогонални на оста на симетрия) и оста на симетрия</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ако една права или окръжност е ортогонална на инверсионната окръжност (оста на симетрия), тя е двойна при инверсията (симетрията). Освен това е двойна и инверсионната окръжност (оста на симетрия).</td></tr>
</table>



Фигура 22: Сравнение – образи при инверсия



Фигура 23: Сравнение – образи при осева симетрия

Между инверсията относно окръжност и симетрията относно права има различия. Някои от тях са:

- Инверсията относно окръжност трансформира права в права или окръжност, докато симетрията относно права винаги трансформира права в права.
- Тъй като центърът на инверсията няма образ, инверсията относно окръжност не е еднозначно обратимо точково съответствие. При симетрия относно права всяка точка от равнината притежава образ, т.е. симетрията относно права е еднозначно обратимо точково съответствие. Тук е полезно е да се имат предвид следното съображение:
    - Ако M и M' са произволна двойка съответни точки при дадена инверсия с основна окръжност $\omega(O, r)$, то $OM.OM' = r^2$. Тогава, колкото повече точката M се приближава до центъра на инверсия, толкова дължината на OM неограничено намалява ($|OM| \to 0$). Следователно M' неограничено се отдалечава от O, а отсечката OM' с дължина $\frac{r^2}{OM}$ расте неограничено, т.е. $|OM'| \to \infty$. Така може да се счита, че при дадена инверсия на центъра се съпоставя „безкрайно отдалечената точка“. Това е допълнение на равнината с нова точка. Равнина, съдържаща такава точка, се нарича *кръгова равнина*. В кръговата равнина центърът също

има образ и инверсията се счита за еднозначно обратимо точково съответствие (Петров, 1969).

Преди да се премине към разглеждане на приложението на метода на инверсията в геометрията на пергела, ще бъде изложено решението на задача за построение, насочена към намиране на образ на квадрат при инверсия.

Задача 3.1. Постройте образа на квадрат при инверсия относно вписаната в квадрата окръжност.

Анализ: Нека е даден квадратът $ABCD$. Пресечната точка O на диагоналите на квадрата е центърът на вписаната в квадрата окръжност.

Разглежда се инверсията φ_ω с полюс точката O и основна окръжност $\omega(O;\frac{AB}{2})$.

За да се намери образът на квадрата при инверсията φ_ω, трябва да се намерят образите на върховете на квадрата. Образите на върховете на квадрата ще бъдат пресечните точки на дъгите от окръжностите, явяващи се образи на правите, съдържащи върховете на $ABCD$.

Достатъчно е да се построи образа на т. A, защото останалите могат да се построят по аналогичен начин.

Построение: 1. Построява се образът на правата AB. За целта се спуска перпендикуляр от полюса на инверсия (точката O) към правата AB. Нека петата на този перпендикуляр е M. Тогава образът на правата AB е окръжността с диаметър OM. Образът на отсечката AB е полуокръжността $\widehat{A'B'}$, несъдържаща точката O;

2. Построява се образът на правата AD. За целта се спуска перпендикуляр от полюса на инверсия (точката O) към правата AD. Нека петата на този перпендикуляр е Q. Тогава образът на правата AD е окръжността с диаметър OQ. Образът на отсечката AD е полуокръжността $\widehat{A'D'}$, несъдържаща точката O;

3. $\varphi_\omega(A) = A' = \widehat{A'B'} \cap \widehat{A'D'}$;

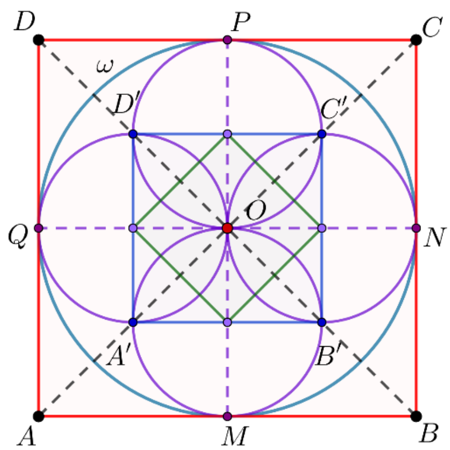
4. По същия се намират $\varphi_\omega(B) = B', \varphi_\omega(C) = C', \varphi_\omega(D) = D'$;

5. $\varphi_\omega(ABCD) = A'B'C'D'$.

Доказателство: Тъй като $A = AB \cap AD$,

то $\varphi_\omega(A) = A' = A'B' \cap A'D'$.

Забележка: Точка O е център и на построения квадрат, тъй като всяка една от точките A, B, C, D, точка O и техните образи са колинеарни. Тоест точката $C' = \sigma_O(A')$ и $D' = \sigma_O(B')$.



Фигура 24: Задача 3.1. – образ на квадрат при инверсия относно вписаната в квадрата окръжност

Приложение: Построяването на образа на пресечната точка на две дадени прави (отсечки) като пресечна точка на образите на правите (отсечките) се дължи на запазването на инцидентността, т.е. ако една точка лежи върху дадена права, нейният образ лежи върху образа на правата. Този подход се използва не само при инверсията, а и при други геометрични преобразувания.

Удачна задача за упражнение е построяването на образа на квадрат при инверсия относно описаната около квадрата окръжност. Реализацията може да се направи чрез ресурсния файл към текущата задача. В него построението на квадрата чрез използване на инверсия се визуализира само след поставяне на отметка в полето „*Изчертаване на образ при инверсия относно вписаната окръжност*". След построяване на описаната около квадрата окръжност и намиране на образа на квадрата при инверсия относно нея, може да бъде добавено ново поле за отметка „*Изчертаване на образ при инверсия относно описаната окръжност*". За целта трябва да бъдат зададени необходимите условия за поява на обектите върху чертожната повърхност.

Оттук насетне построението на образ на точка, права или окръжност ще бъдат преизползвани многократно, без да бъдат описани подробно. В [Глава IV. „*Приложение на метода на инверсията в геометрията на пергела*"] са изложени и построения за намирането на образа на даден обект, които могат да бъдат извършени само с помощта на пергел.

Забележка: Когато се извършват построения чрез метода на инверсия, теоремите за намиране на образ на права и окръжност могат да послужат като междинна проверка за това дали конструкцията, която сме използвали за построяване на съответния образ е правилна.

Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава III.

- Построенията, които съдържат визуализация на свойствата на инверсия, се намират при ресурсните файлове в папката с име „*Свойства на инверсията*".
- Построенията към текущата глава за ъгъл между две окръжности, ъгъл между права и окръжност и за степен на точка относно окръжност се намират в папката с име „*Елементи от геометрията на окръжностите*".
- Файловете, съдържащи построяването на образ на точка, права и окръжност, както и построяването на образ на квадрат относно вписаната в него окръжност, са поместени в папката „*Построяване на образи при инверсия*".

Глава IV. - Приложение на метода на инверсията в геометрията на пергела -

Петров и Ганчев (1966) отбелязват, че още в дълбока древност линийката и пергелът са били разглеждани като равностойни инструменти при решаване на построителни задачи. Постепенно било забелязано, че има задачи, които могат да бъдат решени само с помощта на пергел. Такива са задачите за разделяне на дадена окръжност на шест равни части, построяване на точка, симетрична на дадена точка относно дадена права и други. Табов и Лазаров (1990) посочват, че през периода XVII-XIX в. са провеждани интензивни изследвания за възможностите на чертожните инструменти.

При сравняването на линийката и пергела било констатирано, че докато използването на линийката позволява да се построяват прави и отсечки, с пергел се построяват само точки от прави или точки и краищата на отсечки. В резултат на проведените изследвания датчанинът Георг Мор (Mor, 1672) и италианецът Лоренцо Маскерони (Mascheroni, 1797) полагат основните на теорията на построенията само с помощта на пергел, доказвайки следната теоремата:

Всяка задача за построение, решима с линийка и пергел, е решима и само с пергел.

Тъй като с пергел могат да се построяват само окръжности и пресечните точки на окръжности, за да не поражда недоразумения, теоремата на Мор-Маскерони може да се формулира още по следния начин:

Всяка задача за построение на фигура, определена от краен брой точки, решима с линийка и пергел, е решима и само с пергел. (Петров и Ганчев, 1966)

Фигура 25: Masscheroni, L. (1797). La geometria del compasso.

В (Петров и Ганчев, 1966) е посочено още, че теоремата на Мор-Маскерони е доказана през 1890 год. от австрийския математик Август Адлер (1863 - 1923), който *използвал при доказателството инверсия относно окръжност*.

Всяка задача за построение, която се решава с пергел и линийка в равнината на Евклид, винаги се свежда към решаване в определен ред на следните основни задачи:

1) Да се прекара права през две дадени точки.

2) Да се опише окръжност с център дадена точка и с даден радиус.

3) Да се намерят пресечните точки на две дадени окръжности.

4) Да се намерят пресечните точки на дадена окръжност и права, зададена с две свои точки.

5) Да се намерят пресечните точки на две прави, всяка от които е зададена с две свои точки.

За да се докаже, че всяка задача за построение с пергел и линийка може да бъде решена само с пергел, е достатъчно да се установи, че тези основни операции могат да бъдат извършени само с помощта на пергел (Костовски, 1964).

Разделът на геометрията, в който се изучават геометричните построения само с пергел, се нарича *геометрия на пергела*. В геометрията на пергела правата линия или отсечката се определя с две точки, а не са задава във вид на непрекъсната права линия, т.е. една права се смята за построена, ако са построени две точки от нея. Поради тази причина правите линии към извършените графични построения към задачите от тази глава са изобразени само с пунктир (тези прави не участват в построението) (Костовски, 1964).

Методът на инверсията е тясно свързан с въпроса за решаване на задачите само с помощта на пергел. Често общият метод за решаване на някои такива задачи съдържа използването на инверсия.

В началото на условията на задачите в този раздел трябва да присъства и изречението „*Да се построи само с пергел …*“. За краткост и избягване на повторения това ограничение е пропуснато, но трябва да бъде взето предвид от страна на читателя. Важно е също, че етапът на изследване в повечето задачи от тази глава е пропуснат не защото представлява трудност, а защото броят на решенията на някои от задачите е известен предварително.

Задача 4.1. *Дадена е окръжност $\omega(O,r)$ и точка X. Да се построи образът на точката X при инверсията φ_ω.* (Табов и Лазаров, 1990) и (Петров и Ганчев, 1966)

Забележка: Построението може да се използва, както за построяване на образ на външна за инверсионната окръжност точка, така и за построяването на образ на вътрешна за инверсионната окръжност точка.

Построение: Ако $OX > \frac{r}{2}$, последователно се построяват:

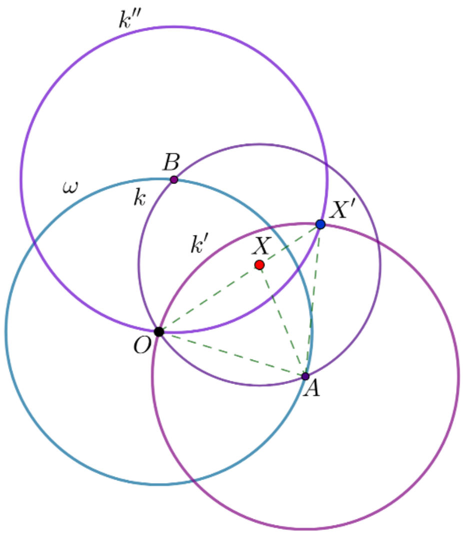
1. $k(X, XO)$;

2. $k \cap \omega = \{A, B\}$;

3. $k'(A, AO)$;

4. $k''(B, BO)$;

5. $k' \cap k'' = \{O, X'\}$, където $\varphi_\omega(X) = X'$.



Фигура 26: Задача 4.1. – построение – 1

Доказателство:

$\Delta XAO \sim \Delta AOX' \Rightarrow \frac{AO}{X'O} = \frac{XO}{AO} \Rightarrow OX.OX' = AO^2 = r^2 \Rightarrow X'$ е търсената точка.

Ако $OX \leq \frac{r}{2}$, окръжността $k(X, XO)$ няма да пресече окръжността ω и горните построения са невъзможни.

Преди да бъде разгледан случая, в който $OX \leq \frac{r}{2}$, следва да се реши следната задача:

Основна задача. Да се построи отсечка n пъти по-голяма от дадена отсечка $PP_1 = r$, където $n \in N$. (Костовски, 1964)

Анализ: За извършване на построението ще построим успоредници с една и съща дължина на едната от двойките успоредни страни.

Построение: 1. произволна точка Q, лежаща в една от полуравнините с контур правата SS_1;

2. $k_1(P_1, PQ)$;

3. $k_1{}'(Q, r)$;

4. $k_1 \cap k_1{}' = R$;

5. $k_2(P_1, r)$;

6. $k_2'(R, QP_1)$;

7. $k_2 \cap k_2' = P_2$;

Отсечката $PP_2 = 2.PP_1$.

8. $k_3(P_2, r)$;

9. $k_3'(R, QP_2)$;

10. $k_3 \cap k_3' = P_3$;

Отсечката $PP_3 = 3.PP_1$.

11. $k_4(P_3, r)$;

12. $k_4'(R, QP_3)$;

13. $k_4 \cap k_4' = P_4$;

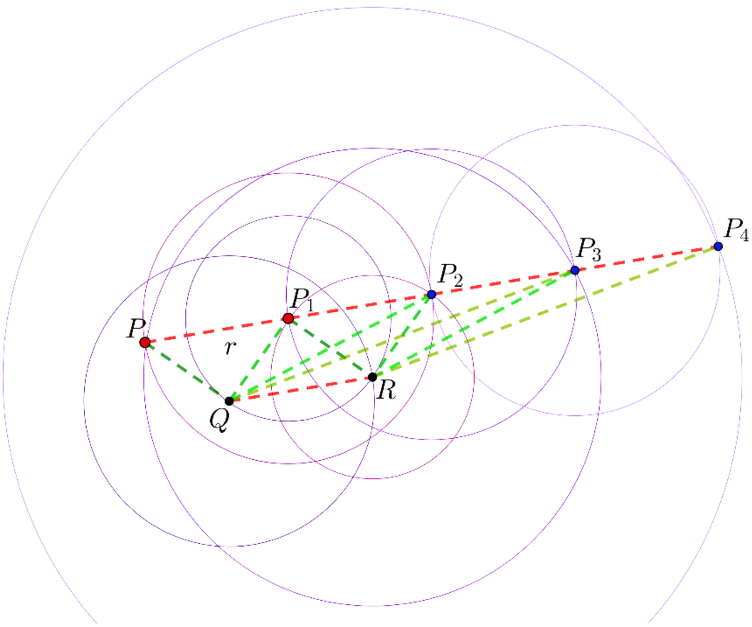
Отсечката $PP_4 = 4.PP_1$.

За да построим отсечка $PP_n = n.PP_1$, построяваме:

1. $k_n(P_{n-1}, r)$;

2. $k_n'(R, QP_{n-1})$;

3. $k_n \cap k_n' = P_n$.



Фигура 27: Построяване на отсечка n пъти по-голяма от дадена

Доказателство: Фигурите $PQRP_1, P_1QRP_2, P_2QRP_3, P_3QRP_4$ … $P_{n-1}QRP_n$ са успоредници. Следователно $PP_1 = PP_2 = PP_3 = PP_4 = \dots PP_n = QR = r$.

Приложение: Изложеното построение се използва при намирането на образ на точка X при инверсия с основна окръжност $\omega(O, r)$, когато $OX \leq \frac{r}{2}$.

Нека $OX \leq \frac{r}{2}$. В този случай последователно се извършват следните построения:

1. $OX_1 = n.OX$, така че $n.OX > \frac{r}{2}$ [Така построението се свежда до построението, извършено в първия случай.];

2. $k_1(X_1, X_1O)$;

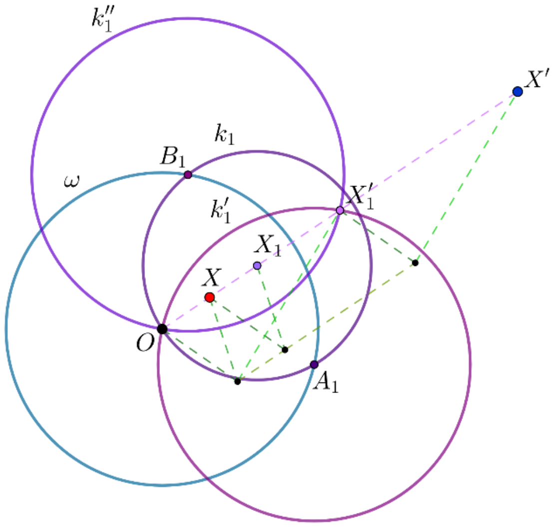
3. $k_1 \cap \omega = \{A_1, B_1\}$;

4. $k_1{}'(A_1, A_1O)$;

5. $k_1{}''(B_1, B_1O)$;

6. $k_1{}' \cap k_1{}'' = X_1{}'$;

7. точка X' така, че $OX' = n.OX_1{}'$.



Фигура 28: Задача 4.1. – построение – 2

Доказателство:

$OX_1.OX_1{}' = n.OX.\frac{OX'}{n} = OX.OX' = r^2$ $(\varphi_\omega(X_1) = X_1{}') \Rightarrow X'$ е търсената точка.

Приложение: Построението, извършено в тази задача, ще послужи за решаването на повечето от задачите.

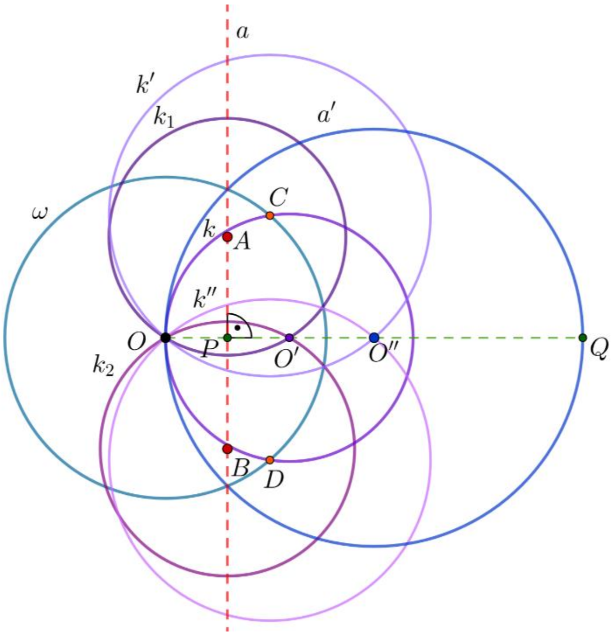
Задача 4.2. Дадена е окръжност $\omega(O, r)$ и точки A и B. Ако правата $a = AB$ не минава през т. O, да се построи центърът на окръжността a', която е образ на a при инверсията φ_ω. (Табов и Лазаров, 1990) и (Петров и Ганчев, 1966).

Построение: 1. $k_1(A, AO)$;

2. $k_2(B, BO)$;

3. $k_1 \cap k_2 = O'$ – симетричната точка на O спрямо правата a;

4. $\varphi_\omega(O') = O''$ [Препратка към задача 4.1.] – център на $\varphi_\omega(a) = a'$.



Фигура 29: Задача 4.2. – построение

Доказателство: Нека $P = a \cap OO'$ и $Q = a' \cap OO'$. Тогава $\varphi_\omega(P) = Q$.

Следователно $OP.OQ = OO'.OO'' = r^2$.

Но т. $P = a \cap OO'$, а т. O и O' са симетрични спрямо правата a

$\Rightarrow OP = O'P = \frac{1}{2}OO'$ и $\sphericalangle(a, OO') = 90°$.

Тогава $OP.OQ = 2.OP.OO'' \Rightarrow OQ = 2.OO''$ и т. O'' се намира между т. O и Q

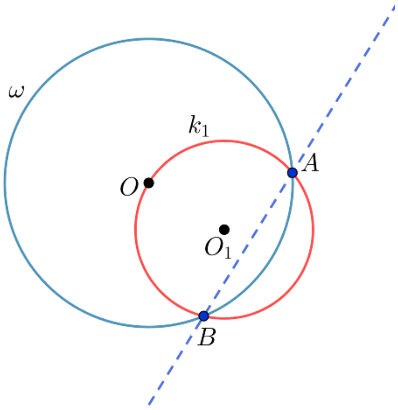
$\Rightarrow$ т. O'' е среда на OQ.

Но OQ е диаметър на $a' \Rightarrow O''$ е център на a'.

Приложение: Построението се използва в задачи 4.5., 4.6., 4.7 и 4.8. (задача за построяване на пресечната точка на две прави).

Задача 4.3. Дадена е окръжност $\omega(O, r)$ и окръжност $k_1(O_1, r_1)$, такава че $O \in k_1$. Да се построи правата AB, която е образ на k_1 при инверсията φ_ω. (Костовски, 1964)

Анализ: Ако $k_1 \cap \omega = \{A, B\}$, търсената права е правата, образувана от точките A и B:

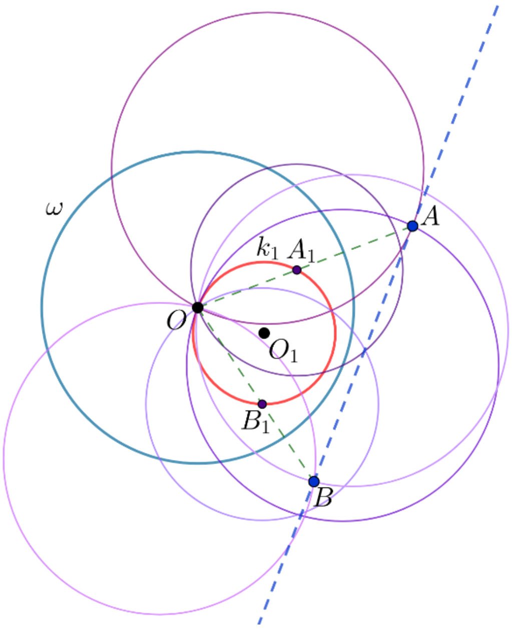


Фигура 30: Задача 4.3. – построение – частен случай

В противен случай се избират две произволни точки A_1 и B_1 от окръжността k_1 и се построяват техните образи A и B.

Построение: 1. $\varphi_\omega(A_1) = A$, т. A_1 – произволна точка от окръжността k_1;

2. $\varphi_\omega(B_1) = B$, т. $B_1 \neq A_1$ – произволна точка от окръжността k_1.



Фигура 31: Задача 4.3. – построение

Доказателство: Предоставя се за самостоятелно изпълнение.

Изследване: При всеки различен избор на точките A_1 и B_1 се получават нови точки от търсената права AB. Задачата винаги има единствено решение.

Приложение: Изложеното построение може да бъде използвано при решаването на Аполониевите задачи.

Задача 4.4. *Дадени са окръжностите $\omega(O, r)$ и $k_1(O_1, r_1)$, която не минава през т. О. Да се построи окръжността, която е образ на k_1 при инверсията φ_ω.* (Костовски, 1964)

Анализ: За да се построи търсената окръжност, трябва да се намери центърът ѝ и точка, която лежи върху нея. Точка от търсената окръжност може да се намери, ако се намери образът на произволна точка от окръжността k_1.

Допускаме, че окръжността $k_1' = \varphi(k_1)$ с център т. $O_1{}'$ е построена. Нека PP' е общата допирателна на k_1 и k_1' (точка P е точка на допиране за окръжността k_1, а т. P' е точка на допиране за окръжността k_1').

Нека $PO' \perp OO_1$. Тогава $\Delta OPO' \sim \Delta OO_1{}'P' \Rightarrow \frac{OO_1{}'}{OP'} = \frac{OP}{OO'} \Rightarrow OO_1{}'.OO' = OP.OP' = r^2$, тъй като т. P и P' са съответни точки за инверсията $\varphi_\omega \Rightarrow$ т. O' и $O_1{}'$ също са двойка съответни точки за инверсията φ_ω.

В правоъгълния ΔOO_1P отсечката PO' е височина. Следователно $OO_1.O'O_1 = |PO_1|^2 = r_1{}^2 \Rightarrow$ т. O и O' са двойка съответни точки за инверсията φ_{k_1}.

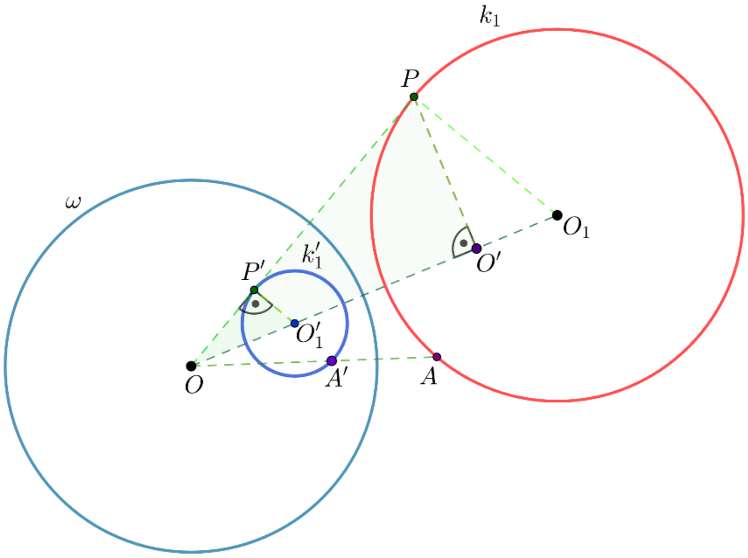
Построение: 1. $\varphi_{k_1}(O) = O'$;

2. $\varphi_\omega(O') = O_1{}'$ – център на търсената окръжност;

3. $\varphi_\omega(A) = A'$, където т. $A \in k_1$ – произволна;

4. $k_1{}'(O_1{}', O_1{}'A')$ – търсената окръжност.

Доказателство: Следва непосредствено от анализа и построението.



Фигура 32: Задача 4.4. – построение

Изложената последователност на задачите съвпада с последователността, дадена от (Костовски, 1964). Петров и Ганчев (1966) и Табов и Лазаров (1990) също разглеждат използването на инверсия при извършване на геометрични построения само с пергел, но се спират предимно на задачите за построяване на образи на точки, прави и окръжности при инверсия. В техните трудове липсва изложение на общия метод на инверсията за решаване на геометрични задачи за построение. В тази глава ще бъде изложено приложението на този метод.

Нека се допусне, че някоя задача за построение, решима с линийка и пергел, трябва да се реши само с пергел. Основните стъпки, описващи общия метод за решаване на задачи за построение само с пергел, са:

1. Нека след решаването на тази задача с помощта на линийка и пергел е получена фигура Ф, състояща се от точки, прави и окръжности.

2. Разглежда се инверсия с основна окръжност $\omega(O,r)$, където центърът на инверсия – т. O не лежи на нито една от правите и окръжностите на Ф.

3. Тогава инверсният образ на Ф – фигурата Ф′ – ще се състои само от точки и окръжности (защото образът на права, неминаваща през центъра на инверсия, е окръжност и образът на окръжност, неминавща през центъра на инверсия, също е окръжност). Всяка от точките и окръжностите на Ф′ може да бъде построена с помощта на задачи 4.1.-4.4. Необходимо е да се отбележи, че построяването на фигурата Ф′ трябва да бъде извършено в реда, в който се извършва построяването на фигурата Ф с пергел и линийка.

4. Получаваме резултат върху фигурата Ф′.

5. За да получим търсения резултат, трябва да построим инверсния образ на резултата, който сме получили върху фигурата Ф′.

По описания начин всяка задача, решима с пергел и линийка, може да бъде решена само с помощта на пергел (Костовски, 1964). Следващите няколко задачи прилагат описания общ метод за решаване на задачи само с помощта на пергел.

Задача 4.5. *Дадени са точките A, B, C и D. Да се построи пресечната точка на* правите AB *и* CD. (Костовски, 1964)

Анализ: 1. Фигурата Ф се състои от четирите точки A, B, C и D.

2. Разглежда се инверсия φ_ω с основна окръжност $\omega(O,r)$, където т. O не лежи на никоя от правите AB и CD.

3. Тогава образите на правите AB и CD ще бъдат окръжности, т.е. фигурата Ф′ ще се състои от две окръжности, които са образи на AB и CD.

4. Нека пресечната точка на тези окръжности е точката X'. Точката X' е резултатът, който се получава върху фигурата Φ′.

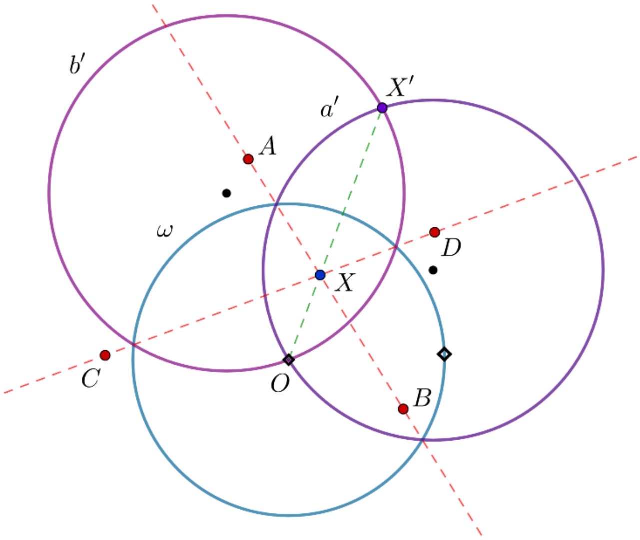
5. За да се получи търсеният резултат – пресечната точка на правите AB и CD, трябва да се намери образът X на точката X' при инверсията φ_ω.

Построение: 1. $\varphi_\omega(AB) = a'$ [Препратка към *задача* 4.2.];

2. $\varphi_\omega(CD) = b'$;

3. $a' \cap b' = \{O, X'\}$;

4. $\varphi_\omega(X') = X$ – пресечната точка на правите AB и CD [Препратка към задача 4.1.];



Фигура 33: Задача 4.5. – построение – 1

Доказателство: Следва от направения анализ и построението. Ако две прави се пресичат в точката X, то инверсните им образи се пресичат в инверсния образ на т. X:

$$\varphi_\omega(X = AB \cap CD) = \varphi_\omega(AB) \cap \varphi_\omega(CD) = a' \cap b' = X'$$

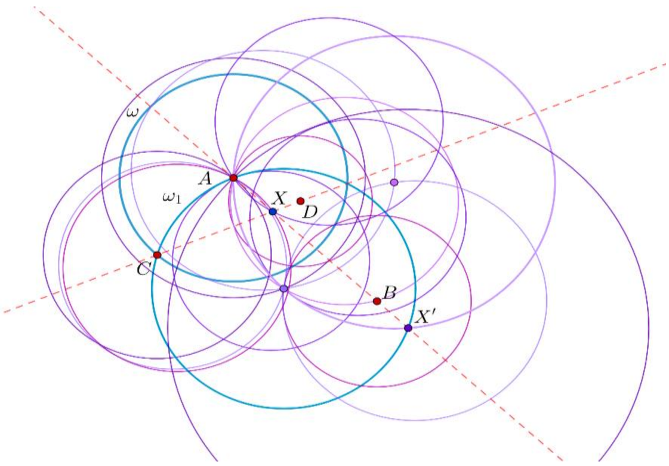
Изследване: Задача има нула решения (когато правите са успоредни помежду си) или едно решение.

За избор на центъра на инверсия може да бъде избрана някоя от дадените точки. Нека е дадена произволна инверсия с център т. A. Тогава правата AB ще бъде двойна за инверсията φ_ω: $\varphi_\omega(AB) = \varphi_\omega(A)\varphi_\omega(B) = AB'$, но т. A, B и B' лежат на една права $\Rightarrow$ $AB \equiv AB'$.

Правата CD, неминаваща през центъра на инверсия, ще се преобразува в окръжност b'.

Тогава задачата ще се сведе до намирането на пресечната точка на правата AB и окръжността b'.

Не се извършва подробно описание на техническото изпълнение:



Фигура 34: Задача 4.5. – построение – 2

С помощта на следващата задача ще установим как това построение може да бъде извършено само с помощта на пергел (Петров и Ганчев, 1966).

Приложение: В направения анализ подробно е описан общият метод за решаване на задачи за построение само с пергел. Това подпомага читателя на практика да приложи направеното теоретично изложение на метода.

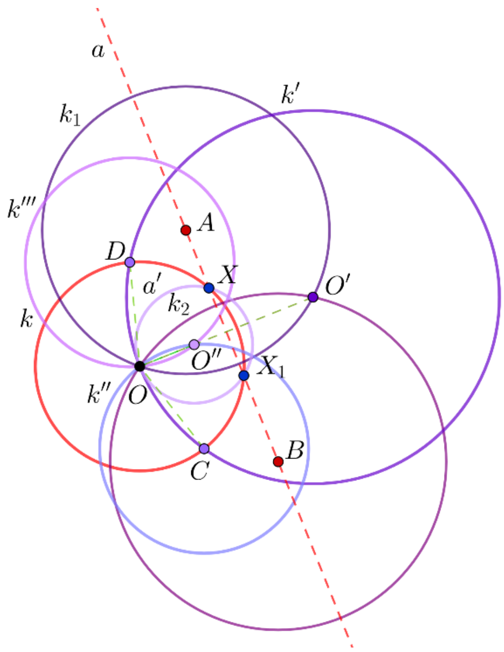
Задача 4.6. *Дадени са окръжност $k(O,r)$ и точки A и B. Да се построи пресечната точка на k и правата a, минаваща през т. A и B.* (Табов и Лазаров, 1990)

Анализ: Ако се разгледа инверсия φ_k с основна окръжност дадената окръжност k, общите точки на k и a, ще бъдат общи точки на k и $\varphi_k(a)$. Това е така, тъй като пресечните точки на k и a са от инверсионната окръжност, а точките, които лежат на нея, са двойни.

В тази задача фигурата Ф се състои от окръжността k и правата a, а фигурата Ф′ – от окръжностите k и $\varphi_k(a)$. Тъй като в този случай резултатът върху Ф′ съвпада с търсения резултат, но не е необходимо да построяваме инверсния му образ.

Построение: 1. $\varphi_k(a) = a'$ [Препратка към задача 4.2.];

2. $k \cap a' = \{X, X_1\}$ – търсените точки.



Фигура 35: Задача 4.6. – построение

Доказателство: Следва от построението и анализа.

Изследване: Задача може да има нула (когато правата a и окръжността k нямат общи точки), едно (когато правата a е допирателна към окръжността k) или две (когато правата a пресича окръжността k) решения.

Приложение: Подходящият избор на основна окръжност значително опростява решението на задачата. Предоставя се за самостоятелно изпълнение да бъде извършено построението в предходната задача по предложения втори начин на решение, при който за център на инверсия се избира една от дадените точки, използвайки решението на тази задача.

Задача 4.7. *Да се намери центърът на дадена (в смисъл начертана) окръжност* k. (Костовски, 1964)

Анализ: За да се намери центърът на окръжността, трябва да се намери центърът на окръжност, която е образ на права, определена с две произволни точки от дадената окръжност. Образът на тази права и дадената окръжност съвпадат помежду си.

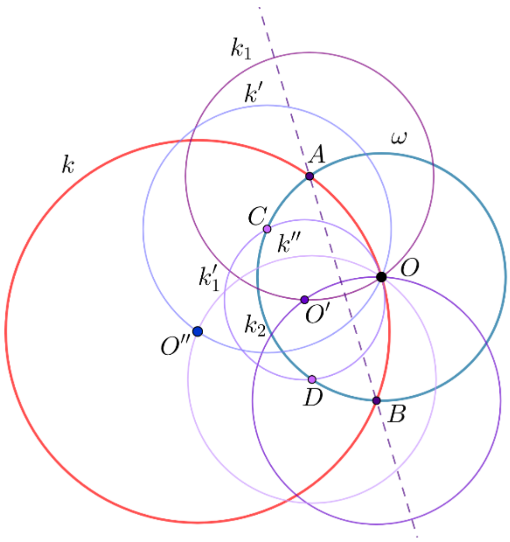
Построение:

1. т. O – произволна точка от окръжността k;

2. $\omega(O, r)$, където r – отсечка с произволна дължина;

3. $k \cap \omega = \{A, B\}$;

4. т. O'' - център на $\varphi_\omega(AB) \equiv k$ [Препратка към задача 4.2.]



Фигура 36: Задача 4.7. – построение

Доказателство 1: Точките A и B са двойни за инверсията φ_ω. Следователно окръжността k е инверсният образ на правата AB и центърът на $\varphi_\omega(AB)$ съвпада с центъра на k. Доказателство, че точката O'' е център на окръжността k е направено в *Задача* 4.2.

Приложение: Ако дължината на произволно избраната отсечка r е по-голяма от дължината на половината на радиуса на дадената окръжност, то за да се реши задачата е необходимо да бъдат построени шест окръжности (попада се в първия случай на задача 4.1. за построяването на образ на точка при инверсия). Това построение е много по-лесно за изпълнение от построението, което може да се извърши с помощта на линийка и пергел.

Освен това доказателството на тази задача, когато се изпълнява от ученици, може да бъде извършено и без използването на инверсия. Има и втори начин на доказателство, чрез който решението на задачата ще съдържа в себе си съвкупност от знания, които трябва да бъдат приложени, т.е. освен задача за построение тя се явява и доста подходяща геометрична задача за доказателство.

Доказателство 2:

Тъй като точките O и O' са симетрични спрямо правата AB, то правата OO' е перпендикулярна на хордата AB и я разполовява. Следователно търсеният център лежи на правата OO'.

Нека $OO' \cap k = E$ и $OO' \cap {k_1}' = F$, където ${k_1}'(O', O'O)$.

Разглеждат се правоъгълните триъгълници OAE (OE е диаметър на окръжността k) и OCF ($C = \omega \cap k_1'$, OF е диаметър на окръжността ${k_1}'$).

