



Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Факултет по математика и информатика  
Катедра „Обучение по Математика и Информатика“



# Ролята на приложните задачи от училищния курс по математика за целите на обучението

Дисертационен труд  
на Ралица Любомирова Стаменкова

за присъждане на образователна и научна степен „доктор“  
в професионално направление  
1.3 „Педагогика на обучението по ...“  
научна специалност:  
Методика на обучението по математика и информатика

Научен ръководител:  
проф. д-р Иван Тонов

София  
2024

## СЪДЪРЖАНИЕ

Индекс на фигурите	iv
Индекс на таблиците	vi
Списък на съкращенията	vii
БЛАГОДАРНОСТИ	viii
УВОД	1
Актуалност на проблема	1
Тема	4
Обект на изследването	4
Предмет (субект) на изследването	4
Цел на изследването	4
Хипотези	6
Методи на изследването	8
Структура и съдържание	11
1. ГЛАВА: ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ	14
1.1. Задача	14
1.2. Текстова задача	15
1.3. Приложна задача – структура и предизвикателства	15
1.4. Решение на текстова задача	22
1.5. Когнитивни и метакогнитивни умения	26
1.6. Знание и умение	28
1.7. Компетентност и умения на 21. век	29
1.8. Функционална и множествена грамотност	30
Обобщение	32
2. ГЛАВА: МАТЕМАТИКАТА В ОБРАЗОВАНИЕТО	33
2.1. Образование	35
2.2. Новата образователна парадигма	37
2.3. Мотивация	38
2.4. Творческо мислене в математиката	38
Обобщение	39
3. ГЛАВА: КОНТЕКСТ НА ПРОБЛЕМА	40
3.1. Парадокс – образование и очаквания	40

3.2. Извънкласни занимания	41
3.3. Пример – участие в Европейско кенгуру	44
3.4. Прогимназиален курс (5. – 7. клас)	47
3.5. Първи гимназиален етап (8. – 10. клас)	49
3.6. Втори гимназиален етап (11. – 12. клас)	56
3.7. ДЗИ и прием в университети	58
3.8. Анализ на научни публикации	59
Обобщение	61
4. ГЛАВА: МЕЖДУНАРОДЕН АСПЕКТ, АНАЛИЗ, ПАРАЛЕЛИ	63
4.1. Прогимназиален курс (5. – 7. клас)	63
4.2. Първи гимназиален етап (8. – 10. клас)	65
4.3. Втори гимназиален етап (11. – 12. клас)	72
4.4. Дигитални технологии и образование	81
4.5. Проектно-базирано обучение	87
4.6. Математическото есе като инструмент в обучението по математика	88
4.7. Приложните задачи според таксономията на Блум	100
Обобщение	101
5. ГЛАВА: ИЗСЛЕДВАНИЯ НА ТЕРЕН	103
5.1. Подготовка – избор на конкретни задачи	104
5.2. Методи и инструментариум	107
5.3. Критерии и показатели за оценка	109
5.4. Изследователска фаза	111
5.5. Провеждане	112
Обобщение	114
6. ГЛАВА: АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ	116
6.1. Оценка на решенията от двата експеримента	116
6.2. Отчет на резултатите от фаза '21 г.	117
6.3. Качествена оценка на решенията фаза '21 г.	118
6.4. Анкета	121
6.5. Качествена оценка на решенията от фаза '22 г.	126
6.6. Обобщение	129
6.7. Дискусия и изводи	130

7. ГЛАВА: ПОГЛЕД НАЗАД	131
7.1. Задача за втори гимназиален етап – профилирана подготовка	131
7.2. Задача 1	134
7.3. Задача 2 (приложна)	136
7.4. Задача 3 (творчество)	143
7.5. Задача 4 ( <i>problem-solving</i> )	145
7.6. Задача 5 (комбинация на проблеми)	154
7.7. Банка с въпроси	156
Обобщение	158
РАЗВИТИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ	160
Развитие на темата	160
Заключение	161
АВТОРСКА СПРАВКА И ПРИНОСИ	164
Научноизследователски приноси	164
Научноприложни приноси	164
Приложни приноси	165
Публикации, свързани с дисертационния труд	166
Участия в научни проекти	167
Декларация за оригиналност	168
БИБЛИОГРАФИЯ	169
Документи	177
Програми	177
Интернет сайтове и дигитални приложения	178
Изображения	178

## Индекс на фигурите

Фиг. 1: Ролята на приложните задачи за целите на образованието .....	7
Фиг. 2: SMP 11–16.....	18
Фиг. 3: Преговорен урок (1) .....	20
Фиг. 4: Преговорен урок (2) .....	20
Фиг. 5: Модел на сложна математическа дейност .....	22
Фиг. 6: Кръговрат при моделирането.....	23
Фиг. 7: Отговор от ChatGPT (ChatGPT, 2023) .....	34
Фиг. 8: Perplexity (Perplexity, 2023).....	35
Фиг. 9: Учебник по математика 9. Клас, изд. Архимед (Георги Паскалев, 2018) .....	49
Фиг. 10: Photomath (зад. 11) .....	50
Фиг. 11: $h(t)$ .....	55
Фиг. 12: $h(t)$ , $t \in [1;3]$ .....	55
Фиг. 13: НВО за 10 клас (2023 г.) .....	56
Фиг. 14: Учебник 12. Клас ООП (изд. Просвета) .....	58
Фигура 15: ID 92759453 © Gurinaleksandr   Dreamstime.com.....	64
Фиг. 16: SAT .....	65
Фиг. 17: Сборник задач (Моденов, 1957) .....	66
Фиг. 18: Модел на задача 11 .....	67
Фиг. 19: ChatGPT „решава“ задача 11 (Моденов) .....	68
Фиг. 20: ChatGPT отговор без използване на производни .....	69
Фиг. 21: ChatGPT решение с материала на ниво 9. клас.....	69
Фиг. 22: Работна тетрадка за 9. клас (Австрия).....	70
Фиг. 23: Storebæltbroen (Francis) .....	72
Фиг. 24: Квадратна функция .....	72
Фиг. 25: Немски учебник (задача за самостоятелна работа) .....	73
Фиг. 26: Немски учебник (решена задача).....	74
Фиг. 27: Немски учебник (задача за самостоятелна работа) .....	77
Фиг. 28: Максимална заградена площ .....	79
Фиг. 29: Италиански учебник .....	79
Фиг. 30: Прилежащата учебна тетрадка.....	79
Фиг. 31: Локален максимум .....	80
Фиг. 32: Отражение.....	80
Фиг. 33: SAT – Октомври 2022 г. ....	84
Фиг. 34: НВО – 10 клас 2021 г. ....	84
Фиг. 35: Примерна задача от частта с калкулатор (IB).....	85
Фиг. 36: ДЗИ по математика 26 август 2022 г. ПП .....	85

Фиг. 37: Неприемлив израз и графика .....	93
Фиг. 38: Коректно изложено решение .....	93
Фиг. 39: Примерна работа с междинна обратна връзка.....	94
Фиг. 40: Крайна подробна оценка.....	95
Фиг. 41: Самопроверка на цитирането.....	97
Фиг. 42: Самооценка на презентираният .....	97
Фиг. 43: Оценъчна таблица за писмената разработка .....	98
Фиг. 44: Преработена таксономия на Блум според Андерсон и Кратвол в паралел с приложните задачи.....	100
Фиг. 45: Формулировка на задачите – изследване Фаза '21 .....	106
Фиг. 46: Анкета – 1 .....	108
Фиг. 47: Анкета – обратна връзка за трудността на заданието.....	109
Фиг. 48: Отговор на задача Б (грешно) .....	118
Фиг. 49: Отговор на задача Б.....	119
Фиг. 50: Използване на система .....	120
Фиг. 51: Използване на производна.....	120
Фиг. 52: Коментар .....	121
Фиг. 53: Активна работа с условието .....	121
Фиг. 54: Оценка на задача А.....	123
Фиг. 55: Оценка на задача Б.....	123
Фиг. 56: Къде се крие трудността? .....	124
Фиг. 57: Отговор на задача А (1) .....	125
Фиг. 58: Отговор на задача А.....	127
Фиг. 59: Отговор на задача А – грешки при определяне на $f(15)$ .....	128
Фиг. 60: Отговор на задача Б.....	128
Фиг. 61: Mathematics for Elementary Teachers (A Contemporary Approach) .....	133
Фиг. 62: Графика на функцията (GeoGebra) .....	136
Фиг. 63: Графика на функцията в ДО .....	141
Фиг. 64: Червената линия е с уравнение $y=0,6$ .....	141
Фиг. 65: Смесово ограничение за ДО.....	142
Фиг. 66: Максимум и инфлексна точка .....	142
Фиг. 67: Допирателна в инфлексната точка (I).....	143
Фиг. 68: Част от допирателна в I.....	143
Фиг. 69: $f(x)$ и правата $y = 0,6$ .....	143
Фиг. 70: Пресечни точки на $f(x)$ и $y = 0,6$ .....	143
Фиг. 71: Духова могила (Пловдив, 2018) .....	144
Фиг. 72: Възвишение на Канарските острови.....	145
Фиг. 73: а) Графика.....	147

Фиг. 74: Права през инфлексната точка.....	153
Фиг. 75: Търсената допирателна.....	153
Фиг. 76: Задача германски учебник за зрелостници.....	154
Фиг. 77: Пример от американски учебник за 9. – 10. клас.....	155
Фиг. 78: Задача, предложена от ученик, рецензирана от Анна Цанева (НЕГ 2022-23) .....	157
Фиг. 79: Условие на задача за допълнителна оценка – Аналитична Геометрия (ученик НЕГ 2022/23).....	157
Фиг. 80: Условие на задача за допълнителна оценка – Анализ (ученик НЕГ 22/23) .....	158
Фиг. 81: Част от решението на задача за допълнителна оценка (ученик НЕГ 22/23) .....	158

## Индекс на таблиците

---

Таблица 1: ОЧАКВАНИ РЕЗУЛТАТИ В КРАЯ НА КЛАСА (МОН IX клас).....	8
Таблица 2: УЧЕБНО СЪДЪРЖАНИЕ (МОН IX клас).....	8
Таблица 3: Подход при решаване на приложна задача.....	24
Таблица 4: Компетентности и умения на 21. век.....	30
Таблица 5: Европейско кенгуру 2023 г. (София – Град).....	44
Таблица 6: Компетентности и критерии.....	98
Таблица 7: Условия на задачите – изследване Фаза '22.....	107
Таблица 8: Резултати (първо изследване).....	117
Таблица 9: Резултати (второ изследване).....	117
Таблица 10: Диаметър (Първо изследване).....	121
Таблица 11: Популярност на задачите.....	124
Таблица 12: Файлов формат.....	126
Таблица 13: Диаметър (Второ изследване).....	129
Таблица 14: Стъпки от работа с GeoGebra – 1.....	142
Таблица 15: Стъпки от работа с GeoGebra – 2.....	142

## Списък на съкращенията

---

Съкращение	Пояснение
ВУ	Висши училища
ДЗИ	Държавни зрелостни изпити
ДО	Дефиниционна област
ЕК	Европейска комисия
ЕКР	Европейска компетентностна рамка
ЕПО	Европейско пространство за образование
КГ	Контролна група
МОН	Министерство на образованието и науката
НВО	Национално външно оценяване
НЕГ	Немска езикова гимназия
НУС	Интернационалното училище към посолството на Германия в София
ОИСР	Организацията за икономическо сътрудничество и развитие
ОМИ	Обучение по математика и информатика
ООП	Общообразователната подготовка
ПЧМГ	Първа частна математическа гимназия
ПП	Профилирана подготовка
РУО	Регионални управления на образованието
СДК	Следдипломна квалификация
СМБ	Съюз на математиците в България
СМГ	Софийска математическа гимназия
СОТОМ	Съвременни образователни технологии в обучението по математика
СУ	Софийски университет
ФГ	Фокус група
ФМИ	Факултет по математика и информатика



## БЛАГОДАРНОСТИ

---

На моите учители и ръководители:

Проф. д-р Иван Тонов и доц. д-р Таня Топова, които ме вдъхновиха и подкрепиха, предоставяйки избрана литература и споделяйки безценния си опит.

Доц. Николина Николова, която ме научи, че за изследванията трябва да се пише и публикува.

Колегите ми Анна Цанева и Валентина Бонева, които ми помогнаха с полевите изследвания на терен с техните ученици.

На учениците ми, които откликнаха и работиха целенасочено.

## УВОД

---

*Умът е не само в знанието, но и умението то да се прилага.*  
*Аристотел*

### Актуалност на проблема

„Имаме проблем, когато е налице противоречие между новите изисквания и съществуващата реалност.“ (Бижков & Краевски, стр. 155)

**Проблеми** на образователната ни система са ниската функционална грамотност на учениците, затрудненията им да се справят със задачи, изискващи комбиниране на множество знания и подходи. **Проблем** е лесното отказване от решаване на проблеми, зададени в неявен вид. **Проблем** е, че се очаква от учениците да развият нови компетентности – креативност, критично мислене, *problem-solving*, боравене с информация, но подготовката им не отговаря на тези изисквания. **Проблем** е наличието на малко и изолирани приложни задачи в гимназиалния курс по математика у нас. „За да могат учениците да прилагат математически знания в нематематически контекст, е необходимо обучение в духа на математическото моделиране. От значение е не само учениците да познават някои математически приложения и стандартни модели, но и да имат опит в процеса на активно моделиране.“ (Събева-Колева, 2010)

Динамичното време, в което живеем, поставя предизвикателства и пред образованието. Европейската комисия (ЕК) набляга върху значението на уменията на 21. век, като изисква тяхното залагане във висшето образование с цел чрез учителите те да бъдат пренесени и в училищното. Наличието на множество публикации по темата от български и чуждестранни изследователи, научните проекти за повишаване на качеството на образованието и експерименталните програми с практическа насоченост дават основание за търсене на нови и адекватни подходи и развитие на методиката на преподаване на математика в училище. „Не целим замяна на всички традиционни задачи в часовете по математика с такива с отворен отговор или пък работа изключително със ситуации за подробно решение. Искаме само да разширим обсега на методите, с които разполагаме. Рутинните задачи запазват значението си за практикуването и усвояването на определени процедури, модели или умения. Текстовите задачи с отворен отговор са по-близки до живота. Тук учениците могат да покажат дали са в състояние да приложат придобитите знания без помощта на учителя.“ (Баптист, 2013)

Според програмите по математика на Министерството на образованието и науката (МОН) в 9, 10, 11 и 12 клас обучението „е насочено към овладяване на **базисни знания, умения и отношения**, свързани с постигане на изискванията за

резултатите от обучението по учебен предмет **математика** и с изграждане на **ключови компетентности** на ученика“ (МОН, 2017).

Европейската референтна рамка посочва **8 компетентности**: езикова грамотност; многоезикова компетентност; математическа компетентност и компетентност в областта на точните науки, технологиите и инженерството; цифрова компетентност; личностна компетентност, социална компетентност и компетентност за придобиване на умения за учене; гражданска компетентност; предприемаческа компетентност; компетентност за културна осведоменост и изява. (Съвет на Европейския съюз, 2018)

Европейската дигитална компетентностна рамка (DigComp, 2023) изброява пет ключови компетентности:

- (1) информационна грамотност;
- (2) комуникация и сътрудничество;
- (3) създаване на цифрово съдържание;
- (4) безопасност;
- (5) умения за разрешаване на проблеми.

Очакванията към образованието са да развива в учащите уменията на 21. век, които реално се дискутират и залагат като цел още от по-миналия и миналия век, а именно учене за цял живот (Binkley, 2012).

Ключова роля в развитието на изброените компетентности има училищният курс по математика. От своя страна приложните задачи имат значение за развитието на следните **умения на 21. век**

- четивна грамотност
- математическа грамотност
- *problem-solving*
- умения за учене
- критическо мислене
- дигитална грамотност
- творчество
- боравене с предоставената информация
- самонасочване и самооценка.

В началото на 19. век германският математик Феликс Клайн в книгата си „Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus“ („Елементарната математика от гледна точка на висшата математика.“) адресира проблема с липсата на приложни задачи като част от училищния курс по математика. Той препоръчва на учителите „... взимайте много житейски примери за Вашето собствено преподаване“ (Klein, 1908). Два века по-късно концепцията, наблюденията и препоръките на Феликс Клайн продължават да звучат актуално.

Училищният курс на обучение по математика има за цел запознаването с науката – аксиоматиката, теоремите, лемите, следствията, правилата и др.

Създават се умения за следване на алгоритми, за откриване на логически връзки и за комбиниране на модели за решаване на задачи. Наред с това е важно учащите да са наясно не само със стъпките, които следват, но с тяхното значение. Често учениците питат за какво са им необходими познанията за функции. Едва по-късно в университета или в работата си разбират значението и важността на уменията аналитично да разчитат по-сложни текстове и да анализират графично представена информация. Голямото методическо предизвикателство е за учителите – да преподават не само математика, но и нейното приложение, в ограничен брой часове. Ключовата им роля е да ангажират скептичните тийнейджъри и да ги мотивират, да събудят интелектуалното им любопитство с близък до реалността житейски проблем, който трябва да решат с математическите знания, с които разполагат. Специфична е методологията, с която този тип задачи се въвеждат, след усвояване на необходимия теоретичен материал. Задачата на учителя е да насочва, да изгражда у учениците речник, с който да облекчи прехода от текст към математически модел. Ролята му е да подаде ръка, за да може ученикът да превъзмогне страха от провал. Психологическият блокаж е породен от неувереността, дали може да разчете поставения в задачата проблем, макар да е усвоил необходимите дефиниции, аксиоми, теореми и алгоритми за решаване. „Въпреки че в учебните програми по математика моделирането е едно от ядрата на учебното съдържание, заложените стандарти не са достатъчно пълни и конкретни. Затова в учебниците, особено за класовете от гимназиалната степен, липсват задачи за моделиране на реални ситуации. На практика в учебния процес моделирането често се изчерпва с илюстрация на съществуващи математически модели. От друга страна бързото развитие на технологиите изисква от учениците да развият умения за аналитично мислене и активно моделиране на реални ситуации.“ (Събева-Колева, 2010)

Парадигмата на образованието се отнася до начин на мислене за целта на образованието, значението на ученето и ролята на учителите и учениците. Парадигмите на образованието влияят върху това как учениците се обучават и оценяват и какво се оценява и включва в учебната програма. В контекста на съвременната учебна парадигма за учене през целия живот математиката в образованието допринася за развитието на когнитивното мислене. Тя не се ограничава само в сферата на понятията и правила, но и в уменията за вземане на решения чрез комбиниране на множество знания. Новата образователна парадигма е наречена от френския математик и дидактик Ив Шевалар „парадигма на поставяне на света под въпрос“ (paradigm of questioning the world). Той застава зад идеята за учене през целия живот, но и набляга, че то трябва да лежи на солидни знания по математика. „Днес ние трябва да съживим епистемологичния дух на математиката, без арогантност, а с политическата и социална воля, необходима за съживяване на идеята, че **математиката за нас, човешките същества, е решение, а не проблем.**“ (Chevallard, 2015)

## Тема

Тема на дисертационния труд е ролята на приложните задачи в гимназиалния курс по математика за целите на обучението – ментално и интелектуално развитие на учениците. Ролята на тези задачи е многопластова и комплексна. От една страна те са инструмент за развитието на когнитивните и метакогнитивните умения, аналитичното мислене, творчество и функционалната грамотност на обучаемите. От друга са стимул за мотивацията и ангажираността. Те представляват интелектуално и познавателно предизвикателство за преподаващи и ученици.

## Обект на изследването

**Обект** на изследването е използването и прилагането на знанията за функции при решаване на практически задачи в обучението по математика в гимназиалния курс на обучение. „Учениците възприемат задачата като учебна необходимост. Ролята на учителя е да превърне тази необходимост в интересно предизвикателство... Той трябва да координира и коригира поведението на учащите се в процеса на решаване на задачи... самото обучение по математика трябва да бъде проблемно ориентирано.“ (Тонов, 2012)

## Предмет (субект) на изследването

**Предмет** на изследването е значението на приложните задачи за развитието на когнитивни и метакогнитивни умения и компетентности при ученици в първи и втори гимназиален етап.

## Цел на изследването

Изучаването на математика в училище има за цел не само преподаване на знания по предмета, но и развиване на логическото мислене, аналитичното четене и аргументирано изложение.

**Цел** на дисертацията е изследователски разрез на приложните задачи с оглед на тяхната роля за развитие на математическото мислене, уменията и компетентностите на учениците.

Настоящата дисертация разглежда как компетентностите „оживяват“ чрез приложните задачи. Проучената литература, разгледаните добри практики от чуждестранни образователни системи и обзорът на проекти, разработени в страната, дават конкретни примери за задачи, които онагледяват значението на математиката при решаване на проблеми от различно естество.

## 1. Задача

Да се направи структуриран обзор на литературни източници, анализиращи

ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика. Да се разгледат сходни изследвания като се вземат под внимание:

- използваните методи;
- заложените хипотези;
- направените изводи.

## 2. Задача

Да се съпоставят:

- действащите в Република България нормативни документи и програми за образованието в прогимназиален и гимназиален етап;
- документите на ЕК за развитие на образованието – особено тези, които засягат България като членка на Европейския съюз.

## 3. Задача

Да се съпоставят:

- действащите учебници в България,
- чуждестранни учебници.

Да се систематизират добри практики от други образователни системи, които могат да се адаптират и да обогатят курса на обучение по математика.

## 4. Задача

Да се анализира ролята на приложните задачи като инструмент за осъществяване на междупредметни връзки. Училищният курс на обучение е съвкупност от знания и умения в различни области. Задачи, комбиниращи проблематика от различни сфери, предлагат обединяващ модел на познанието.

## 5. Задача

Да се установи доколко има нужда и как е възможно да се допълни курсът на обучение по математика с приложни задачи без това да намалява теорията и рутинните задачи, които са заложиени в действащите учебници.

## 6. Задача

Да се опише и аргументира как чрез приложните задачи се развиват компетентностите, когнитивни и метакогнитивните умения и уменията на 21. век, заложиени от Европейската компетентностна рамка (ЕКР) – аналитичното четене, знанията по математика, *problem-solving*, нивото на дигитална компетентност, творчество и иновации, критично мислене, преценка и самооценка.

## 7. Задача

Чрез изследване на терен да се проследят трудностите в осъществяване на връзка между теоретични познания и тяхното приложение на практика, уменията на учениците да съставят математически модел на приложна задача и подходите, които използват, за решаването ѝ. Допълнителни аспекти на разглеждане са изявеното творчество, самоинициатива и нивото на прилагане на дигиталните технологии.

## Хипотези

Според Стратегическата рамка за развитие на образованието, обучението и ученето в Република България (2021 - 2030) „Основна цел на преподаването е чрез прилагане на нови методи и подходи да се направи обучението **по-привлекателно и практически ориентирано** и да се изградят нагласи за **учене през целия живот**.“ (МОН, Стратегически документи, 2021)

Съвременният ученик задържа все по-кратко вниманието си при четене. Навиците за бърз, повърхностен, диагонален прочит са неприложими при работа с обемна откъм текст математическа задача. Само с внимателен прочит може да се отсее важната от излишната информация и да се маркират необходимите компоненти за изграждането на математическия модел.

Въпреки промените в учебните планове и новите учебници, приложните задачи остават слабо застъпени в гимназиалния курс на обучение, което не отговаря на нивото на подготовката в други европейски страни. ЕК препоръчва споделяне на добри практики и партньорство в образованието, без това да нарушава идентичността на отделните системи. България е с традиции в задълбочената теоретична математическа подготовка, с което можем да се гордеем. Във връзка с новите промени на учебната програма и въвеждане на нов формат на Държавен зрелостен изпит (ДЗИ) следва да се почерпи вдъхновение за разнообразни задачи от опита и утвърдените практики от други страни.