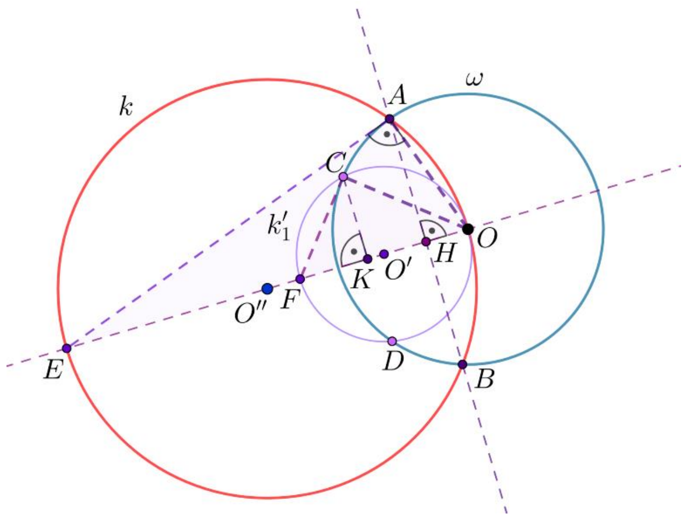
Нека AH е височина в ΔOAE, а CK е височина в ΔOCF. Тогава са в сила равенствата:

$$OA^2 = OE.OH \text{ и } OC^2 = OF.OK$$

Но $OC = OA = r$, $OF = 2.OO'$, $OH = \frac{1}{2}.OO'$ и $OK = \frac{1}{2}.OO''$, откъдето се получава, че

$$OE.OH = OF.OK \Rightarrow OE.\frac{OO'}{2} = 2.OO'.\frac{OO''}{2} \Rightarrow OO'' = \frac{OE}{2}$$

Тъй като отсечката OE е диаметър в окръжността k и т. O'' е среда на OE, то т. O'' е център на k.



Фигура 37: Задача 4.7. – доказателство

Задача 4.8. *Дадени са три неколинеарни точки –* A, B *и* C*. Само с пергел да се построи окръжността, минаваща през трите точки.* (Табов и Лазаров, 1990)

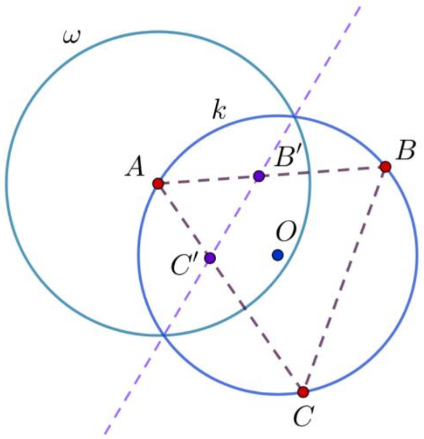
Задачата може да бъде формулирана и по следния начин: *Около даден триъгълник* ABC *да се опише окръжност.* (Костовски, 1964)

Анализ: Нека k е окръжността, минаваща през точките A, B и C.

Нека φ_ω е произволна инверсия с център т. A.

Нека още $\varphi_\omega(B) = B'$ и $\varphi_\omega(C) = C'$. Тогава инверсният образ на правата $B'C'$ ще бъде търсената окръжност.

В този случай фигурата Ф се състои от точките A, B *и* C, а фигурата Ф′ – от точките A, B' и C'. Търсеният резултат се получава, като се намери образът на права, неминаваща през центъра на инверсия, зададена с две свои точки.

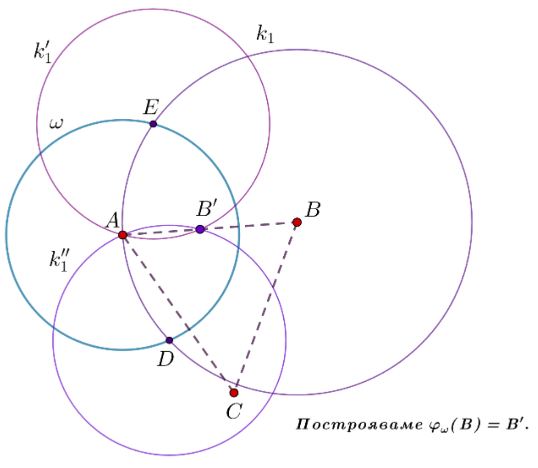


Фигура 38: Задача 4.8. – анализ

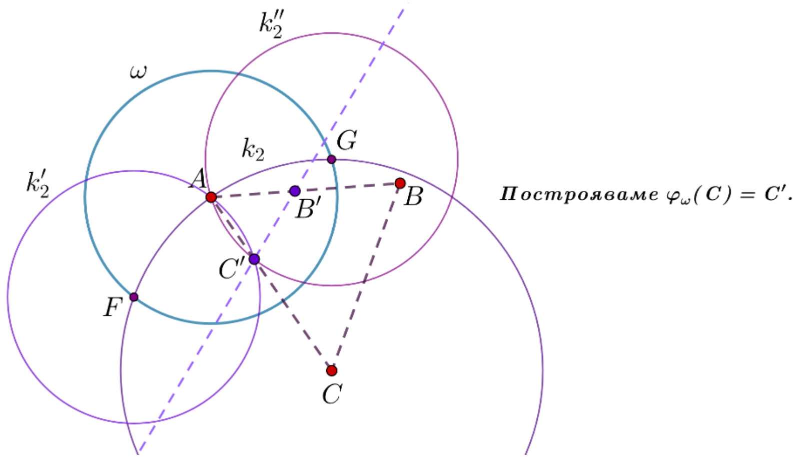
Построение: 1. $\omega(A, r)$, r – радиус с произволна дължина;

2. $\varphi_\omega(B) = B'$ [Препратка към задача 4.1.];

3. $\varphi_\omega(C) = C'$;

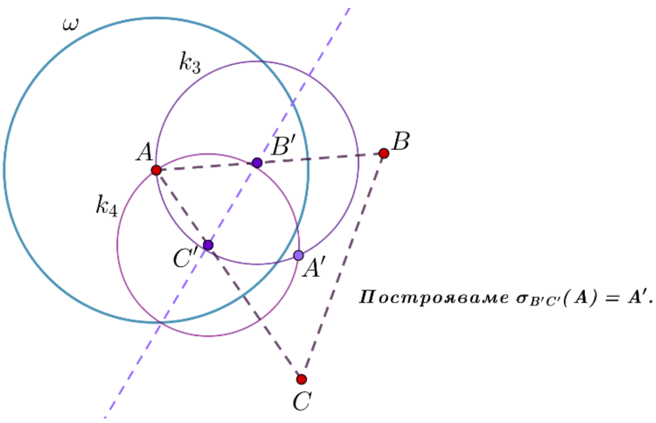


Фигура 40: Задача 4.8. – построение – 1

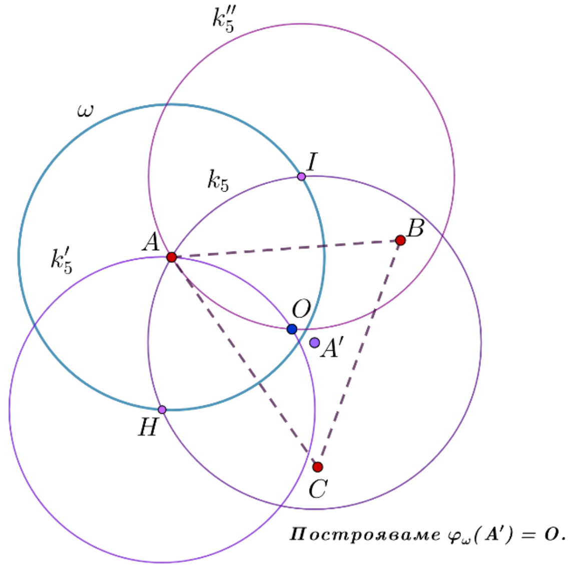


Фигура 39: Задача 4.8. – построение – 2

4. $\varphi_\omega(B'C') = k$ – търсената окръжност [Препратка към задача 4.2.].

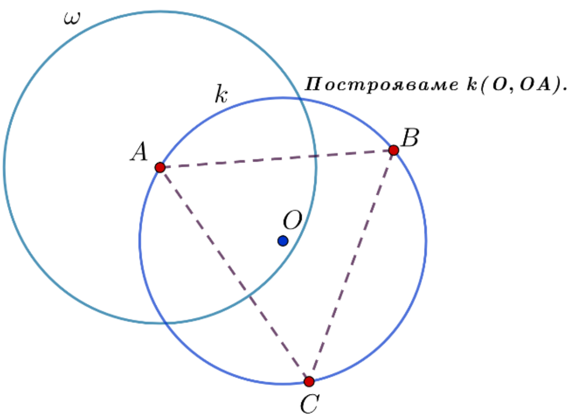


Фигура 41: Задача 4.8. – построение – 3



Фигура 42: Задача 4.8. – построение – 4

Доказателство: Тъй като $\varphi_\omega(B'C') = k$, то инверсните точки на B' и C' – точките B и C са точки от окръжността k. Точката A също принадлежи на тази окръжност, тъй като е център на инверсията, посредством която се намира образът на правата $B'C'$, неминаваща през т. A. Доказателство на построението, чрез което се намира окръжността k е извършено в задача 4.2.



Фигура 43: Задача 4.8. – построение – 5

Изследване: Задачата винаги има единствено решение. През всеки три неколинеарни точки минава единствена окръжност.

За да бъде опростено построението, за основна окръжност може да бъде избрана окръжността $\omega(A, AB)$. Тогава точката B е инверсна сама на себе си (двойна е за инверсията). Построението при този избор се предоставя за самостоятелно изпълнение.

Приложение: Задачата може да послужи за втори начин на решение на задача 4.4.: *Дадени са окръжностите $\omega(O,r)$ и $k_1(O_1,r_1)$, която не минава през т. О. Да се построи окръжността, която е образ на k_1 при инверсията φ_ω.*

Анализ: За да се приложи задача 4.8., е необходимо да се построят три точки от търсената окръжност. Затова се избират три произволни точки A, B, C от окръжността k_1 и се намират инверсните им образи A', B' и C', които ще принадлежат на търсената окръжност. Графичното изпълнение се предоставя за самостоятелно изпълнение. (Костовски, 1964)

Трябва да се отбележи, че задачи 4.1., 4.2. и 4.3. са решени така, че всички построени окръжности да минават през една и съща точка – точката O, която е център на разгледаната инверсия в съответната задача (*виж фиг. 28, 29 & 31*). В задача 4.1., когато $OX \leq \frac{r}{2}$, за да могат всички окръжности да минат през точката O, е необходимо вместо отсечка $OX_1 = n.OX$ да се построи отсечка $OX_1 = 3^n.OX$ (Костовски, 1964). В последния посочения източник е поместено подробно разглеждане на построения само с пергел при условие, че всички окръжности минават през една и съща точка.

Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава IV.

Построенията към задачите от текущата глава се намират в ресурсните файлове в папка с име „*Приложение на метода на инверсията в геометрията на пергела*“.

- Файлът към задача 4.1. е с име „*Построяване на образ на точка при инверсия.ggb*“. В него е извършена само визуализация за намирането на образа на т. X, когато $OX \geq \frac{r}{4}$, за да може да се използва построението на $OX_1 = n.OX$ за $n = 2$. Но независимо каква е стойността на n, построението на $OX_1 = n.OX$ е изложено подробно в помощната задача и може да бъде намерено във файла с име „*Построяване на отсечка n-пъти по-голяма от дадена отсечка.ggb*“.

- Построението към задача 4.2. се намира във файла с име „*Построяване на центъра на образа на права, неминаваща през центъра на инверсия.ggb*“. В него е включена поетапна визуализация на извършените стъпки в построението.

- Построението към задача 4.3. се намира във файла с име „*Построяване на образ на окръжност, минаваща през центъра на инверсия.ggb*“.

- Чертежите към задача 4.4. се намират във файла „*Построяване на образ на окръжност, неминаваща през центъра на инверсия.ggb*“.

- Построения, извършени към задача 4.5., са налични във файла с име „*Построяване на пресечната точка на две прави.ggb*“.

- Файлът „*Построяване на пресечни точки на права и окръжност.ggb*“ е предназначен за визуализиране на решението на задача 4.6.

- Построението и доказателство към задача 4.7. се намират във файла „*Построяване на центъра на начертана окръжност.ggb*“.

- Файлът, предназначен за използване към задача 4.8., е „*Построяване на окръжност, минаваща през три дадени точки.ggb*“.

- Глава V. Аполониеви задачи -

Аполоний Пергски (около 265-170 г. пр. н. е.) е един от великите гръцки математици. Той е живял след смъртта на Александър Македонски. Аполоний е учил и творил в Александрия и Пергам при учениците на Евклид. (Петров, 1969)

Той става известен със своята монография *Конусни сечения*, състояща се от 8 книги. В нея излага обща теория на елипсата, параболата и хиперболата и предлага класическите имена за тези криви (терминът тогава е бил *секции на конус*). Любопитно е, че, подобно на съвременните математици, разглежда и двата клона на хиперболата като една крива. Въвежда и други математически термини: асимптота, абсциса, ордината (История на геодезията, 2014). Френските математици Пиер Ферма (1601-1665) и Рене Декарт (1596-1650) изучват трудовете на Аполоний Пергски и други древногръцки математици, което довежда до откриването на принципи на аналитичната геометрия.

Аполоний Пергски е автор и на научното съчинение *Върху допиранията*, което не е запазено и не е достигнало до нас. За този негов трактат се споменава от Пап (около 320 г. пр. н. е.). Някои автори твърдят, че в този труд за пръв път е поставено изискването геометричните построения да се изпълняват само с линийка и пергел, и за пръв път е формулирана и решена следната задача:

Задача А. Да се построи окръжност, която се допира до три дадени окръжности.

Тази задача носи името на Аполоний и се нарича *задача на Аполоний* (или обща Аполониева задача). Тя е обект на изследване от много математици. Решена от френския математик Франсоа Виет (1540-1603), от Рене Декарт, от английския математик и физик Исак Нютон (1642-1727), от швейцарския математик Леонард Ойлер (1707-1803) и други по нови начини.

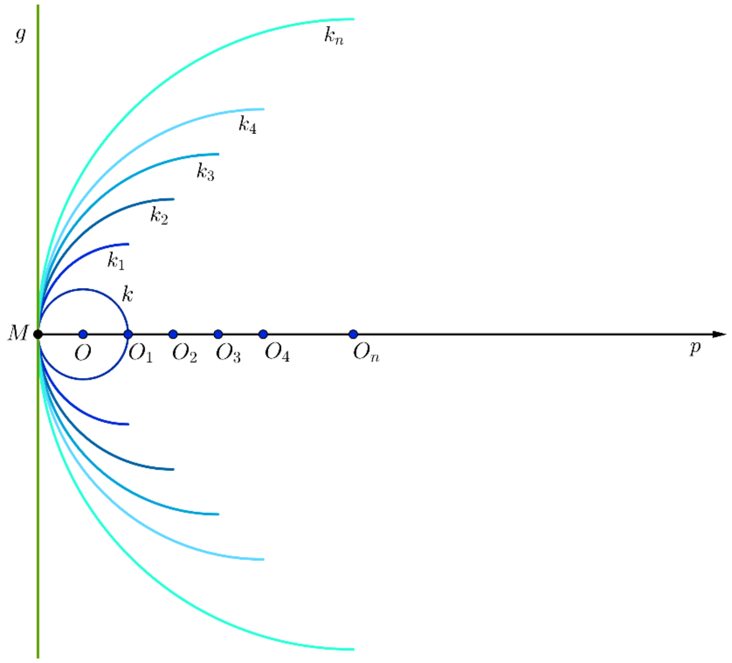
През 1636 г. Пиер Ферма е изследвал неин пространствен модел:

Задача на Ферма. Да се построи сфера, която се допира до четири дадени сфери.

Якоб Щайнер (1796-1863) прави обобщение на Аполониевата задача. Той формулира и решава следната задача:

Задача на Щайнер (Петров, 1969). Да се построи окръжност, която да пресича три дадени окръжности под дадени ъгли.

Ще бъде установено защо правата и точката могат да се разглеждат като гранични случаи на окръжността, което позволява да бъде направена преформулировка в условието на Аполониевата задача. Нека в равнината са дадени права g, точка M върху нея и лъч p с начало т. M, перпендикулярен на правата g. Построяваме окръжност k с център произволна точка от правата g, която се допира до правата g в точката M. Ако точката O се движи и заема последователно положенията O_1, O_2, O_3 ... O_n ..., на тези положения съответстват окръжностите k_1, k_2, k_3 ... k_n ... . Всяка следваща от тези окръжности все повече се „изправя“ и се доближава до правата g. Или още: всяка следваща окръжност има по-малка кривнина. Под кривнина на една окръжност се разбира стойността на числовия израз $\frac{1}{r}$, където r е дължината на радиуса на окръжността.



Фигура 44: Гранични случаи на окръжност

Това показва, че в известен смисъл правата може да се разглежда като „окръжност с безкрайно голям радиус". По същия начин точката може да се разглежда като „окръжност с нулев радиус". Разглеждането на правата и точката като гранични случаи на окръжността е удобно при решаването на геометрични задачи. Това позволява да се заменят дадените елементи (трите окръжности) в *Задача А* с права или точка и по този начин да се формулират девет производни задачи, известни като *Аполониевите задачи* (Петров, 1969):

5.1. Да се построи окръжност, която да минава през три дадени точки.

5.2. Да се построи окръжност, която да се допира до три дадени прави.

5.3. Да се построи окръжност, която да минава през две дадени точки и да се допира до дадена права.

5.4. Да се построи окръжност, която да минава през дадена точка и да се допира до две дадени прави.

5.5. Да се построи окръжност, която да се допира до дадена окръжност и до две дадени прави.

5.6. Да се построи окръжност, която да минава през дадена тока и да се допира до дадена права и до дадена окръжност.

5.7. Да се построи окръжност, която да се допира до дадена права и до две дадени окръжности.

5.8. Да се построи окръжност, която да минава през две дадени точки и да се допира до дадена окръжност.

5.9. Да се построи окръжност, която да минава през дадена точка и да се допира до две дадени окръжности.

Методът на инверсията може да бъде използван в конфигурации, в които участват окръжности (Александров, 1962). Поради тази причина той се прилага при решаването на Аполониевите задачи. Чрез него дадена Аполониева задача се свежда до решаването на друга сравнително по-проста неаполониева задача или до друга Аполониева задача (Петров, 1969).

Дадените окръжности в условието на задачата при избор на подходящ център на инверсия могат да се трансформират в прави и обратното. Сполучливият избор на центъра на инверсията заема съществена роля, а степента в повечето случай е произволна (Александров, 1962). Често степента се подбира по начин, обвързан с по-лесното техническо изпълнение на задачата, т.е. избира се такава степен, при която даден обект е двоен (инвариантен), с което извършването на построението сравнително се улеснява (Петров, 1969).

Чрез използването на инверсия се построява образът на търсената фигура. Поради факта, че инверсията е инволютивно изображение, след като този образ бъде построен, той може да бъде подложен на използваната инверсия, за да бъде намерен първоначално търсеният обект.

Нека е дадена задача Б, която с помощта на инверсия се свежда до по-проста задача Б*. Тогава, ако можем да решим задача Б* и чрез инверсията $\varphi \equiv \varphi^{-1}$ можем да построяваме образите на дадените и търсените елементи, ще можем да намерим и решението на задача Б (Мартинов, 1973).

Обобщеният алгоритъм, който ще бъде следван при решаване на задачите с помощта на метода на инверсията, е следният:

1. Избира се инверсия φ с подходящ център така, че използването на инверсията да доведе до решаването на сравнително по-проста задача от дадената.

2. Намират се образите на дадените елементи при инверсията.

3. Формулира се нова задача, в условието на която участват вече намерените образи на първоначално дадените елементи.

4. Решава се новоформулираната задача.

5. Намират се образите на решенията на последната задача, които са решения на дадената задача.

За краткост и избягване на повторения, преди да бъдат решени задачите, трябва да се отбележи, че във всяка една от задачите се счита, че търсената окръжност е $c(O,r)$. Ако задачата има други решения, те ще бъдат означавани с $c'(O',r')$, $c''(O'',r'')$ и т.н.

Задача 5.1. *Да се построи окръжност, която да минава през три дадени точки.*

Построение към тази задача, извършено само с помощта на пергел, е изложено в [Глава IV. „*Приложение на метода на инверсията в геометрията на пергела*“].

Приложение: Задача 5.3. (случай 2 и 3), *задача* 5.6. (случай 3 – I. начин), *задача* 5.8. (случай 2 – I. начин), *задача* 5.9. (случай 3 – I. начин), *задача* А (случай 2) се свеждат до решаването на *задача* 5.1. Броят на *Аполониевите задачи*, които се свеждат до решаването на *задача* 5.1. не е малък, т.е. нейното приложение е голямо.

Задача 5.3. *Да се построи окръжност, която да минава през две дадени точки и да се допира до дадена права.* (Петров, 1969)

Нека са дадени точките A и B правата g.

Ясно е, че когато точките A и B лежат в различни полуравнини относно права g, задачата *няма решение*.

Когато точките A и B лежат върху правата g задачата също *няма решение*. Ще разгледаме поотделно други частни случаи на задачата.

1 случай) Нека точката A лежи върху правата g, а точката B не лежи върху нея.

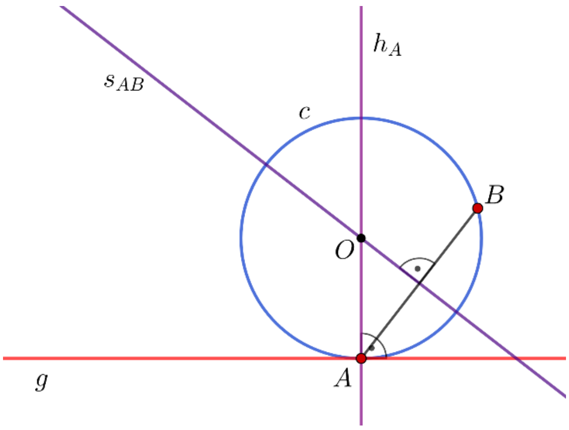
Анализ: Центърът на c лежи на симетралата на отсечката AB, тъй като A и B са точки от нея. Освен това точка A е точката на допиране на правата g и окръжността c. Следователно центърът на c лежи и на правата, минаваща през т. A, перпендикулярна на g.

Построение: 1. s_{AB};

2. $h_A \begin{cases} \ni A \\ \perp g \end{cases}$;

3. $s_{AB} \cap h_A = O$;

4. $c(O, OA)$.



Фигура 45: Задача 5.3. – 1. случай – построение

Доказателство: По построение $OA = OB \Rightarrow$ т. A и $B \in c$. Освен това $OA \perp g \Rightarrow$ т. A е точката на допиране на правата g и окръжността c, т.е. c се допира до правата g.

Изследване: В този случай задачата има единствено решение.

2 случай) Нека правата, образувана от точките A и B, е успоредна на правата g.

Анализ: Допирната точка T на правата g и окръжността c лежи на симетралата на отсечката AB. Тогава окръжността c е окръжността, минаваща през трите неколинеарни точки T, A, B.

Построение: 1. s_{AB};

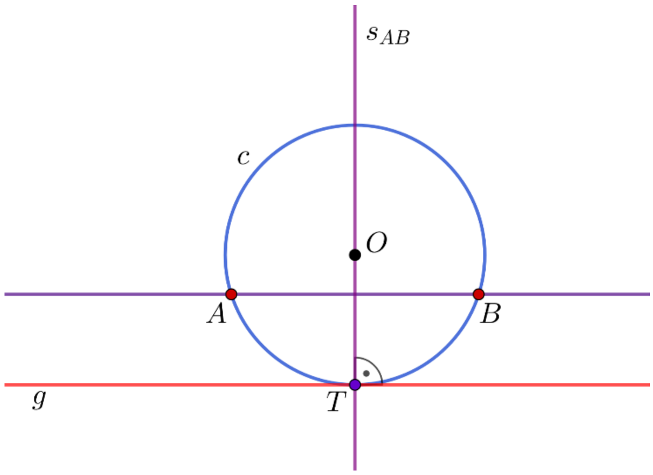
2. $s_{AB} \cap g = T$;

3. $c(T, A, B)$ [Препратка към *задача* 5.1.].

Доказателство: По построение т. A и $B \in k$.

От $AB \parallel g \Rightarrow s_{AB} \perp g \Rightarrow OT \perp g$ и $T \in k \Rightarrow$ т. T е точката на допиране на правата g и окръжността c, т.е. c се допира до правата g.

Изследване: В този случай задачата има единствено решение.



Фигура 46: Задача 5.3. – 2. случай – построение

3 случай) Разглежда се общият случай, при който т. A и B лежат в една и съща полуравнина спрямо правата g и правата AB не е успоредна на g.

I. *начин*

Анализ: Нека допирната точка на правата g и окръжността c е T. Задачата се свежда до построяването на т. T.

Нека точката $A' = \sigma_g(A)$. За да построим точката T, трябва да построим $\sphericalangle A'TB$, но

$\sphericalangle A'TB = \sphericalangle A'TM + \sphericalangle MTB = \sphericalangle ATM + \sphericalangle MTB = \sphericalangle ABT + \sphericalangle MTB = \sphericalangle NMB$, където $M = AB \cap g, N \in \overline{MT}^{\rightarrow}$.

Следователно точката T принадлежи на множеството от точки, от които отсечката $A'B$ се вижда под ъгъл, равен на $\sphericalangle NMB$ или по-точно: точката T принадлежи на онази дъга k от множеството G, която лежи в полуравнината относно правата $A'B$, несъдържаща т. N. Тогава $T = g \cap k$.

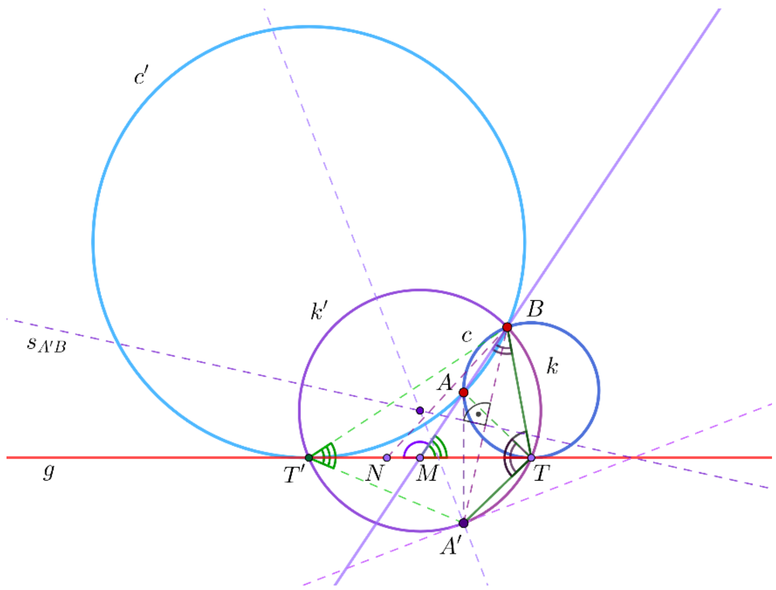
Построението на дъгата k е включено към [Глава VII. „*Помощни задачи*“] – *задача* 7.6. Препоръчва се предварително запознаване с построението.

Построение: 1. $A' = \sigma_g(A)$;

2. дъгата k от множеството G;

3. $T = g \cap k$;

4. $c\ (A, B, T)$ [Препратка към *задача* 5.1.].



Фигура 47: Задача 5.3. – 3. случай – I. начин – построение

Доказателство: $\sphericalangle MBT = \sphericalangle NMB - \sphericalangle MTB = \sphericalangle A'TB - \sphericalangle NTB = \sphericalangle A'TM = \sphericalangle ATM$

Но $\sphericalangle MBT$ е вписан в $c \Rightarrow \sphericalangle ATM$ е периферен $\Rightarrow c$ се допира до правата g в т. T.

Изследване: Нека $T' = g \cap k'$, където k' е дъгата, допълваща k до цяла окръжност.

Тогава $\sphericalangle A'T'B = 180° - \sphericalangle A'TB$ ($A'TBY$ – вписан в окръжността, допълваща k).

Но $\sphericalangle A'TB = \sphericalangle NMB \Rightarrow \sphericalangle A'T'B = 180° - \sphericalangle NMB = \sphericalangle TMB$. Следователно окръжността c', минаваща през точките A, B, T', също е решение на задачата.

В този случай задачата има две решения.

За самостоятелна работа може задачата да бъде решена посредством намиране на т. $B' = \sigma_g(B)$.

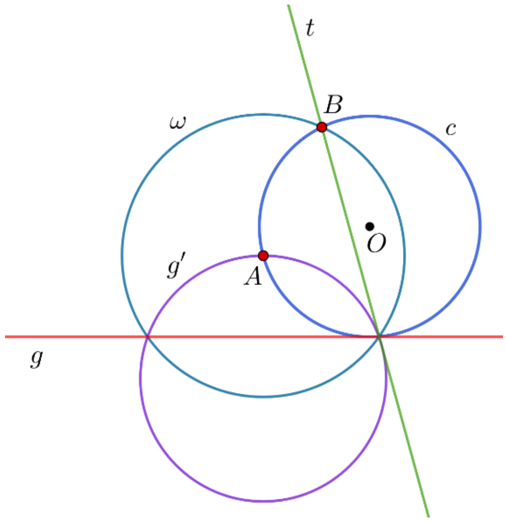
II. *начин (чрез метода на инверсията)*

Анализ: Разглежда се инверсия φ_ω с център една от дадените точки, например т. A и степен, равна на степента на точката A относно точката B, т.е. за основна окръжност се избира окръжността $\omega(A, AB)$.

Степента на инверсията може да бъде произволна (радиусът на окръжността ω може да бъде отсечка с произволна дължина), но е удачно да се направи избор на степен, който да доведе до по-лесно техническо изпълнение.

Тогава образът на търсената окръжност c, минаваща през центъра на инверсия – т. A, ще бъде права t, неминаваща през центъра на инверсия, т. B ще бъде двойна за тази инверсия, т.е. $\varphi_{\omega}(B) = B' \equiv B$, а образът на правата g ще бъде окръжност g', минаваща през т. A.

Тъй като точката B минава през окръжността c и правата g се допира до c, то $\varphi_{\omega}(B) = B$ ще минава през $\varphi_{\omega}(c) = t$ и $\varphi_{\omega}(g) = g'$ ще се допира до t. Тогава задачата се свежда до задачата: *През дадена точка* (B) *да се построи допирателна* (t) *към дадена окръжност* (g') [Препратка към *задача* 7.3. от Глава VII. „*Помощни задачи*“].

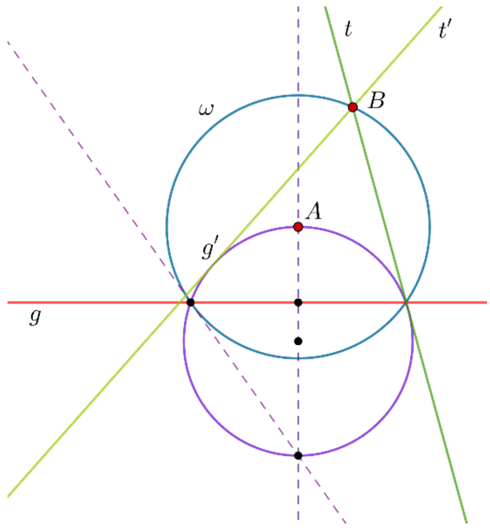


Фигура 48: Задача 5.3. – 3. случай – II. начин – анализ

Построение: 1. $\omega(A, AB)$;

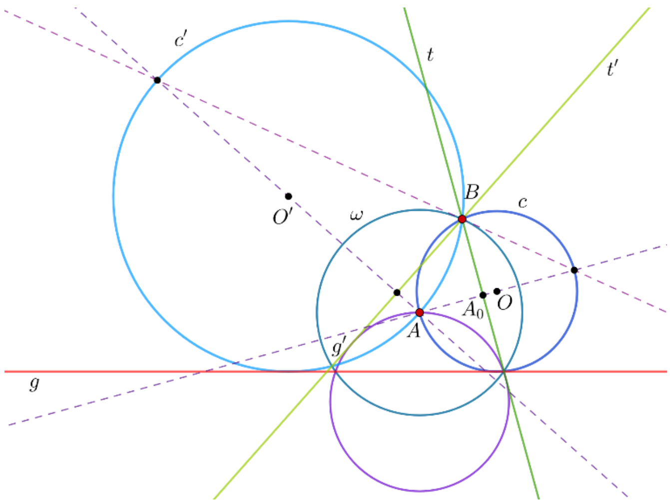
2. окръжността $\varphi_{\omega}(g) = g'$;

3. през т. B построяваме допирателна t към g';



Фигура 49: Задача 5.3. – 3. случай – II. Начин – построение – 1

4. $\varphi_{\omega}{}^{-1}(t) = \varphi_{\omega}(t) = c$.



Фигура 50: Задача 5.3. – 3. случай – II. начин – построение – 2

Преди да бъде извършено доказателство трябва да се отбележи, че освен, че т. B е двойна при този избор на инверсия, при търсене на образа на правата t, се намира проекцията A_0 на т. A върху правата t, като се издига перпендикуляр от тази точка към правата AA_0.

Този перпендикуляр съвпада с допирателната t, а пресечната му точка с инверсионната окръжност е т. B. Това е така, защото $B = t \cap \omega$.

Доказателство: Правата t минава през т. B, която е двойна при инверсията и се допира до окръжността g' по построение. Следователно образът ѝ – окръжността c минава през т. B и се допира до образа на g' – правата g.

Образът на t не е окръжност само ако $t \equiv AB$ (в общия случай, ако т. B не е двойна при инверсията, то $t \equiv AB'$, но точка, нейният образ и центърът на инверсия са колинеарни $\Rightarrow AB \equiv AB'$). В този случай, тъй като AB е допирателна към g', то образът на AB, съвпадащ с правата AB, и образът на g' – правата g, са успоредни помежду си, но това противоречи на разглеждания случай. Следователно правата t не минава през т. A – център на инверсия, откъдето следва, че c минава през т. A.

Изследване: Броят на допирателните, които могат да се построят през т. B (броят на решенията на задачата в стъпка 3. от построението, който съвпада с броя на решенията на разглежданата от нас задача), зависи от това дали т. B' е вътрешна за окръжността g', лежи на нея или е външна за нея.

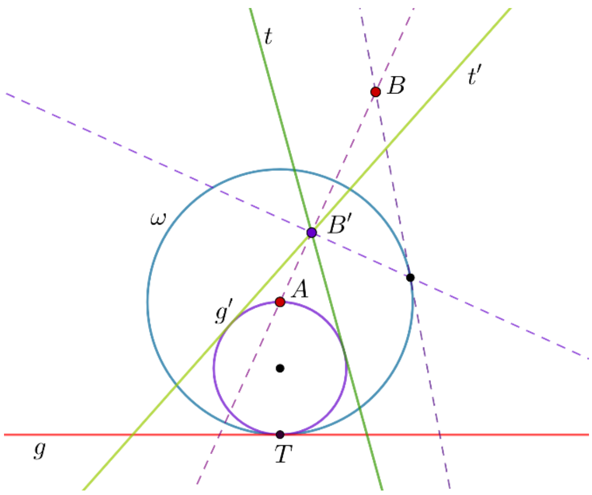
Ако се допусне, че т. B' е вътрешна за окръжността g', то окръжностите ω и g' се пресичат и през пресечните им точки, които са двойни за инверсията, минава образът на g' – правата g. Тогава разстоянието от т. A до правата g е по-малко от дължината на радиуса на ω, откъдето следва, че т. A и B лежат в различни полуравнини относно правата g, което противоречи на разглеждания случай (Петров, 1969).

Ако се допусне, че т. B' лежи на окръжността g' ще следва, че т. B лежи на правата g, което също противоречи на разглеждания случай.

Оттук следва, че единствената възможност за т. B' е да бъде външна за окръжността g', което показва, че задачата се свежда до следната задача: „*През външна точка за дадена окръжност да се построи допирателна към окръжността*“. Тази задача винаги има две решения. Следователно броят на решения на *задача* 5.3. в този случай също е равен на две.

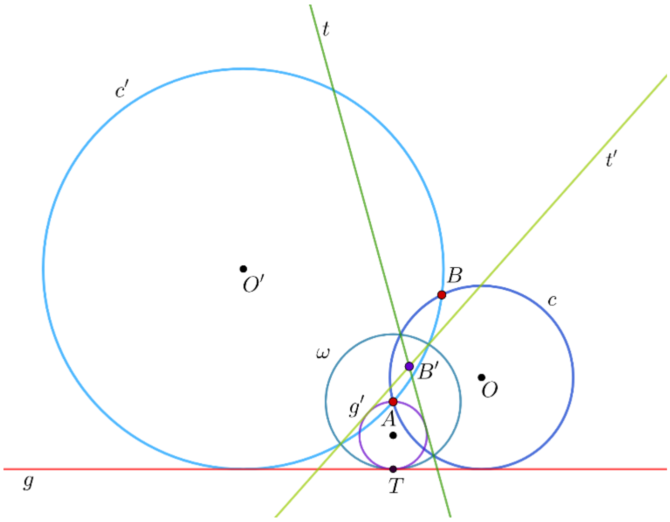
III. *начин (чрез метода на инверсията)*

Анализ: Разглежда се инверсия отново с център т. A, но със степен, равна на квадрата на разстоянието d от т. A до правата g. В този случай окръжността $\omega(A, d)$ ще се допира до правата g в точката T и нейният образ ще бъда окръжността g' с диаметър AT, а образът на т. B – т. B'.



Фигура 51: Задача 5.3. – 3. случай – III. начин – анализ

Не се излага построение, доказателство и изследване за този начин, тъй като те са същите като тези към втория начин на решение на задачата в този случай.



Фигура 52: Задача 5.3. – 3. случай – III. начин – построение

Приложение: В различните случаи за начините на решение, които не включват използването на инверсия, за да бъде решена задачата, беше необходимо да се приложат редица теоретични знания:

- използване на твърдението, че точките от симетралата на дадена отсечка се намират на равни разстояния от краищата на тази отсечка;
- използване на твърдението, че ако една права е допирателна за дадена окръжност, тя е перпендикулярна на радиуса в допирната точка;
- за извършване на едно от построенията е необходимо използването на помощна задача, включваща построяването на геометрично място на точки;
- прилагане на знания за видове ъгли в окръжност и др.

При решенията, включващи метода на инверсията, основните знания, които са необходими за изпълнение на построението, са:

- предварителен подходящ избор на център на инверсията;
- знание за намиране на образите на дадени обекти при инверсия;
- използване на помощна задача за построяване на допирателна през външна точка за дадена окръжност.

Още след излагане на решението на *задача* 5.3. може да бъде установено, че в действителност инверсията е средство, което опростява решението на задачите за построение, в конфигурацията на които участват окръжности. Тази теза ще бъде потвърдена чрез разглеждането на решенията на още някои от Аполониевите задачи.

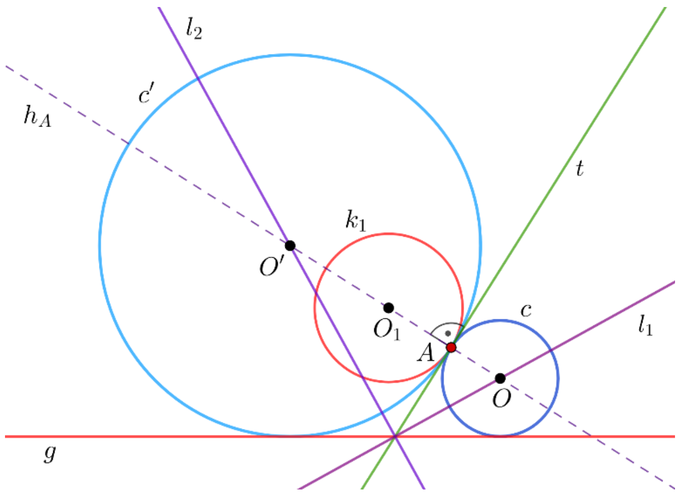
Чрез излагането на два начина на решение, произхождащи от избора на две различни степени на използваната инверсия, се илюстрира фактът, че в повечето случай изборът на степен е произволен. Освен това степента на инверсията в *задача* 5.3. е избрана така, че да се улесни техническото изпълнение. Използването на всяка друга инверсия с център една от дадените точки (A или B) и направата на сходни разсъждения също би довела до решение на задачата.

Някои от следващите задачи се свеждат до решаването на *задача* 5.3. Това са *задача* 5.6. (случай 2), *задача* 5.7. (случай 2 и частен случай на случай 3), *задача* 5.8. (случай 2 – III. начин).

Задача 5.6. *Да се построи окръжност, която да минава през дадена точка и да се допира до дадена права и окръжност.* (Петров, 1969)

Нека са дадени точката A, правата g и окръжността $k_1(O_1, r_1)$.

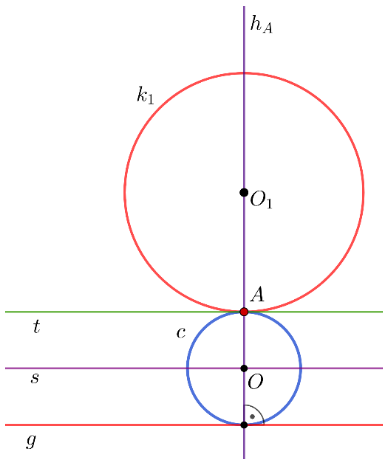
1 случай) *Анализ:* Нека точката A лежи върху окръжността k_1, а t е допирателната към k_1 в т. A. Тогава, за да бъде решена задачата, трябва за т. A и правите g и t да се реши частен случай на *задача* 5.4. Решението на *задача* 5.4. е предназначено за самостоятелно изпълнение, затова построение и доказателство не са изложени, но се предоставя чертеж, който да подпомогне разсъжденията.



Фигура 53: Задача 5.6. – 1. случай – построение

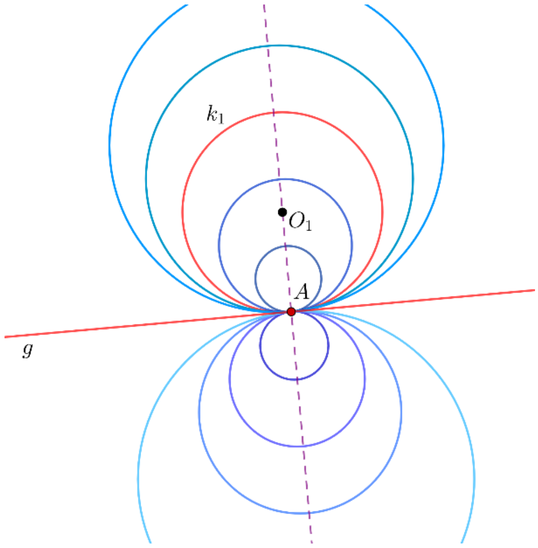
Изследване: Задачата *няма решение*, ако правата g минава през т. A и пресича окръжността k_1.

Задачата има единствено решение, ако g и t са успоредни:



Фигура 54: Задача 5.6. – 1. случай – единствено решение

Задачата има безбройно много решения, когато g и k_1 се допират в т. A:



Фигура 55: Задача 5.6. – 1. случай – безбройно много решения

В останалите случай задачата има две решения.

2 случай) Нека т. A лежи върху правата g.

Анализ: Излага се кратко описание на метода на свиване и разширение на равнината. В основата на идеята на този метод стои фактът, че при движение на фигурата (свиване или разширение) определени отношения се запазват при всяко положение на фигурата.

При свиване на дадена фигура всички точки се доближават до една и съща точка, а при разширение на фигурата, обратно на свиването, всички точки се отдалечават от една и съща точка. Това се случва като отношенията между определени дължини и ъгли се запазват.

С помощта на този метод се построява много по-лесно не търсената фигура, а фигура, получена при свиване или разширение на търсената. След това лесно може да се построи и търсената фигура, ако се знае как е получена първоначалната фигура (използвайки обратното действие). Последното ще бъде илюстрирано чрез решението на *задача* 5.6. в този случай.

Предполага се, че търсената окръжност c се допира външно до окръжността k_1. Ако бъде построена окръжността $c_1(O, \rho = r + r_1)$, тя ще мине през т. O_1, ще се допре до правата g', успоредна на g, намираща се на разстояние r_1 от нея и лежаща в полуравнината с контур правата g, несъдържаща т. O, и ще мине през т. $A' = g' \cap h_A$, където h_A е перпендикулярът, спуснат от т. A към правата g.

Ако се построи окръжността c_1, то търсената окръжност ще бъде концентрична на нея и ще има радиус $r = \rho - r_1$. Окръжността c_1 обаче може да бъде построена, като се реши *задача*

5.3. за т. O_1, A' и правата g' или по-точно: трябва да бъде решен частен случай 1 на *задача* 5.3., при който една от дадените точки лежи на дадената права.

Построение: 1. $h_A \begin{cases} \ni A \\ \perp g \end{cases}$;

2. $l(A, r_1)$;

3. $l \cap h_A = \{A', A''\}$;

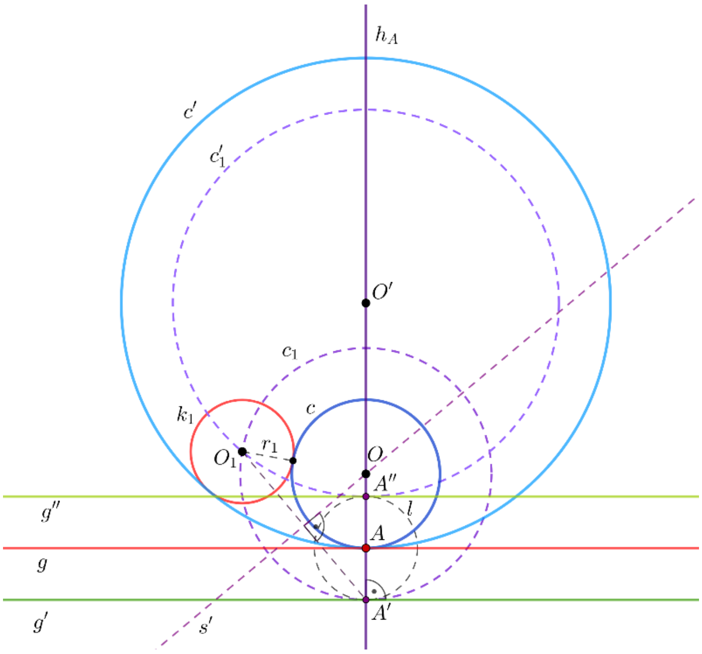
4. $g' \begin{cases} \ni A' \\ \perp g \end{cases}$;

5. s' – симетралата на отсечката O_1A';

6. $h_A \cap s' = O$;

7. $c_1(O, \rho = OA')$;

8. $c(O, \rho - r_1)$.



Фигура 56: Задача 5.6. – 2. случай – построение

Доказателство: Ясно е защо окръжността $c(O, \rho - r_1)$, концентрична на $c_1(O, \rho)$, е решение на задачата, а доказателството на това, че c_1 удовлетворява условията, дефинирани в анализа, съвпада с доказателството на съответния случай на *задача* 5.3.

Изследване: Ако се построи правата g'', минаваща през т. A'' и успоредна на g, а след това окръжността $c_1'(O', \rho')$, ще получим второ решение на задачата – окръжността $c'(O, \rho' + r_1)$.

Тъй като при случай *задача* 5.3. има единствено решение, то разглежданата задача има две решения.

3 случай) Ще бъде разгледано решение на задачата в общия случай – когато точката A не лежи нито на окръжността k_1, нито на правата g.

I. *начин*

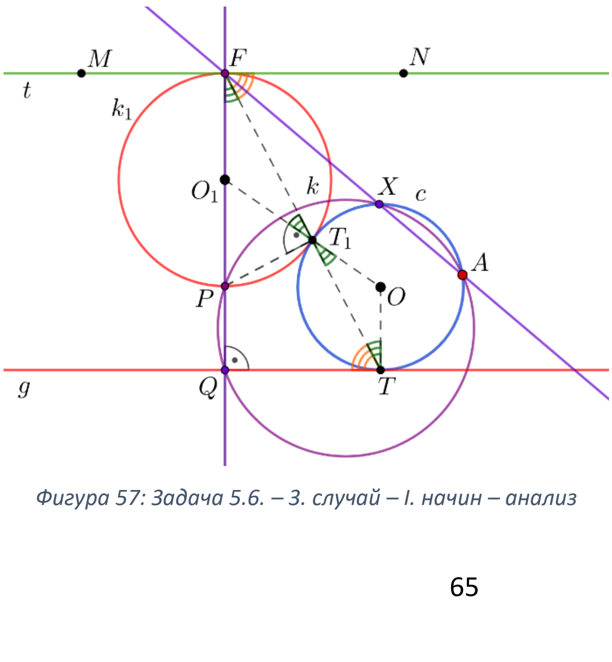
Анализ: Нека търсената окръжност c се допира външно до окръжността k_1.Нека допирните точки на c с правата g и окръжността k_1 са съответно T и T_1.

Нека $F = TT_1 \cap k_1$ и $Q = FO_1 \cap g$.

Нека допирателната е $t = MN$ през т. F към окръжността k_1. (*фиг. 57*) Тогава:

$$\sphericalangle T_1FN = 90° - \sphericalangle O_1FT_1 = 90° - \sphericalangle O_1T_1F = 90° - \sphericalangle OT_1T =$$

$$= 90° - \sphericalangle T_1TO = 90° - (90° - \sphericalangle QTO) = \sphericalangle QTT_1$$



Фигура 57: Задача 5.6. – 3. случай – I. начин – анализ

Следователно $FQ \perp g \Rightarrow t \parallel g$.

Нека $P = FO_1 \cap k_1$ и $X = FA \cap c$ (точката X съвпада с точката A, когато FA е допирателна към c).

Използвайки степента на точката F относно окръжността c, се получава, че $FX.FA = FT.FT_1$.

От друга страна $\Delta QTF \sim \Delta T_1PF \Rightarrow \frac{FT}{FP} = \frac{FQ}{FT_1} \Rightarrow FP.FQ = FT.FT_1$.

Следователно $FX.FA = FP.FQ \Rightarrow$ точките X, A, P и Q лежат върху една окръжност k.

Построение: 1. $FO_1 \begin{cases} \ni O_1 \\ \perp g \end{cases}$;

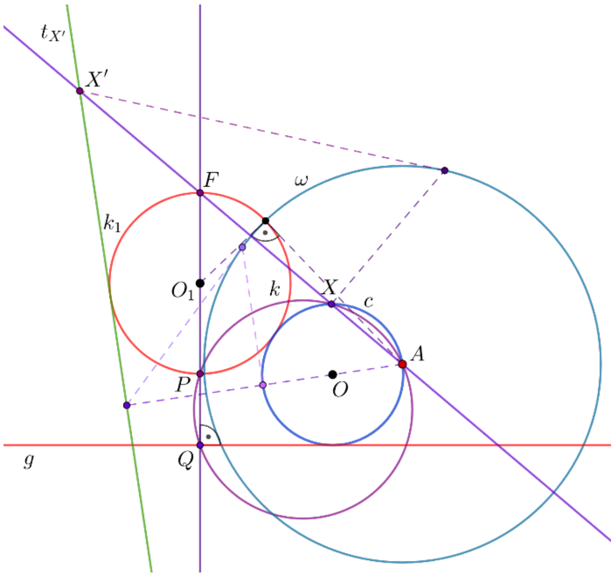
2. $FO_1 \cap k_1 = \{F, P\}$;

3. $FO_1 \cap g = Q$;

4. $k(P, Q, A)$ [Препратка към *задача* 5.1.];

5. $FA \cap k = X$;

6.1. Ако $X \neq A$, то за точките X, A и окръжността k_1 се решава *задача* 5.8..



Фигура 58: Задача 5.6. – 3. случай – I. начин – построение – 1

6.2. Ако $X \equiv A$, за точката A и правите FA и g се решава частен случай на *задача* 5.4., при който дадената точка лежи върху една от дадените прави.

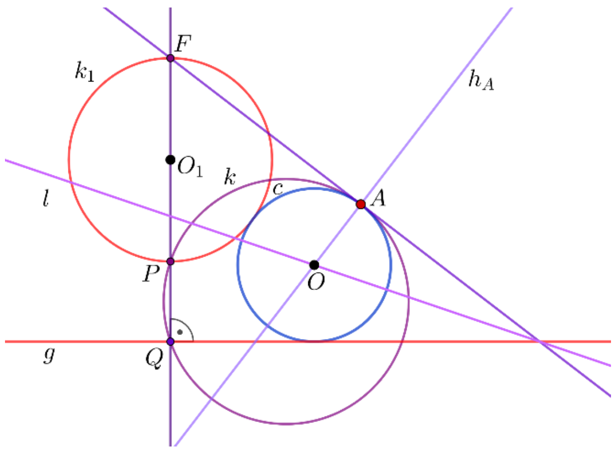
Тогава центърът на търсената окръжност е пресечна точка на перпендикуляра, издигнат от точката A към правата FA, и ъглополовящата на ъгъла между FA и g:

7.2. $h_A \begin{cases} \ni A \\ \perp FA \end{cases}$;

8.2. l – ъглополовяща на $\sphericalangle(FA, g)$;

9.2. $h_A \cap l = O$;

10.2. $c(O, OA)$.



Фигура 59: Задача 5.6. – 3. случай – I. начин – построение – 2

Забележка: Когато $X \neq A$ трябва да бъде разгледана задача, която ще бъде решена впоследствие. Аполониевите задачи са независими помежду си и това няма значение. Избрана е подредба, изложена от (Петров, 1969). В своя труд той също отбелязва независимостта на задачите една от друга при разглеждане на решенията към тях.

Доказателство: Предоставя се за самостоятелно изпълнение да се докаже защо т. X е точка от търсената окръжност. Доказателство на *задача* 5.8. е извършено по-нататък в дипломната работа.

Изследване: Ако търсената окръжност се допира вътрешно до дадената окръжност, разсъжденията са същите.

Тъй като *задача* 5.8. има най-много две решения, то за всяка възможност на допиране (външно или вътрешно допиране на търсената окръжност до k_1), получаваме най-много две решения. Следователно задачата има най-много четири решения.

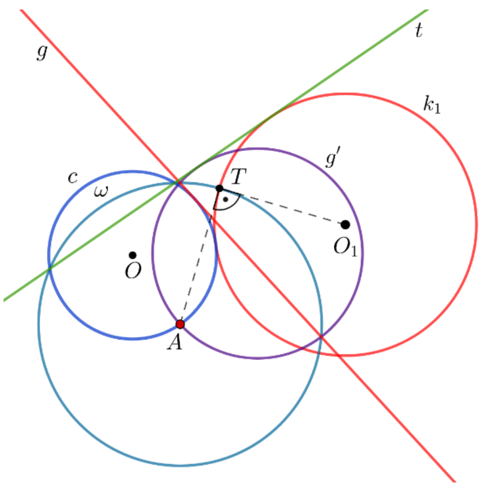
Броят на решенията на *задача* 5.4. при разгледания частен случай е равен на 2 (тъй като броят на ъглополовящите на ъглите между FA и h_A е равен на две), откъдето следва, че когато $X \equiv A$, броят на решенията на задачата е равен на четири.

II. *начин (чрез метода на инверсията)*

Анализ: Ако разгледаме произволна инверсия φ_ω с център точката A и основна окръжност ω, тя ще изобрази правата g в окръжност g', а окръжността k_1 в окръжност $k_1{}'$.

Ако окръжността c се допира до правата g и окръжността k_1, нейният образ при инверсия ще бъде обща допирателна на окръжностите g' и $k_1{}'$. Задачата се свежда до построяването на обща допирателна t на две окръжности. [Препратка към задача 7.5. от Глава VII. „*Помощни задачи*“]

Може да се избере окръжността ω така, че окръжността k_1 да бъде двойна за тази инверсия. За целта трябва да се построи окръжността ω така, че ω и k_1 да бъдат ортогонални помежду си или още: инверсията φ_ω ще има степен, равна на степента на точката A относно k_1.



Фигура 60: Задача 5.6. – 3. случай – II. начин – анализ

Построение: 1. през т. A се построява допирателна t_A към окръжността k_1;

2. $t_A \cap k_1 = T$;

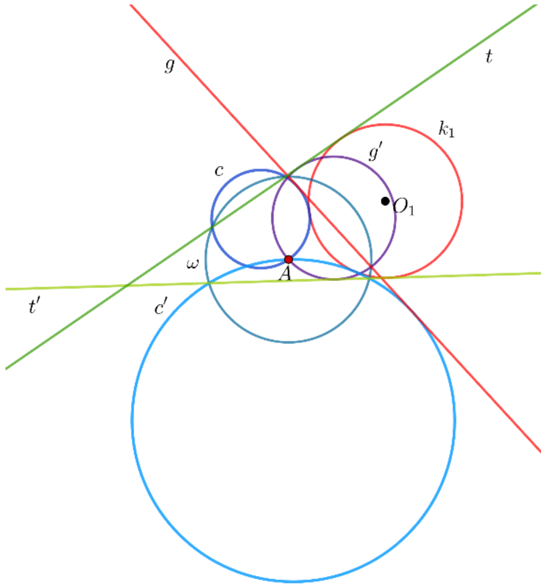
3. $\omega(A, AT)$;

4. $\varphi_\omega(g) = g'$;

5. обща допирателна t на окръжностите g' и $\varphi_\omega(k_1) = k_1$;

6. $\varphi_\omega(t) = c$.

Доказателство: Правата t, която е образ на окръжността c при инверсията е обща допирателна на окръжностите g' и $\varphi_\omega(k_1) = k_1$. Следователно окръжността c ще се допира до техните образи – правата g и окръжността k_1. Освен това, ако t не минава през т. A, нейният образ (окръжността c) минава през т. A.



Фигура 61: Задача 5.6. – 3. случай – II. начин – построение

Изследване: Броят на решенията на задачата зависи от броя на общите допирателни на окръжностите g' и k_1' и от това дали центърът на инверсията лежи на някоя от тях:

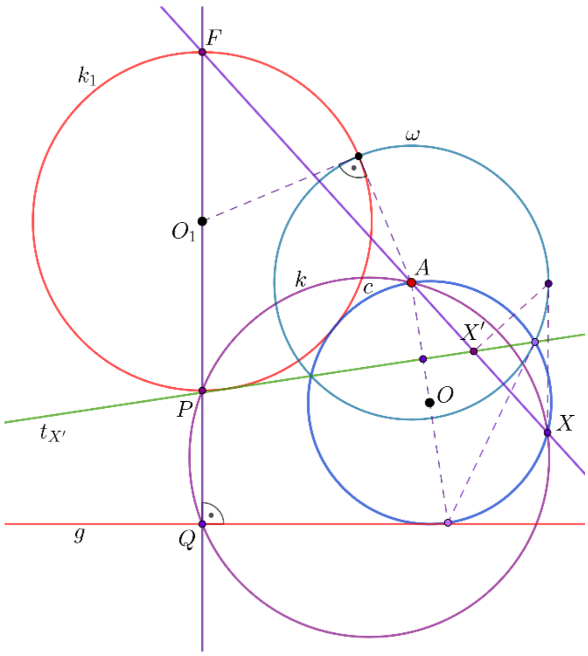
- задачата *няма решение*, ако окръжностите g' и k_1' се пресичат (нямат общи вътрешни допирателни), а т. A е пресечна точка на двете външни допирателни. В този случай, тъй като външните допирателни минават през точката A (център на инверсията), те ще бъдат двойни;
- задачата *има едно решение*, ако окръжностите g' и k_1' се пресичат, а т. A лежи на една от външните допирателни на двете окръжности;
- задачата *има едно решение*, ако двете окръжности се допират, а т. A е пресечна точка на външните допирателни;
- задачата *има две решения*, ако двете окръжности се пресичат и точка A не лежи на нито една от двете външни допирателни;
- задачата *има три решения*, ако двете окръжности не се пресичат и т. A лежи на една от външните допирателни на двете окръжности;
- задачата *има четири решения*, ако двете окръжности не се пресичат и т. A не лежи на нито една от външните допирателни.

Приложение: Може да бъде направен извод, подобен на този, който беше направен след излагане на решението на *задача* 5.3. Анализът при първия начин на решение е по-труден. При използването на метода на инверсията в анализа участват единствено разсъждения относно избора на център на инверсията и разсъждения относно намирането на образите на дадените обекти. Намирането на образите е стъпка от решението, която се изпълнява изключително лесно, ако се познава теорията на метода. След това беше установено до решаването на коя задача се свежда дадената задача.

Решението на *задача* 5.7. (случай 3) се свежда до решаването на *задача* 5.6. Освен това решенията на *задача* 5.9. (случай 2 и частен случай на случай 4) и *задача* А се свеждат до случай 2 на *задача* 5.6., т.е. и при тяхното решаване е необходимо използването на метода на свиване и разширение на равнината.

Допълнителен коментар: В [Глава I. „Избор на средства и използването им“] е коментирано по-подробно ограничението на геометричните софтуерни приложения. Ограничението, което се среща на най-често при използване на метода на инверсия, е именно построяването на образ на точка в зависимост от това дали тя е външна или вътрешна за инверсионната окръжност. Това ограничение трябва да се вземе предвид при извършване на построенията и към останалите задачи.

В извършената конструкция към построението чрез първия начин на решение в случай 3 центърът на дадената окръжност k_1 не е фиксиран, дължината на радиуса на k_1 също не е фиксирана, не е фиксирано положението на точката A и на правата g. Това позволява чертежът да е динамичен. Проблемът е, че построяването на търсения образ зависи от образа на т. X и когато при промяна на положението точката X от вътрешна за окръжността тя стане външна, конструкцията няма да е изпълнима. Това не означава, че окръжността c не е построима, а е необходимо използването на друга конструкция:



Фигура 62: Задача 5.6. – 3. случай – I. начин – ограничение на динамичен софтуер

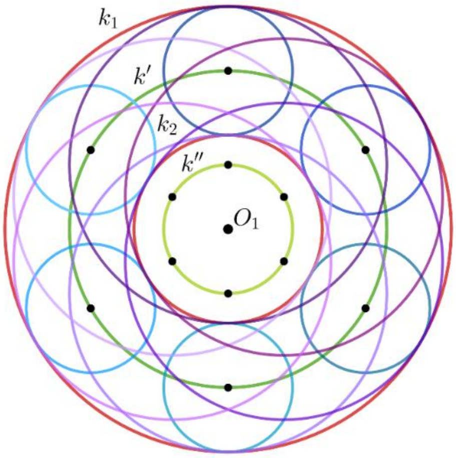
Задача 5.7. *Да се построи окръжност, която да се допира до дадена права и до две дадени окръжности.* (Ганчев и Петров, 1966), (Мартинов, 1973) и (Петров, 1969)

Нека е дадена правата g и окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$. Стартира се с разглеждането на два частни случая.

1 случай) Нека двете окръжности са концентрични с общ център т. O_1. Нека още $r_1 > r_2$.

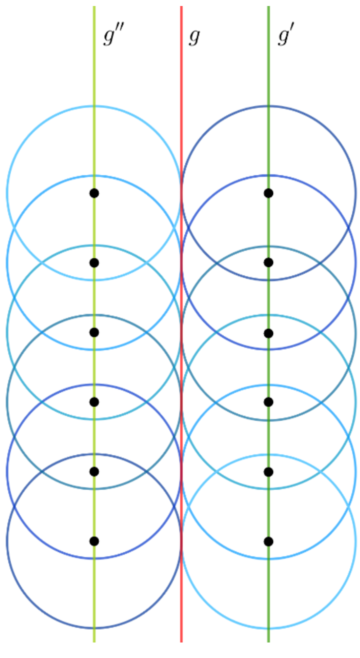
Анализ: Излага се кратко описание какво представлява метода на геометричните места на точки. Нека дадена задача за построение се свежда към намирането на някоя точка, определена от две независими условия. Нека още геометричното място на точки, удовлетворяващи първото условие, е фигурата F_1, а геометричното място на точки, удовлетворяващи второто условие, е фигурата F_2. Тогава търсената точка е от сечението $F_1 \cap F_2$на двете множества. Всяка точка от това сечение дава възможност да се построи решение на първоначалната задача (Табов и Лазаров, 1990). Този метод ще бъде използван за решаването на задачата в този случай.

Множеството от центровете на окръжностите, които се допират до две дадени концентрични окръжности, се състои от две окръжности k' и k'', концентрични на дадените, съответно с радиуси, равни на полусбора (r') и полуразликата (r'') на радиусите на дадените окръжности.



Фигура 63: Множеството от центровете на окръжностите, които се допират до две дадени концентрични окръжности

Множеството от центровете на окръжностите, които имат даден радиус (r' или r''), и се допират до дадена права, се състои от две прави g' и g'', успоредни на дадената, намиращи се от нея на разстояние, равно на дължината на дадения радиус.



Фигура 64: Множеството от центровете на окръжностите, които имат даден радиус, и се допират до дадена права

Тогава, ако търсената окръжност съществува, нейният център е от сечението на горните две множества, т.е. той е обща точка на тези две множества от точки (пресечна точка на окръжността и правата).

Построение: 1. $k'(O_1, \frac{r_1+r_2}{2})$ [първото множество от точки];

2. $h\begin{cases} h \ni O_1 \\ h \perp g \end{cases}$;

3. $h \cap g = H$;

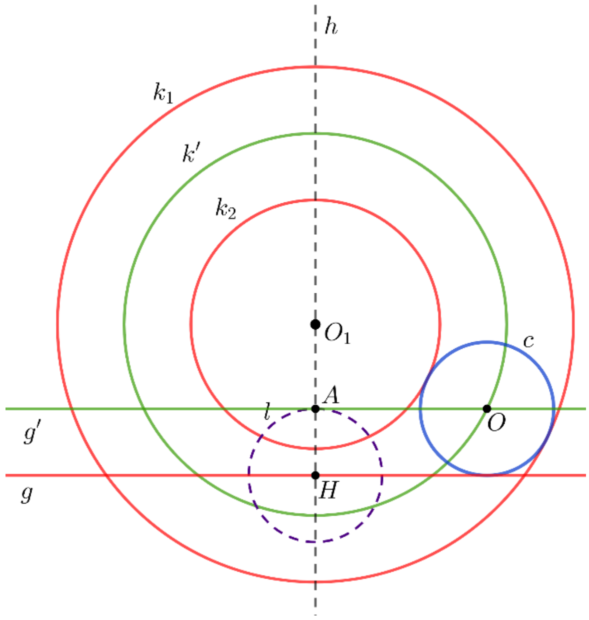
4. $l\,(H, \frac{r_1-r_2}{2})$;

5. $l \cap h = A$;

6. $g'\begin{cases} \ni A \\ \parallel g \end{cases}$ [второто множество от точки];

7. $g' \cap k' = O$ [точка от сечението на двете множества];

8. $c(O, \frac{r_1-r_2}{2})$.



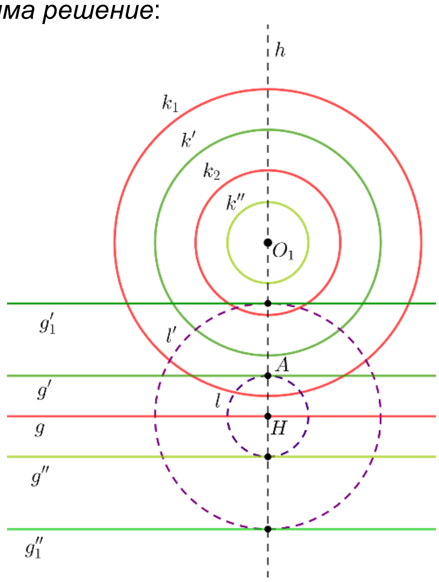
Фигура 65: Задача 5.7. – 1. случай – построение

Доказателство: По построение центърът на окръжността е пресечна точка на разгледаните в анализа геометрични места на точки. Освен това тя има радиус, удовлетворяващ условието (равен на r' или r'').

Забележка: На следващите чертежи $k'', g'', {g_1}'$ и ${g_1}''$ са другите множества, удовлетворяващи условията, посочени в анализа. Центровете на окръжностите, които са решения на задачата, са пресечни точки на тези множества

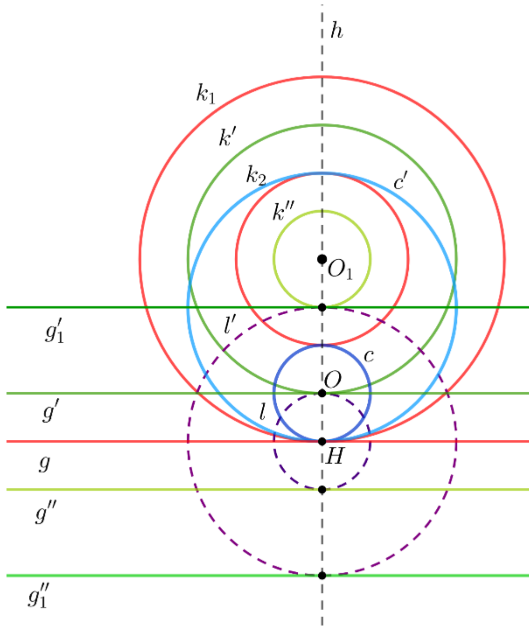
Изследване: Нека разстоянието от центъра – т. O_1 до правата g е равно на d.

При $d > r_1$ задачата *няма решение*:



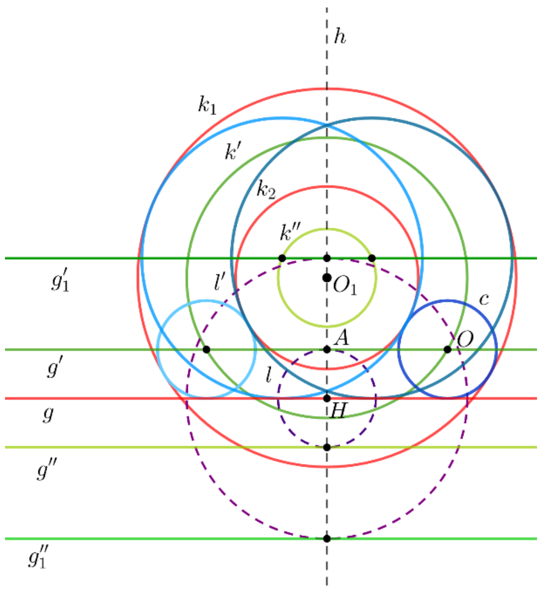
Фигура 66: Задача 5.7. – 1. случай – изследване – нула решения

При $d = r_1$ задачата *има две решения*:

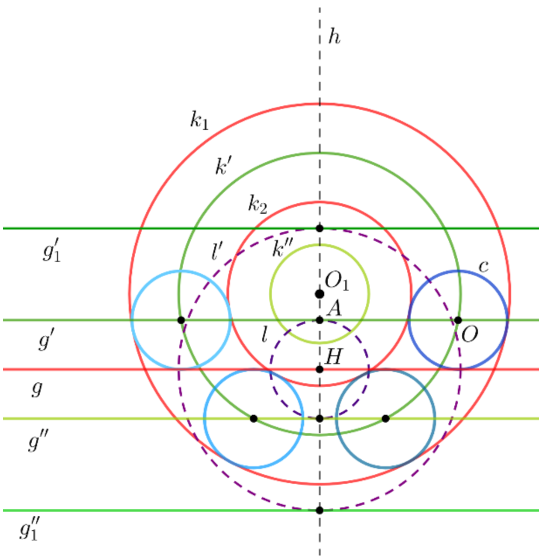


Фигура 67: Задача 5.7. – 1. случай – изследване – две решения

При $0 \leq d < r_1$ задачата *има четири решения*, като тези четири решения могат да се допират по различен начин до двете окръжности k_1 и k_2:



Фигура 68: Задача 5.7. – 1. случай – изследване – четири решения – 1



Фигура 69: Задача 5.7. – 1. случай – изследване – четири решения – 2

2 случай) Нека радиусите на двете окръжности k_1 и k_2 са равни помежду си, а центровете им O_1 и O_2 лежат в една и съща полуравнина относно правата g и нека търсената окръжност да се допира по еднакъв начин до дадените окръжности – или и до двете външно, или и до двете вътрешно.

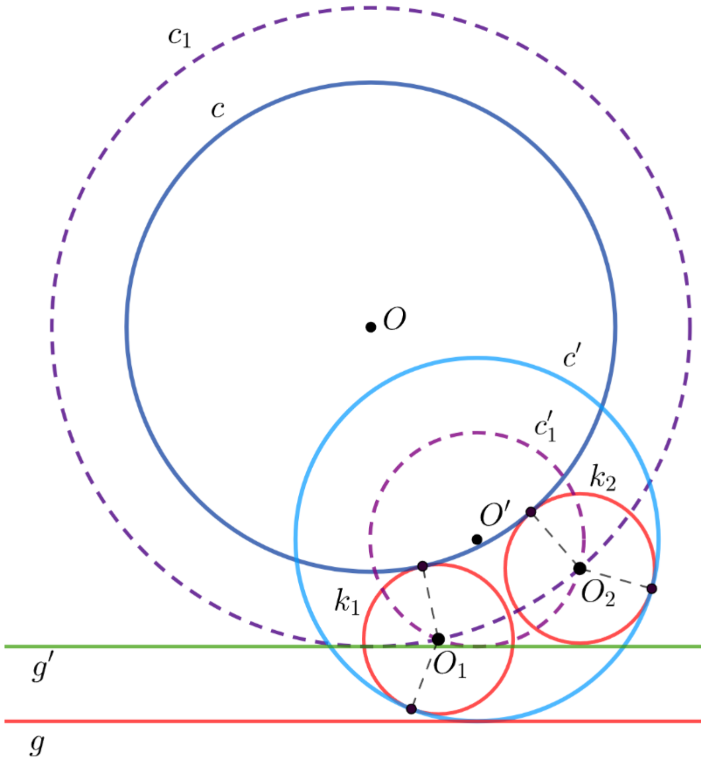
Анализ: За решението на задачата в този случай ще се приложи отново методът на свиване и разширение на равнината, използван в предходната задача.

Първо ще разгледаме случая на външно допиране. За да се построи окръжността c е достатъчно да се построи окръжността $c_1(O, \rho = r + r_1)$. Така центърът на c_1 ще съвпада с центъра на c, а радиусът r на окръжността c ще бъде равен на $\rho - r_1$. Тоест задачата се свежда до построяването на окръжността c_1.

Окръжността c_1 обаче минава през т. O_1 и O_2, които са дадени, и се допира до правата g', успоредна на g и намираща се на разстояние r_1 от нея. Правата g' също е построима. Така задачата се свежда до задача: „*Да се построи окръжност, която минава през две дадени точки и се допира до дадена права*“. Тоест задачата се свежда до друга Аполониева задача – *задача* 5.3.

Ако окръжността c се допира едновременно вътрешно до двете окръжности, то окръжността c_1 ще има радиус $\rho = |r - r_1|$.

Тъй като вече беше разгледано подробно решението на *задача* 5.3., описанието на последователно извършване на построението, доказателството и изследването се предоставят на за самостоятелно изпълнение.

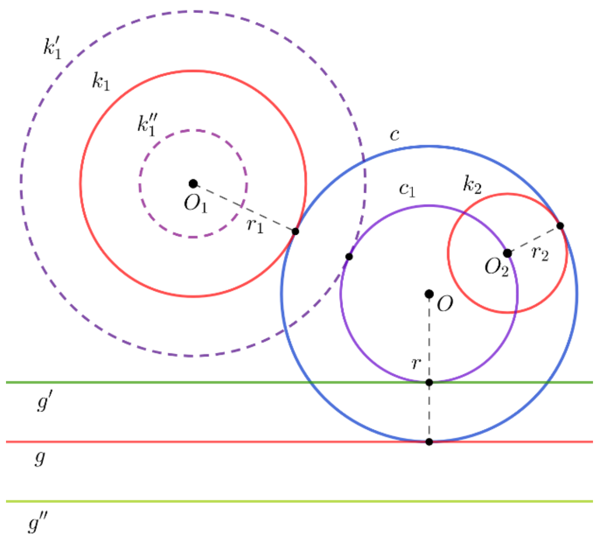


Фигура 70: Задача 5.7. – 2. случай – построение

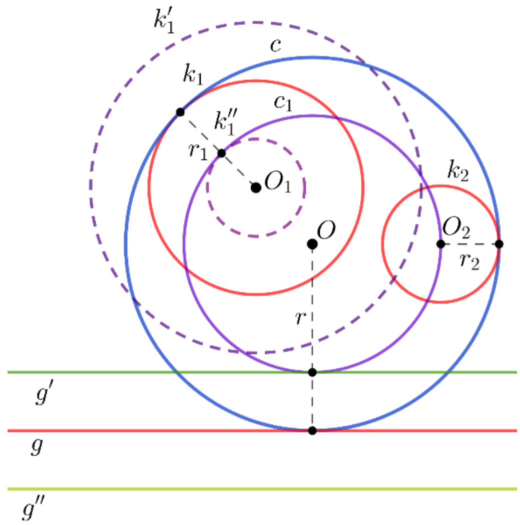
3 случай) Разглежда се решението на задачата в общия случай.