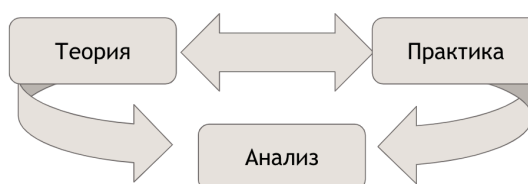
Учителите е необходимо да развият умение за проява на творчество при работа със задачите от учебника и/или да създават подходящи приложни задачи според учебните цели, нуждите на учениците и в рамките на изучавания учебен материал. Наред с това да могат да подбират подходящи задачи, за да развият когнитивните умения на учениците, да предлагат различни стратегии за решаване. Ролята на учителя се разширява с тази на **фасилитатор**, провокиращ аналитично и критично мислене и творчество. Учителят не само избира задачите и създава обстановка за дискусия и търсене на оптимално решение, но трябва да стимулира и учениците да изследват, да се аргументират, да търсят алтернативни походи, да създават задачи.

## 1. Хипотеза

Приложните задачи са един от инструментите за постигане на целите, посочени в Стратегическата рамка. Те повишават интереса и **мотивацията**, като дава примери за използването на конкретните познания по математика в различни сфери от живота и развиват умения за **учене през целия живот**.

## 2. Хипотеза

Работата по приложни задачи развива до голяма степен уменията на 21. век и подготвя гимназистите за следващия етап от образованието им. Такива задачи спомагат постигането на целите на образованието по математика като в по-голяма степен развиват заложените ключови **компетентности** – критично мислене, аналитично четене, *problem-solving*, творчество. Преходът от текст към математически модел създава връзка между теория и практика. Творчеството се изразява, както в решението на конкретна задача, така и в уменията да се създават нови такива.



Фиг. 1: Ролята на приложните задачи за целите на образованието

## 3. Хипотеза

Приложните задачи в по-голяма степен **затрудняват** дори ученици с добра математическа подготовка. Богатата тематика на задачите е важна за изграждане на **аналитично-евристично мислене**.

## 4. Хипотеза

Целенасочената работа по такива задачи има значение за изграждане на **когнитивните и метакогнитивни модели**, тренира **концентрираното четене** и повишава **самодисциплината**.

## 5. Хипотеза

С оглед глобализацията, мобилността и целта за Европейско пространство за образование (ЕПО) до 2025 г. (Commission, 2023) е необходимо курсът на обучение да се допълни с практически задачи в синхрон със заложеното учебно съдържание. Това е полезно за повишаване на **конкурентоспособността** и възможността за **мобилност** на зрелостниците (Directorate-General for Education, 2023).



## 6. Хипотеза

В контекста на учене през целия живот **учителите също трябва да развиват уменията си, да учат, да търсят и опознават нови образователни технологии и инструменти.**

## Методи на изследването

В целите на обучението според програмите на МОН е заложено развитието на **компетентности**, като те са изброени в конкретната предметна област според образователната степен. Подробно описаните очаквани постижения се свеждат до знания и умения, но те отново са тясно свързани с изучавания материал. За пример в Таблица 1 и Таблица 2 са цитирани части от програмата по математика за 9. клас.

Таблица 1: ОЧАКВАНИ РЕЗУЛТАТИ В КРАЯ НА КЛАСА (МОН IX клас)

Области на компетентности	Знания, умения и отношения <i>В резултат на обучението си ученикът:</i>
<b>Функции.</b> <b>Измерване</b>	· <b>знае:</b> – понятието числова функция и начини на задаване; – понятията линейна и квадратна функция; – свойства на линейната и на квадратната функция (монотонност, най-голяма и най-малка стойност);
	· <b>умее</b> да построява графики на линейна и квадратна функция;
	· <b>пресмята</b> стойности на изучените функции и на аргументите им;

Таблица 2: УЧЕБНО СЪДЪРЖАНИЕ (МОН IX клас)

Теми	Компетентности като очаквани резултати от обучението	Нови понятия
<b>2. Функции</b> 2.1. Функция, дефиниционно множество. Начини на задаване на функции. 2.2. Графика на линейната функция. Свойства 2.3. Квадратна функция. Графика на функцията $y = ax^2$ .	· <b>знае</b> понятията функция, дефиниционно множество; · <b>умее</b> да намира функционална стойност и стойност на аргумента на дадена функция; · <b>знае</b> понятията линейна и квадратна функция; · <b>умее</b> да построява графики на линейни и на квадратни функции;	Функция, дефиниционно множество на функция, аргумент, променлива, функционална стойност, растяща функция, намаляваща функция, монотонност,

<p>2.4. Графика на квадратната функция <math>y = ax^2 + bx + c</math>.                  Растене и намаляване на квадратна функция, най-малка и най-голяма стойност на квадратна функция.</p> <p>2.5. Графично представяне на решенията на уравнение.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· <b>умее</b> да установява принадлежност на точка към графика на функция;</li> <li>· <b>умее</b> да прави изводи за свойствата на линейната и на квадратната функция по графиките им;</li> <li>· <b>умее</b> да представя графично решенията на линейно и квадратно уравнение;</li> <li>· извлича информация за функции, зададени по различен начин.</li> </ul>	<p>графика на функция, линейна функция, квадратна функция, парабола,                  ос на симетрия на парабола, връх на парабола,                  най-малка стойност на квадратна функция, най-голяма стойност на квадратна функция.</p>
--	---	---

Според ЕК „**Компетентност** означава доказана способност за използване на знания, умения и личностни, социални и/или методологични дадености в работни или учебни ситуации и в професионално и личностно развитие. В контекста на Европейската квалификационна рамка способностите се описват с оглед степента на поемане на отговорност и самостоятелност“ (Европейска Комисия, 2009). Настоящото изследване разглежда какви **допълнителни умения** са необходими за прилагане на математическите знания при решаване на проблеми, които са близки до житейските. **Анализира** се мястото на тези задачи в гимназиалния курс като за целта се прави **паралел** с други образователни системи и разнообразие на подходи за развитие на тези умения. Проследява се и опитът в прилагането на дигитални технологии в образованието и изследвания за баланс между класически и модерен подход. „Опасностите в това отношение не са толкова малко – превръщането на учебния процес в наблюдение, замяната на абстрактното мислене с резултатите, хиперболизирането на ролята на информацията за сметка на творчеството“ (Tonova & Petrova, 2019). Разглеждат се **уменията**, които са необходими на учителите за развитие на **компетентностите** на учащите, както уменията на 21. век – *problem-solving*, аналитично четене, критично мислене и творчество. „Учителят трябва да знае не само как да реши дадена задача, но и защо прави това, с какво тази задача е ценна, какъв е ефектът върху ученика с решаването ѝ, как тя се композира в цялостния процес на обучение.“ (Тонова, 2012)

Триангулацията се отнася до използването на множество методи или източници на данни в качествени изследвания за разработване на цялостно разбиране на явленията (Patton, 1999). В настоящата дисертация триангулацията е между (1) научна литература, публикации, изследвания и съответните статистики; (2) различни учебници и учебни програми – международни и български през годините; (3) изследвания на терен.

Изследването се позовава на литературен обзор, международни утвърдени практики, нормативни документи и учебно-помощна литература. Разгледаните

материали дават основание за подготовка и провеждане на експеримент.

Резултат на проведеното изследване е сравнителен анализ на решенията на два идентични математически проблема, формулирани по различен начин. От една страна е поставена задача с ясен математически модел, която проследява усвояването на съответния материал – определяне на коефициентите в аналитичния запис на функция по зададени точки. Втората разглеждана задача е представена като реален проблем, онагледен с изображение, от което следва да се извлече информацията, необходима за определянето на коефициентите. Функциите в двете задачи са еднакви, разликата е във формулировката. Разглежданият математически материал е заложен в курса за 9. клас и е включен в материала за Национално външно оценяване (НВО) след 10. клас. Дисертационният труд анализира различията в нивото на справяне с двата проблема, подходът и отношението, както и обратната връзка на учениците по заданията.

**Генералната съвкупност** са ученици в гимназиален етап. Целта е да се разгледа подхода към приложна задача, в която математическата част не затруднява учениците. Това свива генералната съвкупност до гимназисти от математически гимназии, гимназии с профил – математика или задължително засилено изучаване на математика.

**Извадката е едностепенна** – формирана пряко от генералната съвкупност, **гнездова** – училище, клас, които са еднотипни. Въпреки че учениците изучават засилено математика, може да се твърди, групите не са еднородни, има ученици, с изявен интерес, състезатели, но и такива без особена страст към предмета, което ги прави представителни за генералната съвкупност.

**Групите** всеки път са формирана на ниво клас, като единият е контролна група, а паралелният клас – експериментална.

**Зависими променливи** са: степен на решение на задачи (каква част от задачата е решена), самооценка, демонстрирани компетентности.

Наблюдението е **опосредствено** – чрез задача и анкета. Непосредствено наблюдение не беше възможно поради ограниченията, наложени от пандемията.

**Критерии** – съответствие между очаквано решение на задачата и получени резултати; проверка на заложените хипотези.

**Показатели:**

1. Степен на усвояване на знания и умения
2. Задълбоченост при решаването
3. Обмисленост на проблема
4. Трансфер на знания
5. Умения за наблюдения при работа с текст и изображение
6. Самостоятелност
7. Творчество и инициативност

8. Дисциплинираност и отговорност
9. Самокритичност
10. Дигитални умения
11. Критично мислене

#### **Методи**

1. Предварително наблюдение
2. Средство за педагогически експеримент – диагностичен тест за постигнатите резултати (задача с няколко подусловия).
3. Case-study.
4. Качествен анализ.

#### **Инструментариум**

1. Задача в два варианта.
2. Анкетна карта с цел установяване мнение, самооценка и отношение на участниците в изследването.

## **Структура и съдържание**

Настоящият **увод** въвежда в проблема и актуалността му, представя темата, обекта и предмета на дисертационния труд. В увода се дефинират целите и задачите на изследването, залагат се хипотезите и се описва методът на изследването. Като допълнение е описана структурата на дисертацията.

В **първа глава** се дефинират основните понятия, които се използват в изложението. Въз основа на литературен обзор и с оглед целите на дисертацията се описват приложните задачи – формулировка, структура, основни части, речник, разнообразие. Дискутира се методологията на изграждане на въпросите по нива на сложност. Дава се пример за един процес на създаване на селекция от задачи. Цитират се избрани критерии за оценяването на значението на задачата, приложена в курса на обучение. Прави се разрез по няколко оси на решението на приложна задача. Анализират се етапите, очакваните дейности на учениците, ролята на учителя, адресираните компетентности, когнитивни и метакогнитивни умения. Описани са знания и умения, компетентности и умения на 21. век, функционална и множествена грамотност в контекста на поставената тема.

Във **втора глава** се прави ретроспекция на образованието и ролята на математиката в учебния процес на база литературен обзор и актуалните към момента дигитални приложения, базирани на изкуствен интелект. Разглежда се новата образователна парадигма за учене през целия живот и значението ѝ за учители и ученици. Обръща се внимание на мотивацията през призмата на приложните задачи и се проследява значението на творческото мислене в училищния курс по математиката.

В **трета глава** се прави обзор на отношението на родители и ученици към подготовката по математика в различните етапи на обучение. Търси се обяснение

за разминаването между очаквания и резултати. Разглежда се парадоксът между интереса към математиката и действителното постигане на трайни знания и умения. Като един пример се разглежда участието в състезанието Европейско кенгуру от представителите на отделните възрастови групи. През призмата на приложните задачи се последва развитието на решението на една конкретна задача в различните етапи на обучение, следвайки спираловидния модел в образованието. Целта е да се анализира добавената стойност на приложните задачи и ролята им за развитие на компетентностите. С оглед на набелязаните проблеми се търси споделен опит от специалисти в областта чрез преглед на научни публикации по темата.

**В четвърта глава** се прави паралел с чуждестранни системи от аспекта на приложните задачи. Разглеждат се отделни примерни задачи както и подходите към изучаване на различни методични единици. Описват се различията и се набелязват подходи и задачи, които са необходими за развитие, следвайки идеята за единно европейско образование. Анализират се конкретни примери за приложни задачи в различни образователни степени. Описва се мястото и ролята на дигитални технологии в курса по математика. Прави се обзор на съвременни образователни практики като проектно-базираното обучение. Подробно се описва математическото есе като инструмент в обучението по математика. Прави се разрез на приложните задачи според таксономията на Блум в контекста на компетентностния модел.

**Пета глава** проследява подготовката на проведеното изследване на терен. Началото се поставя от предварителни наблюдения, които дават насока за избора на конкретна математическа задача, формулиране на две нейни версии – за контролната и за фокус групата. Представя се допълнителният въпросник. Аргументира се изборът на методи и инструментариум. Дефинират се критерии и показатели за оценка. Охарактеризира се математическата подготовка на участниците в експеримента – ученици от гимназиален курс. Описва се процесът на двукратното провеждане на експеримента в две поредни години, както и условията на реализацията.

**Шеста глава** съдържа описание на кодирането на натрупаните данни през двете фази на изследването. Разглеждат се няколко подхода към решението, коментират се приложените от учениците стратегии на решение. Предлага се разрез на решенията според заложените критерии и показатели. Представя се отчет на резултатите от двете фази. Анализират се резултатите и данните от анкетата в контекста на уменията на 21. век. Качественият анализ на резултатите от гледна точка на ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика дава основания за дискусия и изводи.

**Седма глава** предлага пет конкретни примери за приложни задачи, подходящи за втори гимназиален етап – профилирана подготовка. Предложените решения са разгледани от аспекта на компетентностния подход и развитието на

уменията на 21. век. Ученическото творчество се разглежда като потенциален източник на интересни приложни задачи.

В **заключението** се обобщават резултатите от изследването на терен, от действащите нормативни документи, от разгледаните литературни източници, от чуждестранни образователни практики. Заложените хипотези се сравняват с направените изводи. Начертават се потенциалните посоки за развитие на изследването и анализ на резултатите.

Дисертационният труд завършва с авторска справка – публикации, участие в научни проекти и приносите на представената разработка.

## 1. ГЛАВА: ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

---

Дисертацията разглежда значението на **приложните задачи** за развитие на **умения и компетентности на когнитивно и метакогнитивно ниво**. В литературата се срещат различни определения за задача. Отправна точка на изложението е конкретизиране на значението на отделните понятия. На интуитивно ниво термините изглеждат ясни, което не гарантира разбирането и използването им в пълния им обем. Обзорът на научната литература по проблема служи за еднозначното им описване, за да може да бъде пълноценна и недвусмислена употребата им в дисертационния труд.

### 1.1. Задача

**Тема** на настоящата дисертация е **ролята на приложните задачи в гимназиалния курс по математика**. Интересно е да се проследи етимологията на думата **задача**.

Какво е **задача** и как тя се различава от упражненията?

„Задача възниква, когато индивид има цел, за която не му е известен пътят за нейното достигане“. (Duncker, 1945)

„По-образно казано, задача имаме, когато съществува цел, която трябва да се достигне, но прекият път към тази цел е блокиран.“ (Тонов, 2012)

„Обикновено понятието упражнение отнасяме също към целенасочена дейност, но за разлика от задачата, пътят към достигането на поставената цел е открит.“ (Тонов, 2012)

В англоезичната литература се използват термините *exercise (task)*, *problem*, *investigation*, които градират според познавателното ниво. Joseph B. W. Yeo разграничава типовете задачи по вид на решението, вид на отговора и целите на учителя. Според него задачата се оценява по пет критерия – цел, метод за решение, сложност, отговор и възможност за разширяване. Съответно оценката варира от добре до зле дефинирана, отворена – с множество решения или верни отговори. Тези критерии се преплитат с формулировката. „Изглежда, че има поне две различни значения, когато говорим за структурата на задача. Първото се отнася до естеството на дадена задача: дали отговорът е еднозначно определен или отворен, което може да повлияе дали е ясен методът на решение и има ли достатъчно информация. Второто се отнася до това как е структурирано или формулирано изложението на задачата.“ (Yeo, 2017)

В немскоезичната литература се използват понятията *Übungen*, *Aufgaben*, *Textaufgaben* – *Sachaufgaben* und *Anwendungsaufgaben* – градацията отново е от упражнения, през задания до текстови задачи, които се делят на базови и приложни, при които очакването е да се формулира отговор на поставения въпрос

в контекста на задачата. Следва се следният принцип: „Практикуването в смислен контекст е по-успешно от практикуването на фрагментирани знания (холистично обучение)“ (Wagemann, 1994).

## 1.2. Текстова задача

Задълбочен преглед на различните типове задачи е изложен в монографията на Цветана Антипешева, където след подробен литературен обзор на видовете задачи и определянията за тях, давани от математици и дидактици, се стига до следното обобщение:

„Понятието **текстова задача** се характеризира със следните особености:

- Всяка текстова задача е модел на реална житейска ситуация, в която се търси решението на някакъв проблем;
- Формулира се на естествен език;
- В нея се описва количествената страна на житейска ситуация, като са формулирани връзките между отделните елементи;
- Решаването на дадения проблем става с помощта обикновено на математически операции, които са зададени в неявна форма;
- Задачата съдържа известни и неизвестни числа, намиращи се в определена зависимост помежду си, също дадена в неявен вид.“ (Антипешева, 2018)

В допълнение към разгледаните определения за задача и в частност на текстова задача за целите на дисертационния труд под **приложна задача** се разбира задача, която описателно поставя близък до реалността житейски проблем, който е представен чрез числови стойности на характеризиращите го параметри, и поставя въпрос за неговото качествено и количествено разрешаване.

## 1.3. Приложна задача – структура и предизвикателства

Стефа Барук е влиятелен френски учител, математик, писател и педагог. От 70-те години на миналия век е ключов новатор в преподаването на математика във френските училища. Тя говори за „Френския парадокс“ с аргумента, че Франция се нарежда на второ място след САЩ по присъждане на Фйлдсова награда, но четвърт от подрастващите са с много ниско ниво по математика. Наблюденията ѝ са, че някои възрастни са напълно безпомощни пред лавините от проценти и цифри, като според нея, те не са нито болни, нито недостатъчно „интелигентни“. В последните си изследвания тя се фокусира върху разбирането на това, което е довело възрастните до „ситуация на неграмотност“, според класификацията на националното образование. (Baruk, 2016) В третата си книга „Възрастта на капитана - грешки в математиката“ увлекателно разказва „Един ден през 80-те години на миналия век на някои учители по математика им хрумнала идеята да



зададат на децата от началното училище следната задача: „На една лодка има 26 овце и 10 кози, на колко години е капитанът? И те неволно се впуснали в странно и тревожно приключение в океана на безсмислието.“ (Baruk, 1985)

Учениците още в началните класове бързо се научават по ключови думи да се ориентират дали става дума за събиране, изваждане, умножение или деление. Често отправят въпроса: „Сега да събирам или да умножавам?“ Наред с математическото познание е важно развитието на критично мислене и аналитичното четене, които не се свеждат до прибързани изводи за „математически превод“. В процеса на обучение се развиват навици да се тълкува – коя информация е нужна, коя трябва да се отдели като излишна и как важната елементи се свързват в изграждането на решението.

В подкрепа на 1. Хипотеза е тезата на Фюрер, че „задачите по математика трябва – наред с други неща – да показват и **изясняват** препратките към приложението.“ (Führer, 1991), защото примери за приложението повишават интереса и влияят на мотивацията на учениците.

### 1.3.1. Формулировка

„Формулировката на задачата се състои от едно или няколко твърдения, приемани за истинни. Всяко такова твърдение е елементарно условие на задачата. Характеристиките на обектите на задачата могат да бъдат както дадени (известни), така и неизвестни. Последните, от своя страна, се делят на промеждутъчни (спомагателни) и на търсени, установяването на които представлява целта на решаване на задачата и е указано в искането (въпроса) на задачата“ (Фридман, 1991)

Условието на една задача трябва да разглеждаме на няколко нива – думи, изречения, текст. Правилният прочит и осмислянето на всяка дума протичат на по-ниско ниво. Обработените думи се свързват на ниво изречение и образуват семантични връзки. Декодираните изречения се свързват в текст. (Wilhelm, 2016) Особено внимание трябва да се обръща на глаголите, отглаголните форми и предлозите. (Bednorz, 2020)

Формулировката бива еднородна – описателен текст, включващ числовите стойности на величините или разнородна – комбинация от текст, графики, диаграми, таблици, изображения.

Формулировката трябва да е прецизна, както от математическа, така и от езикова гледна точка. Текстът на условието на задачата се очаква да е граматически и стилово издържан. Еднозначно използване на думите и недвусмислена конструкцията на изреченията са едни от основните предпоставки за коректно формулирана задача. „Езиковият аспект става много важно нещо в изучаването на математика. Например когато ученик погрешно тълкува дума от текста на задачата, то вероятно неправилно подхожда към решението. Причината

не е непознаване на проблема, а защото езикът не е подходящ, което в крайна сметка предоставя различна интерпретация с това, което учителят иска.“ (Anthony, 2009)

### 1.3.2. Основни части

За целите на дисертацията и като обобщение на разглежданите видове задачи се посочват следните части на **приложна задача** с паралел към понятия от художествената литература:

1. Описание на ситуацията и участниците в нея. Не цялата информация е необходима за решението, но създава рамка, близка до реална житейска ситуация. По природа хората обичат приказки, измислят истории, разказват за обстоятелства и процеси. Приложната задача има своя сюжет, т.е. започва с **въведение**.
2. Действие или събитие, което променя ситуацията. По аналогия това е завръзката – сблъсък, **конфликт**.
3. Възникнал проблем – **кулминация**.
4. Въпроси към решаващия относно ситуацията. Тук решаващият задачата поема ролята на творец и трябва да разреши конфликта – **развързка**.
5. Въпрос – как да се реши възникналият проблем. Крайният отговор дава заключение. Решаващият от слушател се е превърнал в герой при развързката и остава да напише **епилога**.

Според зрелостта на учениците може да се повиши сложност, като се „обърне“ структурата – да се започне с проблемния въпрос, а след това да се опише ситуацията, в която той е възникнал.

### 1.3.3. Структуриране на въпросите по нива на сложност

В приложните задачи често се поставят няколко въпроса, като всеки следващ е с нарастваща степен на сложност. Първите въпроси са спомагащи за тълкуването на условието. Примерен разрез за целите на дисертацията:

1. Тълкуване на зададените числови стойности в термините на разглежданата функция – начална момент, изменение, краен момент.
2. Допустими стойности – стойности на променливата, които са смислени за приложния характер на задачата.
3. Определяне на особени точки от графиката на функцията и тяхното тълкуване в контекста на приложната задача.
4. Надграждане на задачата.

Когато в задачата поставените проблеми са на щафетен принцип се добавят контролни отговори към съответните подточки. Целта е при грешка или затруднения да се избегне „заклучване“ на по-нататъшното решение. При най-трудните въпроси – тип надграждане често се очаква само концептуално решение.

Интелектуалното предизвикателство за критичното мислене на учениците са задачите с твърде много излишна информация. Друг проблемен клас са задачите с недостатъчна информация, чието решение изисква въвеждане на помощен параметър със специфични ограничения, чрез който да се изрази решението.

### 1.3.4. Процес на създаване

Процесът на създаване на приложни задачи с висока образователна стойност е многофазен. Наивно е да се смята, че превод на чуждестранни задачи е търсеното допълнение. При трансфер на добри практики от други страни е важно да се взимат под внимание културните различия и образователните особености. Полезно е да се подходи осведомено и да се почерпи от опита на чуждестранните колеги без преносът да е директен.

Проф. д-р Иван Тонов споделя опита си в подготовка на сборник с практически ориентирани задачи, издаден през 1983 г. от Кеймбриджкия университет. Всеки автор е подготвял малки книжка с авторски задачи (Фиг. 2), която след обсъждане и редакция е отпечатвана и апробирана в училища. След няколко итерации, на база на обратната връзка, която е получена от учители, и на наблюдения върху учениците се достига до окончателния вид на сборника. (SMP 11-16, 1983)



Фиг. 2: SMP 11-16

Процесът по отпечатване и разпространение в наши дни е чувствително олекотен благодарение на дигиталните технологии и облачните структури. Учителите свободно обменят задачи, тестове, работни материали, но това не е

гаранция за качествено съдържание и трудно се проследява авторството. Логичният процес е: създаване – апробация сред малка група – корекции – обсъждане с колеги – корекции – апробация в по-голяма група – корекции – апробация – финализиране. Основен проблем е изказът във формулировката, доколко еднозначно е съответствието между замисления от автора текст и тълкуването му от читателите. Благодарение на виртуалното пространство и дигиталните технологии споделянето на материали, дискусиите, дори част от апробациите са по-лесни откъм достъп до информацията и отнемат по-малко време. Все още няма изградени критерии за качество на обратната връзка и на крайния продукт в дигитална среда. Трудно е да се прецени доколко коментарите са обективни, критични и конструктивни, какъв е методическият и образователен потенциал.