Анализ: Нека $r_1 > r_2$. И тук е подходящ методът на свиване и разширение на равнината. Прави се предположение, че дадената права и дадените две окръжности не се допират помежду си.

Нека се допусне, че окръжността c се допира до k_2 вътрешно. Тогава окръжността $c_1(O, |r - r_2|)$ ще мине през т. O_2 и ще се допира до една от окръжностите $k_1{}'(O_1, r_1 + r_2)$ и $k_1{}''(O_1, r_1 - r_2)$ и до една от правите g' и g'', успоредни на правата g и намиращи се на разстояние r_2 от нея.

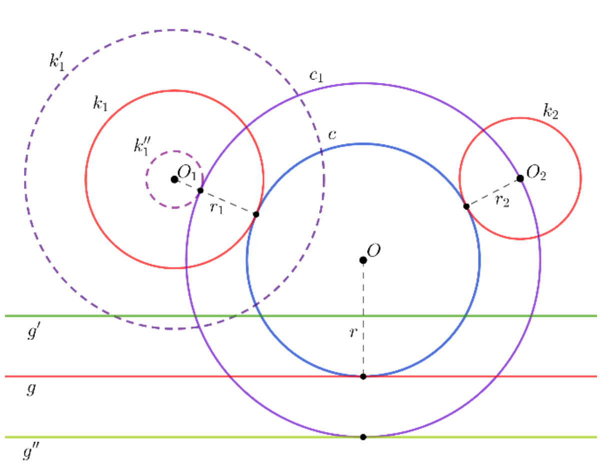


Фигура 72: Задача 5.7. – 3. случай – анализ – 1

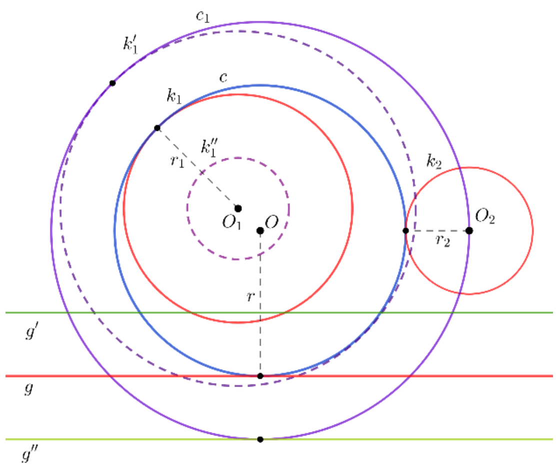


Фигура 71: Задача 5.7. – 3. случай – анализ – 2

Ако окръжността c се допира външно до k_2, окръжността $c_1(O, r + r_2)$ ще мине през т. O_2 и ще се допира до една от окръжностите $k_1{}'(O, r_1 + r_2)$ и $k_1{}''(O, r_1 - r_2)$ и до една от правите g' и g'', успоредни на правата g и намиращи се на разстояние r_2 от нея.



Фигура 73: Задача 5.7. – 3. случай – анализ – 3



Фигура 74: Задача 5.7. – 3. случай – анализ – 4

За да се построи окръжност, отговаряща на всички изисквания на задачата, трябва предварително за точката O_2 и всяка двойка права и окръжност $g', {k_1}'; g', {k_1}''; g', {k_1}'; g'', {k_1}''$ да бъде решена *задача* 5.6..

От полученото решение $c_1(O, \rho)$ се получава решение на поставената задача, ако такова съществува. Това решение ще бъде окръжността $c(O, \rho + r_2)$ или окръжността $c'(O, |\rho - r_2|)$.

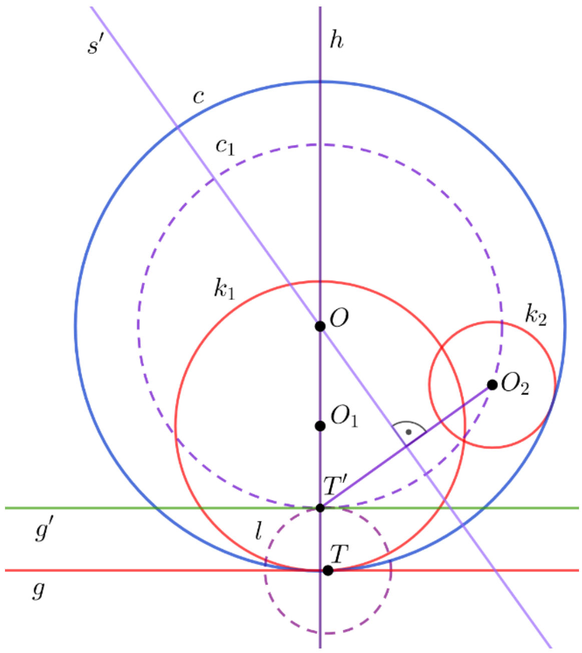
Окръжността c е решение на задачата, ако c_1 се допира външно до ${k_1}'$ или вътрешно до ${k_1}''$, а окръжността c' е решение на задачата, ако c_1 се допира вътрешно до ${k_1}'$ или външно до ${k_1}''$.

Построение: Трябва да бъдат построени правите g' и g'' и окръжностите ${k_1}'$ и ${k_1}''$, а след това да се извършат построенията, описани в *задача* 5.6. за намиране на окръжността c_1. След като окръжността c_1 бъде построена, се построява концентричната на нея окръжност c.

Доказателство: От доказателството към *задача* 5.6. следва, че окръжността $c_1(O, \rho)$ удовлетворява условията, а от направения анализ, че $c(O, \rho + r_2)$ или $c'(O, |\rho - r_2|)$ са решения на задачата.

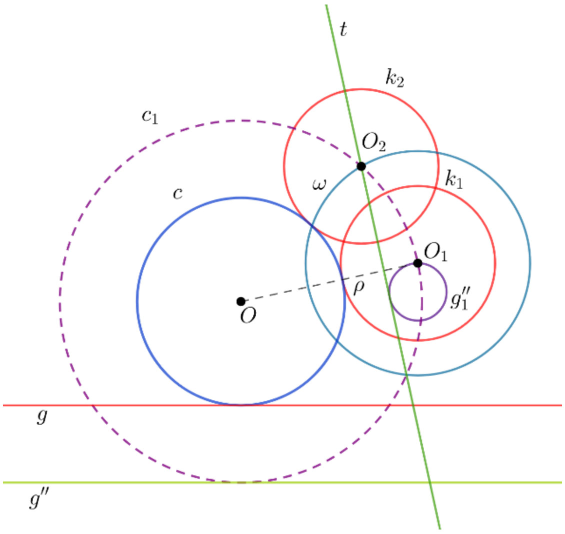
Изследване: Тъй като броят на окръжностите, които се допират до дадена окръжност по определен начин (само вътрешно или само външно), не надминава две, то всяка задача, която се свежда до решаването на *задача* 5.6., има най-много две решения, откъдето следва че дадената задача има най-много 8 решения.

Ако окръжността k_2 се допира до правата g, задачата се свежда до решаването на частен случай на *задача* 5.6., при който дадената точка лежи на дадената права:



Фигура 75: Задача 5.7. – 3. случай – частен случай 1 – построение – 1

Ако радиусите на двете окръжности са равни и търсената окръжност се допира до k_1 и k_2 едновременно вътрешно или едновременно външно, то окръжността $c_1(O,|r-r_1|)$ или $c_1(O,r+r_1)$ ще минава през т. O_1 и O_2 и ще се допира до правата g' или g'', успоредна на g и намираща се на разстояние r_1 от нея. Тогава задачата се свежда до *задача* 5.3., в която се изисква да се построи окръжност, която минава през две дадени точки O_1 и O_2 и се допира до дадена права (g' или g''):



Фигура 76: Задача 5.7. – 3. случай – частен случай 1 – построение – 2

Ако радиусите на двете окръжности са равни и търсената окръжност се допира до k_1 и k_2 по различен начин, решението на задача отново се свежда до решаването на *задача* 5.6.

Приложение: Трябва да се отбележи, че при решаването на тази задача не е приложен директно методът на инверсията – преди това е използван методът на свиване и разширение на равнината. Освен това са установени взаимовръзки между повече от две задачи – разглеждането на частен случай на тази задача се свежда до разглеждането на частен случай на *задача* 5.6., а частният случай на *задача* 5.6. се свежда до частен случай на *задача* 5.3. Тези взаимовръзки са изключително полезни при провеждане на обучение. Отново задачата се свежда до по-лесна задача, откривайки обект, който е по-лесен за построение. Свеждането на една задача до по-лесна е подход, който се използва при прилагането на различни геометрични преобразувания, а едно от тези преобразувания е именно *инверсията*. Изложеният метод на геометричните места на точки ще бъде използван и при *задача* 5.9.

Задача 5.8. *Да се построи окръжност, която да минава през две дадени точки и да се допира до дадена окръжност.* (Петров и Ганчев, 1966) и (Петров, 1969)

Нека са дадени точките A и B и окръжност k_1 с център точката O_1.

Задачата *няма решение*, ако едната от точките A и B е вътрешна за окръжността k_1, а другата – външна за нея. Задачата *няма решение* и когато двете точки лежат върху окръжността k_1.

1 случай) Разглежда се частен случай на задачата, при който точката A лежи върху окръжността k_1, а точката B не лежи върху нея.

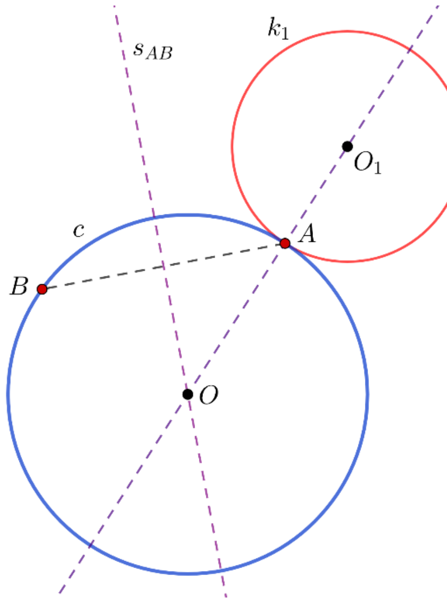
Анализ: За да се допира до окръжността k_1, центърът на търсената окръжност, трябва да лежи на правата O_1A. От друга страна, тъй като т. A и B са точки от тази окръжност, то $OA = OB \Rightarrow$ т. $O \in s_{AB}$.

Построение: 1. O_1A;

2. s_{AB};

3. $O_1A \cap s_{AB} = O$;

4. $c(O, OA)$.

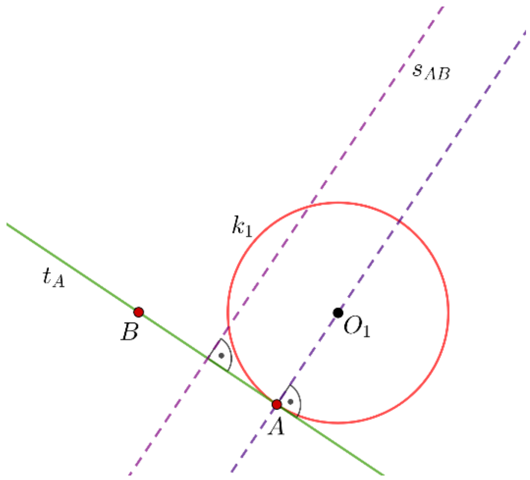


Фигура 77: Задача 5.8. – 1. случай – построение

Доказателство: Следва от анализа и построението.

Изследване: Задачата в този случай има единствено решение, ако т. B не е точка от допирателната в т. A към окръжността k_1. Тогава правите O_1A и s_{AB} имат единствена пресечна точка – центърът на търсената окръжност.

Ако т. B лежи на допирателната t_A в т. A към окръжността k_1, то задачата *няма решение*, тъй като $O_1A \perp t \Rightarrow O_1A \parallel s_{AB}$:



Фигура 78: Задача 5.8. – 1. случай – частен случай – построение

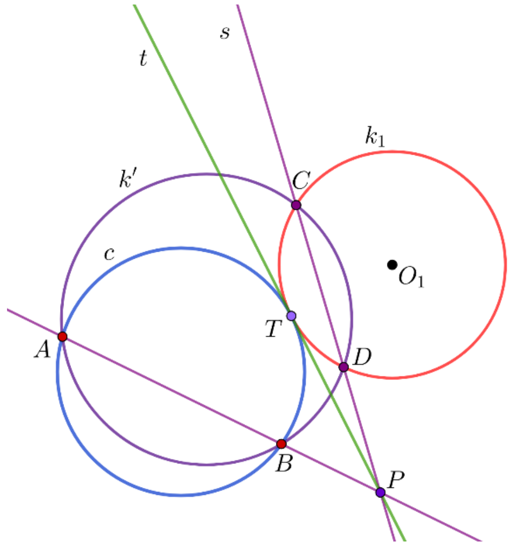
2 случай) Интерес представлява решението на задачата в общия случай, т.е. в случая, в който и двете дадени точки са едновременно външни или едновременно вътрешни за окръжността.

Нека двете точки са външни за дадената окръжност. Анализът построението и доказателство ще претърпят незначителни изменения, ако точките са едновременно вътрешни за окръжността. Случаят, в който точките са вътрешни за k_1, се предоставя за самостоятелно изпълнение.

I. *начин*

Анализ: За да се построи търсената окръжност, е достатъчно да се построи допирната ѝ т. T с окръжността k_1. Точката T може да бъде построена, ако се построи допирателната t към окръжността k_1 в тази точка. Тогава T ще бъде построима като пресечна точка на k_1 и t.

Нека $t \cap AB = P$. Знае се, че $PT^2 = PA.PB$. Освен това, ако през т. P се построи произволна секуща s, то $s \cap k = \{C, D\}$.



Фигура 79: Задача 5.8. – 2. случай – I. начин – анализ

Тогава $PT^2 = PC.PD$. Получава се, че $PA.PB = PC.PD$. Това равенство е достатъчно условие т. A, B, C и D да лежат на една окръжност. Нека това е окръжността k'.

Обръща се внимание, че при този начин на решение се използва степента на т. P относно окръжностите c и k'.

Ако се построи произволна окръжност k', минаваща през т. A и B и пресичаща окръжността k_1, точките C и D ще бъдат пресечните точки на k_1 и k'. Разполагайки с т. C и т. D, може да се построи правата, минаваща през тях, а след това т. $P = AB \cap CD$.

След като е намерена т. P, може да се намери т. T, а оттам трябва да се приложи *задача* 5.1. за построяването на окръжност, минаваща през три дадени точки.

Построение: 1. Произволна окръжност k', минаваща през т. A и B и пресичаща окръжността k_1;

2. $k_1 \cap k' = \{C, D\}$;

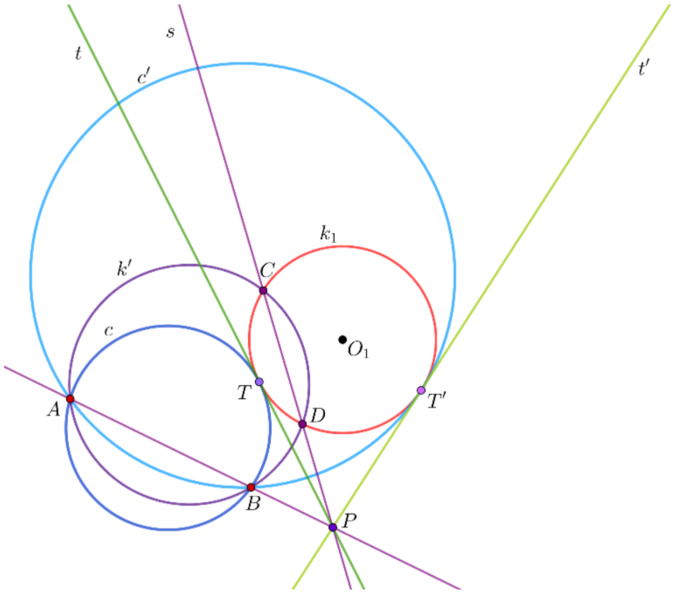
3. правите AB и CD;

4. $AB \cap CD = P$;

5. през точката P се построява допирателната t към окръжността k_1;

6. $t \cap k_1 = T$;

7. $c(A, B, T)$ [Препратка към *задача* 5.1.].



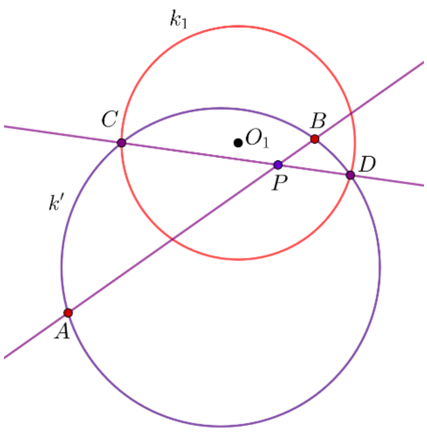
Фигура 80: Задача 5.8. – 2. случай – I. начин – построение

Доказателство: Тъй като $PA.PB = PC.PD = PT^2$, а т. A и $B \in c$ и т. C и $D \in k_1$, то PT е обща допирателна на двете окръжности, т.е. c се допира до k_1 в т. T. Следователно окръжността $c(A, B, T)$ е търсената.

Изследване: Броят на допирателните, прекарани през т. P към окръжността k_1, зависи от това дали тя е вътрешна за нея, лежи на k_1 или е външна за нея.

Ако се допусне, че т. P е вътрешна за окръжността, една от т. A и B е вътрешна за окръжността k_1, което противоречи на разглеждания случай – и двете точки трябва да са едновременно външни или едновременно вътрешни за k_1.

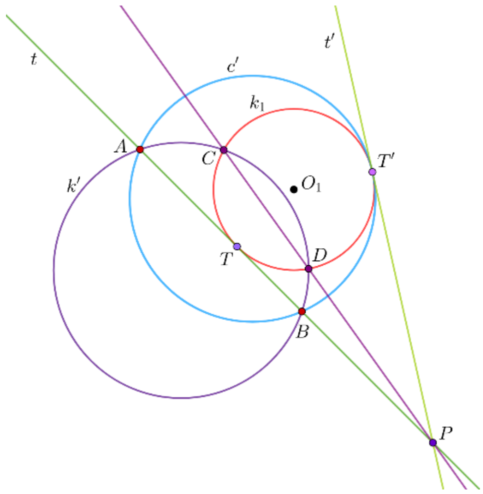
Ако се допусне, че т. P лежи на окръжността k_1, ще следва, че една от точките A и B лежи на k_1, което също противоречи на разглеждания случай.



Фигура 81: Задача 5.8. – 2. случай – I. начин – изследване – 1

Следователно т. P е външна за окръжността k_1 и през нея могат да бъдат прекарани две допирателни. Тоест задачата се свежда до построяването на допирателна през външна точка за дадена окръжност. [Препратка към *задача* 7.3. от Глава VII. „*Помощни задачи*“]

Задачата има най-много две решения. Ако правата AB е допирателна към окръжността k_1, то едната от допирателните през т. P съвпада с правата AB ⇒ т. A, B, T са колинеарни и окръжността с е непостроима.



Фигура 82: Задача 5.8. – 2. случай – I. начин – изследване – 2

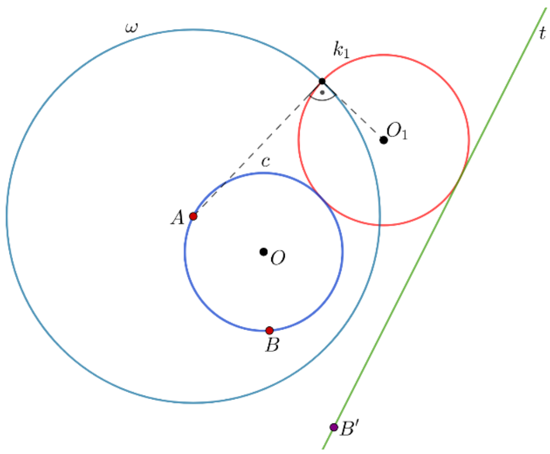
II. *начин (чрез метода на инверсията)*

Анализ: Всяка инверсия φ_ω с център т. A ще изобрази търсената окръжност в права, окръжността k_1 – в окръжност $k_1{}'$ и точката B – в точка B'.

Ако за степен на инверсията се избере степента на точката A относно окръжността k_1, то окръжността $\varphi_\omega(k_1) = k_1$ и техническото изпълнение ще бъде по-лесно.

Тъй като инверсията е конформно изображение, правата, която е образ на търсената окръжност при инверсия, ще се допира до образа на окръжността k_1. Освен това търсената окръжност минава през т. $B \Rightarrow$ образът ѝ ще минава през образа на т. B.

Така задачата се свежда до задача: *През дадена точка* (B') *да се построи допирателна* (t) *към дадена окръжност* (k_1).



Фигура 83: Задача 5.8. – 2. случай – II. начин – анализ

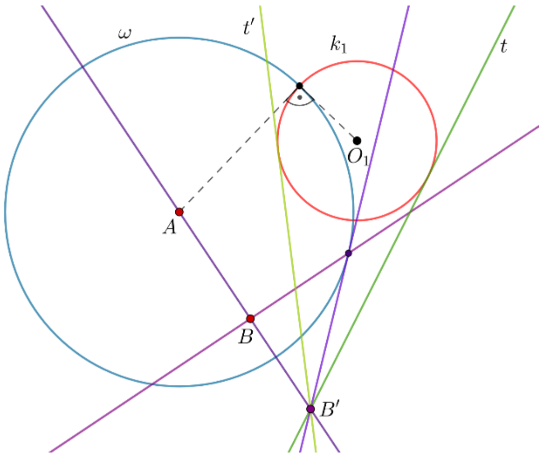
Построение: 1. $\omega(A, r)$ – ортогонална на k_1;

2. $\varphi_\omega(B) = B'$;

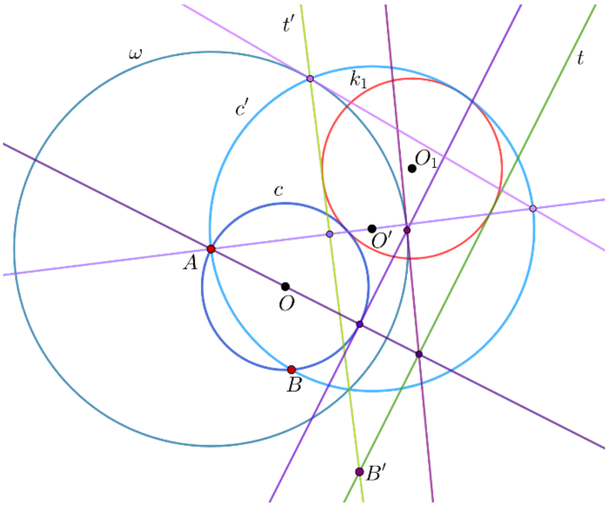
3. през т. B' се построява допирателна t към k_1;

4. окръжността $c = \varphi(t)$.

Доказателство: Окръжността c при инверсията φ_ω е първообраз на правата t, която минава през т. B' и се допира до окръжността $k_1{}'$. Тогава окръжността c минава през точката B – първообраз на B' и се допира до първообраза на $k_1{}'$ – окръжността k_1 (при разглеждана от нас инверсия $k_1{}' \equiv k_1$).



Фигура 84: Задача 5.8. – 2. случай – II. начин – построение – 1



Фигура 85: Задача 5.8. – 2. случай – II. начин – построение – 2

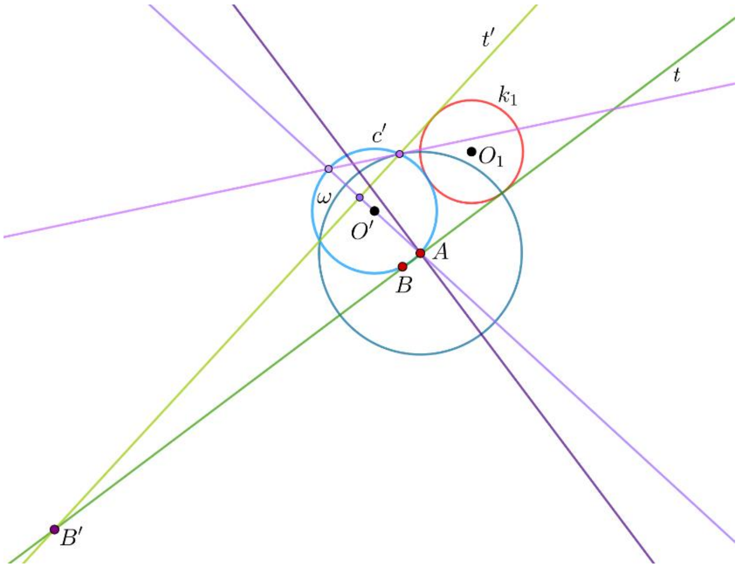
Тъй като разгледаната инверсия има за център т. A, а поне една от външните допирателните през т. B' не минава през т. A, то тази допирателна ще се изобрази в окръжност, минаваща през центъра, т. е. $A \in k_1$.

Изследване: Броят на решенията на задачата зависи от броя на допирателните, които може да се прекарат през т. B' към окръжността $k_1{}'$, т.е. зависи от това дали т. B' е външна за окръжността $k_1{}'$, лежи на нея или е вътрешна точка за тази окръжност.

Нека т. B' е вътрешна за окръжността $k_1{}'$. Тъй като точката A е център на инверсията, то окръжността $k_1{}'$ не минава през нея ($k_1{}'$ е образ на окръжността k_1, а се разглежда случай, в който т. A е външна за k_1). Тогава правата AB' пресича окръжността $k_1{}'$ в две точки M' и N', като т. B' се намира между точките M' и N'. Тогава точката $B = \varphi(B')$ ще бъде между точките $M = \varphi(M')$ и $N = \varphi(N')$. Но т. M' и N' лежат на $k_1{}'$ $\Rightarrow$ т. M и N лежат на k_1. Оттук следва, че т. B е вътрешна за окръжността k_1, което противоречи на разглеждания случай. Следователно т. B' не може да бъде вътрешна за $k_1{}'$.

Ако се допусне, че т. B' лежи на окръжността $k_1{}'$, ще следва, че т. B лежи на окръжността k_1, което отново противоречи на разглеждания случай.

Следователно т. B' е външна за окръжността $k_1{}'$ и през нея могат да бъдат прекарани две допирателни. Тези две допирателни ще бъдат решения на задачата, ако не минават през т. A – център на инверсията (ако минават през центъра на инверсията, те ще бъдат двойни и няма да има решение). Ако едната от двете тангенти минава през т. A, то правата AB ще бъде допирателна към окръжността k_1. В този случай задача има единствено решение:



Фигура 86: Задача 5.8. – 2. случай – II. начин – изследване

Ако никоя от тангентите не минава през центъра на инверсията, задачата ще има две решения.

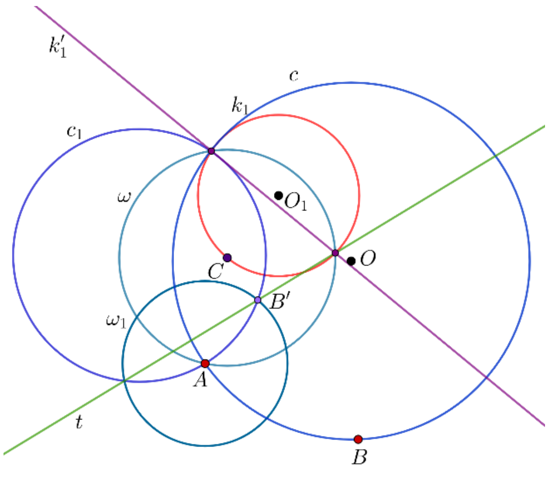
В заключение: при този начин на решение задачата се свежда до построяването на допирателна през външна точка за дадена окръжност.

III. *начин (чрез метода на инверсията)*

В това решение за център на инверсията се избира точка от окръжността k_1.

Анализ: Нека т. $C \in k_1$ е произволна точка. Нека инверсия φ_ω е с център т. C. Окръжността k_1 би се изобразила в права $k_1{}'$, а точките A и B – съответно в точки A' и B'. Тогава задачата се свежда до задача: „*Да се построи окръжност, която минава през точките A' и B' и се допира до правата $k_1{}'$*“. Тоест задачата се свежда до *задача* 5.3. Нека решението на втората формулирана задача е окръжността c_1. Тогава решението на първоначалната задача ще се намери, чрез построяване на $\varphi_\omega(c_1)$.

За улеснение на техническото изпълнение, за степен на инверсията ще бъде избрана степента на т. C относно т. A.

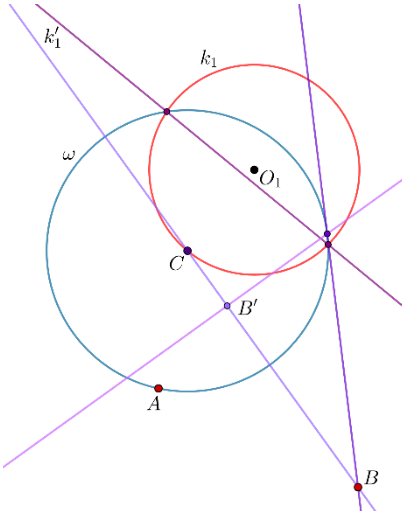


Фигура 87: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – анализ

Построение: 1. $\omega(C, CA)$;

2. $\varphi_\omega(B) = B'$;

3. $\varphi_{\omega}(k_1) = k_1{}'$;



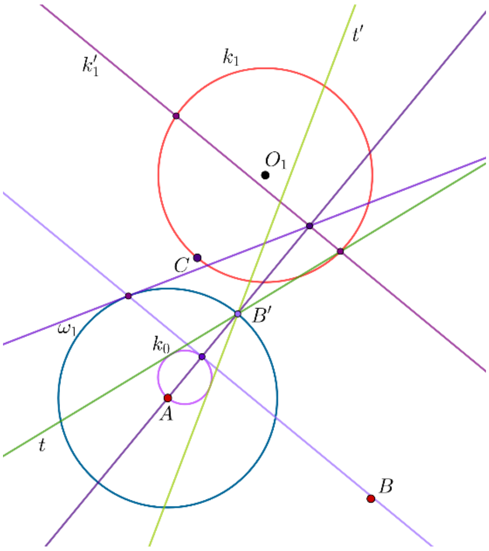
Фигура 88: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – построение – 1

4. $\omega_1(A, AB')$;

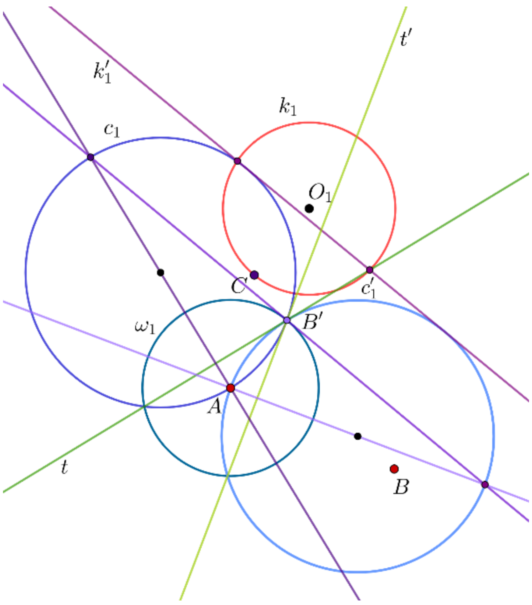
5. $\varphi_{\omega_1}(k_1{}') = k_0$;

6. през т. B' построяваме допирателна t към k_0;

7. $\varphi_{\omega_1}(t) = c_1$ – решението на *задача* 5.3.;

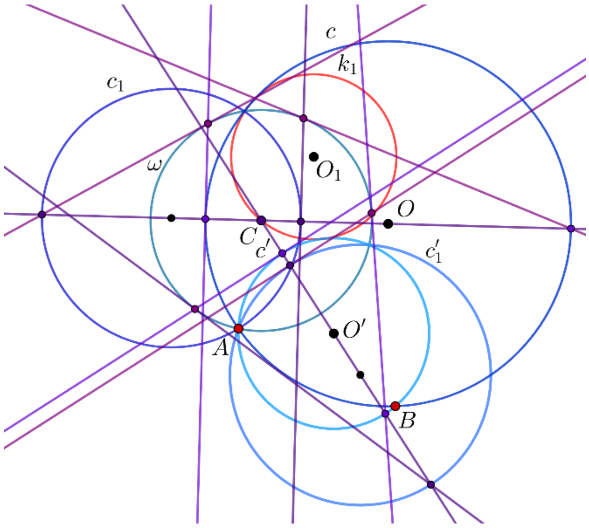


Фигура 89: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – построение – 2



Фигура 90: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – построение – 3

8. $\varphi_\omega(c_1) = c$ – решението на *разглежданата задача*.



Фигура 91: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – построение – 4

Доказателство: По построение окръжността c_1 минава през т. A' и B' и се допира до правата $\varphi_\omega(k_1) = k_1{}'$ [Препратка към доказателството на *задача* 5.3.]. Тогава $\varphi_\omega(c_1) = c$ ще минава през точките $\varphi_\omega(A') = A$ и $\varphi_\omega(B') = B$ и ще се допира до k_1.

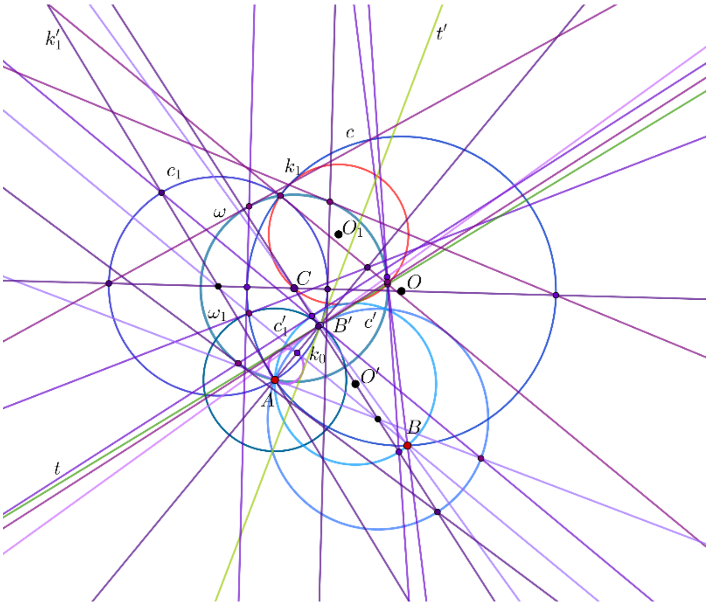
Изследване: Броят на решенията на задачата зависи от броя на решенията на *задача* 5.3.

Приложение: За извършване на съответните построения чрез първия начин на решение на случай 2 са използвани две други задачи – една от помощните задачи за построяване на допирателна през външна точка за дадена окръжност и една *Аполониева задача*. Степента на точка относно окръжност и достатъчното условие четири точки да лежат на една окръжност, които са използвани при направата на анализ като теоретична основа, са използвани и за направата на анализа на общия случай на *задача* 5.6.

Построението към решението, в което за център на инверсията е избрана т. A, наистина се изпълнява изключително лесно и бързо. До решение на задачата довежда и инверсията с център произволна точка от окръжността k_1, но лесно се да установява, че построението е много по-трудоемко – изисква прилагането на две инверсии, които довеждат до построяване на образи два пъти, както и до повторно използване на инволютивността на инверсията с цел построяването на търсения обект. Разликата между тези два начина на решение потвърждават факта, че изборът на център на инверсия е от изключителна важност.

Решенията на *задача* 5.6. (случай 3) и *задача* 5.9. (случай 4 – I. начин) се свеждат до решаването на тази задача.

Допълнителен коментар: Към ресурсните файлове са включени видеа, с които се подпомага яснотата при извършване на построенията. Следващото изображение илюстрира как би изглеждал чертежът към *задача* 5.8. чрез втори начин на решение в случай 3. Чрез него ясно се онагледява невъзможността за проследяване на решението на задачата:



Фигура 92: Задача 5.8. – 2. случай – III. начин – онагледяване на решението

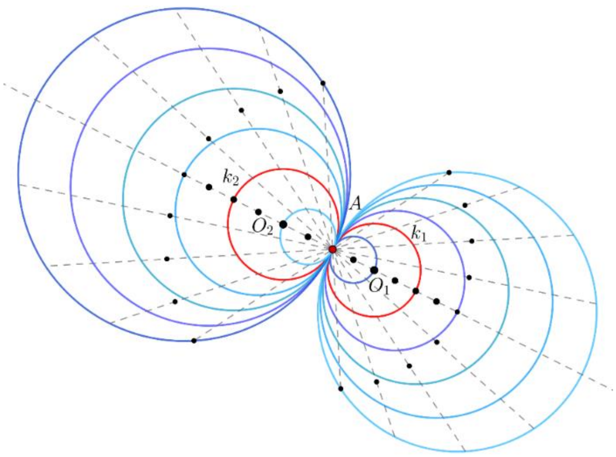
Задача 5.9. *Да се построи окръжност, която да минава през дадена точка и да се допира до две дадени окръжности.* (Мартинов, 1973), (Петров, 1969) и (Табов и Лазаров, 1990)

Анализ: Нека са дадени точката A и окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$.

Задачата *няма решение*, когато т. A и една от окръжностите са външна и вътрешна (вътрешна и външна) за другата от окръжностите.

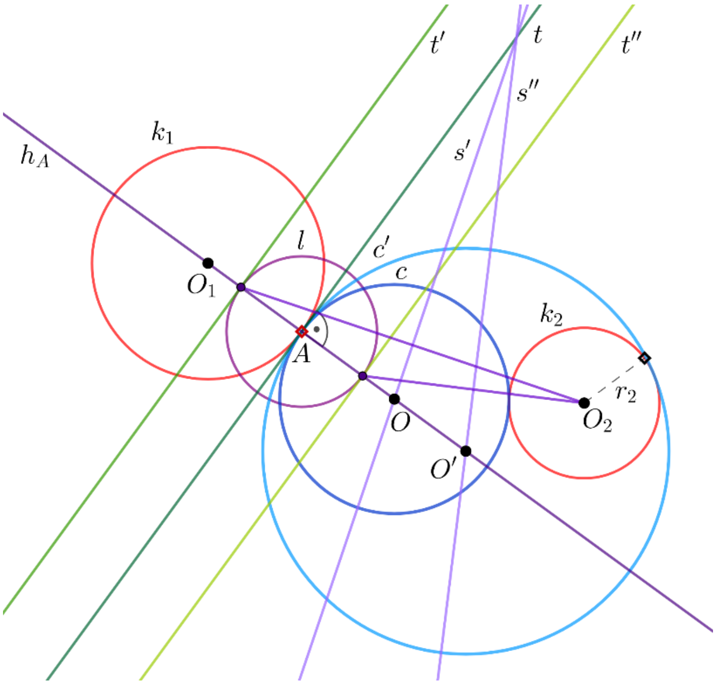
Задачата *няма решение* и когато k_1и k_2 се пресичат помежду си и точката A съвпада с една от пресечните им точки.

1 случай) Когато k_1и k_2 са допирателни и т. A съвпада с допирната им точката, задачата има безбройно много решения. В този случай центърът O на търсената окръжност лежи на правата $O_1A \equiv O_2A$, а радиусът на търсената окръжност е равен на OA.



Фигура 93: Задача 5.9. – 1. случай – построение

2 случай) *Анализ:* Нека окръжностите k_1и k_2 са разположени произволно, а точката A лежи върху окръжността k_1. Построява се допирателната t към k_1. Тогава задачата се свежда до задача: *„Да се построи окръжност, която да минава през дадена точка и да се допира до дадена права и до дадена окръжност.*“, т.е. свежда се до решаването на частен случай на *задача* 5.6., при който дадената точка лежи върху дадената права. Не се излагат последователните стъпки от построението и не се извършва доказателство, тъй като такива присъстват в решението на *задача* 5.6.



Фигура 94: Задача 5.9. – 2. случай – построение

3 случай) Нека окръжностите k_1и k_2 са концентрични с общ център т. O_1.

Предполага се, че $r_1 > r_2$.

Анализ: По подобие на *задача* 5.7. ще бъде намерен центърът на търсената окръжност като пресечна точка на две геометрични места от точки:

- Множеството от центровете на окръжностите, които се допират до две дадени концентрични окръжности, се състои от две окръжности, концентрични на дадените, с радиуси, равни на полусбора (r') и полуразликата (r'') на радиусите на дадените окръжности;
- Множеството от центровете на окръжностите с даден радиус (r' или r''), които минават през дадена точка, е окръжност с център дадената точка и с радиус, равен на дадения радиус.

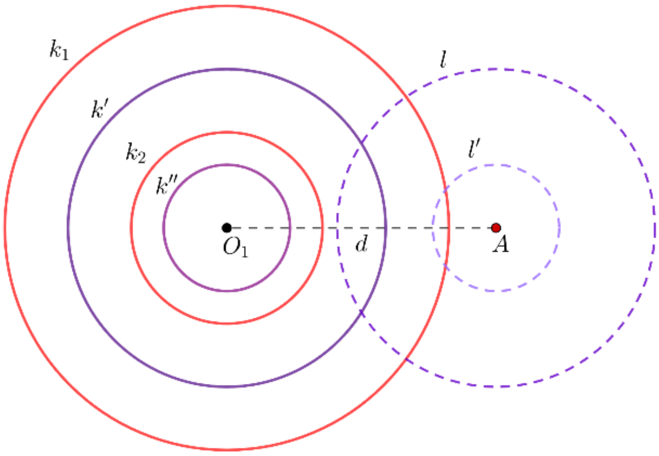
Ако търсената окръжност съществува, нейният център е общата точка на тези две множества (т.е. пресечна точка на двете окръжности).

Построение: Предоставя се за самостоятелно изпълнение.

Доказателство: Следва от направата на анализа.

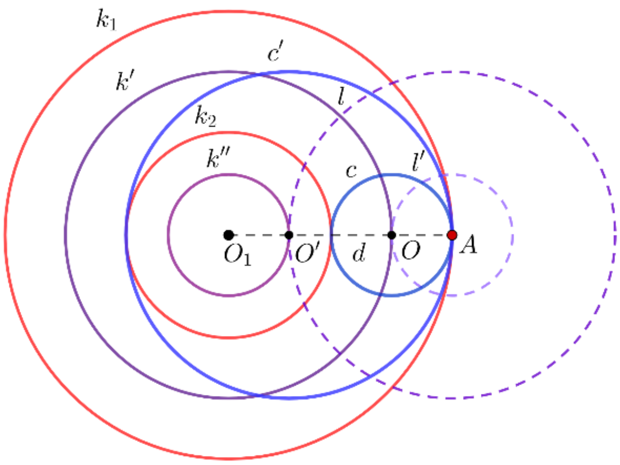
Изследване: Нека d е разстоянието от точка A до центъра O_1 на дадените окръжности. Трябва да се изследва броят на решенията на задачата, зависещи от релацията между d и радиусите на двете окръжности:

При $d > r_1$ задачата *няма решение*:



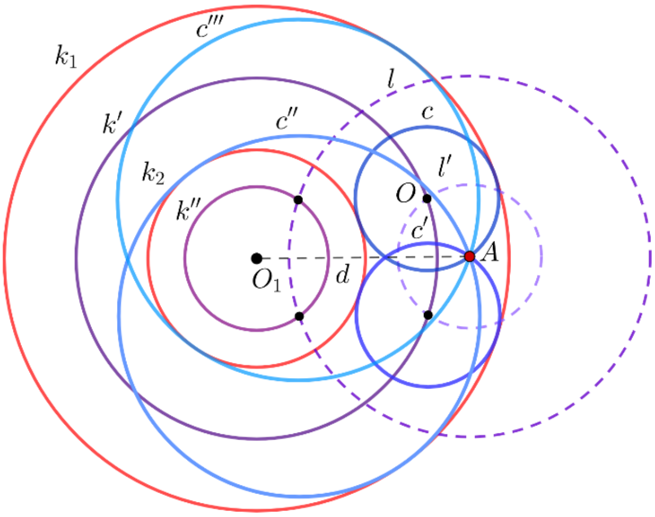
Фигура 95: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 1

При $d = r_1$ задача *има две решения*:



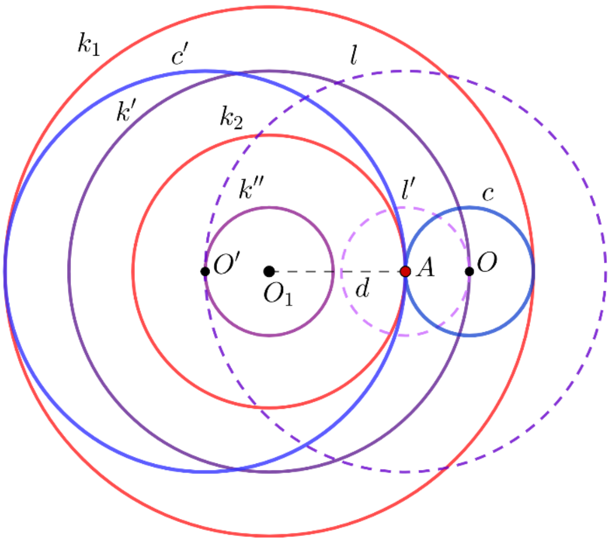
Фигура 96: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 2

При $r_2 < d < r_1$ задачата *има четири решения*:



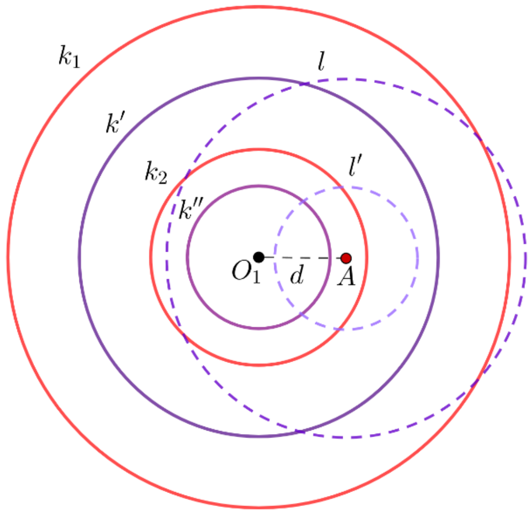
Фигура 97: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 3

При $d = r_2$ задачата *има две решения*:



Фигура 98: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 4

При $0 \leq d < r_2$ задачата *няма решение*:



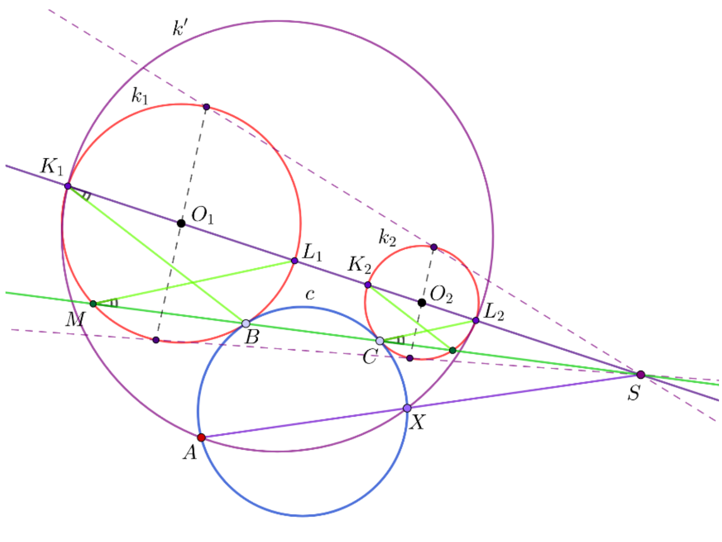
Фигура 99: Задача 5.9. – 3. случай – изследване – 5

4 случай) Разглежда се общият случай, при който т. A не лежи на никоя от окръжностите k_1и k_2 и е външна за тях.

I. *начин*

Анализ: Нека $r_1 \neq r_2$. Нека т. S е външният център на хомотетията, която изобразява едната окръжност в другата [Препратка към *задача* 7.7. от Глава VII. „*Помощни задачи*“], а т. B и т. C – допирните точки на c съответно до окръжностите k_1 и k_2. Нека т. $X = SA \cap c$.

Ако се построи т. X, може да се приложи *задача* 5.8. за т. X, т. A и една от окръжностите k_1 или k_2, т.е. задачата ще се сведе до задача с формулировка: „*Да се построи окръжност, която минава през две дадени точки A и X и се допира до дадена окръжност k_1*“.



Фигура 100: Задача 5.9. – 4. случай – I. начин – анализ

Нека още $O_1O_2 \cap k_1 = \{K_1, L_1\}$, $O_1O_2 \cap k_2 = \{K_2, L_2\}$ и $BC \cap k_1 = M$.

Точките K_1, K_2 и L_1, L_2 са две двойки съответни точки при хомотетията с център т. S и коефициент $\lambda = \frac{r_1}{r_2}$. Следователно $SK_1.SK_2 = SL_1.SL_2 \Rightarrow ML_1 \parallel CL_2 \Rightarrow \sphericalangle SML_1 = \sphericalangle SCL_2$, но

$\sphericalangle SML_1 = \sphericalangle BK_1S = \frac{\widehat{BL_1}}{2}$ – вписани ъгли в окръжността k_1

$\Rightarrow \Delta BSK_1 \sim \Delta L_2CS \Rightarrow \frac{SB}{SL_2} = \frac{SK_1}{SC} \Rightarrow SB.SC = SK_1.SL_2$. (1)

От друга страна $SB.SC = SA.SX$. (2)

От равенства (1) и (2) се получава, че $SA.SX = SK_1.SL_2 \Rightarrow$ т. A, X, K_1 и L_2 лежат на една окръжност k'.

Окръжността k' е построима, защото са построими точките K_1 и L_2, а точката A е дадена, т.е. построяването на окръжността k' се свежда до построяването на окръжността, минаваща през т. K_1, L_2 и A. Тогава точката X е построима, където $X = SA \cap k'$.

Построение: 1. т. S – външният център на хомотетията $\chi: \chi(k_1) = k_2$;

2. $O_1O_2 \cap k_1 = \{K_1, L_1\}$;

3. $O_1O_2 \cap k_2 = \{K_2, L_2\}$;

4. окръжността k', минаваща през т. A, K_1, L_2 [Препратка към *задача* 5.1.];

5. $SA \cap k' = X$;

6. произволна окръжност k_1', минаваща през т. A и X и пресичаща окръжността k_1;

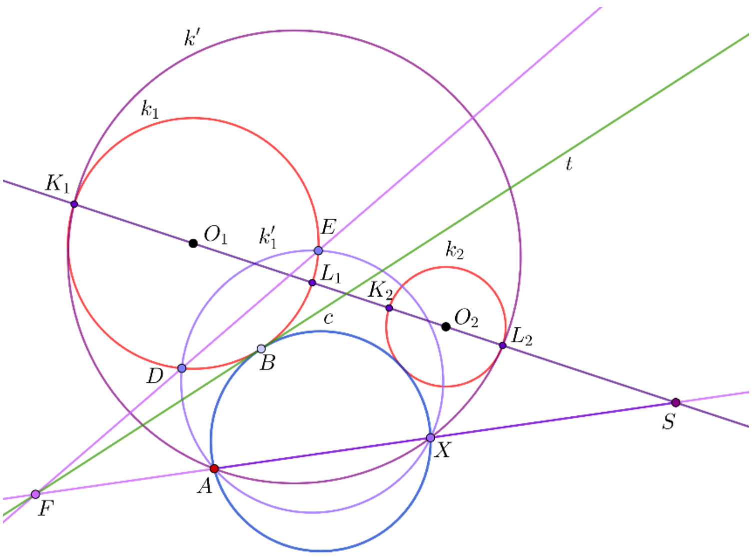
7. $k_1' \cap k_1 = \{D, E\}$;

8. $XA \cap DE = F$;

9. през т. F се построява допирателна t към k_1;

10. $t \cap k_1 = B$;

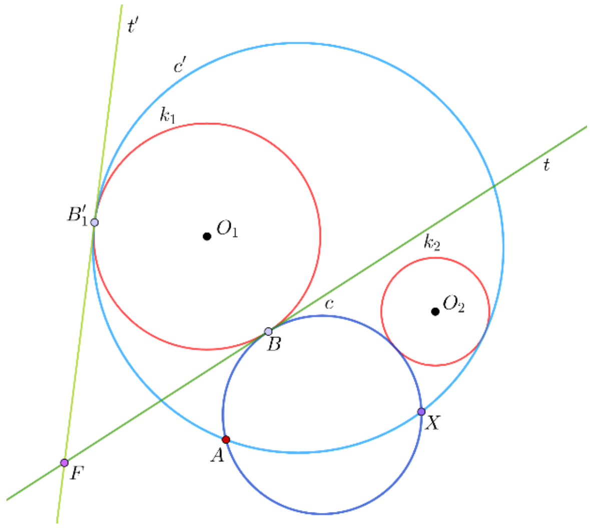
11. окръжност c, минаваща през т. A, B, X [Препратка към *задача* 5.1.].



Фигура 101: Задача 5.9. – 4. случай – I. начин – построение

Доказателство: Следва от анализа и построението.

Изследване: Задачата има най-много четири решения. Окръжността c може да се допира не само едновременно външно или вътрешно до двете окръжности. За да бъдат получени други решения на задачата, може да се използва вътрешният център на подобие.



Фигура 102: Задача 5.9. – 4. случай – I. начин – изследване

Ако $X \equiv A$, то SA е допирателна към окръжността с и тогава задачата отново се свежда до решаването на частен случай на *задача* 5.6.

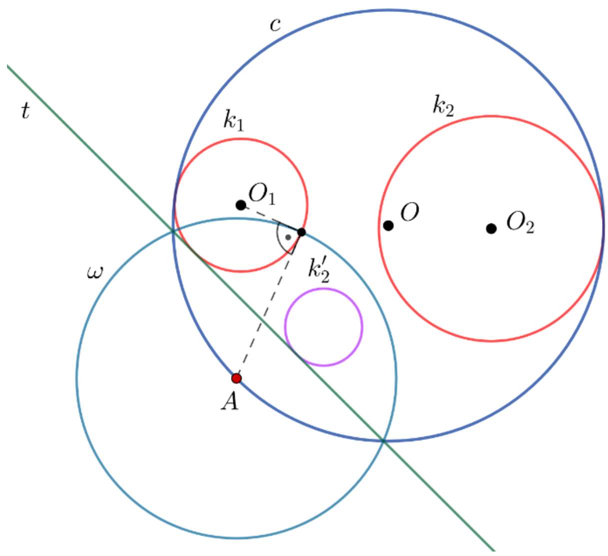
II. *начин (чрез метода на инверсията)*

Анализ: Всяка инверсия φ_ω с център т. A ще трансформира окръжността c в права t, а окръжностите k_1и k_2 в окръжности $k_1{}'$ и $k_2{}'$.

Тъй като инверсията запазва ъглите, а ъгълът между c и k_1, както и този между c и k_2 е равен на $0°$, то ъгълът между образите им също ще бъде равен на $0°$. Тоест: ако c се допира до окръжностите k_1 и k_2, то нейният образ t при инверсия ще се допира до $k_1{}'$ и $k_2{}'$.

Така задачата се свежда до задача:

„Да се построи обща допирателна t *на окръжностите, които са образи на* k_1 *и* k_2“ [Препратка към *задача* 7.5. от Глава VII. „Помощни задачи“].



Фигура 103: Задача 5.9. – 4. случай – II. начин – анализ

Отново за улеснение на техническото изпълнение се избира за степен на инверсията степента на т. A относно една от двете дадени окръжности.

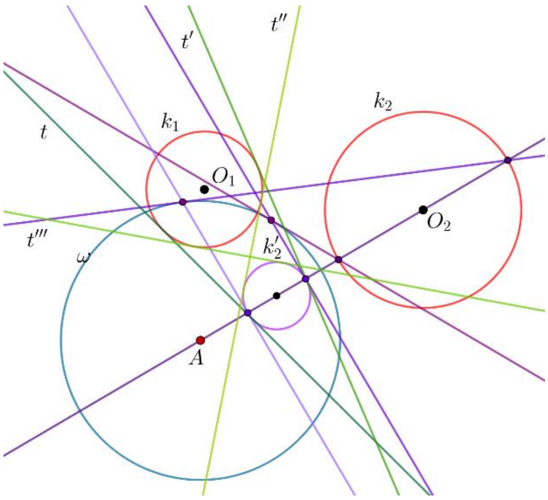
Построение:

1. $\omega(A, r)$ – ортогонална на k_1;

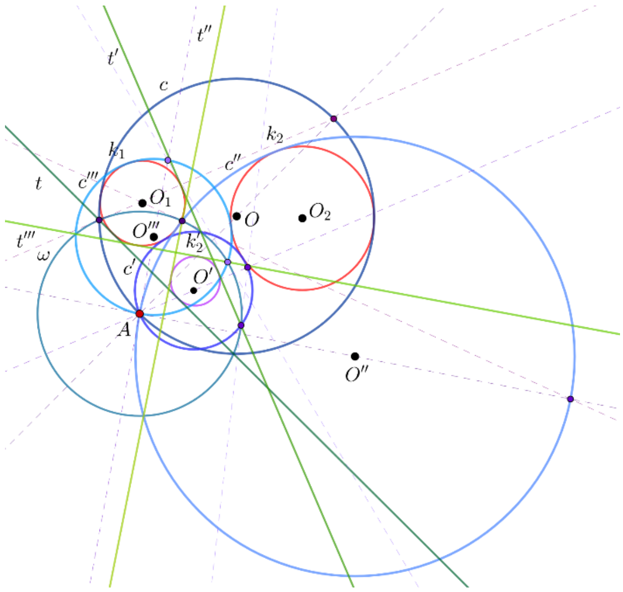
2. $\varphi_\omega(k_2) = {k_2}'$;

3. обща допирателна t на k_1 и ${k_2}'$;

4 окръжността $\varphi_\omega(t) = c$.



Фигура 105: Задача 5.9. – 4. случай – II. начин – построение – 1



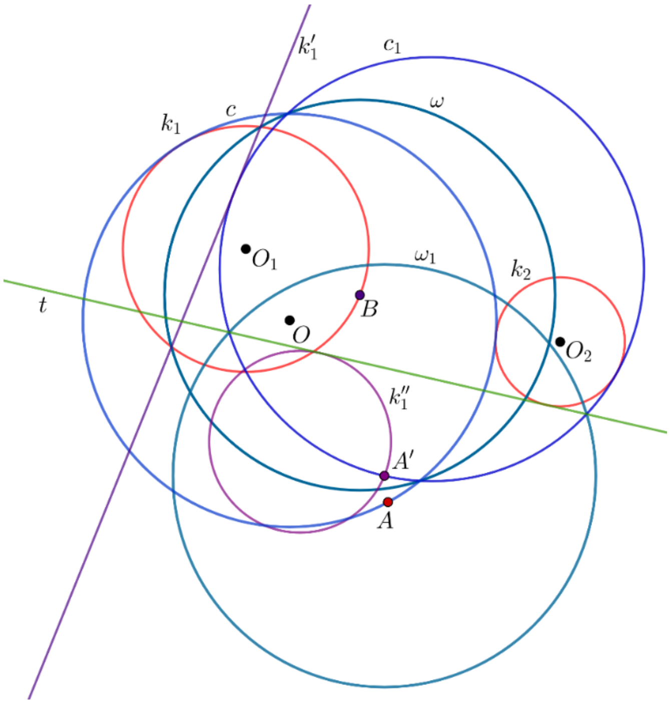
Фигура 104: Задача 5.9. – 4. случай – II. начин – построение – 2

Доказателство: По построение t е допирателна към $k_1' = \varphi_\omega(k_1)$ и $k_2' = \varphi_\omega(k_2)$. Следователно образът на t (окръжността c) се допира до k_1 и k_2 и минава през т. A – центърът на инверсия, ако t е права, неминаваща през т. A (ако допирателната минава през т. A, то тя ще бъде двойна при инверсията и няма да получим решение – описано в изследването).

Изследване: Броят на решенията на задачата зависи от броя на общите допирателни на окръжностите k_1' и k_2' и от това дали центърът на инверсията лежи на някоя от тях [Препратка към изследването, направено в *задача* 5.6.]. Максималният брой на решенията на задачата е четири.

III. *начин (чрез метода на инверсията)*

Към този начин на решение се предоставя само чертеж и се поставя като задача за самостоятелно изпълнение да бъде установено кой е центърът и на какво е равна степента на инверсията, която е избрана, да бъдат направени анализ, построение, доказателство и изследване.



Фигура 106: Задача 5.9. – 4. случай – III. начин – построение

Отново се оказва, че *Аполониевите задачи* за взаимосвързани помежду си:

- използван е методът на геометричните места на точки, който беше приложен и за намиране на решението на *задача* 5.7.;
- решението на задачата се свежда до решаването на друга *Аполониева задача* 5.1.;
- за един от начините на решение се използва хомотетия, свойство на секуща и т.н., които също приложени в други *Аполониеви задачи*;
- *задача* 5.6. също е сведена до решението на задачата за построяване на общи допирателни на две окръжности.

Преди да се премине към решаване на *Задача* А е добре да се обобщят основните принципи за метода на инверсията:

- важно е да се направи подходящ избор на център (и степен) на инверсията;
- използва се свойството на инверсията да запазва ъглите;
- решението на дадена Аполониева задача се свежда до построяване на допирателна;
- използва се свойството инволютивност при построяване на първообразите на търсените обекти.

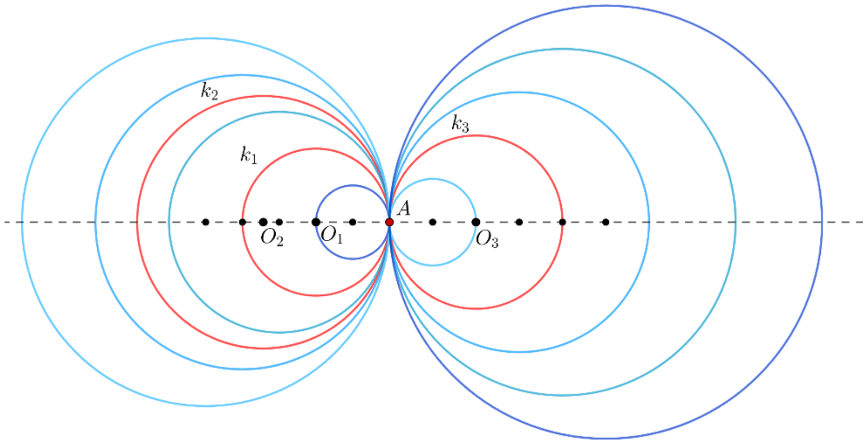
Задача А. *Да се построи окръжност, която се допира до три дадени окръжности.* (Табов и Лазаров, 1990) и (Петров, 1969)

Нека са дадени окръжностите $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ и $k_3(O_3, r_3)$.

Задачата *няма решение*, когато две от окръжностите са съответно външна и вътрешна за третата окръжност.

Първо ще бъдат разгледани частни случаи, при които задачата има решение.

1 случай) Задачата има безбройно много решения, ако дадените окръжности минават през една точка и са две по две допирателни в нея:



Фигура 107: Задача А. – 1. случай – построение

2 случай) Нека окръжностите k_1, k_2 и k_3 имат един и същ радиус с дължина r_1 и нека всяка се допира до останалите две.

Анализ: За определеност се предполага, че окръжностите се допират до окръжността c вътрешно.

Ако се построи окръжността $c_1(O, \rho = r - r_1)$, тя ще мине през центровете O_1, O_2 и O_3 (прилага се методът на свиване и разширение на равнината). Следователно, за да се построи окръжността c, е достатъчно да се построи окръжността c_1, концентрична на c. Тогава c ще има радиус $r = \rho + r_1$.

Задачата се свежда до построяването на окръжността, минаваща през трите неколинеарни точки O_1, O_2 и O_3, т.е. свежда се до решаването на *задача* 5.1.

Построение:

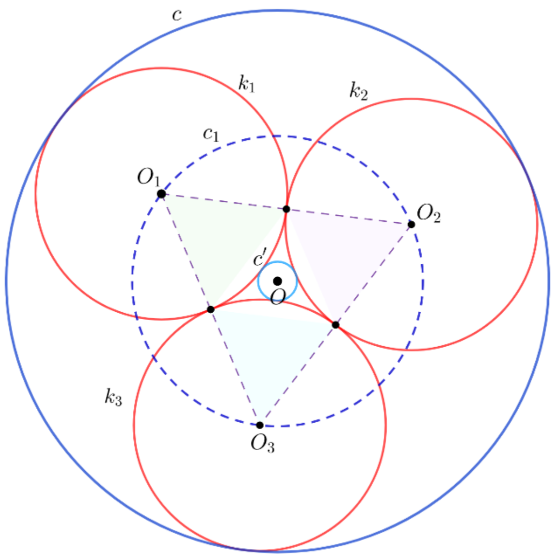
1. $c_1(O_1, O_2, O_3)$ с център т. O и радиус ρ [Препратка към *задача* 5.1.];

2. c $(O, r = \rho + r_1)$.

Доказателство: Окръжността c има радиус $\rho + r_1$. Окръжностите k_1, k_2 и k_3 имат радиус r_1.

Разстоянието между центъра на c и центровете O_1, O_2 и O_3 е равен на ρ, откъдето следва, че c се допира до трите окръжности.

Изследване: Задачата в този случай има две решения: $c(O, \rho + r_1)$ и $c'(O, \rho - r_1)$.

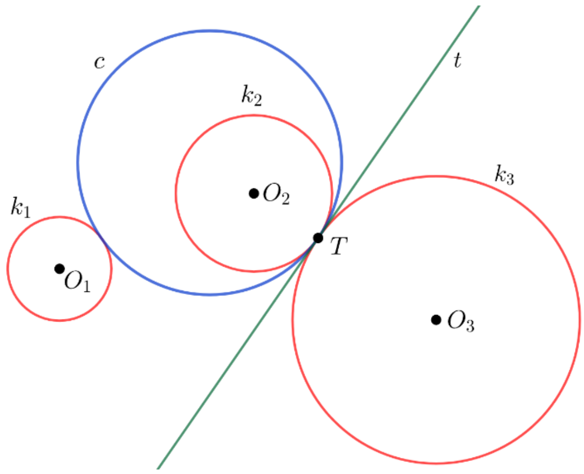


Фигура 108: Задача А. – 2. случай – построение

3 случай) Нека окръжностите k_2 и k_3 се допират в точката T, а k_3 не минава през тази точка.

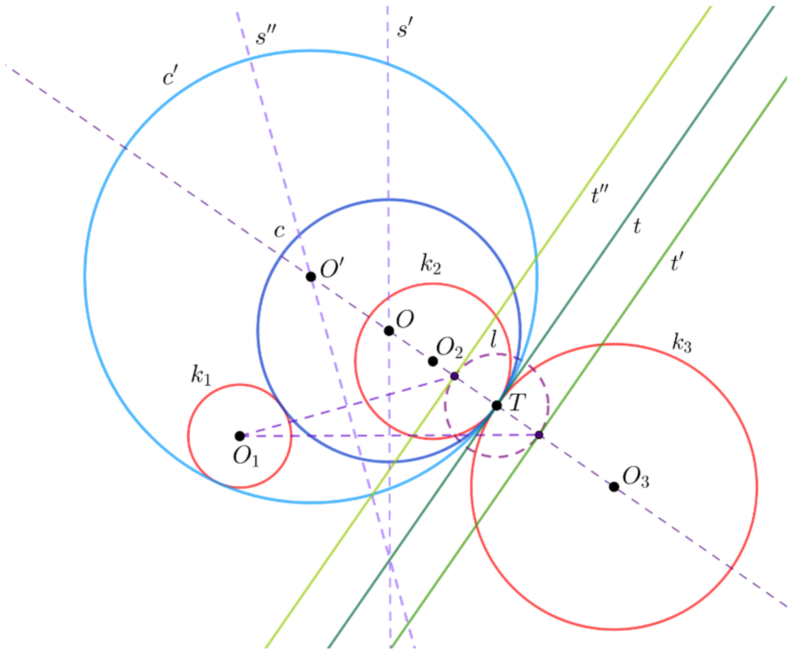
Анализ: Построява се тангентата t в точката T.

За да се допира до окръжностите k_1 и k_2, окръжността c трябва да се допира до правата t в точката T. Така задачата се свежда до следната: *„Да се построи окръжност, която минава през дадена точка T и се допира до дадена права t и до дадена окръжност k_3*“, т.е. до частен случай на *задача* 5.6., при който дадената точка лежи на дадената права.



Фигура 109: Задача А. – 3. случай – анализ

Тъй като две от предходните задачи се сведоха до решаването на този частен случай, то тук се предоставя за самостоятелно изпълнение графичното изпълнение към задачата.

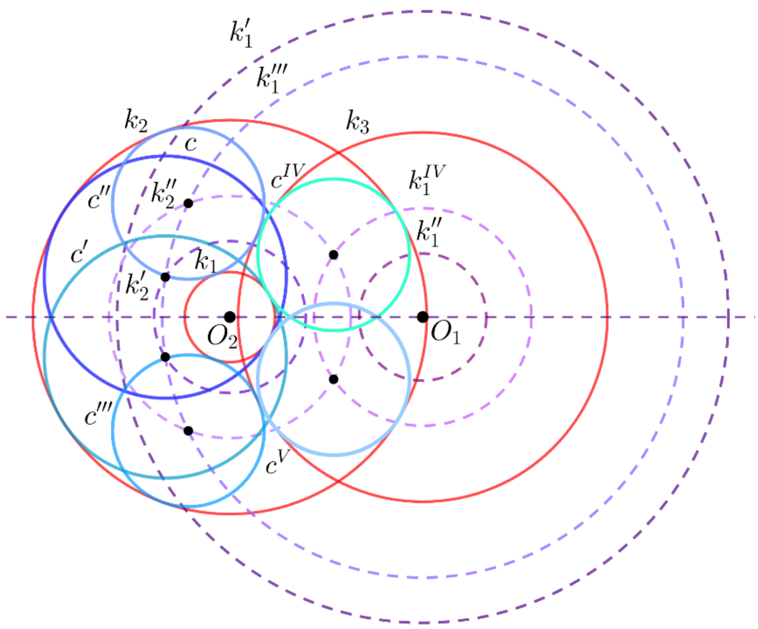


Фигура 110: Задача А. – 3. случай – построение

4 случай) Нека окръжностите k_2 и k_3 са концентрични с общ център т. O_2. За определеност се приема, че $r_2 > r_3$.

Анализ: В този случай отново се използва методът на геометричните места на точки. Трябва се построи геометричното място на центровете на окръжности, които се допират до две дадени концентрични окръжности и геометричното място на центровете на окръжности, които минават през дадена точка и имат даден радиус.

Тогава, ако търсената окръжност съществува, нейният център е пресечна точка на една от окръжностите $k_1{}'(O_1, r_1 + \frac{r_2+r_3}{2})$, $k_1{}''(O_1, \left|r_1 - \frac{r_2+r_3}{2}\right|$ и окръжността $k_2{}'(O_2, \frac{r_2-r_3}{2})$ или на една от окръжностите $k_1{}'''(O_1, r_1 + \frac{r_2-r_3}{2})$, $k_1{}^{IV}(O_1, \left|r_1 - \frac{r_2-r_3}{2}\right|$ и окръжността $k_2{}''(O_2, \frac{r_2+r_3}{2})$. Радиусът на окръжността има дължина съответно $r_2 - \frac{r_2-r_3}{2}$ или $r_2 - \frac{r_2+r_3}{2}$.



Фигура 111: Задача А. – 4. случай – построение

Построение: Построяват се последователно горните окръжности и се намират пресечните им точки.

Изследване: Изследването се предоставя за самостоятелна работа, като се препоръчва да се разгледат изследванията, извършени в *задача* 5.7. и *задача* 5.9. В този случай Аполониевата задача има най-много шест решения. За извършване на изследването може да бъде и използван ресурсният файл към задачата.

5 случай) Разглежда се решението на задачата в общия случай, когато центровете O_1, O_2 и O_3 са различни неколинеарни точки и радиусите имат различна дължина.

Трябва да се разгледат възможните взаимни положения на две от дадените окръжности – например k_2 и k_3. Двете окръжности могат да имат една обща точка (да са допирателни), да имат две общи точки (да са пресекателни) или да нямат общи точки.

1. Нека k_2 и k_3 се допират и нека допирната им точка е т. T.

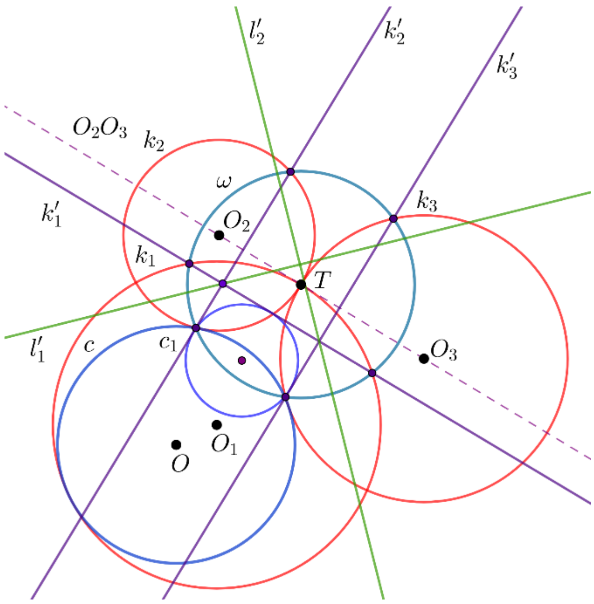
1.1. Нека k_1 минава през т. T и се допира до k_2 и k_3.

Анализ: В този случай задачата има безбройно много решения (задачата се свежда до вече разгледан случай).

1.2. Нека k_1 минава през т. T и пресича окръжностите k_2 и k_3.

Анализ: При произволна инверсия φ_ω с център т. T образите $\varphi_\omega(k_2) = k_2{}'$ и $\varphi_\omega(k_3) = k_3{}'$ ще бъдат успоредни прави, защото окръжностите k_2 и k_3 се допират, а инверсията е конформно изображение. Образът на $\varphi_\omega(k_1) = k_1{}'$ е права, пресичаща $k_2{}'$ и $k_3{}'$. Образът на окръжността c, която не минава през центъра на инверсия, е окръжност.

Тъй като c се допира до k_1, k_2 и k_3, нейният образ c_1 се допира до $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$. Тогава задачата се свежда до частен случай на *задача* 5.2., при който две от дадените прави са успоредни помежду си. Центърът на окръжност, която се допира до две успоредни прави и трета, която ги пресича, е пресечна точка на ъглополовящите на ъглите, получени при пресичането на всяка от двете успоредни прави с третата.