### **1.3.5. Речник**

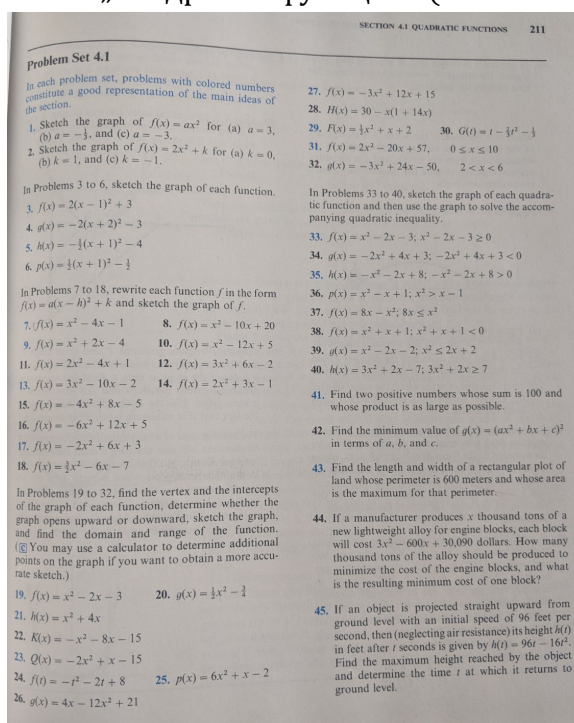
Използваният речник трябва да е съобразен с възрастовата група и очакваната зрялост и образованост на учениците. Дисертацията разглежда приложни задачи в гимназиален курс. Очакването е, че на тази възраст подрастващите са добили нужната езикова култура, богат речников запас и боравят умело със сложна лексика и терминология. Препоръката за условията на приложните задачи е използваният речник да бъде на ниво, разбираемо дори за човек, който няма нужната математическа подготовка, за да реши задачата. Например: вместо локален максимум и минимум да се търси най-голяма стойност, където това е подходящо; вместо интервали на монотонност – растене и намаляване, да се използват думи като увеличаване и спад. Динамичното време, в което живеем е причина регулярно да се обновява използваната лексика и стойностите на величините. Напр. във време на високоскоростни влакове, тези които се движат с 40 км/ч не изглеждат реалистично; откъснати от живота, в който текстообработката се прави на компютри, а голяма част от производството е роботизирано, са примерите с машинописки, които набират 10 страници текст за един час или стругари, които изработват детайли.

### **1.3.6. Разнообразие**

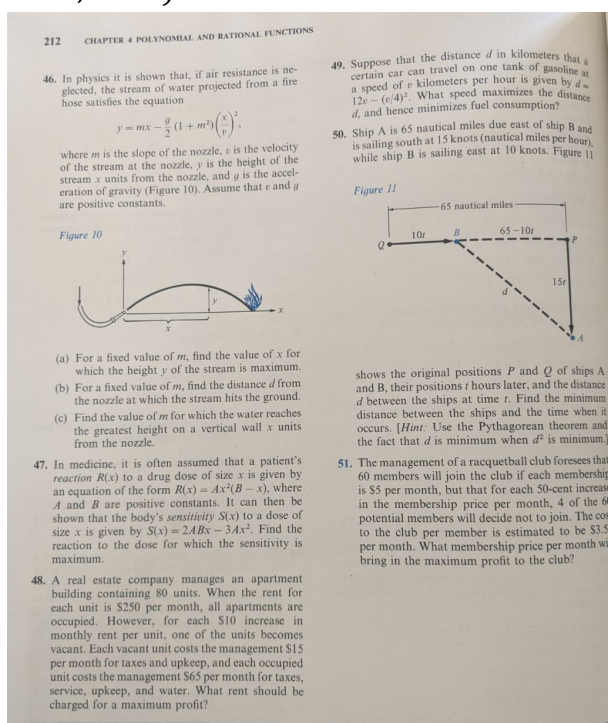
В Германия и Австрия при завършване на образованието си учителите задължително имат основен и допълнителен предмет, по които преподават. До втората половина на миналия век обичайна практика е била математика и физика, но понастоящем се срещат разнообразни комбинации, напр. математика и история; математика и етика; математика и немски. Изследване в Австрия в края на миналия век сред над 1000 участници – ученици, учители, студенти бъдещи учители има за цел да разгледа представите на отделните групи за математиката и връзката ѝ с реалния живот. Един от отбелязаните проблеми е затруднението на учителите и студентите да развият и създават приложни задачи. (Humenberger,

1996) Този проблем кореспондира с препоръките на МОН за осъществяване на междупредметни връзки. Интересни, полезни, реалистични задачи, онагледяващи приложението на математиката в различни области, могат да бъдат създадени при синхронизирани учебни програми по отделните предмети. Колективната работа на преподавателите има за цел обучение на учениците на интелектуално, а не на информационно ниво. Разнообразни по проблематика задачи са резултат от обединените усилия на учителите по математика, биология, химия, физика, география, информационни технологии. Това е добра практика, наложила се от години в други образователни системи.

Фиг. 3 и Фиг. 4 са пример за разнообразието на текстови задачи в рамката на темата „Квадратни функции“ (Munem & Foulis, 1986).



Фиг. 3: Преговорен урок (1)



Фиг. 4: Преговорен урок (2)

Впечатление прави **тематичното** разнообразие на задачите:

- определяне на страните на правоъгълен участък земя с максимално лице при зададена периметър (зад. 43);
- минимизиране на разходите за производство (зад. 44);
- максимална височина на изстрелян обект (зад. 45);
- водна струя, гасяща пожар, вплетена във физичен закон, зададен с формула и онагледен с изображение (зад. 46) ;
- чувствителност на човешки организъм към лекарство (зад. 47);
- определяне на наем за максимизиране на печалба на няколко имота с прилежащи разходи (зад. 48);
- определяне на скоростта на движение с цел минимален разход на гориво

(зад. 49);

- определяне на минимално разстояние между движещи се обекти (зад. 50);
- максимизиране на печалба на спортен клуб, когато промяна на цената на абонамента води до промяна на броя на членовете (зад. 51).

Друг аспект е нивото на сложност:

- първите задачи са по-скоро рутинни задачи за упражнение
  - чертане
  - определяне на координатите на върха на параболата
  - определяне на координатите на пресечните точки на функцията с координатните оси
  - определяне на допустими стойности
  - определяне на интервала на функционалните стойности
  - допълнителна работа с калкулатор
- анализиране на процес при зададена функция на изменението
- анализ и синтез на функция.

### 1.3.7. Критерии за задачите

Според Cai & Lester учителите трябва да се ръководят от редица критерии при избор на задачи. Предложеният в литературата списък съдържа десет критерии, като първите четири от тях се приемат за задължителни:

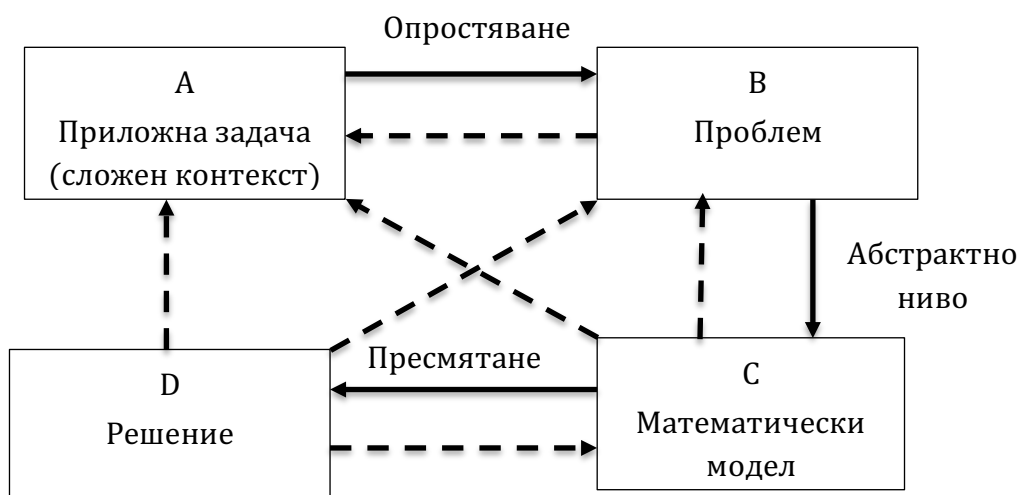
1. В задачата е заложено конкретно, целево математическо съдържание.
2. Задачата изисква комбиниране на знания, а не само упражнение на рутинно ниво.
3. Задачата допринася за развитие на концептуалното мислене.
4. Задачата създава възможност за учителя да прецени какво са научили учениците му и къде изпитват затруднения.
5. Учениците могат да подхождат към задачата по различни начини, като използват различни стратегии за решаване.
6. Задачата има различни решения или позволява да се вземат и защитават различни решения или позиции.
7. Задачата насърчава ангажираността на учениците и дискусия.
8. Задачата се свързва с други важни математически идеи.
9. Задачата насърчава умелото използване на математиката.
10. Задачата дава възможност да се упражняват важни умения (Jinfa Cai, 2010).

Често избраната задача не отговаря на всички критерии. Например 10. критерий е приложим при избор на задачи за упражнение по дадена тема. По-широк смисъл имат 6. и 7. и се отнасят до развиване на умения на 21. век – самонасочване, групова работа и компетентно защитаване на позиция. От своя страна 5., 8. и 9. са приложение на математиката за развитие на компетентности –

*problem-solving*, боравене с информация, критично мислене. Изброените критерии са в съзвучие с темата и целите на дисертацията и се използват като система за оценяване на значението на разглежданите приложни задачи.

#### 1.4. Решение на текстова задача

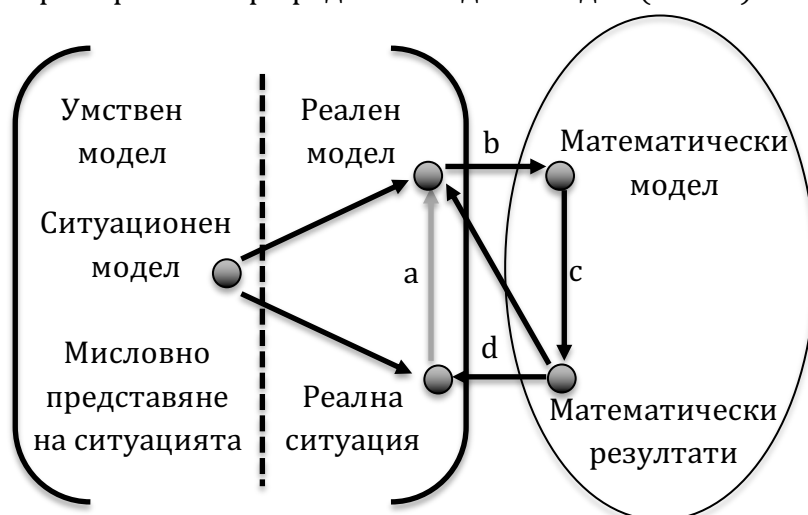
При решаване на проблем, в началото липсват ясни ходове и осъзнати представи. Според Lester & Kehle успешен *problem-solving* включва координиране на предишен опит, знания, познати представи, модели за правене на изводи и интуиция, за да се извършват познавателни дейности, като някои от тях не са рутинни. (Lester F. K., 2003) На Фиг. 5 Ф. Лестър онагледява процеса на решение, който започва, когато индивидът работи по сложен проблем – реален или измислен. В началото се опростяват сложните структури и се отделят важната информация и връзки, като в процеса се игнорира ненужното. След това се изгражда „скеле“ на реалната ситуация, с което се работи по-осъзнато отколкото с първоначалния текст. Създаването на абстрактния модел е свързано с използване на математически понятия и означения. Така се стига до добре дефинирана математическа задача, която трябва да се реши и да се направят математически заключения. През тази фаза индивидът прилага математически знания, умения, прави съждения, които не са пряко свързани с първоначалния контекст. Пунктираните стрелки сочат как намереното решение трябва да се сравни и тълкува спрямо останалите фази. Решаващият се движи между двата свята – този на поставения проблем и света на математиката. Сравнение и проверка за смисленост протича на всеки един етап. Количеството такива сравнения може да е индикатор за сложността на проблема. (Lester F. K., Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction, 2013)