Фигура 112: Задача А. – 5. случай – анализ – 1

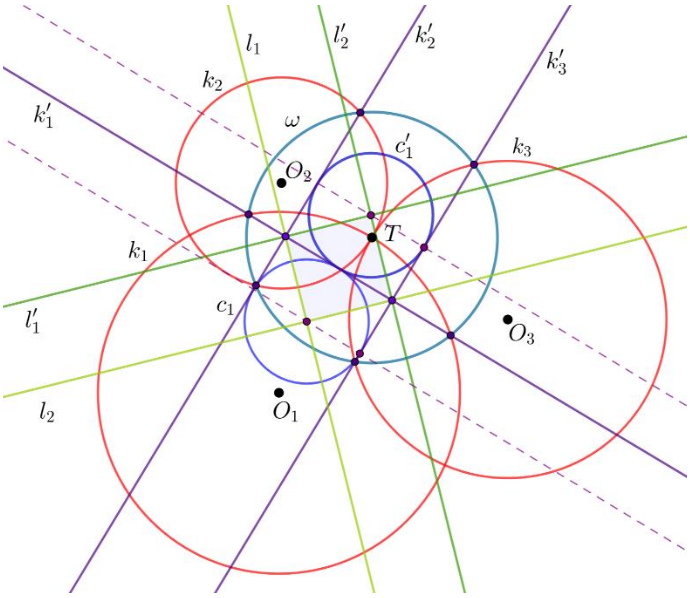
Построение: 1. инверсионната окръжност ω с център т. T и радиус с произволна дължина;

2. $\varphi_\omega(k_1) = k_1{}'$;

3. $\varphi_\omega(k_2) = k_2{}'$;

4. $\varphi_\omega(k_3) = k_3{}'$;

5. c_1 – допираща се до $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$;



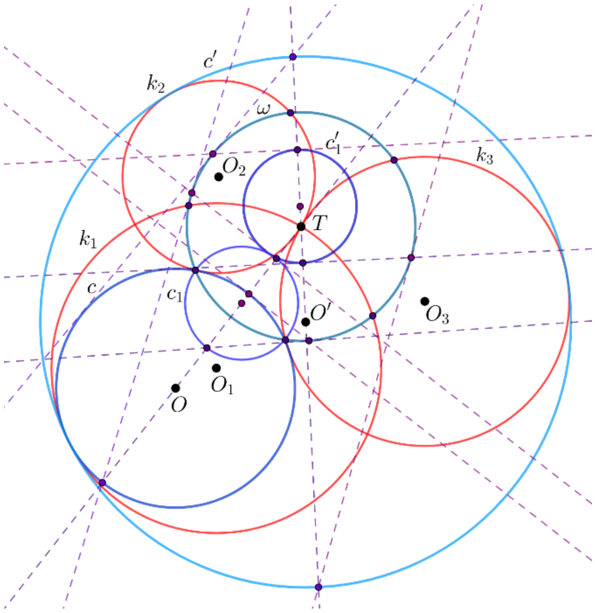
Фигура 113: Задача А. – 5. случай – построение – 1

6. $\varphi_\omega(c_1) = c$.

Доказателство: Образите $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$ са прави, тъй като и трите окръжности k_1, k_2 и k_3 минават през центъра на инверсия, а образът на окръжност, минаваща през центъра на инверсия, е права, неминаваща през центъра на инверсия.

Окръжността c_1, която не минава през т. T, се допира до правите $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$. Следователно нейният образ окръжността c се допира до образите на $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$.

Изследване: Съществуват две окръжности, които се допират до двете успоредни прави $k_2{}'$ и $k_3{}'$ и до трета права $k_1{}'$, която ги пресича. Следователно *задача* А в този случай има две решения.



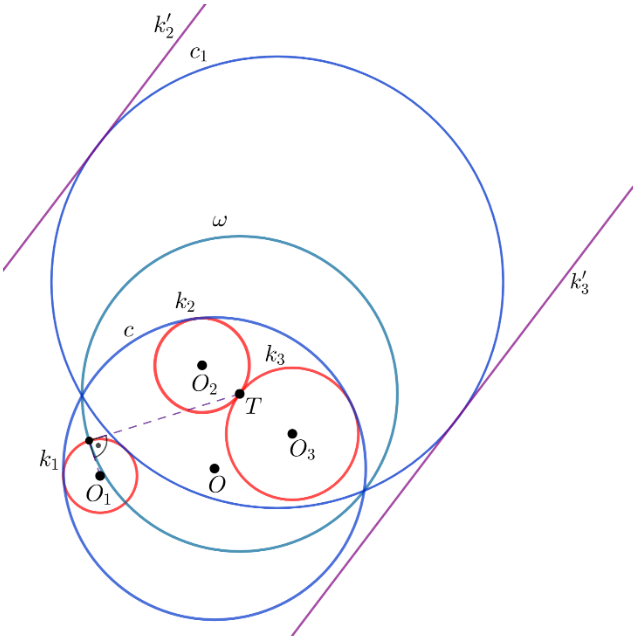
Фигура 114: Задача А. – 5. случай – построение – 2

1.3. Нека k_1 не минава през т. T.

Анализ: При произволна инверсия φ_ω с център т. T окръжностите k_2 и k_3, които се допират в центъра на инверсията, ще се изобразят в успоредните прави $k_2{}'$ и $k_3{}'$. Образът на окръжността k_1, неминаваща през центъра на инверсия, ще бъде окръжност $k_1{}'$, която също не минава през центъра на инверсия.

Образът c_1 на окръжността c ще се допира до двете успоредни прави $k_2{}'$ и $k_3{}'$ и окръжността $k_1{}'$. Така задачата се свежда до частен случай на *задача* 5.5., при който двете дадени прави са успоредни помежду си.

За улеснението на техническото изпълнение избираме за степен на инверсията степента на т. T относно окръжността k_1.



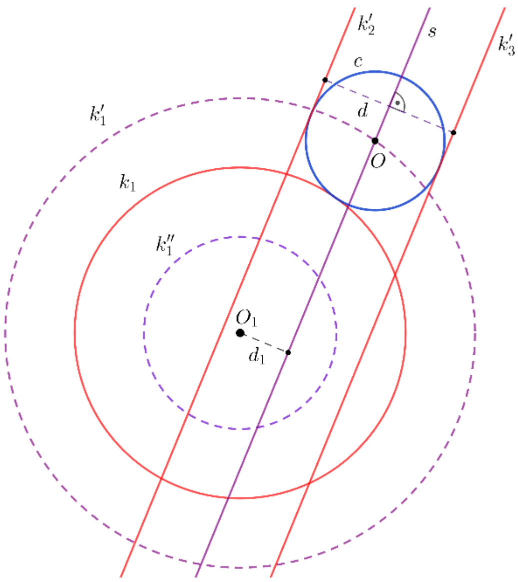
Фигура 115: Задача А. – 5. случай – анализ – 2

Преди да се представи построението, като отделна задача ще може да се формулира и намирането на окръжността c_1 в този случай:

Да се построи окръжност, която да се допира до две дадени успоредни прави $k_2{}'$ и $k_3{}'$ и до дадена окръжност k_1.

Анализ: Нека разстоянието между правите $k_2{}'$ и $k_3{}'$ е d.

Центърът на търсената окръжност трябва да лежи на правата s, успоредна на $k_2{}'$ и $k_3{}'$ и намираща се на равно разстояние от тях. Освен това той е точка от окръжността $k_1{}'\left(O_1, r_1 + \frac{d}{2}\right)$ или от окръжността $k_1{}''\left(O_1, \left|r_1 - \frac{d}{2}\right|\right)$. Може да се намери центърът като пресечна точка на тези две места на геометрични точки.



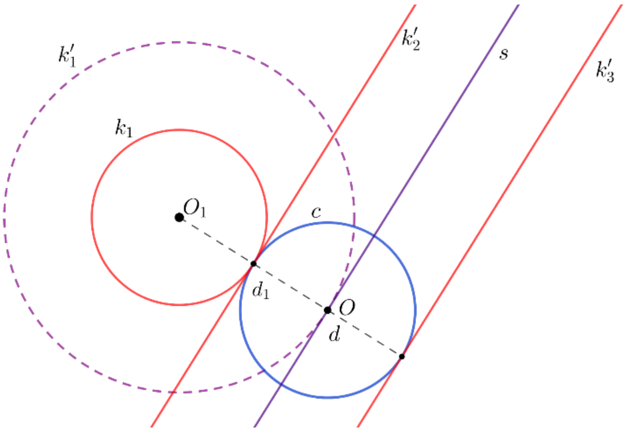
Фигура 116: Задача А. – 5. случай – помощно построение

Построението и *доказателството* се предоставят за самостоятелна работа.

Изследване: Нека d_1 е разстоянието от точка O_1 до правата s.

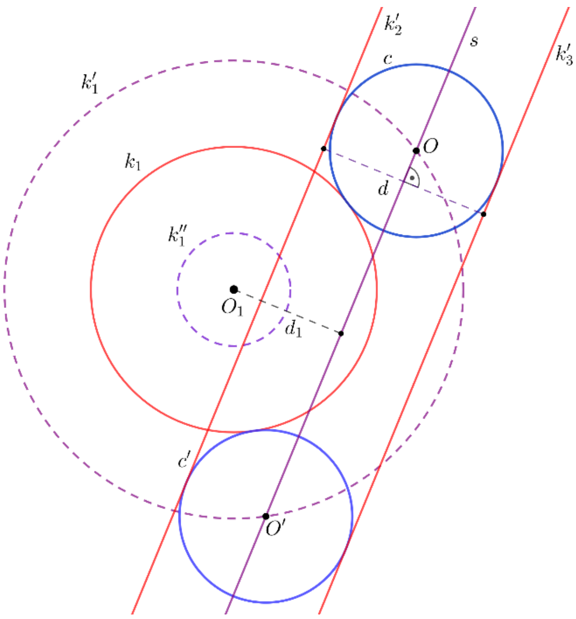
При $d_1 > r_1 + \frac{d}{2}$ задачата *няма решение*.

При $d_1 = r_1 + \frac{d}{2}$ задачата *има единствено решение*:



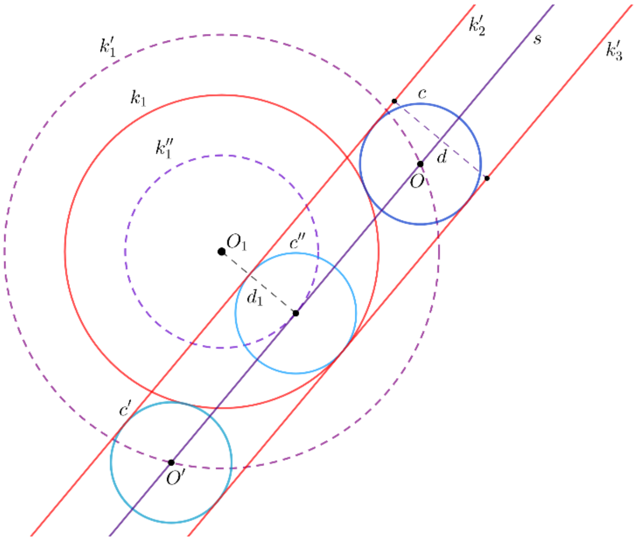
Фигура 117: Задача А. – 5. случай – изследване – 1

При $r_1 - \frac{d}{2} < d_1 < r_1 + \frac{d}{2}$ задачата *има две решения*:



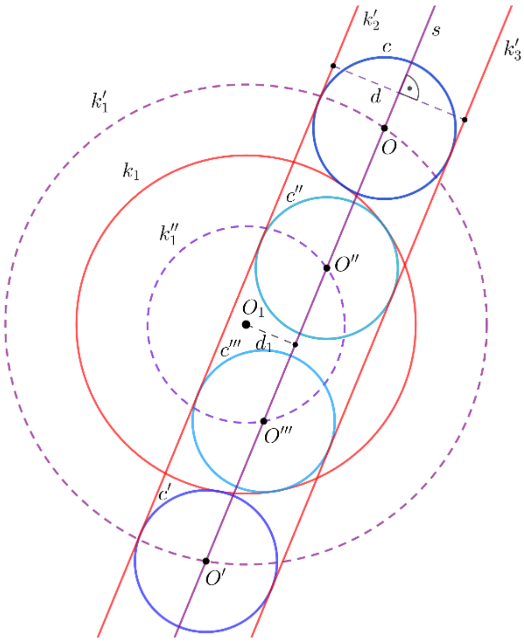
Фигура 118: Задача А. – 5. случай – изследване – 2

При $d_1 = r_1 - \frac{d}{2}$ задачата *има три решения*:



Фигура 119: Задача А. – 5. случай – изследване – 3

При $0 \leq d_1 < r_1 - \frac{d}{2}$ задачата *има четири решения*:



Фигура 120: Задача А. – 5. случай – изследване – 4

Аналогично се разглеждат случаите, когато $r_1 < \frac{d}{2}$ (в този случай задачата отново има най-много четири решения) или $r_1 = \frac{d}{2}$ (в този случай задачата има най-много две решения).

Вече може да се разгледа построението на *задача* А.

Построение:

1. t – допирателна през т. T към k_1;

2. $t \cap k_1 = T_1$;

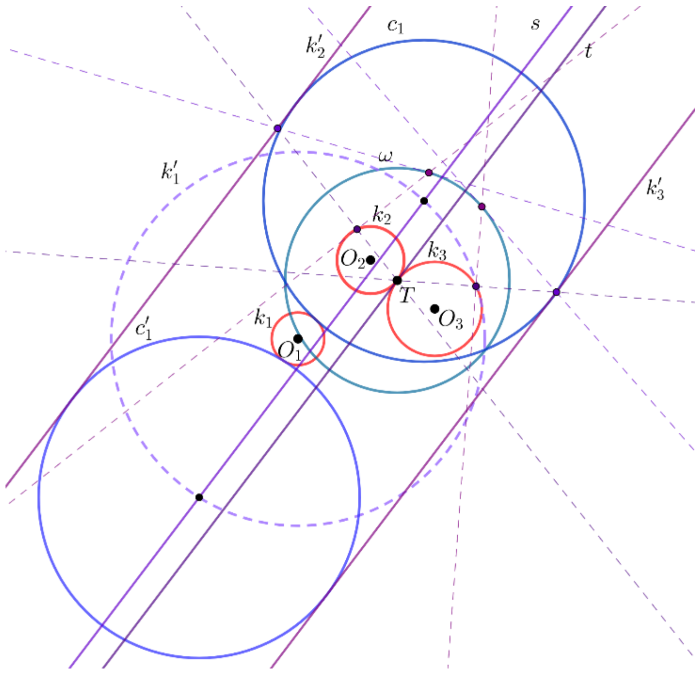
3. $\omega(T, TT_1)$;

4. $\varphi_\omega(k_2) = k_2{}'$;

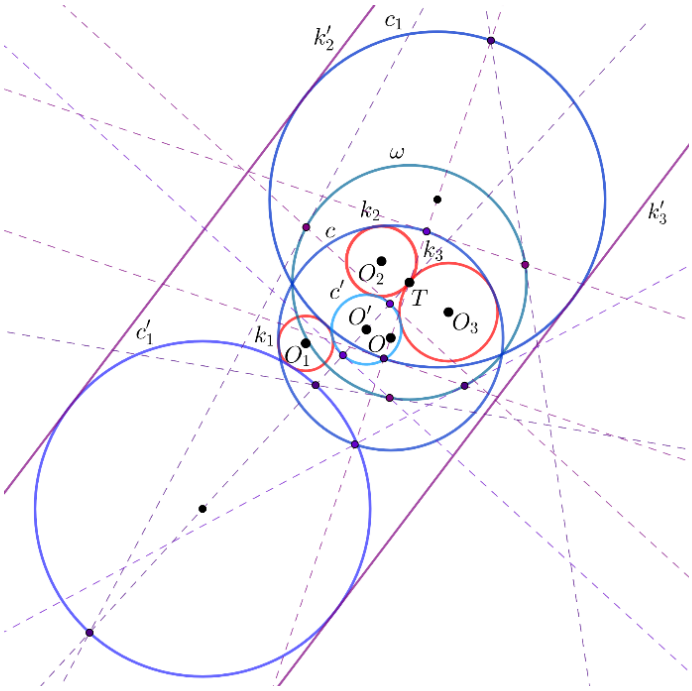
5. $\varphi_\omega(k_3) = k_3{}'$;

6. окръжност c_1, допираща се до успоредните прави $k_2{}'$ и $k_3{}'$ и до окръжността k_1 [Препратка към разгледания частен случай на *задача* 5.5.];

7. $\varphi_\omega(c_1) = c$.



Фигура 122: Задача А. – 5. случай – построение – 3



Фигура 121: Задача А. – 5. случай – построение – 4

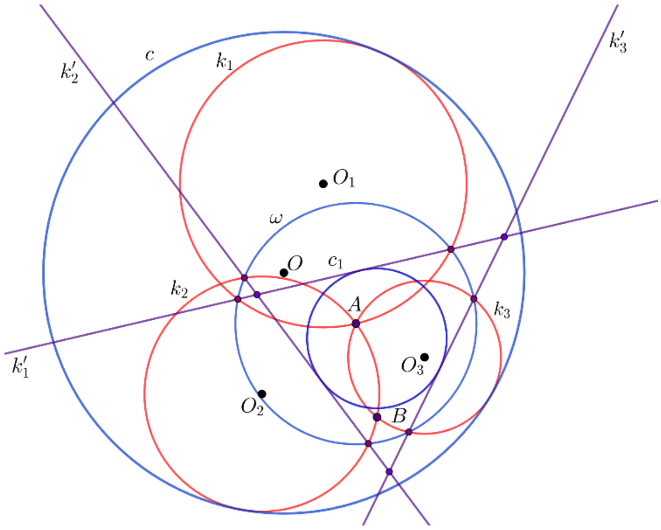
Доказателство: Следва от направения анализ.

Изследване: Предоставя се за самостоятелно изпълнение.

2. Разглежда се случаят, в който k_2 и k_3 са пресекателни и нека $k_2 \cap k_3 = \{A, B\}$.

2.1. Нека т. A е от окръжността k_1 и нека k_1 не се допира нито до k_2, нито до k_3.

Анализ: Окръжността k_1 ще пресече окръжностите k_2 и k_3. При произволна инверсия с център т. A, тъй като и трите окръжности минават през т. A, образите им $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$ще бъдат прави, неминаващи през нея. Освен това, понеже всеки две от трите окръжности се пресичат помежду си, всеки две прави, които са техни образи, ще се пресичат помежду си.



Фигура 123: Задача А. – 5. случай – анализ – 3

Образът c_1 на окръжността c, неминаваща през т. A, ще бъде окръжност, допираща се до правите $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$, т.е. задачата се свежда до построяването на окръжност, допираща се до три дадени прави [Препратка към *задача* 5.2.]. Окръжността, допираща се до три пресичащи се прави, е вътрешно вписаната окръжност за триъгълника с върховете пресечните точки на правите или е външно вписана за него. Тоест, нейният център е пресечна точка на ъглополовящите на ъглите, получени при пресичането на правите.

Построение: 1. окръжността ω с център т. A и радиус с произволна дължина;

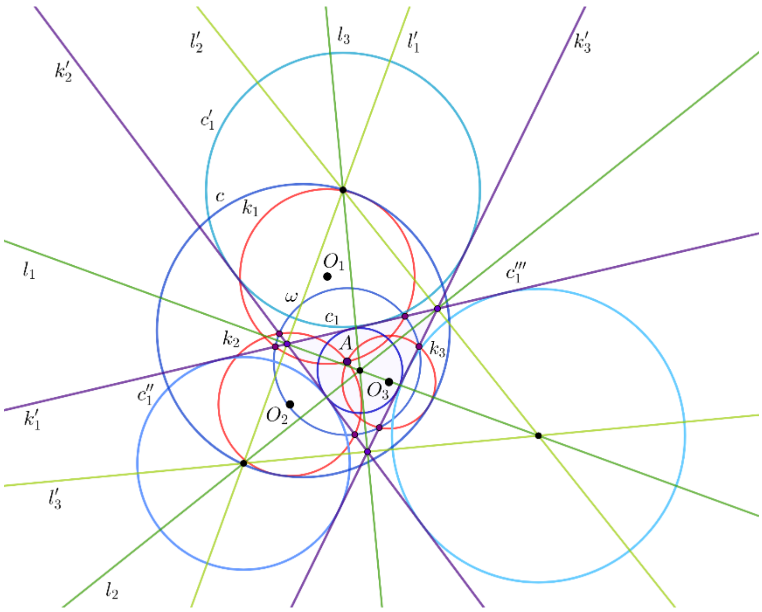
2. $\varphi_\omega(k_1) = k_1{}'$;

3. $\varphi_\omega(k_2) = k_2{}'$;

4. $\varphi_\omega(k_3) = k_3{}'$;

5. окръжността c_1, допираща се до $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$;

6. $\varphi_\omega(c_1) = c$.



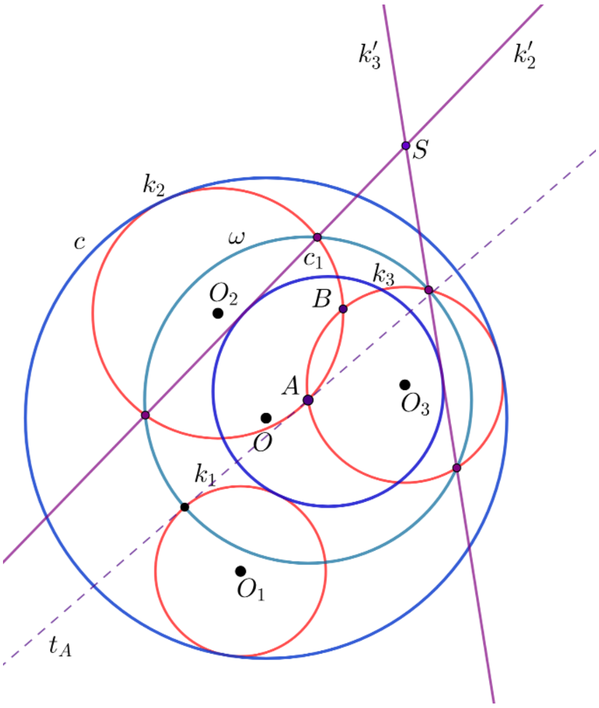
Фигура 124: Задача А. – 5. случай – построение – 5

Доказателство: Следва от направените разсъждения в анализа.

Изследване: Когато дадените прави се пресичат две по две *задача* 5.2. има четири решения. В разглеждания от нас случай образите $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$ са винаги две по две пресичащи се (обосновано в анализа). Следователно *задача* А в този случай също има четири решения.

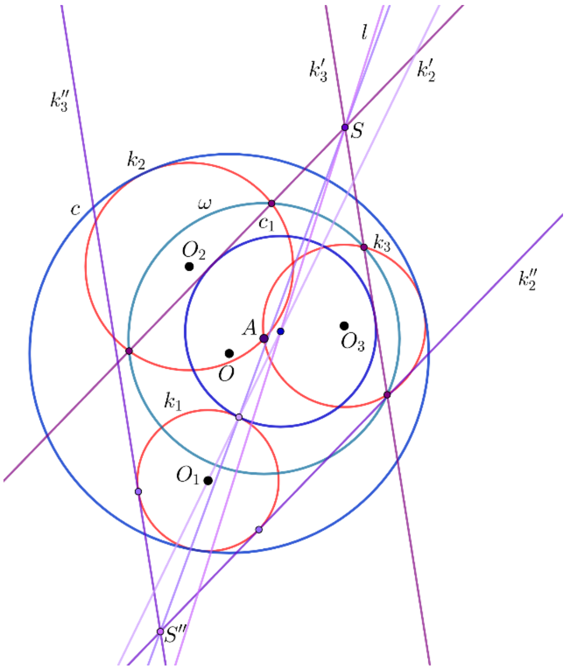
2.2. Разглежда се случаят, в който т. A не е от окръжността k_1.

Анализ: Всяка инверсия с център т. A ще изобрази k_1 в окръжност $k_1{}'$, неминаваща през центъра на инверсия. Образите на окръжностите k_2 и k_3, тъй като минават през центъра на инверсия, ще бъдат съответно прави $k_2{}'$ и $k_3{}'$, неминаващи през центъра на инверсия. Отново за по-лесно техническо изпълнение избираме подходяща степен на инверсията, например степен, равна на степента на точката A относно окръжността k_1.



Фигура 125: Задача А. – 5. случай – анализ – 4

Образът на търсената от нас окръжност при инверсията трябва да се допира до правите $k_2{}'$ и $k_3{}'$ и окръжността $k_1{}'$. Така задачата се свежда задача: „*Да се построи окръжност, допираща се до дадена окръжност и до две пресичащи се прави*“. Решението на последната задача е изложено в [Глава VII. „*Помощни задачи*“], а от друга страна последно формулираната задача съвпада с един частните случаи на *задача* 5.5., т.е. и в този случай решението на *задача А* се свежда до решаването на друга *Аполониева задача*.



Фигура 126: Задача А. – 5. случай – построение – 6

Построение:

1. t_A – допирателна през т. A към k_1;

2. $t_A \cap k_1 = T$;

3. $\omega(A, AT)$;

4. $\varphi_\omega(k_2) = k_2{}'$;

5. $\varphi_\omega(k_3) = k_3{}'$;

6. окръжността c_1, допираща се до окръжността $k_1{}'$ и до правите $k_2{}'$ и $k_3{}'$ [Препратка към задача 7.8. от Глава VII. „*Помощни задачи*“];

7. $\varphi_\omega(c_1) = c$.

Доказателство: Следва от доказателството на задача 7.8. от Глава VII. „*Помощни задачи*“ и от това, че нейното решение – окръжността c_1 се допира до образите $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$. Следователно $\varphi_\omega(c_1) = c$ се допира до дадените окръжности.

Изследване: Задачата има най-много осем решения.

3. Остана да се разгледа случаят, в който k_2 и k_3 нямат общи точки.

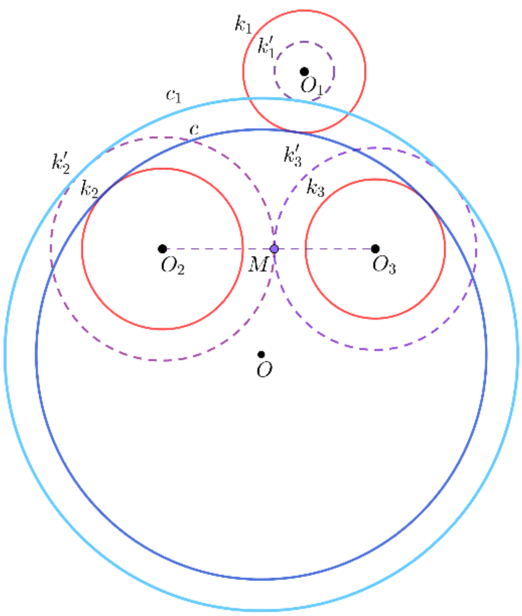
Анализ: Нека търсената окръжност $c(O, r)$ се допира вътрешно до k_2 и k_3 и външно до k_1 и нека $\rho = \frac{O_2O_3-(r_2+r_3)}{2}$.

Окръжността $c_1(O, r' = r + \rho)$, концентрична на c, ще се допре до окръжностите $k_2{}'(O_2, r_2 + \rho)$, $k_3{}'(O_3, r_3 + \rho)$ и $k_1{}'(O_1, |r_1 - \rho|)$.

Окръжностите $k_2{}'(O_2, r_2 + \rho)$ и $k_3{}'(O_3, r_3 + \rho)$ се допират в т. M, с което задачата се свежда до вече разгледан случай.

Ако се разгледа произволна инверсия φ_ω с център т. M, то окръжностите $k_2{}'$ и $k_3{}'$, които се допират, ще се изобразят в успоредни прави. Образът на окръжността $k_1{}'$ ще бъде окръжност или права (зависи от това дали $k_1{}'$ минава през центъра на инверсия).

Ако окръжността $k_1{}'$ не минава през центъра на инверсия, за да се улесни техническото изпълнение,



Фигура 127: Задача А. – 5. случай – анализ – 5

може да се избере степен на инверсията степента на т. M относно окръжността $k_1{}'$.

Понеже окръжността c_1 се допира до $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$, нейният образ $c_1{}'$ при инверсията ще се допира до образите на трите окръжности. Тоест задачата се свежда до построяването на окръжност, допираща се до три дадени прави, две от които са успоредни помежду или до построяването на окръжност, която се допира до две дадени успоредни помежду си прави и дадена окръжност, т.е. свежда се до частен случай на *задача* 5.2. или частен случай на *задача* 5.5.

Построение:

1. $k_1{}'(O_1, |r_1 - \rho|)$;

2. $k_2{}'(O_2, r_2 + \rho)$;

3. $k_3{}'(O_3, r_3 + \rho)$;

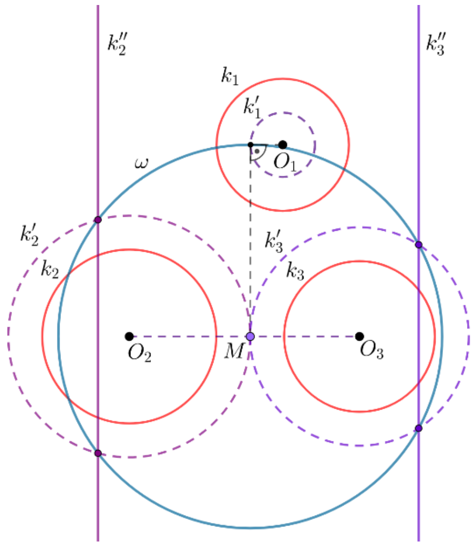
4. инверсионната окръжност ω с център т. M, ортогонална на $k_1{}'$;

5. $\varphi_\omega(k_1{}') = k_1{}'' \equiv k_1{}'$;

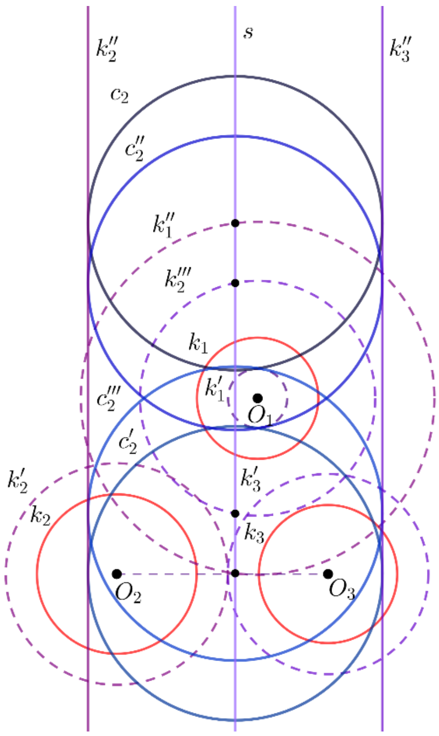
5. $\varphi_\omega(k_2{}') = k_2{}''$;

6. $\varphi_\omega(k_3{}') = k_3{}''$;

7. окръжността c_2, допираща се до $k_1{}''$, $k_2{}''$ и $k_3{}''$;

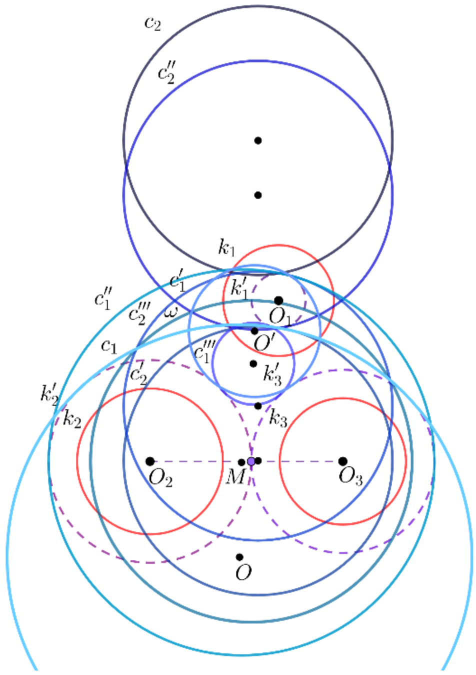


Фигура 128: Задача А. – 5. случай – построение – 7



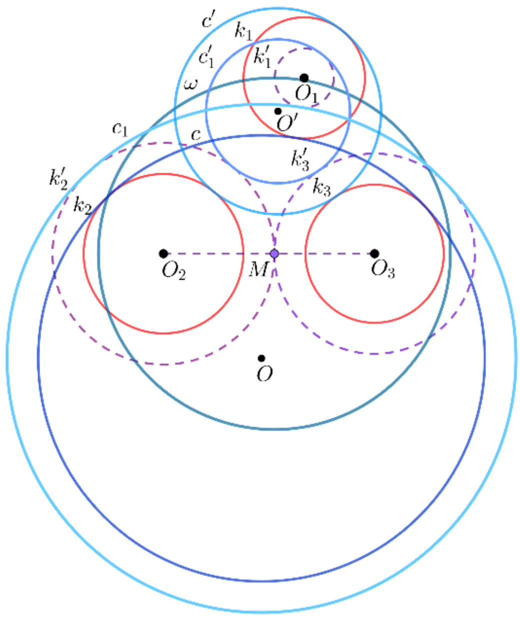
Фигура 129: Задача А. – 5. случай – построение – 8

8. $\varphi_\omega(c_2) = c_1(O, r')$;



Фигура 130: Задача A. – 5. случай – построение – 9

9. $c(O, r' - \rho)$.



Фигура 131: Задача A. – 5. случай – построение – 10

Доказателство: Окръжностите $k_2{}'$ и $k_3{}'$ се допират помежду си, тъй като разстоянието между центровете на двете окръжности е равно на сбора от техните радиуси:

$$r_2 + \frac{O_2O_3 - (r_2 + r_3)}{2} + r_3 + \frac{O_2O_3 - (r_2 + r_3)}{2} = (r_2 + r_3) + O_2O_3 - (r_2 + r_3) = O_2O_3$$

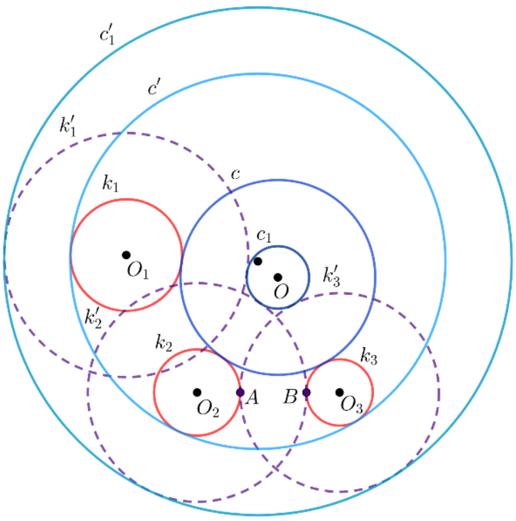
Окръжността $c_1{}'$ се допира до $k_1{}''$, $k_2{}''$ и $k_3{}''$. Следователно нейният образ c_1 се допира до образите $k_1{}''$, $k_2{}''$ и $k_3{}''$, т.е. до $k_1{}'$, $k_2{}'$ и $k_3{}'$.

Изследване: Окръжността, която се допира вътрешно до k_2 и k_3 и външно до k_1, е единствена, което означава, че *задача* 5.2. и *задача* 5.5. могат да имат повече от едно решение, но образът на само едно от тях удовлетворява изискванията.

Окръжността $c'(O, r_1{}' + \rho)$, образ на $c_1{}'(O', r_1{}')$ също е решение на задачата и се допира външно до k_2 и k_3 и вътрешно до k_1.

За да се получат други решения на задачата, трябва да се приложат същите разсъждения и за двойките окръжности k_1, k_2 и k_1, k_3.

Нека $O_2O_3 \cap k_2 = A$ и $O_2O_3 \cap k_3 = B$. Ако се построят окръжностите $k_1{}'(r_1 + AB)$, $k_2{}'(r_2 + AB)$ и $k_3{}'(r_3 + AB)$, то окръжностите $c_1(O, |r - AB|)$ и $c_1{}'(O', r' + AB)$ ще се допират до тях. Но $k_2{}'$ и $k_3{}'$ са пресичащи се окръжности. Следователно отново задачата се свежда до вече разглеждан случай. След като се построят окръжностите c_1 и $c_1{}'$, се построяват и концентричните на тях $c(O, r)$ и $c'(O', r')$, които ще се допират съответно едновременно външно и вътрешно до k_1, k_2 и k_3.



Фигура 132: Задача А. – 5. случай – изследване – 5

Във всеки от случаите за всяка двойка окръжности се получават две решения на задачата. Съществуват и две окръжности, които се допират едновременно външно или едновременно вътрешно до k_1, k_2 и k_3. В този случай задачата има 8 решения.

Приложение: Чрез решаването на *задача* А е демонстрирано в явен вид свеждането на една *Аполониева задача* до друга. Третият случай на задачата с помощта на *метода на свиване и разширение на равнината* също е сведен до други вече разгледани случаи. Отново съществен се явява изборът на център на инверсията за опростяването на задачата.

Както беше установено, при решенията, в които не се използва инверсия, наборът от теоретични знания, които са необходими за направа на разсъждения, е много по-голям. Освен това всяка следваща задача изисква използването на теоретични знания от предходната. При някои от решенията се използват теоретични знания, с които се достига до преформулиране на условието на задачата към друго вече разглеждано и след това наново трябва да бъдат приложени знанията, използвани за решаването на вече разглеждана задача. Това означава, че се получава строга йерархия на дидактическа система от задачи.

С помощта на метода на инверсията решенията на *Аполониевите задачи* стават сравнително по-леки, което означава, че този метод създава единен подход за решаването им. При алтернативните решения липсва единният подход, но се явява ползата от прилагане на различни методи. Затова е препоръчително при обучение на ученици да бъдат разгледани всички възможни методи.

Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава V.

Построенията към задачите от текущата глава се намират в папката с име „*Аполониеви задачи*“. Файловете към задача с номер 5.*N* се намират в папка с име „*Задача N*“ (където *N* е номерът на задачата), а построенията към *задача А* са поместени в папката с име „*Задача А*“. Имената на файловете към задача 5.7., които включат визуализация на геометрични места на точки, съдържат и името на съответното геометрично място на точки.

Някои от файловете, съдържащи решения чрез метода на инверсията, включват поетапна визуализация на постановката на задачата и последващите последователни построения, а други съдържат полета за отметка със следните имена:

- Постановка на задачата;
- Построение чрез инверсия;
- Използване на обратната трансформация.

Чрез полетата за отметка отново е постигната поетапна визуализация на решението.

Освен това при някои от построенията определени обекти могат да променят позицията си или дължината си. Други съдържат и плъзгачи за извършване на съответната промяна.

Към повечето от задачите не е извършено построение на всички решения. Нереализираните построения могат да бъдат осъществени директно във файла към съответната задача.

Като допълнителен ресурс, както и при останалите задачи от другите глави, включени в дипломната работа, са прикачени интерактивни видеа с поетапна конструкция.

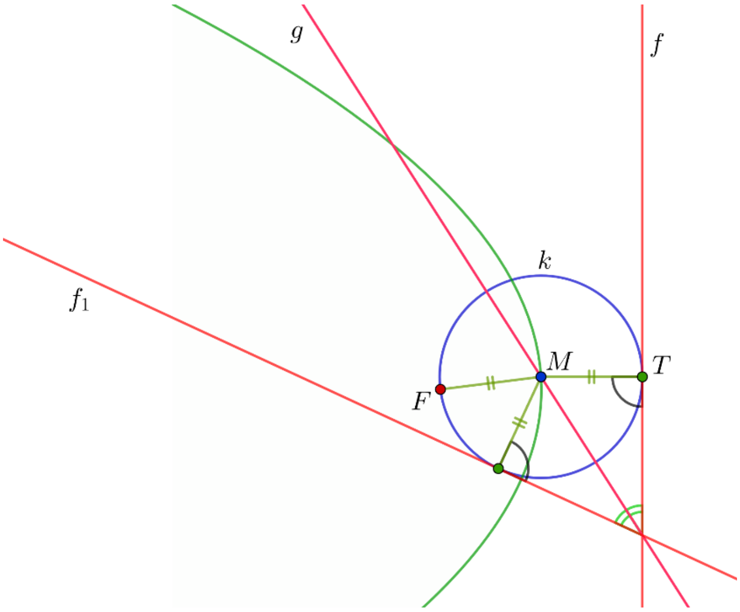
- Глава VI. Задачи, решаването на които може да се сведе до решаването на Аполониеви задачи –

Задача 6.1. *Да се построи точка върху дадена права g, като тази точка се намира на равни разстояния от дадена точка F и дадена права f.* (Мартинов, 1973)

Анализ: Геометричното място на точки, които се намират на равни разстояния от дадена точка F и дадена права f, се нарича *парабола*. Точката F се нарича *фокус*, а правата f – *директриса* на параболата. Следователно задачата може да бъде преформулирана по следния начин:

Да се намерят пресечните точки на права с парабола, която е зададена с фокуса и директрисата си.

Нека търсената от нас точка е точка M.



Фигура 133: Задача 6.1. – анализ

Окръжността $k\ (M, |MF|)$ ще се допира до правата f и до нейния образ f_1 при осевата симетрия с ос правата g. Следователно задачата се свежда до задача:

Да се намери центърът на окръжност, която минава през дадена точка F и се допира до дадените прави f и f_1.

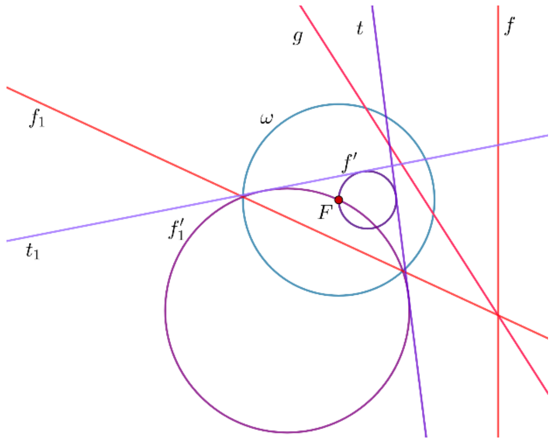
Построение:

1. $\sigma_g(f) = f_1$;

2. Инверсионната окръжност $\omega(F, r)$, където r – радиус с произволна дължина;

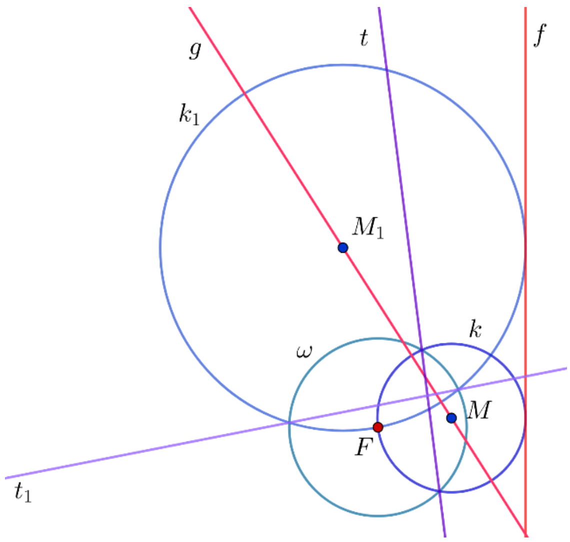
3. $\varphi_\omega(f) = f'$ и $\varphi_\omega(f_1) = {f_1}'$;

4. Обща допирателна t на намерените образи;



Фигура 134: Задача 6.1. – построение – 1

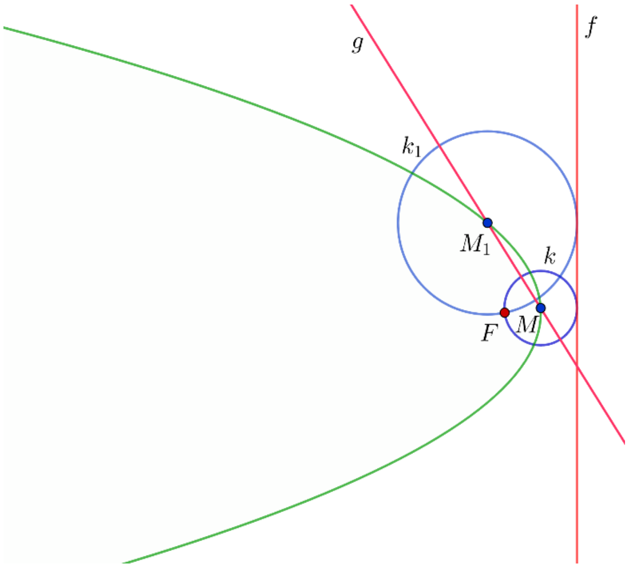
5. т. M – център на $\varphi_\omega(t) = k$, която е търсената пресечна точка.



Фигура 135: Задача 6.1. – построение – 2

В конкретната задача изобразяването на окръжността k може да не бъде извършено, а вместо това да се построи само нейният диаметър, а т. M да е средата на този диаметър.

С помощта на *Geogebra* може да бъде построена парабола, ако се известни центърът и директрисата ѝ. След извършване на построението се вижда, че намерената точка M принадлежи на параболата с фокус F и директриса f:

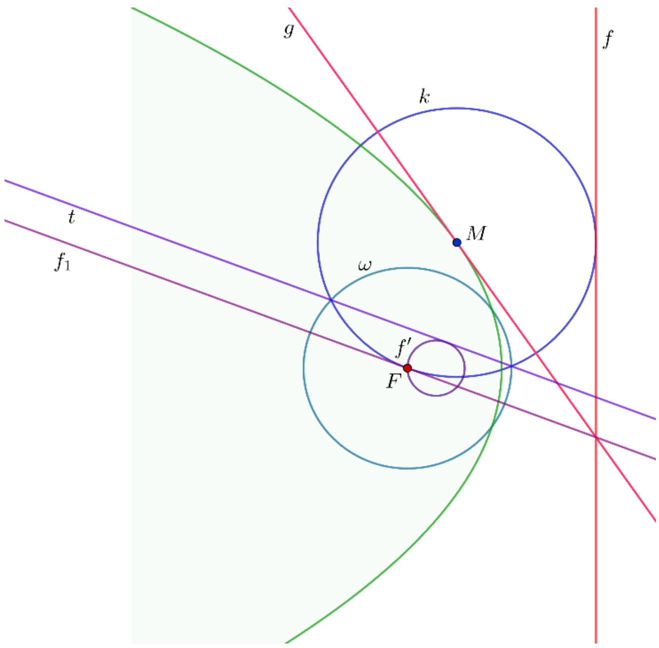


Фигура 136: Задача 6.1. – построение – 3

Доказателство: По построение t се допира до образите на f и f_1. Следователно образът на t (окръжността k) се допира до f и f_1. Тъй като правите f и f_1 са симетрични спрямо правата g, центърът на k лежи на правата g. Освен това т. F е от окръжността g (правата t, неминаваща през центъра на инверсия, се изобразява в окръжност, минаваща през центъра на инверсия). Нека точката на допиране на окръжността k и правата f е T. Тогава $MF = MT = r_1$, където – r_1 център на окръжността k ($MT \perp f$ – разстоянието от т. M до правата f).

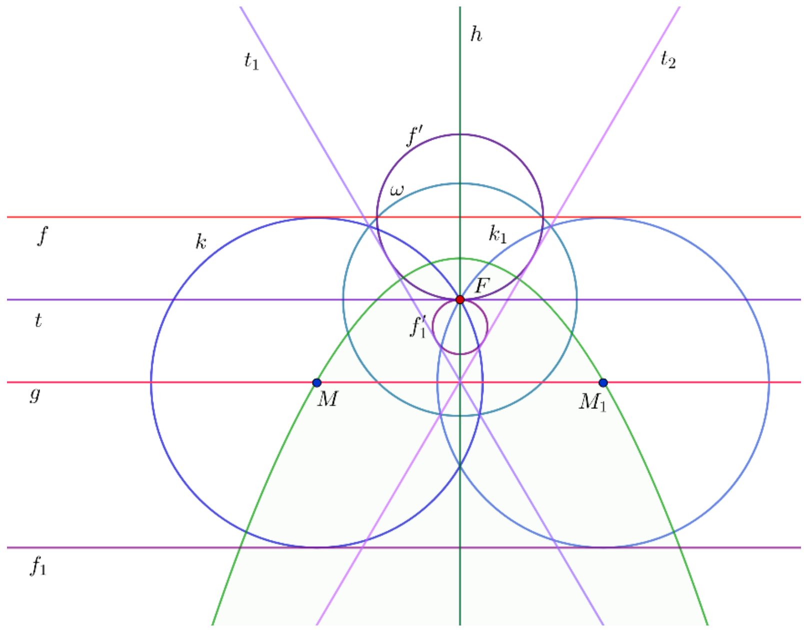
Изследване: Броят на решенията на задачата зависи от броя на общите допирателни на f' и $f_1{}'$. Задачата има най-много две решения, когато f и g се пресичат.

Ако точката F е от правата f_1, симетрична на f спрямо g, задачата има единствено решение и правата g е допирателна към параболата с фокус F и директриса f:



Фигура 137: Задача 6.1. – изследване – 1

Ако правата f е успоредна на правата g, едната от общите допирателни на окръжностите f' и $f_1{}'$ минава през т. F. Следователно тя ще бъде двойна за инверсията и няма да получим решение на задачата. Другите две допирателни са симетрични спрямо правата h, минаваща през т. F и перпендикулярна на правата f. Техните образи също са симетрични помежду си, т.е. получаваме две решения на задачата, които са симетрични спрямо правата h, която пък е двойна права за осевата симетрия с ос g:



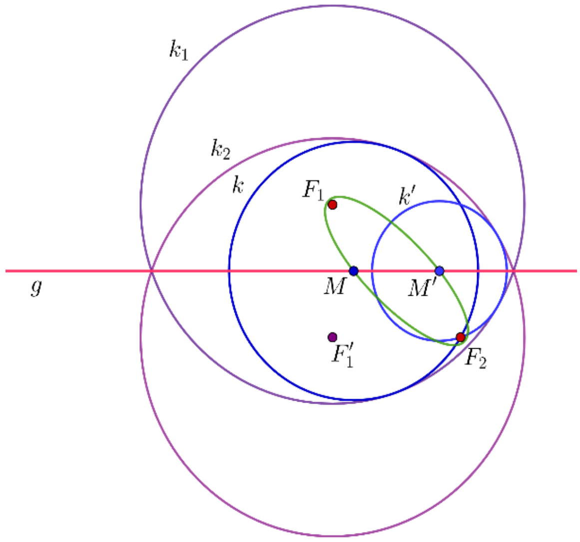
Фигура 138: Задача 6.1. – изследване – 2

Задача 6.2. *Да се построи точка върху дадена права g, сборът на разстоянията от която до две дадени точки F_1 и F_2 да бъде равен на дадена отсечка a.* (Мартинов, 1973)

Анализ: Геометричното място на точка, сборът на разстоянията от която до две дадени точки F_1 и F_2 е равен на дължината на дадена отсечка a, се нарича *елипса*. Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси* на елипсата, а a – *голяма ос* на елипсата. Тогава задачата би могла да бъде преформулирана по следния начин:

Да се намерят пресечните точки на права с елипса, зададена с фокусите и голямата си ос.

Нека търсената точка е M. Може да се постъпи евристично: избира се точка M от правата g, построяват се отсечките MF_1 и MF_2, изчертава отсечка с дължина a и се наблюдава кога сборът от дължините на отсечките $MF_1 + MF_2 = a$.



Фигура 139: Задача 6.2. – анализ

За използването на инверсия при решаването на построителни задачи, както вече беше установено, основни елементи се явяват правите и окръжностите.

Ако се построи окръжност $k(M; MF_2)$, тя ще се допира до окръжност $k_1(F_1; MF_1 + MF_2)$.

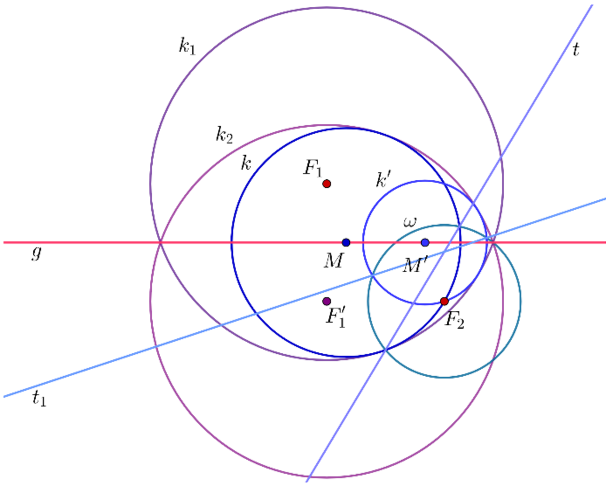
Окръжността k_1 е построима, тъй като се разполога с нейния център – т. F_1 и дължината на радиуса, който е равен на дължината на отсечката $a = MF_1 + MF_2$ (построяване на окръжност с център и радиус).

Ако $k_2 = \sigma_g(k_1)$, окръжността k ще се допира и до окръжността k_2, която също е построима (за целта се използва намирането на образ на обект при осева симетрия).

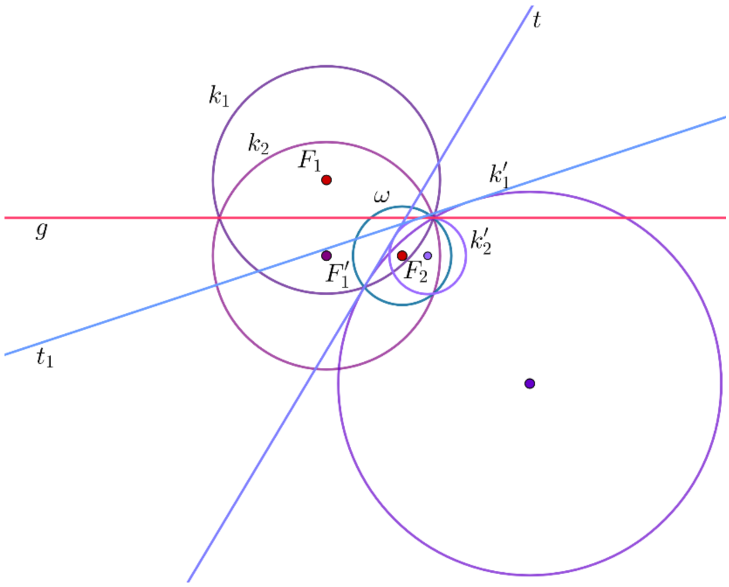
Построяването на точка M се свежда да построяването на окръжността k, т.е. до намирането на нейния център.

Така задачата се свежда до следната: *Да се построи окръжност, която да минава през дадена точка F_2 и да се допира до две дадени окръжности $k_1(F_1; a)$ и $k_2 = \sigma_g(k_1)$.*

Построение: Не се излагат описателно стъпките при извършване на построението, тъй като те са идентични с тези в *Задача* 5.9. Следващите две изображения илюстрират използването на инверсия за решаването на задачата, както и използването на обратната трансформация, т.е. намиране на образите на получените обекти при същата инверсия.



Фигура 141: Задача 6.2. – построение – 1



Фигура 140: Задача 6.2. – построение – 2

В *Geogebra* лесно може да се построи елипса, която има за фокуси точките F_1 и F_2, разполагайки с вече построената точка M, която принадлежи на тази крива.

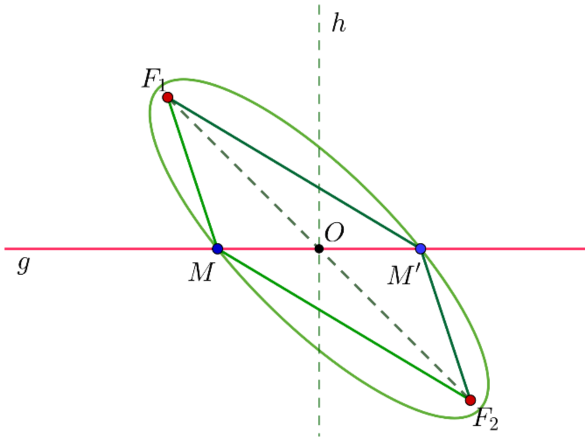
Доказателство: Следва непосредствено от анализа и построението.

Изследване: Правата и елипсата имат най-много две общи точки, т.е. задачата има най-много две решения.

Нека елипсата и правата имат две пресечни точки – M и M'.

Тогава $MF_1 + MF_2 = M'F_1 + M'F_2$. Нека $O = F_1F_2 \cap MM'$. Точките M и M' са симетрични спрямо правата, перпендикулярна на g, минаваща през т. O. Ако отсечката F_1F_2 се разполовява от правата g, то т. O е център на централна симетрия, при която $M = \sigma_O(M')$ и $F_1 = \sigma_O(F_2)$. Фигурата

$MF_1M'F_2$ е успоредник, а точка O е пресечна точка на диагоналите му, спрямо която елипсата е симетрична.



Фигура 142: Задача 6.2. – изследване

Вместо окръжността k_2, която се допира до k, може да бъде използваната точката $F_2{}' = \sigma_g(F_2)$, която лежи на окръжността k. Така задачата ще се сведе до решаването на следната: *Да се построи окръжност, която минава през две дадени точки F_2 и $F_2{}' = \sigma_g(F_2)$ и се допира до дадена окръжност $k_1(F_1; a)$.* Извършване на построението с помощта на втората формулирана задача е подходящо да се предостави за самостоятелно изпълнение.

Приложение: Тази задача, както и предходната, са пример за това как една задача може да се сведе до решаването на някоя от Аполониевите задачи. За да бъде сведена дадена задача до Аполониева, трябва да бъдат открити обектите (точки, прави или окръжности), през които ще минава или до които ще се допира окръжността, която искаме да построим.

Якоб Щайнер прави обобщение на Аполониевата задача. Той формулира и решава задачата:

Да се построи окръжност, която да пресича три дадени окръжности под три дадени ъгъла.

Последната задача също може да бъде преформулирана по различни начини така, както беше преформулирана *Аполониевата задача*, заменяйки в условието различни елементи с прави или окръжности. Някои преформулирани задачи могат да бъдат намерени в края на главата, включени към задачите за упражнение. Следната задача е граничен случай на задачата на Щайнер:

Задача 6.3. Да се построи окръжност, която минава през дадена точка и пресича дадена права и дадена окръжност съответно под дадените ъгли α и β.

Анализ: Нека са дадени точка A, правата g и окръжността k_1, а търсената окръжност да е c.

Приемаме, че т. A не лежи нито на правата g, нито на окръжността k_1.

Произволна инверсия φ с полюс т. A ще трансформира c в права c', правата g в окръжност g', а окръжността k_1 в окръжност ${k_1}'$.

Тъй като ъгълът между образите при инверсия се запазва, то c' ще сключва с образите g' и ${k_1}'$ същите ъгли α и β. Така задачата се свежда до следната по-проста задача: *Да се построи права c', която да пресича дадените окръжности g' и ${k_1}'$ съответно под дадените ъгли α и β.*

От $\sphericalangle c'g' = \alpha$ следва, че окръжността c' се допира до окръжност g'' с център – центъра на g' и радиус, равен на дължината на катета в правоъгълен триъгълник с остър ъгъл α и хипотенуза с дължина, равна на дължината на радиуса на g'. Окръжността g'' е построима.

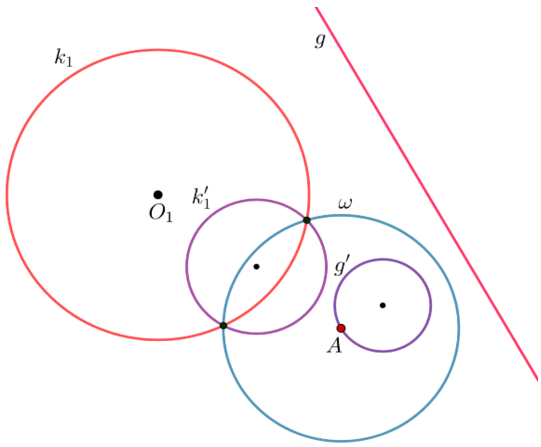
От $\sphericalangle c'{k_1}' = \beta$ следва, че окръжността c' се допира до окръжност ${k_1}''$ с център – центъра на ${k_1}'$ и радиус, равен на дължината на катета в правоъгълен триъгълник с остър ъгъл β и хипотенуза с дължина, равна на дължината на радиуса на ${k_1}'$. Окръжността ${k_1}''$ също е построима.

Така задача се свежда до решаването на следната още по-проста задача: *Да се построи обща допирателна c' на окръжностите g'' и ${k_1}''$.*

Построение: 1. Построява се инверсионната окръжност ω с център точката A и произволен радиус. Разглежда се инверсията φ_ω с полюс т. A и основна окръжност ω;

2. $g' = \varphi_\omega(g)$;

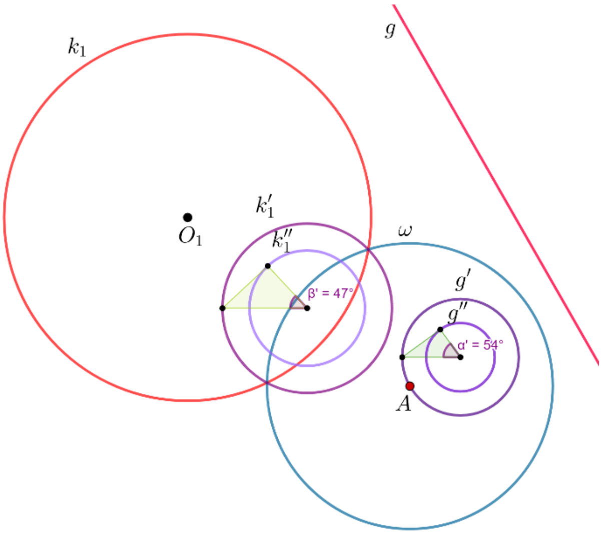
3. ${k_1}' = \varphi_\omega(k_1)$;



Фигура 143: Задача 6.3. – построение – 1

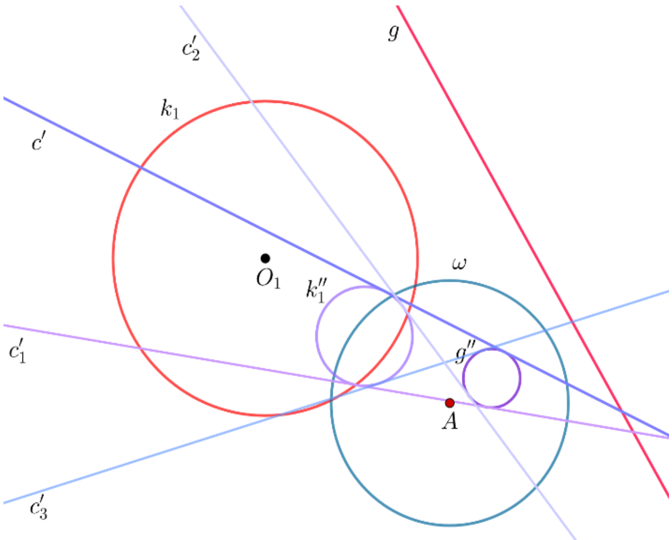
4. окръжността g'' с център – центъра на g' и радиус, равен на дължината на катета в правоъгълен триъгълник с остър ъгъл α и хипотенуза с дължина, равна на дължината на радиуса на g';

5. окръжността k_1'' с център – центъра на k_1' и радиус, равен на дължината на катета в правоъгълен триъгълник с остър ъгъл β и хипотенуза с дължина, равна на дължината на радиуса на k_1';



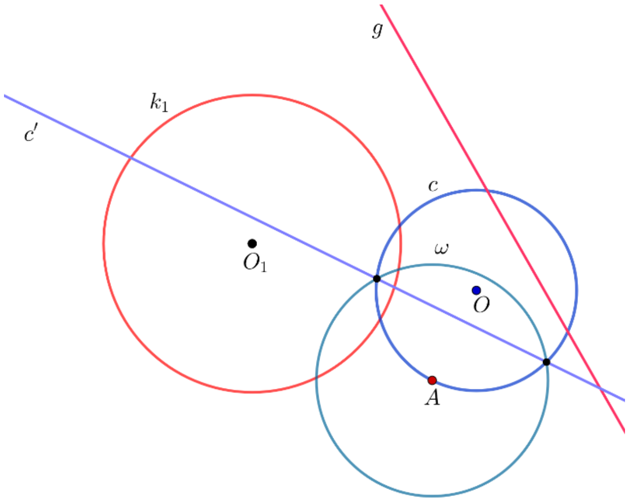
Фигура 144: Задача 6.3. – построение – 2

6. обща допирателна c' на g'' и k_1'';



Фигура 145: Задача 6.3. – построение – 3

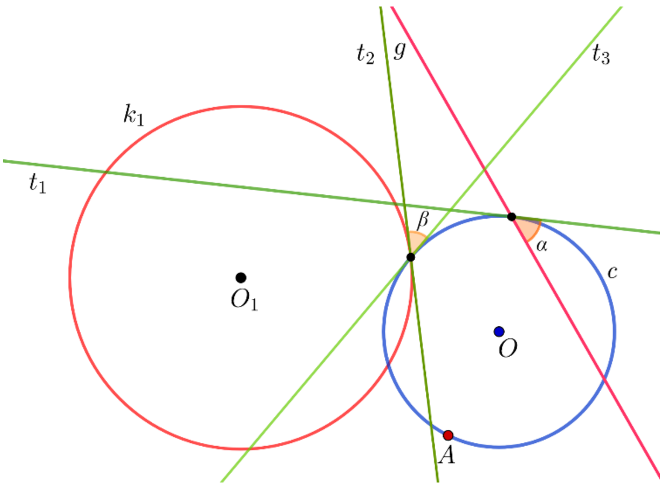
7. $c = \varphi^{-1}(c') = \varphi(c')$.



Фигура 146: Задача 6.3. – построение – 4

Доказателство: Ъгълът между c' и g' е равен на α (следва от построението), но ъгълът между първообразите им c и g при инверсията φ също е равен на α.

Ъгълът между c' и ${k_1}'$ е равен на β (следва от построението), но ъгълът между първообразите им k и k_1 при инверсията φ също е равен на β.



Фигура 147: Задача 6.3. – доказателство

Изследване: Броят на решенията зависи от броя на общите допирателни на g'' и ${k_1}''$.

В ресурсния файл към задачата е илюстрирано само едно от решенията.

Приложение: С направата на подобни разсъждения могат да бъдат решени някои от задачите за упражнение, които са изложени в края на главата.

Задачи за упражнение

Задача 1. *Да се построи окръжност през две точки, ортогонална на дадената окръжност.*

Задача 2. *Да се построи точка върху дадена права, разликата на разстоянията от която до две дадени точки е равна на дадена отсечка.*

Геометричното място на точка, разликата на разстоянията от която до две дадени точки F_1и F_2 е равна на дадена отсечка *а*, се нарича *хипербола*. Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси*, а отсечката *а – реална ос* на хиперболата.

Имайки предвид определението за хипербола, преформулирайте условието на *задача 2*.

Задача 3. *Да се построи окръжност, която да минава през дадена точка и да пресича две дадени прави под дадени ъгли.*

Задача 4. *Да се построи окръжност, която да минава през дадена точка и да пресича две дадени окръжности под дадени ъгли.*

Задача 5. *Да се построи окръжност, която да пресича ортогонално дадена окръжност и да се допира до*

а) две дадени прави;

б) две дадени окръжности;

в) дадени права и окръжност.

Условието „търсена окръжност да пресича дадена окръжност ортогонално“ чрез инверсия може да се сведе към условието „центърът на търсена окръжност“ да лежи на дадена права.

Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава VI.

- Построенията към задача 6.1. се намират в папката с име „*Задача за намиране на пресечните точки на парабола и окръжност*“.
- В папката с име „*Задача за намиране на пресечните точки на права и елипса*“ се съдържат построеният към втората задача от текущата глава.
- Файловете към задача 6.3. са в папката с име „*Задача за построяване на окръжност, която пресича дадени обекти под дадени ъгли*“.

Задача 7.1. Да се построи перпендикуляр от дадена точка към дадена права.

Излагат се две конструкции. Първата от тях може да се използва, когато точката не принадлежи на правата, а втората – когато точката принадлежи на правата.

Нека са дадени точката A и правата a. Нека търсената права е h.

I. Нека $A \notin a$.

Анализ: Ако правата a и правата h са правите, съдържащи диагоналите на ромб, на който единият връх е точката $A \in h$, правата a и правата h ще бъдат взаимно перпендикулярни. Задачата се свежда до построяването на ромб, единият от върховете, на който е т. A, а съседните върхове на A са точки от правата a.

Построение:

1. Избира се произволна т. X от полуравнината с контур правата a, несъдържаща т. A;

2. $k(A, AX)$;

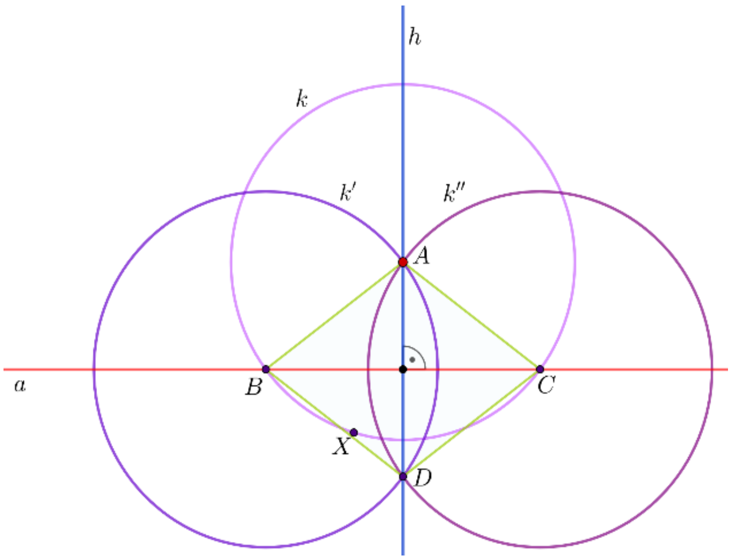
3. $k \cap a = \{B, C\}$;

4. $k'(B, AB)$;

5. $k''(C, AC)$;

6. $k' \cap k'' = \{A, D\}$;

7. $h = AD$.



Фигура 148: Задача 7.1. – построение – 1

Доказателство: Според извършените построения 2) – 6) фигурата $ABCD$ е ромб. Единият диагонал BC лежи на правата a, а другият диагонал AD – на правата h.

Тъй като $BC \perp AD$, то $a \perp h$.

II. Нека са дадени точката A и правата a такива, че $A \in a$.

Анализ: Ако правата a и правата h са правите, съдържащи страните на правоъгълник, то те ще бъдат взаимно перпендикулярни. Задачата се свежда до построяването на ъгъл на правоъгълник, единият от върховете, на който е т. A, а другият – произволна точка от правата a.

Построение:

1. Избира се произволна точка N от правата a, $N \neq A$;

2. s_{AN} (симетрала на AN);

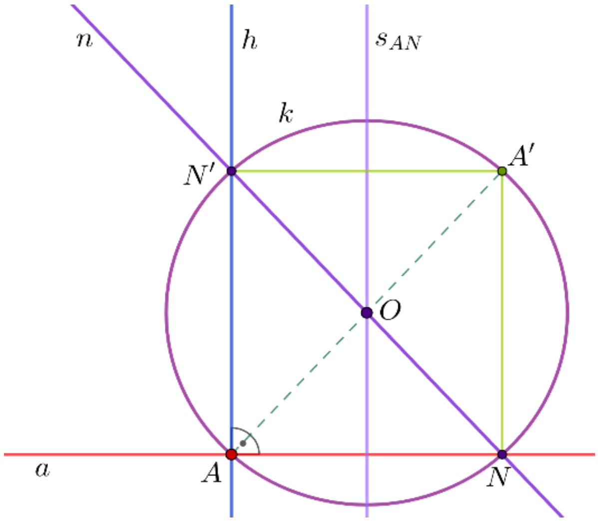
3. произволна права $n \ni N$;

4. $n \cap s_{AN} = O$;

5. $k(O, OA)$;

6. $k \cap n = \{N, N'\}$;

7. $h = AN'$.



Фигура 149: Задача 7.1. – построение – 2

Доказателство: Фигурата $ANA'N'$ е правоъгълник, където $A' = k \cap AO$. Едната страна AN е от правата a, а другата AN' – от правата h. Тъй като $AN \perp AN'$, то $a \perp h$.

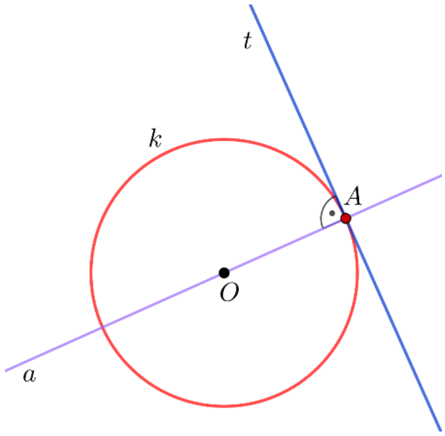
Изследване: В сила е верността на теоремата: „Ако A и a са съответно точка и права, то съществува единствена права h през т. A, която е перпендикулярна на правата a.“.

Приложение: Построяването на перпендикуляр от точка към права е основна задача. Тя се явява стандартна допълнителна операция за много от задачите за построение. При извършване на графично построение в *Geogebra* към повечето от задачите, включени в ресурсните файлове, вместо горната конструкция е използван инструментът за построяване на перпендикулярна права, минаваща през дадена точка. Построяването на перпендикуляр от точка към права най-често се използва при намирането на образ на точка при инверсия. В частност се използва за намиране на образ на права или окръжност.

Построяването на перпендикуляр от точка към права служи и за извършване на построението към *Задача* 7.2., *Задача* 7.3. и *Задача* 7.4.

Задача 7.2. *Да се построи допирателна в дадена точка от дадена окръжност.*

Анализ: Построяването на допирателна в дадена точка към дадена окръжност се свежда до построяването на перпендикуляр от точката на допиране към правата, минаваща през центъра на окръжността и точката на допиране:



Фигура 150: Задача 7.2. – анализ

Приложение: Построяването на допирателна в дадена точка на окръжността може да се осъществи чрез използването на инструмента „*Допирателни*“. С негова помощ могат да бъдат построени и допирателните към дадена окръжност през външна за окръжността точка, както и общите допирателни на две окръжности. Задачата се използва и в конструкцията за намирането на образ на дадена точка при инверсия. Освен това, когато *Аполониевите задачи* се свеждат до по-лесни чрез метода на инверсия, може да се изисква построяването на допирателна към окръжност в дадена нейна точка (например, *задача* 6 от Глава V. „*Аполониеви задачи*“). *Задача* 7.2. се използва и за извършване на построението към *Задача* 7.4.

Задача 7.3. *През външна точка за дадена окръжност да се построи допирателна към окръжността.* (Петров и Ганчев, 1966)

Нека са дадени окръжността $k(O,r)$ и точка A. Нека още търсената допирателна е t, а допирната точка на t с окръжността k е T. Точката T лежи на окръжността k. Задачата се свежда до построяването на т. T, а то от своя страна – до построяването на втори обект, върху който лежи т. T.

I. *начин*

Анализ: Ако върху правата OT от точка T се нанесе отсечката $TB = TO$, то ΔOAB е равнобедрен ($AO = AB$), защото:

1) т. T – среда на $OB \Rightarrow AT$ е медиана

2) $OT \perp AT = t$, защото радиусът е перпендикуляр на допирателната в точката на допиране

От 1) и 2) следва, че AT е височина и медиана, т.е. ΔOAB е равнобедрен.

От $AO = AB$ следва, че т. B лежи на окръжност $k'(A, AO)$.

От $OB = 2.OT = 2.r$ следва, че т. B лежи на окръжност $k''(O, 2r)$.

Точката $B = k' \cap k''$ е построима $\Rightarrow$ построима е и т. $T = OB \cap k$.