Фиг. 5: Модел на сложна математическа дейност

В литературата са описани и други сходни варианти на този кръговрат,

например А. Филер предлага следния модел (Фиг. 6):



Фиг. 6: Кръговрат при моделирането

Модел на кръговрата

- a) Идеализиране
- b) Изследване на модела
- c) Математическо решение
- d) Обратно интерпретиране

(Filler, 2015)

Особената трудност при тези задачи е разбирането на условието. Съветът към учениците е да прочетат 3-5 пъти целия текст, да обърнат внимание на всяка дума и информацията, която тя носи за задачата. Тук се наблюдава първият сериозен проблем. С годините и с голямото количество текстове за прочит хората развиват навици за диагонално или сканиращо четене. Този подход е подходящ, когато е необходимо за кратко време да се прегледа голяма по обем литература. Анализ на резултатите от емпирични изследвания след гимназисти и първокурсници показват, че „преподаването на четене с помощта на техниката за сканиране е ефективно за подобряване на разбирането на повествователен текст“ (Rambe, 2017), но не е приложимо за математически текст. От друга страна стои проблемът за „потенциалната неспособност на голям брой ученици да четат на ниво критичен анализ, достатъчно, за да разберат сложността на изложението и аргументите, които се срещат в по-комплексни текстове, било то в областта на литературата или науката“ (Wolf, 2018). За разлика от художествената и научнопопулярната литература текстовите задачи по математика не са така обемни като текст. Въпреки това, дори накарани да четат на глас, учениците често прескачат предлози, съюзи, понякога дори и съществителни. Навиците за бързо и повърхностно четене и очакването, че задачите са сходни по смисъл, затруднява качествено обхващане на условието. Регулярна и задълбочена работа по приложни задачи развиват **уменията на 21. век** – грамотност, *problem-solving*, боравене с предоставената информация, умение за учене. Заедно с това се повишава самодисциплината и продължителността на концентрирана мисловна дейност.

За целите на дисертацията се разглежда следната разбивка на етапите на работа по приложна задача. Тя се основа на списъка с десет препоръчителни действия и цели на учителя при *problem-solving*, който е предложен от Ф. Лестър



(Lester F. K., 1989) и по-късно модифициран от Алън Шьонфелд (Schoenfeld, 1992). Представената по-долу схема (Таблица 3) съдържа по-общо описание на дейностите и целите, за да бъде полезна както за учителя, така и за отделния ученик. От гледна точка на учителя това са напътствия, чрез които да ръководи решението в класната стая. Перспективата на ученика е свързана с неговите метакогнитивни умения – как да самонасочва поведението си. В оригиналната таблица има две оси на разглеждане – дейност и цел. С аспект заложената проблематика на изследването е добавена трета ос – „Познавателно значение“, която включва когнитивните и метакогнитивни умения и компетентности. Отделните формулировки са конкретизирани, за да отразяват спецификата на заложената тема – ролята на приложните задачи.

Таблица 3: Подход при решаване на приложна задача

Дейност	Цел	Познавателно значение
<b>Преди решаването на задачата</b>		
Прочитане на задачата; Дискутиране на думи или фрази, които са познати или не са напълно ясни.	Значението на концентрирания прочит; Внимание към лексиката	Аналитично четене; Концентрация; Боравене с предоставената информация.
Препрочитане до пълно разбиране на формулираната задача; Вникване в същността на поставения проблем.	Концентриране върху важните данни; Изясняване на съдържанието.	Критично мислене; Математическа грамотност; Дисциплина.
<b>По време на решаването</b>		
Наблюдение; Установяване какъв е прогресът в търсене на решението.	Учителят определя доколко е усвоен материалът; Ученикът може да ревизира подхода си.	Самонасочване; Мотивация; Математическо познание; <i>Problem-solving</i>
Учителят дава насоки; Ученикът обмисля сходни задачи, които успешно е решил, разглежда различни методи и стратегии.	Превъзможване на възникнал блокаж.	Саморегулация; Математическо познание; <i>Problem-solving</i> ; Творчество.
Формулиране на отговор.	Поглед назад дали полученият отговор с смислен.	Критично мислене; Самооценка.
<b>След приключване на решаването</b>		
Разбор на решението.	Обсъждане на различни стратегии.	Комуникация; Математическа грамотност.

Паралел с подобни задачи.	Обсъждане на общата приложимост на стратегиите.	Математическо познание; <i>Problem-solving</i> ; Творчество.
Анализ на особеностите на задачата.	Как отделните елементи на условието дават насока за избор на подход за решаване.	Аналитично четене; Боравене с предоставената информация.

След аналитично и обстойно прочитане на поставената задача трябва да се изгради „... моделът на ситуацията, който е когнитивният корелат между структурата на ситуацията, която авторът на текста има предвид и която читателят разбира.“ В разминаването на този модел от предполагаемия или при невъзможността за съставяне на такъв се състои голямата трудност в решаването на текстови задачи. Задълбочената работа с текст е **КОГНИТИВНОТО** предизвикателство за повечето ученици, защото макар и обикновено недълъг, той е наситен с много информация.

Стратегия за решаване на приложни задачи по физика разширява списъка с практически техники за работа с текста и ролята на учителя (Leisen, 2006):

1. Четене на текст с оглед на поставени към него въпроси (ръководено от учителя);
2. Самостоятелно задаване на въпроси по текста, чиито отговори се съдържат в него;
3. Категоризиране на частите от текста и структуриране текста по смислен начин (приложимо за задачи с дълго условие и преплитаща се информация);
4. Маркиране на термини с един или повече цвята;
5. При нееднородни задачи – допълване на наличните чертеж, графика, изображение с данните от другите части на условието на задачата;
6. При еднородни задачи – прехвърляне към друга форма на представяне чрез създаване на подходящ графичен модел, напр. блок-схема, който да обедини цялата информация;
7. Разбор на текста – отделяне на същественото;
8. Сравнение с други такива задачи и с теорията, която е необходима за решението;
9. Отделяне на ключови думи и съставяне на обобщение текста;
10. Прилагане на схема от 5 фази (отново за прочит):
  - I. Ориентиране в текста;
  - II. Търсене на „островче“ от ясен текст;
  - III. „Превземане“ на текста изречение по изречение;
  - IV. Следване на „червената“ нишка в текста;
  - V. Проверка дали е разбрано правилно съдържанието (само-рефлексия – поставяне контролни въпроси)

Според Д. Пойа решението на задача минава през четири основни етапа (Пойа, 1972):

- I. Етап: Разбиране на условието.
- II. Етап: Изграждане на план за решението.
- III. Етап: Изпълнение на решението.
- IV. Етап: Поглед назад.

Нобеловият лауреат Дезмънд Туту е казал мъдро: „Има само един начин да се изяде слон: хапка по хапка.“ Затова и цитираните по-горе модели могат да се представят като детайлна поредица от действия. В резултат от настоящото изследване чрез комбиниране и разширяване на описаните в литературата стратегии, следвайки етапите на Д. Пойа, с внимание към разглежданата проблематика, като следствие дисертацията предлага следното допълнително фрагментиране.

Решението на приложна задача преминава през следните основни стъпки:

- (1) прехвърляне на информацията на математически език (I Етап);
- (2) структуриране на известната и търсена информация (I Етап);
- (3) създаване на математически модел на реалния (II Етап);
- (4) поставяне на съответните ограничения (II Етап);
- (5) решаване на математическия модел (III Етап);
- (6) оценка на валидността на резултата (III Етап);
- (7) прехвърляне на решението обратно в термините на поставената ситуация (IV Етап);
- (8) формулиране на отговор на поставения въпрос (IV Етап).

## 1.5. Когнитивни и метакогнитивни умения

„Когнитивната психология е наука, изследваща как хората възприемат, учат, запомнят и осмислят информацията.“ (Sternberg & Sternberg, 2011) Когнитивната наука е изследване на човешкия мозък. Тя се занимава с това как се представя и обработва знанието и как се реализират умствените представи и процеси. „Работната памет е системата, която отговаря за временното съхраняване на нова или предварително запаметена информация, която се използва за изпълнението на текуща задача. Нейният капацитет е ограничен. Съществуват два вида работна памет: слухова памет и зрително-пространствена памет. Установено е, че зрително-пространствената памет е важна за решаването на изчислителни задачи. Вариациите в капацитета на работната памет на индивида могат да се дължат на това колко бързо се обработва информацията, на знанията на човека или на способността му да игнорира несъществените знания. ... (а) съхранява наскоро обработената информация, за да направи връзка с най-новите входни данни, и (б) запазва същността на информацията за изграждане на цялостно представяне на проблема.“ (Swanson, 2004).

Редица изследвания в областта разглеждат значението на работната памет при решаване на приложни задачи: „Чрез работната памет ученикът превежда текста на математически език; тъй като трябва да изгради модел, множество части от информацията трябва да се съхраняват и манипулират в паметта. Невербалното разсъждение е не само процесът, чрез който учениците организират информацията, но и процесът, чрез който учениците идентифицират и изключват неуместната информация. По този начин решаването на проблеми с думи поставя големи изисквания към работната памет и разсъжденията.“ (Amber Y. Wang, 2016) Сходен е и изводът от изследване на Dalal Farahan Alenezi сред 472 ученици. Всеки въпрос от теста му е формулиран по различен начин за двете наблюдавани групи – приложно или директно символно. „Начинът, по който въпросите или задачите са зададени на учениците, е много важен, за да могат те да ги разберат и да успеят да ги решат. Данните показват, че въпросите, които са по-приложни, обикновено пречат на доброто представяне. Това почти сигурно се дължи на факта, че по-приложният формат на въпросите увеличава изискванията към работната памет. От друга страна, обичайното визуално представяне има тенденция да подпомага учениците да решат правилно задачата. Това е така, защото визуалното представяне на задачата може да предостави много информация като едно парче и това може да помогне да се сведе до минимум натоварването на работната памет. Някои сложни изображения с много информация обаче могат да попречат на разбирането на учениците и да претоварят пространството на работната памет.“ (Alenezi, 2008)

Предмет на разглеждането е учебният процес на ученици в гимназиален курс. Според Пиаже това е *Етапът на формалните операции* (от 11 г. до зряла възраст) – справяне с **хипотетични** ситуации, комбинативно решаване на проблеми, проследяване на **собственото мислене** (Piaget, 1970). Според Riding & Rayner „когнитивен стил“ се определя като „предпочитания и обичайния подход за организиране и представяне на информация“. (Riding R. &, 1998)

В статията си „Измерване на зависимостта от полето: когнитивен стил или когнитивна способност?“ МеКена прави паралел между когнитивен стил и когнитивна способност:

- „Способността е по-скоро насочена към нивото на изпълнение, докато стилът се отнася до начина на изпълнение.
- Способността е еднополюсен показател (по-малка способност срещу по-голяма способност), докато стилът е двуполусен (визуален срещу вербален).
- Способността има стойности, свързани с нея, така че единият край на измерението на способността е ценен, а другият – не (изпълнението на всички задачи ще се развива с увеличаване на способността), докато за измерението на стила нито един от двата края не се счита за по-добър като цяло.

- Способността има по-тесен обхват на приложение от стила.“ (McKenna, 1984)

Стиловете могат да се разглеждат като два големи клъстера: „**Цялостен-аналитичен**: влияе на когнитивните процеси по отношение на мисленето, разсъжденията и разглеждането и на начина, по който при реагиране на информация и ситуации индивидът е склонен да обработва информацията като цяло или на части. **Вербално-образен**: засяга характерния начин, по който хората представят информацията, като мислят вербално или в образи.“ (Riding R. &, 1991)

В дисертацията си Dalal Farahan Alenezi прави подробен анализ на литературата и стига до обобщението „Терминът, ‚конвергентно мислене‘ се отнася до способността да се използва материал от различни източници и да се фокусира или да се стигне до един правилен отговор, за да се намери решение на даден проблем. Другият термин ‚дивергентно мислене‘ се отнася до способността творчески да се доразвиват идеи, за да се измислят нови. Лицата с конвергентно мислене получават високи резултати при решаването на задачи, изискващи едно конвенционално правилно решение, което очевидно може да се получи от наличната информация (като в тестовите за интелигентност и математика), като в същото време получават ниски резултати при задачи, изискващи намирането на няколко еднакво приемливи решения.“ (Alenezi, 2008)

За целите и проблематиката на настоящата дисертация и в подкрепа на заложените хипотези се използва неформалната разбивка на метакогнитивни умения, дадена от американския учен Алън Шьонфелд (Schoenfeld, 1992):

- (1) Декларативното знание на индивидите за техните когнитивни процеси;
- (2) Саморегулиращи процедури, включително самонаблюдение и взимане на решения;
- (3) Вярвания и убеждения и тяхното влияние върху представянето.

С оглед поставените задачи дисертацията се придържа към думите на Ф. Лестър, че „метакогнитивните решения влияят на когнитивните действия.“ (Lester F. K., 2013)

В подкрепа на 3. Хипотеза и с оглед на поставените задачи се следва твърдението на В. Блум: „Математическото моделиране е **КОГНИТИВНО** изискваща дейност, тъй като са включени няколко компетенции, в това число и нематематически, необходими са извънматематически и математически познания, а за осмислянето са необходими концептуални идеи и подходящ подход, особено за по-сложни дейности по моделиране. Тези когнитивни изисквания са причина за емпиричните трудности.“ (Blum, 2015)

## 1.6. Знание и умение

Предмет на изследването е развитието на уменията и компетентностите на учениците чрез приложни задачи. За целите на дисертацията се използват

определенията според номенклатурата на Европейската квалификационна рамка за учене през целия живот (Европейска Комисия, 2009)

„Знания“ означава резултат от усвояване на информация в процеса на учене. Знанията са съвкупност от факти, принципи, теории и практики, които са свързани с определена сфера на работа или обучение. В контекста на Европейската квалификационна рамка знанията се описват като теоретични и/или фактологични.

„Умения“ означава способност за прилагане на знанията и използване на ноу-хау при изпълнение на задачи и решаване на проблеми. В контекста на Европейската квалификационна рамка уменията се описват като познавателни (включващи прилагане на логическо, интуитивно и творческо мислене) и практически (включващи сръчност и употреба на методи, материали, уреди и инструменти).

Уменията не се ограничават до пресмятания и построяване на графиката на функцията. Чрез практическите задачи се развиват и допълнителни умения. Сред тях е уменията за аналитично и критично четене. „Ако се разгледат факторите, влияещи върху успеха при решаване на математическите текстови задачи, има смисъл да се разглеждат уменията за четене като подобласт на езиковите умения.“ (Wilhelm, 2016) Езиковото умение се изразява не само в четенето, но и във формулировката на отговора на поставената задача.

Цел на образованието е постигане на „богат диапазон от познавателни и практически умения, необходими за разработване на творчески решения на абстрактни проблеми“ (Европейска Комисия, 2009)

## 1.7. Компетентност и умения на 21. век

За целите на изследването освен определението за компетентност според Европейската рамка се използват и допълнителни литературни източници.

Според Шавелсън (Shavelson, 2010) „Компетентността

- (1) е физическа или интелектуална способност, умение или и двете;
- (2) е способност за извършване на действия, както и за познаване;
- (3) се извършва в разбираеми условия;
- (4) се оценява по някакво ниво или стандарт на изпълнение като „адекватна“, „достатъчна“, „правилна“, „подходяща“ или „квалифицирана“;
- (5) може да се подобри;
- (6) основава се на базисна комплексна способност;
- (7) трябва да се наблюдава в реални ситуации.“

От своя страна след подробен преглед на литературата в областта в дисертацията си Сабине Хамер обобщава „Компетенциите са свързани със справянето с конкретни ситуации и изисквания. Затова, ако искаме да определим конкретни компетентности, е необходимо да анализираме изискванията, които

трябва да бъдат изпълнени, и които дават информация за степента, в която е развита дадена компетентност у човека. Освен това е необходимо да се определят критерии, които да предоставят информация за това дали и до каква степен изискванията са успешно изпълнени.“ (Hammer, 2015)

Задълбочен анализ на публикации за значението на **творческото** мислене в математиката е изложен в статията на унгарски автори „Оценка на математическото творческо мислене: Систематичен преглед“. Обхванати са 644 статии, публикувани в периода 2011–2021 г. в индексирани издания, като 70 от тях са дискутирани по-подробно. Общият извод сочи: „Въз основа на рамката на 21-ви век **креативността** може да помогне на учениците бързо да развият компетентностите си.“ (Suherman & Vidákovich, 2022)

Обект и предмет на настоящата дисертация са развитието на компетентностите и повечето от уменията на 21. век чрез работа върху приложни задачи (2 стр.). За целите на изследването е направен следният паралел между тях (Таблица 4).

Таблица 4: Компетентности и умения на 21. век

Компетентности	Умения на 21. век
Способност за използване на знания и умения	Четивна, математическа и дигитална грамотност
Поемане на отговорност при вземане на решения	Критично мислене, <i>problem-solving</i>
Степен на самостоятелност	Умения за учене, самонасочване и самооценка Боравене с предоставената информация
Преглед и развитие на собствените постижения	Критично мислене
Проява на новаторство	Творчество

## 1.8. Функционална и множествена грамотност

Грамотността е заложена в уменията на 21. век, но според изследването наблюдаваният проблем засяга нивото на функционалната и множествена грамотност на учениците, което е причина за по-подробно разглеждане на тези две понятия.

Според документите на ЮНЕСКО **грамотността** е „способността човек да идентифицира, разбере, интерпретира, създаде, комуникира, пресметне и използва отпечатани и написани на ръка материали, свързани с различни видове контекст. Грамотността включва продължителен процес на учене, който позволява на човек да постигне целите си, да развие знанията и потенциала си, както и да участва пълноценно в общността и обществото, към което принадлежи“ (UNESCO, Literacy, a UNESCO perspective, 2003). От друга страна **функционалната грамотност** е набор от умения и компетентности, които позволяват на един човек да се справи успешно с реални житейски ситуации в съвременното общество. Проблемът,

споделен от множество изследователи, се обобщава в публикацията на Вернер Блум: „Друго добре документирано наблюдение е, че учениците обикновено нямат стратегии за решаване на проблеми от реалния свят. По-общо казано, учениците обикновено не обмислят своите дейности и, което е тясно свързано с това, не са в състояние да прехвърлят знанията и уменията си от един контекст или задача към друг контекст или задача, дори ако има структурни прилики.“ (Blum, 2015)

„Функционалното математическо образование е способността да се активират математическите понятия дори във вътрешноматематически или извънматематически контекст, който се различава от първоначалния учебен контекст.“ (LEUDERS, 2003)

В лекциите си А. Филер обръща внимание на студентите – бъдещи учители, че „във връзка с свързаните с приложните аспекти на преподаването на математика, през последните две десетилетия се налага изискването, че учениците трябва да могат да се справят с всеобхватни реални проблеми, да боравят умело математическите модели и да тълкуват критично получените решенията, спрямо зададената ситуация.“ (Filler, 2015)

Изследване върху над 3000 ученици, макар и не директно свързано с математиката, засича движението на погледа и проследява как те работят с кратко текстово задание. Измерванията са от скорост на четене, пъти на препрочитане на целия текст или части от него. Изводите обаче са приложими за всякакъв вид материали, включително и математически задачи: „Настоящите констатации предполагат, че не всички деца се научават сами да се съсредоточават върху съответната информация в задачите и следователно биха могли да се възползват от целеви инструкции за стратегия за четене. Такова обучение може да включва размисъл върху това коя част от възложената задача е от решаващо значение да се разбере и запомни, за да се изпълни задачата. В допълнение, учениците трябва да бъдат напътствани да наблюдават собственото си разбиране и представяне в паметта на възложената задача, така че да се научат да забелязват кога са готови да пристъпят към действителната задача. ... Констатациите от настоящото изследване подчертават важноста учениците да разбират задачите за четене и да изграждат подходящи за задачите стратегии. Такива стратегии трябва систематично да се преподават в училищата“. (Jarkko Hautala, 2019)

„Предполага се, че смисловото четене не може да бъде пасивен процес на линейно приемане на информация, а трябва да прилича на активно когнитивно действие, което структурира езиковите възприятия, разкривайки асоциативни, подреждащи, йерархични и оперативни връзки. Важно е да се разбере значението на термините, връзките и операциите, използвани в проблема.“ (Maier & Schweiger, 1999) Необходимостта учителите да са способни успешно да развият уменията за такова смислово и осъзнато четене у учениците си е една от причините за обособяването на избираемата дисциплина „Познавателни процеси в математиката“ във Факултета по Математика и Информатика (ФМИ) на Софийски



университет „Св. Климент Охридски“ (СУ) – катедра „Обучение по математика и информатика“ (ОМИ). „Философията на дисциплината е да интегрира различните научни области – психология, педагогика, методика и математика, в контекста на преподаване, изучаване и овладяване на знания по математика ... . Стремещът е за максимална интерактивност, актуални литературни източници, разнообразни учебни материали, международни практики и творчески задания.“ (Тонова & Иванов, 2022)

## Обобщение

Темата, целта, задачите и хипотезите на настоящата дисертация разглеждат ролята на **приложните задачи** за развитие на знанията и уменията – не само математически, компетентностите, функционалната и множествената грамотност. Подробният анализ на приложните задачи от гледна точка на формулировка, структура, речник и разнообразие дава възможност те да се опишат като инструмент. Критериите за тяхната оценка, описанието на подходите към решението, проследяването на процеса на решаване като взаимодействие между учител и ученик служат като ръководство за използване на този инструмент. Тълкуването на познавателното значение на отделните дейности и цели при решаването на задачи, базирани на близки до реални, житейски ситуации посочват роля на тези задачи за надграждането на когнитивните и метакогнитивни умения на учениците.

## 2. ГЛАВА: МАТЕМАТИКАТА В ОБРАЗОВАНИЕТО

---

Водещо в образованието е целеполагането. Темата и предметът на дисертацията следват разбирането на Ив. Тонов „Процесът на изграждането на математическото мислене минава през овладяването на различните подходи и техники към задачите по математика.“ (Тонов, 2012)

С оглед на заложените цели на изследването се следва тезата на Алън Шьонфелд за ролята на обучението по математика:

- Да даде възможност на учениците да добият представа за дисциплината – нейния обхват, приложение и история, да се научат да я ценят и да могат да я прилагат;
- Да развие у учениците разбиране на концепциите – не механично да прилагат техники, а да могат гъвкаво да боравят с наученото;
- Да даде възможност на учениците да изследват широк кръг от задачи, вариращи от упражнения, приложни задачи, задачи за анализ и синтез. Да предостави богат набор от подходи и техники за решаване – директно приложение на подходящия алгоритмичен метод, техники за моделиране и евристични техники за *problem-solving*.
- Да помогне на учениците да развият уменията да анализират, да възприемат структурата и да установяват структурните връзки.
- Да помогне на учениците да развият писмена и вербална прецизност на аргументацията и изказа си.
- Да развие у учениците умение за работа с текст и други математически материали и да ги направи независими учещи. (Schoenfeld, 1990)

В германски учебник по дидактика се обръща внимание „В случая с индикативните цели на обучението по математика се прави разграничение между интердисциплинарни цели и общи цели на обучението по математика. Обучението по математика може да има специален принос за постигането на много **интердисциплинарни цели**. Сред тях са например способността за логическо мислене, способността за общуване и внимателна употреба на езика, способността за критика, способността за мислене при решаване на проблеми и способността за визуализация.“ (Appell)

С развитието на изкуствения интелект популярни стават различни негови реализации. Интересно е какъв отговор на въпроса „**Защо учим математика в училище?**“ дават две популярни платформи – ChatGPT (Фиг. 7) и Perplexity (Фиг. 8).