Построение:

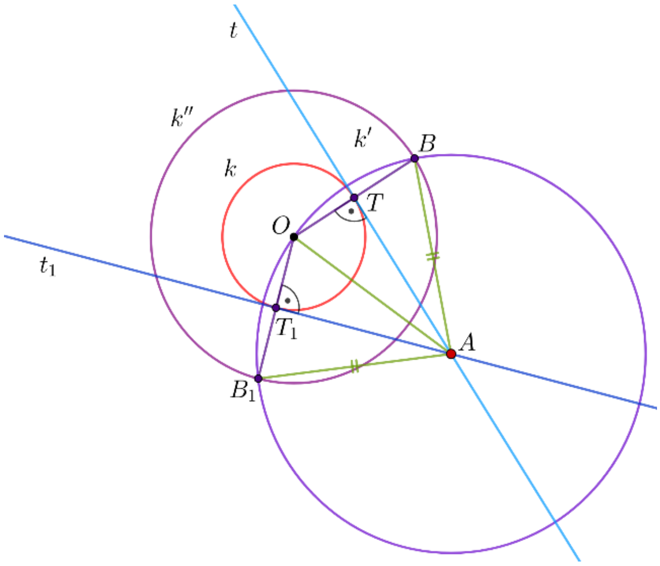
1. $k'(A, AO)$;

2. $k''(O, 2r)$;

3. $B = k' \cap k''$;

4. $T = OB \cap k$;

5. $AT = t$.



Фигура 151: Задача 7.3. – построение – 1

Доказателство: По построение $AO = AB \Rightarrow \Delta OAB$ е равнобедрен, но $TO = TB \Rightarrow$ т. T е среда на $OB \Rightarrow AT$ е медиана $\Rightarrow AT \perp OB \Rightarrow AT \perp OT \Rightarrow AT$ е допирателна към окръжността k с радиус OT.

II. *начин Анализ:* Тъй като $OT \perp AT$, то т. T лежи на геометричното място на точки, от които отсечката OA се вижда под прав ъгъл – окръжност с диаметър OA.

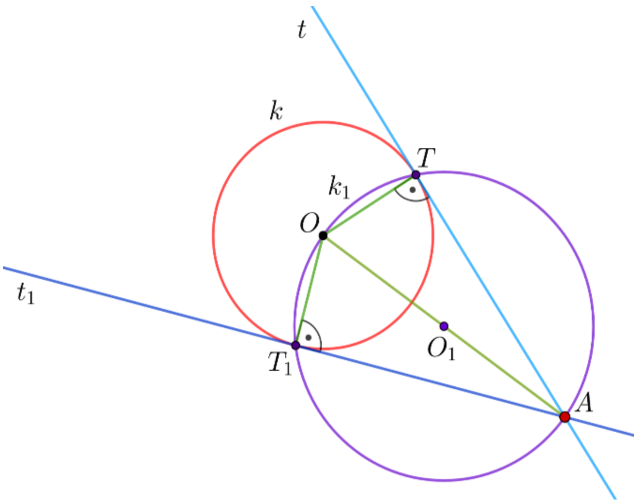
Построение:

1. т. O_1 – среда на OA;

2. $k_1(O_1, O_1A)$;

3. $T = k \cap k_1$;

4. $AT = t$.



Фигура 152: Задача 7.3. – построение – 2

Доказателство: OA – диаметър на окръжността k_1 и по построение $T \in k_1 \Rightarrow \sphericalangle OTA = 90°$. Но $T \in k \Rightarrow AT$ е допирателна към окръжността k.

III. *начин*

Анализ: Отново ще се намери T като пресечна точка на два обекта, единият от които е дадената окръжност k. Знае се, че T лежи и на отсечката AT. Отсечката AT е построима, защото е катет в правоъгълен триъгълник с хипотенуза OA и втори катет OT, който има дължина, равна на дължината на радиуса на окръжността k.

Построение:

1. права g;

2. произволна точка $T' \in g$;

3. издига се перпендикуляр $h\begin{cases} \ni T' \\ \perp g \end{cases}$;

4. $l(T', OT)$;

5. $l \cap h = O'$ (избира се пресечна точка в една от двете полуравнини с контур правата g);

6. $l'(O', OA)$;

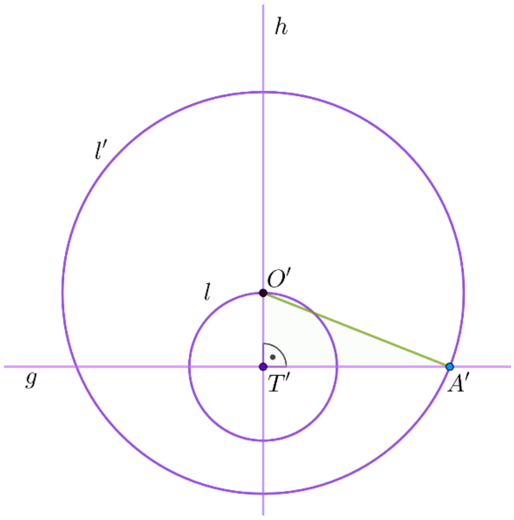
7. $l' \cap g = A'$;

8. $|A'T'| = |AT|$, където AT – отсечката, чиято дължина се търси;

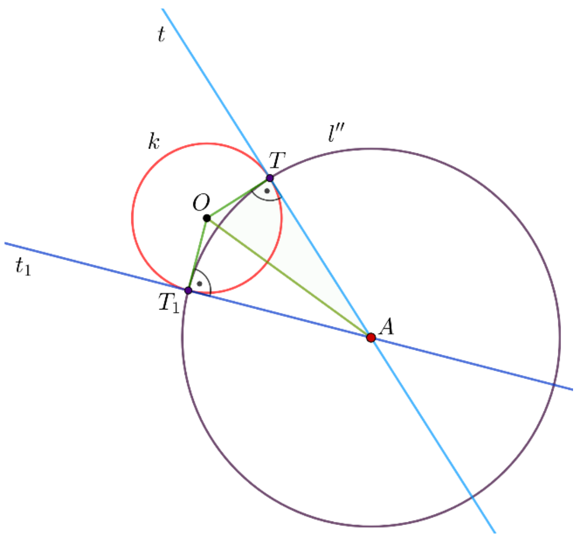
9. $l''(A, A'T')$;

10. $l'' \cap k = T$;

11. $AT = t$.



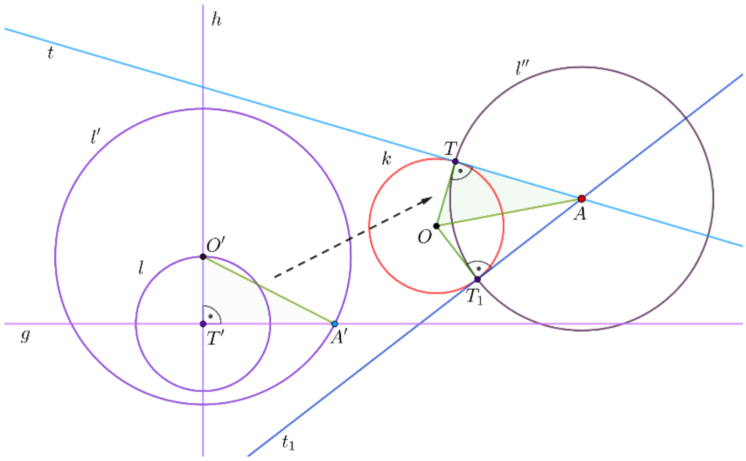
Фигура 153: Задача 7.3. – построение – 3



Фигура 154: Задача 7.3. – построение – 4

Доказателство: По построение AT има дължина, равна на дължината на катет в правоъгълен триъгълник, на който дължината на хипотенузата е равна на дължината на отсечката OA и втори катет с дължина, равна на радиуса на окръжността $k \Rightarrow \sphericalangle OTA = 90°$. Но $T \in k \Rightarrow AT$ е допирателна към окръжността k.

Изследване: Задачата винаги има две решения (съществуват две допирателните през външна за окръжността точка).



Фигура 155: Задача 7.3. – построение – 5

Приложение: Изложени са няколко начина на построение, с които се демонстрира приложението на различни теоретични знания. Основните задачи за построение не са обект на текущата разработка, затова построяването на външна допирателна в *Geogebra* при реализацията на задачите е извършено с помощта на инструмента „*Допирателна*", както беше споменато и при предходната задача. Построяването на допирателна през външна за дадена окръжност също е конструкция, която се използва при намирането на образ на точка при инверсия. Освен това някои от *Аполониевите задачи* се свеждат до построяването на допирателна през външна точка за дадена окръжност (например *задача* 8 от Глава V. „*Аполониеви задачи*").

Задача 7.4. *Към дадена окръжност да се прекара допирателна, успоредна на дадена права.* (Александров, 1962)

Анализ: Нека са дадени окръжността k_0 с център т. O и правата p, а търсената допирателна означаваме с p'.

Нека допирната точка на правата p' и окръжността k_0 е точката P'. Построението на задачата се свежда до намирането на т. P'. Ако се знае какво е нейното положение, то задачата се свежда до 7.2.

Нека правата $h = OP'$. Тъй като допирателната е перпендикулярна на радиуса в точката на допиране, то $p' \perp h$, но $p' \parallel p \Rightarrow h \perp p$.

Построение:

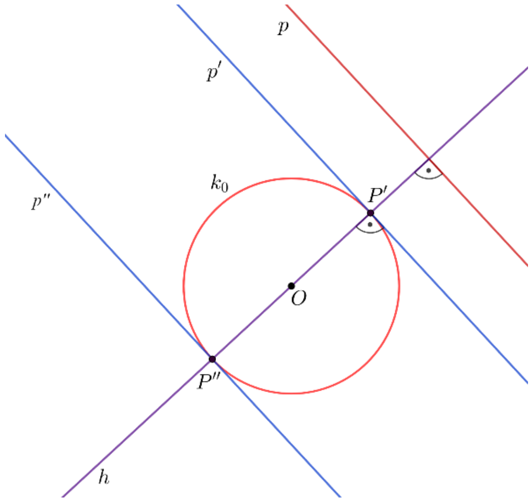
1. $h\begin{cases}\ni O \\ \perp p\end{cases}$;

2. $h \cap k_0 = P'$;

3. допирателната p' в точката P'.

Доказателство: $\sphericalangle(h,p) = \sphericalangle(h,p') = 90°$ – съответни ъгли $\Rightarrow p' \parallel p$ и по построение p' се допира до окръжността k_0.

Изследване: Ако правата p не е допирателна към окръжността k_0, задачата има две решения, защото перпендикулярът h и окръжността k_0 имат две пресечни точки.



Фигура 156: Задача 7.4. – построение

Приложение: Задачата се използва при решаването на *задача* 7.5., обвързана с построяването на обща допирателна на две окръжности, както и при решаването на задачи 5.6. и 5.9., свеждащи се до построяването на обща допирателна на две окръжности. Последните две задачи се явяват и частен случай на *Задача* А от Глава V.

Задача 7.5. *Да се построи обща допирателна на две окръжности.* (Александров, 1962)

Анализ: Нека са дадени окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$. Нека $r_1 > r_2$.

Нека външната допирателна, която трябва да се построи, е t, а допирните ѝ точки с окръжностите k_1 и k_2 са съответно точките T_1 и T_2. За да се построи допирателната, е достатъчно да се определи нейното направление и да се приложи *Задача* 7.4.

Нека $O_2A \parallel t$ и $O_1A \perp O_2A$, където $A \in k_1$. Точката A лежи на окръжността k с диаметър O_1O_2, тъй като $\sphericalangle O_1AO_2$ е прав. Като се продължи перпендикулярът O_1A и се прекара радиусът O_2T_2 се вижда, че $O_1A = O_1T_1 - AT_1 = r_1 - r_2$.

От това, че отсечката $O_1A = r_1 - r_2$, следва че точката A лежи на окръжността $k_1{}'$, която е концентрична на k_1 с радиус $r_1 - r_2$. Следователно точката A може да бъде построена като пресечна точка на окръжностите k и $k_1{}'$.

След определянето на точката A към едната от дадените окръжности се прекарва допирателната t, която е успоредна на O_2A.

Построение:

1. окръжността k с диаметър O_1O_2;

2. $k_1{}'(O_1, r_1 - r_2)$;

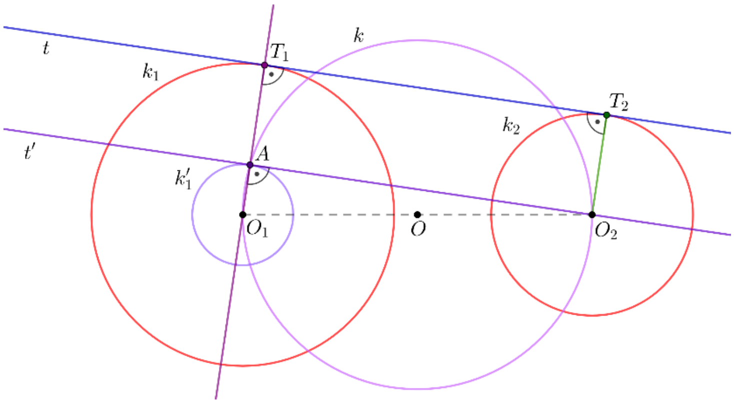
3. $k \cap k_1' = A$;

4. t' - допирателната към окръжността k_1' в точката A;

5. O_1A;

6. $O_1A \cap k_1 = T_1$;

7. $t\begin{cases} \ni T_1 \\ \parallel t' \end{cases}$.



Фигура 157: Задача 7.5. – построение

Доказателство: Тъй като $AT_1 \parallel O_2T_2$ и $O_1A = r_1 - r_2$, ще получим, че $O_1T_1 = O_1A + AT_1 = O_1A + O_2T_2 = r_1 - r_2 + r_2 = r_1$, което показва, че т. T_1 е точка от окръжността k_1. От друга страна $\sphericalangle O_1T_1T_2 = \sphericalangle O_1AO_2 = 90^{\circ}$, което означава, че правата t има обща точка с окръжността k_1 и е перпендикулярна на радиуса, прекаран в тази точка, т.е. правата t е допирателна към окръжността k_1. Но t е допирателна и към окръжността k_2. Следователно t е обща допирателна на двете окръжности.

Изследване: Ако трябва да се построи обща вътрешна допирателна, трябва да се разгледа окръжността $k_1''(O_1, r_1 + r_2)$ и допирателната през т. O_2 към нея.

Според взаимното положение на двете окръжности задачата може да има най-много четири решения. Построенията на останалите общи допирателни на двете окръжности могат да бъдат извършени за упражнение във файл към задачата.

Приложение: Някои от *Аполониевите задачи* се свеждат до построяването на обща допирателна на две окръжности [Препратка към *Приложението* на задача 7.4.].

Задача 7.6. *Върху дадена отсечка AA' да се опише дъга, чийто съответен вписан ъгъл да бъде равен на даден ъгъл α, т.е. да се построи ГМТ, от които дадена отсечка се вижда под даден ъгъл.* (Александров, 1962)

Анализ: Нека дъгата $\widehat{AMA'}$ е описана върху AA' така, че всеки вписан ъгъл в нея да е равен на α.

За да се построи тази дъга, трябва да се определи нейният център – т. O. Тъй като точките A и A' са от тази дъга, търсеният център ще лежи върху симетралата на отсечката AA'. Освен това той лежи на перпендикуляра AO, издигнат към допирателната AF към окръжността, съдържаща тази дъга.

Тъй като $\sphericalangle AMA' = \sphericalangle FAA' = \frac{1}{2}.\widehat{ANA'} = \alpha$, допирателната може да бъде построена, като се построи $\sphericalangle FAA' = \alpha$. Тогава търсеният център $O = s_{AA'} \cap AO$.

Построение:

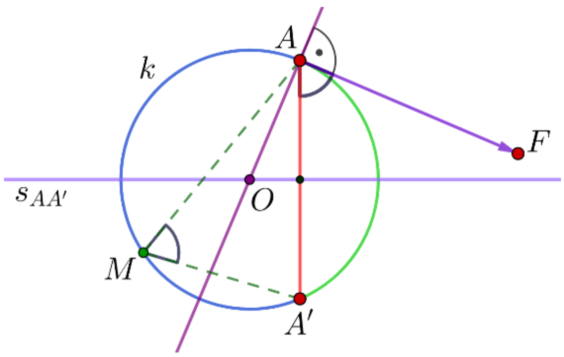
1. $s_{AA'}$;

2. $\sphericalangle FAA' = \alpha$;

3. $AO \perp AF$;

4. $O = s_{AA'} \cap AO$;

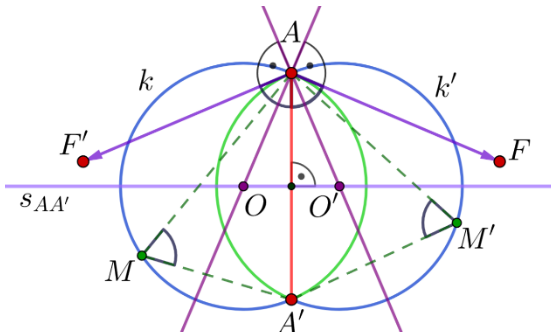
5. $\widehat{AMA'}$ с център т. O.



Фигура 158: Задача 7.6. – построение

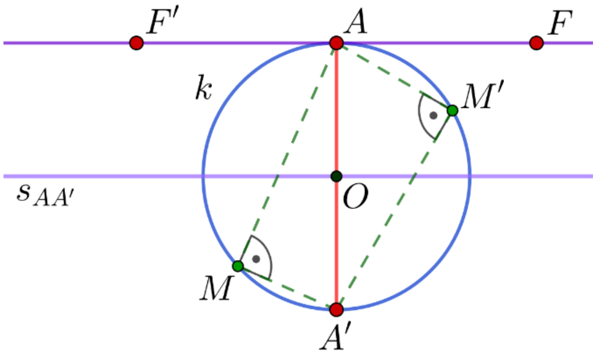
Доказателство: Следва от анализа и построението.

Изследване: Задачата има две решения, защото може да се построи $\sphericalangle FAA' = \alpha$, както по посока на часовниковата стрелка, така и в обратната на нея.



Фигура 159: Задача 7.6. – изследване – 1

Ако $\sphericalangle\alpha = 90°$, двете търсени дъги дават една окръжност с диаметър AA'.



Фигура 160: Задача 7.6. – изследване – 2

Приложение: Задача се използване за решаването на задача 5.3.

Задача 7.7. *Дадени са две окръжности. Да се намери хомотетията χ, която трансформира едната окръжност в другата.* (Банков, 2003) и (Петров, 1969)

За да се реши задачата, се използват следните теореми, които ще бъдат представени без доказателство:

Теорема 7.1. *Хомотетията трансформира всяка отсечка в отсечка, като съответните отсечки са успоредни или лежат върху една права и имат постоянно отношение, равно на коефициента на хомотетия.*

Теорема 7.2. *Хомотетията трансформира всяка окръжност в окръжност, като центровете на съответните окръжности са съответни точки при хомотетията.*

Решение: Нека първо да разгледаме случая, в който $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ са окръжности с различни радиуси и $O_1 \neq O_2$. За определеност приемаме, че $r_1 > r_2$.

Тъй като една хомотетия е зададена, ако са дадени две двойки съответни точки, то за да намерим хомотетията χ, е достатъчно да намерим две двойки съответни точки. Центърът на хомотетията S ще бъде пресечна точка на правите, образувани от двете двойки съответни точки.

Нека A_1 е произволна точка от окръжността k_1. Тогава, ако χ съществува според *Теорема* 7.2., центровете O_1 и O_2 ще са двойка съответни точки, т.е. $S \in O_1O_2$. Съгласно *Теорема* 7.1. отсечката O_1A_1 и нейният образ при χ ще бъдат успоредни помежду си.

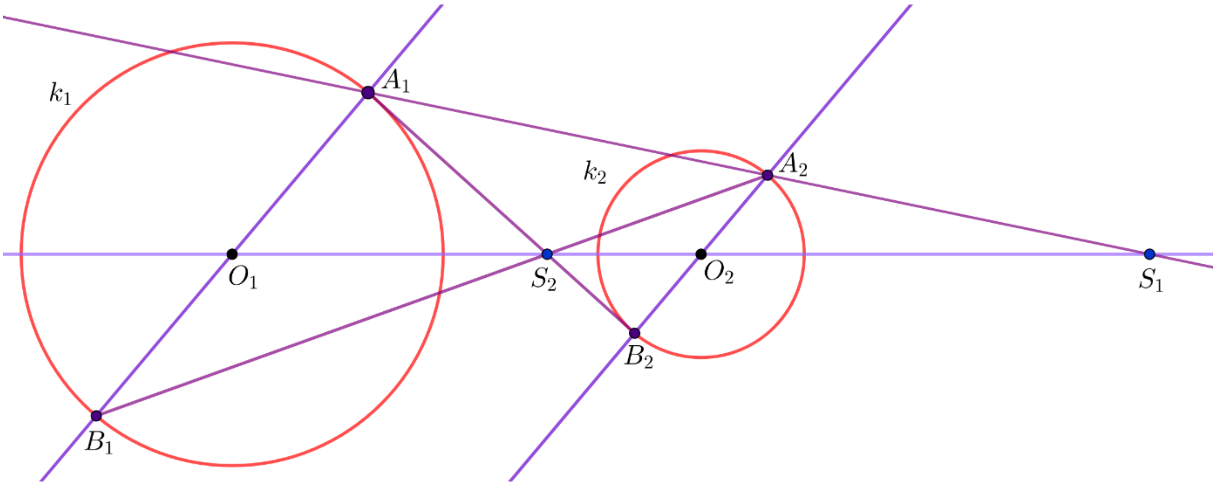
Затова през т. O_2 се построява права g, която е успоредна на правата O_1A_1. Нека $g \cap k_2 = \{A_2, B_2\}$. Нека още $O_1A_1 \cap k_1 = B_1$. Така са построени два успоредни диаметъра $A_1B_1 \parallel A_2B_2$: $A_1, B_1 \in k_1; A_2, B_2 \in k_2$.

За втора двойка съответни точки при χ, чрез която може да се определи центъра на хомотетията, може да се избере A_1, B_2 или A_2, B_1.

Нека $S_1 = O_1O_2 \cap A_1A_2$ и $S_2 = O_1O_2 \cap A_1B_2$.

Съществуват две хомотетии, изобразяващи едната окръжност в другата: χ_1 с център S_1 и коефициент $\frac{r_1}{r_2}$ (правите O_1A_1 и O_2A_2 са еднопосочни) и χ_2 с център S_2 и коефициент $-\frac{r_1}{r_2}$ (правите O_1A_1 и O_2A_2 са разнопосочни).

Двете хомотетии не зависят от първоначалния избор на диаметрите A_1B_1 и A_2B_2, тъй като всяка хомотетия $\chi: \chi(k_1) = k_2$ ще изобрази кой да е диаметър на k_1 в успореден диаметър на k_2 [Чрез извършеното построение в *Geogebra* това е демонстрирано].

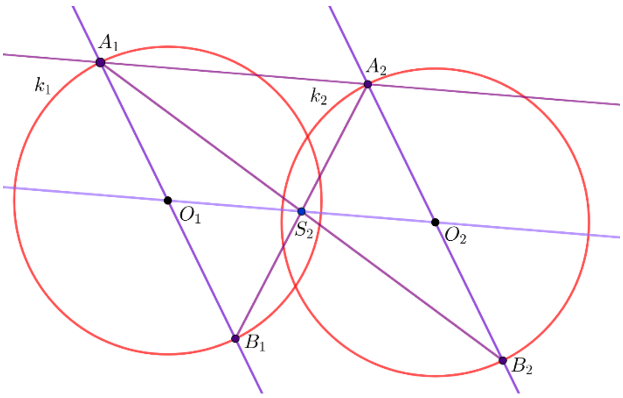


Фигура 161: Задача 7.7. – построение – 1

От това, че за всеки две успоредни и неравни отсечки съществуват точно две различни хомотетии, които преобразуват едната отсечка в другата, следва, че разгледаните хомотетии са единствени.

Ако $O_1 \equiv O_2$, т.е. двете окръжности са концентрични, то центровете на двете хомотетии съвпадат с общия център на двете окръжности.

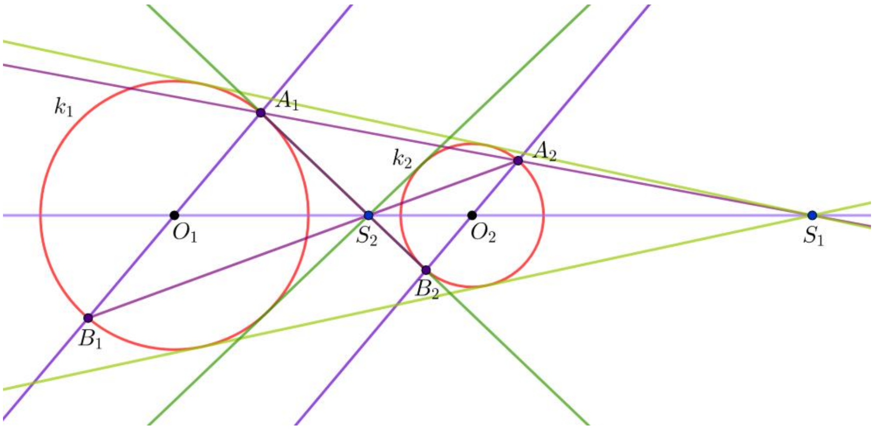
Ако $O_1 \neq O_2$ и $r_1 = r_2$, т.е. двете окръжности имат равни радиуси, то съществува единствена хомотетия, която трансформира k_1 в k_2. В този случай тази хомотетия съвпада с централната симетрия с център т. S_2, а χ_1 се превръща в транслация с вектор, равен на $\overrightarrow{O_1O_2}$.



Фигура 162: Задача 7.7. – построение – 2

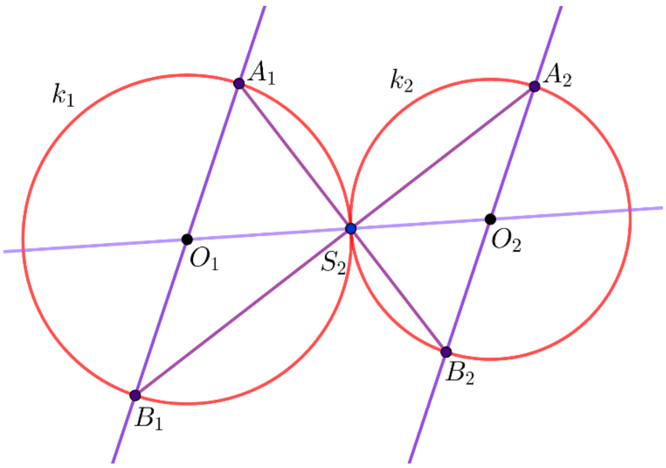
Центровете S_1 и S_2 се наричат съответно *външен* и *вътрешен* център на подобие.

Следствие 7.1. Ако две нееднакви окръжности имат общи допирателни, пресечната точка на допирателните е център на хомотетия, която преобразува едната окръжност в другата.



Фигура 163: Задача 7.7. – следствие – 1

Следствие 7.2. Ако две нееднакви окръжност се допират, допирната им точка е център на хомотетия, която преобразува едната окръжност в другата.



Фигура 164: Задача 7.7. – следствие – 2

Задача 7.8. *Да се построи окръжност, допираща се до дадена окръжност и до две пресичащи се прави.* (частен на задача 5.5.)

Анализ: Нека са дадени правите p и q и окръжността k_0 с център т. Q, а $p \cap q = S$.

Нека търсената от нас окръжност е k. За да построим окръжността k, ще намерим точка от нея и центъра ѝ – т. O, т.е. ще построим окръжността, знаейки центъра и радиуса ѝ.

Означаваме $k \cap k_0 = T$.

Разглежда се $\chi(T; k \to k_0)$. Нека $\chi(p) = p'$ и $\chi(q) = q'$. Тъй като p и q са допирателни към k, то p' и q' ще бъдат допирателни към k_0 съответно успоредни на p и q.

Тогава $\chi(S) = \chi(p \cap q) = \chi(p) \cap \chi(q) = p' \cap q' = S_1{}'$ и точките T, S и $S_1{}'$ са колинеарни (центърът на хомотетия, точка и нейният образ са колинеарни).

Правите p' и q' са построими като допирателни към окръжността k_0, успоредни на правите p и q и $S_1{}' = p' \cap q'$ също е построима. Точката T е от правата $SS_1{}'$ и е допирната точка на окръжностите k и k_0 $\Rightarrow T = SS_1{}' \cap k_0$.

Ако l е ъглополовящата на $\sphericalangle Spq$, то центърът на търсената от нас окръжност ще лежи на нея (*всяка точка от ъглополовящата на даден ъгъл се намира на равни разстояния от раменете му*).

$\Rightarrow O = QT \cap l$. Тогава окръжността $k(O, OT)$ е търсената.

Построение:

1. $S = p \cap q$;

2. $p' \parallel p$ – допирателни към окръжността k_0 [Препратка към задача 7.4.];

3. $q' \parallel q$ – допирателни към окръжността k_0;

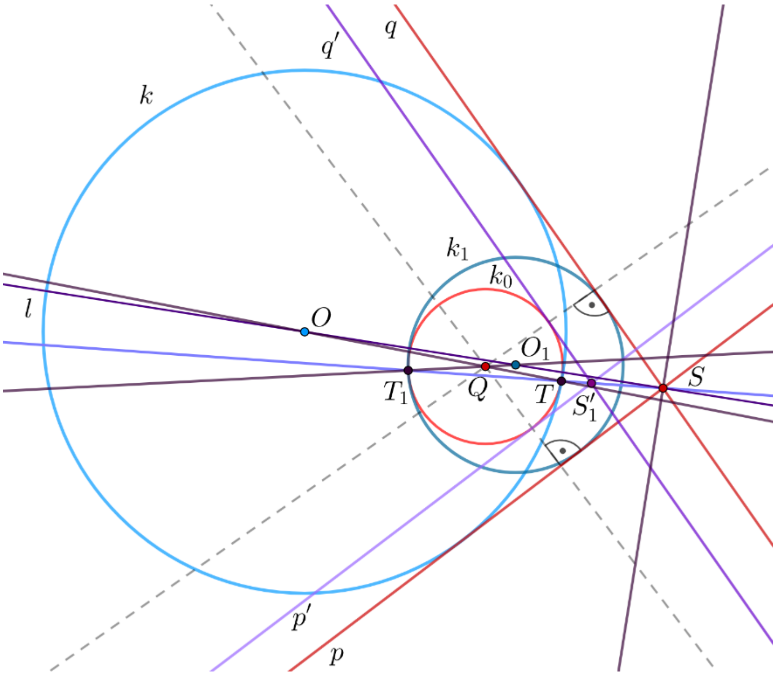
4. $S_1{}' = p' \cap q'$;

5. $SS_1{}' \cap k_0 = \{T, T_1\}$;

6. l – ъглополовяща на $\sphericalangle pq$ [Основна задача за построение. За целите на текущата работа може да бъде използван инструментът „*Ъглополовяща*“ в *Geogebra*;

7. $O = QT \cap l$ и $O_1 = QT_1 \cap l$;

8. $k\ (O, OT)$ и $k_1\ (O_1, O_1T)$.



Фигура 165: Задача 7.8. – построение

Доказателство: По построение p' и q' са допирателни към окръжността $k_0 \Rightarrow \chi^{-1}(p') = p$ и $\chi^{-1}(q') = q$ са допирателни към окръжността $k = \chi^{-1}(k_0)$.

От 5 и от 7 имаме, че $k \cap k_0 = T$.

Изследване: Броят на допирателните, успоредни на всяка от правите p и q към окръжността k_0 [които се построяват при изпълнение на 2. & 3.], е равен на две. Нека $p'' \parallel p$ и $q'' \parallel q$.

Нека още $S_2{}' = p'' \cap q'', S_3{}' = p' \cap q'', S_4{}' = p'' \cap q'$. Тогава по описания начин за построение, в който участва точката $S_1{}' = p' \cap q'$, за всяка една от останалите три точки можем да получим две решения, ако правата $SS_i, i = \overline{2,4}$ и окръжността k_0 имат общи точки.

Построения чрез динамичен софтуер към задачите от Глава VII.

- *Задача* 7.1.: реализацията на задачата може да бъде намерена във файла с име „*Построяване на перпендикуляр от точка към права.ggb*“. В него са включени и двете конструкции.
- *Задача* 7.2.: построенията към задачата са във файла „*Построяване на допирателна към окръжност в дадена нейна точка.ggb*“.
- *Задача* 7.3.: файлът с име „*Построяване на допирателна през външна за окръжност точка.ggb*“ е предназначен за визуализация на чертежа към задачата.
- *Задача* 7.4.: построенията към задачата могат да бъдат намерени във файла с име „*Построяване на допирателна към окръжност, успоредна на дадена права*“.
- *Задача* 7.5.: файлът към задачата е с име „*Построяване нзадача обща допирателна на две окръжности.ggb*“.
- *Задача* 7.6.: файлът „*Построяване на дъга, чийто съответен вписан ъгъл е равен на даден ъгъл.ggb*“ е предназначен за визуализация към задачата.
- *Задача* 7.7.: построенията към задачата са във файла „*Намиране на хомотетия, която трансформира една окръжност в друга.ggb*“.
- *Задача* 7.8.: файлът „*Построяване на окръжност, допираща се до дадена окръжност и до две пресичащи се прави.ggb*“ съдържа чертежа към задачата.

Приложения към дипломната работа

Към дипломната работа като допълнително приложение са включени интерактивни чертежи и видеа.

Онлайн достъп до построенията, създадени чрез динамичен софтуер, може да бъде осъществен посредством следния линк: *https://www.geogebra.org/m/eet4nfdd*.

– Заключение –

Създадената дидактическа система от задачи би била подходяща за учители, които целят да развият въображението на своите ученици в областта на построителните задачи в кръжочна форма на обучение. Задачите могат също да разширят кръгозора на бъдещите преподаватели по математика. Всички задачи са с включени решения. Включените интерактивни чертежи и видеоклипове служат като допълнителен интерактивен учебен ресурс, подпомагащ процеса на обучение и допринасящ за по-лесното възприемане на учебния материал.

Съдържанието на дипломната работа може също да послужи като учебен ресурс за извършване на научени изследвания, свързани с установяване на:

- нагласите на бъдещи учители по математика относно изучаването на задачи за построение чрез използването на геометричен софтуер в реално време;
- ползата от решаването на задачи за построение;
- ползата от използването на интерактивни ресурси в процеса на обучение по математика.

Допълнителните ресурсни файлове могат да послужат и като обучителен материал относно създаването на интерактивни чертежи с помощта на *Geogebra*.

За установяване на нагласите на бъдещи преподаватели по математика относно внедряването на построителни задачи, решими чрез метода на инверсията в процеса на обучение, съчетано с използването на геометричен софтуер и за установяване на степента на възприемане на тези задачи от тяхна страна, е необходимо да бъде направен педагогически експеримент. Това би могло да бъде извършено при бъдещо научно изследване.

Една от причините методът на инверсията да не се изучава в училище се дължи на неговата абстрактност. Тя не трябва да се възприема като сложна и невъзможна за възприемане от страна на учениците. Използването на метода на инверсията при решаването на геометрични задачи, включващи взаимодействие между различни елементи, демонстрира начин за свеждане на една задача до сравнително по-проста. По същия начин може да се подходи и при процеса на обучение по математика като цяло – чрез подбора на подходящи задачи и стратегии, съчетани с използването на средства да се достигне до постигане на учебните цели.

– Библиография –

1. Александров, И. (1962). Сборник от геометрични задачи за построение. (прев. Петканчин, Б.) Народна просвета, София.

2. Александров, И. (1881). Методи за решаване на геометричните задачи за построение.

3. Асенова, П., & Маринов, М. (2019). Система от задачи в обучението по математика. Математика и информатика, 53. // публикувано в *https://bit.ly/3h1I3N7* (посетен на 10.01.2024)

4. Банков, К., & Витанов, Т. (2003). Геометрия. Издателска къща „Анубис“, София.

5. Ганчев, И., & Лалчев, З., & Иванов, Ж. (1981). Международното движение за реформа на математическото образование в училище. Народна просвета, София.

6. Гроздев, С., & Деков, Д. (2014). Учене чрез открия – нов ефективен подход в ученето чрез експериментиране. Математика и информатика, 568-585, София.

7. История на геодезията (2014). Аполлоний Пергский. // публикувано в *http://istgeodez.com/apolloniy-pergskiy* (посетен на 28.12.2024)

8. Кадиев, С., & Нинова, Ю. (2020). Дидактически системи от задачи за училищния курс по математика, създадени върху избрани частнопредметни технологии. София.

9. Кадиев, С., & Нинова, Ю. (2021). Дидактически модел за съставяне на система от задачи на базата на технологичния подход. Математика и информатика, 64(1), София.

10. Костовски, А. (1964). Геометричния построения само с пергел. Държавно издателство „Техника“, София.

11. Лобачевски, Н., & Бояй, Я. (1984). Неевклидова геометрия. Наука и изкуство, София.

12. Мартинов, Н. (1974). Геометрични преобразувания и някои техни приложения. Народна просвета, София.

13. МОН, (2017). Учебна програма по математика за VII клас (Общообразователна подготовка) // публикувано в *https://web.mon.bg/bg/1999* (посетен на 02.01.2024)

14. Петров, К. (1969). Аполониеви задачи. Наука и изкуство, София.

15. Петров К., & Ганчев, И. (1966). Сборник от задачи за построение по геометрия. Народна просвета, София.

16. Табов, Й., & Лазаров, Б. (1990). Геометрични построения. Народна просвета, София.

17. Тонов, И. (2012). Евристиката – наука, изкуство, занаят. Монографичен труд. София. // публикувано в

https://www.fmi.uni-sofia.bg/sites/default/files/habilitation_work_of_professor/habil_trud_i_tonov.pdf

(посетен на 15.01.2024)

18. High School Olympiadis. (2015). IMO 2015, Problem 3. // публикувано в *https://artofproblemsolving.com/community/c6h1112748p5079655* (посетен на 12.02.2024)

19. Masscheroni, L. (1797). La geometria del compasso. Павия. // публикувано в

https://www.libreriauniversitaria.it/geometria-compasso-mascheroni-lorenzo-moretti/libro/9788871861777 (посетен на 26.01.2024)

20. Mor, G. (1672). Dänischer Euklid.