Учим математика в училище по няколко основни причини:

1. **Развиване на критично мислене и логика:** Математиката насърчава развитието на логическото мислене, аналитичните умения и способността да разсъждаваме систематично. Тя ни учи да анализираме проблеми и да извеждаме заключения чрез точни и последователни стъпки.
2. **Подготовка за реални ситуации:** Математиката има множество приложения в реалния свят - в икономиката, инженерството, науката и дори в ежедневието. Разбирането на основни математически концепции ни помага да разбираме и обработваме информация по-ефективно и да се справяме с разнообразни задачи.
3. **Подготовка за бъдещи професии:** Много професии изискват поне базови математически умения. Независимо дали става въпрос за инженер, финансист, учен или дори артист, математическото образование може да подготви по-широк кръг от умения, които са полезни на работното място.
4. **Развиване на творчески умения:** Математиката не се свежда само до рутинни изчисления. Понякога се изисква творческо мислене и иновативен подход за решаване на проблеми. Процесът на намиране на нестандартни решения може да стимулира творческото ни мислене.
5. **Развиване на умения за решаване на проблеми:** Математиката ни учи как да се справяме с трудни и сложни задачи, как да изграждаме стратегии за решаването им и как да търсим варианти, когато първоначалният път не довежда до резултат.
6. **Осигуряване на образователна основа:** Математиката е основен компонент на много други дисциплини, като физика, химия, компютърни науки и други. Добро разбиране на математиката ни помага да разбираме и други науки по-лесно.
7. **Подготовка за живота:** Разбирането на основни математически концепции, като разпределение на време, работа с пари, измерване и вероятности, е важно за участието ни в обществото и за правилното функциониране в ежедневието.
8. **Подготовка за академично напредване:** Ако планирате да продължите образованието си след училище, математиката е често изискван предмет при влизането в университети и специализирани програми.

Тези причини показват, че математиката не само ни предоставя специфични знания, но и развива умения, които са ценни за цялата ни животна и професионална кариера.

Фиг. 7: Отговор от ChatGPT (ChatGPT, 2023)

Разширен отговор на същия въпрос дава Perplexity като в допълнение добавени източниците, които са използвани за генериране на информацията – Фиг. 8.

## Защо учим математика в училище?

### ⚡ Quick Search

7 причини да учим математика - Походът

📍 pohodut · 1

5 причини да учим математика - Nauka-...

📺 offnews · 2

Защо се учи математика в училище? - Davitoz -...

📺 davitoz · 3

Защо е важно да учим математика - Advice.bg

📺 advice · 4

Защо математиката е толкова важна? - Telerik...

📺 telerikacademy · 5

Защо трябва да се учи математика - 24 Часа

📺 24chasa · 6

### ☰ Answer

Учим математика в училище по множество причини, като някои от тях са <sup>1</sup> <sup>2</sup> <sup>3</sup> <sup>4</sup> <sup>5</sup> <sup>6</sup> :

- Развива логическото мислене: Математиката насърчава логическото мислене, което е полезно не само в училище, но и в живота като цяло.
- Подобрява пространственото мислене: Математиката насърчава пространственото мислене, което е полезно за решаване на проблеми, свързани с дизайн, инженерство, архитектура и други.
- Подготвя за работа в различни области: Математиката е важна за работа в много области, като наука, технологии, финанси, медицина и други.
- Подобрява критичното мислене: Математиката насърчава критичното мислене, което е полезно за анализиране на информация и вземане на решения.
- Подобрява комуникационните умения: Решаването на математически задачи изисква ясно изразяване на мисли и идеи, което подобрява комуникационните умения.
- Подобрява способността за решаване на проблеми: Математиката насърчава способността за решаване на проблеми, което е полезно в живота като цяло.
- Подготвя за висше образование: Математиката е важна за много висши училищни програми, като наука, технологии, инженерство, финанси и други.

Тези причини са само част от множеството причини, поради които учим математика в училище.

Фиг. 8: Perprexity (Perplexity, 2023)

## 2.1. Образование

Поставената в дисертацията тема е разглеждана в годините от учени в областта. Те описват различни аспекти на образованието за развитието на математическото мислене. За целите на дисертацията се проследява подходът към заложената проблематика и хипотези чрез кратък исторически преглед.

В началото на миналия век Едуард Торндайк разработва **закона за ефекта**. Според него акт, който се следва от благоприятен ефект, е по-вероятно да се

повтаря в подобни ситуации, а акт, който се следва от неблагоприятен ефект – по-малко. Той подчертава ролята на последствията от настоящото поведение за определяне на бъдещото поведение (S-R стимул – реакция) (Славин, 2004). Принципът се базира на експерименти с животни и аргумента, че „нашият психичен живот е израснал като посредник между стимул и реакция“ (Thorndike, *Animal intelligence: Experimental studies*, 1911). Друг негов извод е, че „трудност - временен неуспех - неадекватност на вече съществуващите връзки - е съществен и необходим стимул за мислене и учене“ (Thorndike, *The Psychology of Arithmetic*, 1929). Това повлиява и на преподаването на математика като се налага възгледът, че са необходими само много тренировките и упражненията. Въпреки приносът му за теорията на учене, тя има недостатъци от гледна точка на преподаването на математика, защото поставя ученика в роля на пасивен участник, който винаги се нуждае от мотивация и подкрепа от обучаващия, защото не дава възможност на учащия да създава, експериментира и развива собствените си способности. (Islam, 2015) „Тренировката и повторението не са приложими за вникване в смисъла.“ (Brownell, 1935)

Представител на прогресивната школа е Джон Дюи, един от основателите на движението на прагматизма. В своята книга „Как мислим“ той разглежда мисленето като цялостен процес, а не изолирано в контекста на отделна наука, но изводите му са преносими и за обучението по математика. Дюи обръща особено внимание на ролята на учителя да стимулира независимо мислене, а не подход – „да намериш отговора“ и „... по отношение на любознателността учителят обикновено трябва повече да се учи, отколкото да обучава. Той рядко може да претендира, че я разпалва или дори усилва... проблемът му е да закриля изследователския дух.“ Той изказва тезата, че „интелектуалната цел на образованието е изцяло и единствено логическото в този смисъл, а именно, формирането на грижливо, внимателно и изчерпателно мислене“ (Дюи, 2002).

От своя страна Д. Поля предлага структурен подход за решаването на задачи, който се използва за справяне с проблеми и в други области. За него особено важна е ролята на учителя и интеракцията му с ученика. Подрастващите трябва да получават насока и подкрепа, но не твърде малка или твърде голяма, за да не се чувстват безпомощни, но и да усещат своя принос за решението, да се вживеят в ролята си на изследователи. Той призовава учители да се поставят на мястото на учениците, за да могат по-добре да си представят какво вероятно те не забелязват, за да насочат натам вниманието. Трудовете му съдържат богат набор от примерни задачи и анализа им от гледна точка на ролята на учителя за развитие на математическото мислене в учениците.

До 70-те години на миналия век образователната парадигма е процесуално-формалистична (*procedural-formalist paradigm*). Незадоволителните резултати от образованието по това време, развитието на когнитивната психология и теорията на Пиаже за развитието на интелектуалната компетентност водят до

преразглеждане не само съдържанието на училищната математика, но и вниманието се насочва и към въпроса как учениците учат математика. Наблюдава се смяна старата парадигма с нова когнитивно-културна парадигма (cognitive-cultural paradigm). В подкрепа на 6. Хипотеза е изискването и учителите да се възприемат като постоянно обучаващи се и развиващи се (Ellis & Berry, 2005).

## 2.2. Новата образователна парадигма

Кредото на новата образователна парадигма за **учене през целия живот** е заложено в хипотезите на дисертацията – за ученици (1) и учители (6). Развитието на технологиите, изкуствения интелект и глобализацията са едни от факторите за прехода.

Задача на изследването е да се сравнят публикации и нормативни документи, отразяващи прехода към новата образователна парадигма. В литературата се срещат различни описания. След подробен анализ на документи от ЕК и на база публикувана монография по темата Ч. Катански дава следната дефиниция „Ученето през целия живот е система от образование, която ще осигури цялостен процес на формално, неформално и/или информално (самостоятелно) учене във всяка възраст на човека, чрез който да се подпомага неговото развитие и ефективно осъществяване на основните му социални функции.“ (Катански, 2008)

Новата образователна парадигма е в отговор на глобализацията, темпа на развитие на технологиите, свободния и лесен достъп до информация. Това поставя сериозни задачи за промени пред обществото и институциите. Има много въпроси за бъдещето на този преход, участието на пазара, реакцията на индивидите, опасността от маргинализиране. „Създаване на култура на учене е логичният израз на ученето за цял живот – то изисква учене, основано на свободен избор, на рефлексивност и самопознание, на вътрешна мотивация, на устойчивост, на планиране на собственото учене и развитие и на съзнателно търсене на образователни партньорства в този процес.“ (Вълчев, 2012)

Организацията за икономическо сътрудничество и развитие (ОИСР) и UNESCO започват още през 70-те години на миналия век да развиват политика за образование през целия живот, която е заложена на ниво нормативни документи в много страни. По-късно тази парадигма (90-те години) да се преплита с учене през целия живот, като в наши дни това е основна цел. (Field, 2001)

На ниво институции, с подкрепата на ЕК, ERASMUS+ и UNESCO, МОН, правителствени и неправителствени организации, се работи за развиване на институционализираните форми на образование – формално и неформално, това са базовото образование, курсовете за квалификация и преквалификация, допълнително професионално образование. Неинституционализираната форма на ученето през целия живот е ориентирана към информалното образование: самостоятелно учене и стихийно самообразование; учене чрез правене и обучение

по метода на проби и грешки; кооперативно, съвместно или екипно учене, предполагащо взаимно обучение в процеса на изпълнението на едни или други групови задачи; електронно и медийно учене, насочено към получаване на нови знания посредством информационните технологии и масмедииите. (Лавренцова, 2014)

Подробен разбор на парадигмите и тяхното отражение върху образованието прави Иван Иванов. Интерес представляват описаните от него съвременни тенденции – формираща (традиционна) и хуманистична (личностно ориентирана). Докато първата е необходимият инвариантен фундамент (особено на елементарно и средно ниво), на който се основава образованието като цяло, то втората цели вместо с пасивно запомняне, чрез активно предаване на знанието да формира в учащите устойчив светоглед, да ги подготви да се ориентират в сложни проблеми в живота. (Иванов, 2005)

### 2.3. Мотивация

Интелектуалното любопитство и емоционалната ангажираност се отразяват на мотивацията. Актуално и днес остава твърдението на Д. Пойа – „най-добрата мотивация е интересът на ученика към задачата му.“ (Рóйа, 1981)

В дисертацията си Н. Николова извежда и доказва хипотезата „Синергията между проектен и изследователски подходи способства за пълноценно усвояване на учебното съдържание по информатика и информационни технологии при паралелно изграждане на ключови компетенции и важни нетехнически умения у учениците, повишава мотивацията за учене и създава основа за устойчивост на постигнатите резултати.“ (Николова, 2016) Близостта на научните области дава основание да се очакват сходни резултати и изводи при проверка на 1. Хипотеза (стр. 7) – повишаване на мотивацията и устойчивост на получените знания при работа с приложни задачи.

### 2.4. Творческо мислене в математиката

Едно от уменията на 21. век е креативността и нейното стимулиране чрез регулярна работа по приложни задачи е заложено във 2. Хипотеза. При решаване на текстови задачи творчеството се изразява в подхода за създаване на „скелето“, комбинацията от използваните методи, прилагането на дигитални технологии както в процеса на решение, така и в документирането на представянето му. При задачите за анализ ученикът е в ролята на откривател на един или повече подходи за справяне с проблемната ситуация. Допълнителен стимул за креативността са задачите за синтез, при които ученикът е в ролята на творец.

Повечето източници сочат книгата „Наука и методология“ на Анри Поанкаре (Poincaré, 1914) като първо описание на творческото мислене. Повлиян от неговата

работа Греъм Уолас разработва в книгата си „Изкуството на мисълта“ четиристепенен модел за описване на процеса на творческите мисли „Ако разгледаме едно постижение на мисълта, можем да разграничим четири етапа – Подготовка, Инкубация, Просветление (и съпътстващите го елементи) и Проверка.“ (Wallas, 1926). Този модел е известен като Гещалт модел на творчеството (Gestalt Model of Creativity). Много по-късно Садлър-Смит доразвива и обобщава „Изкуството на творческата мисъл изисква тънък баланс между подготовката чрез дълбоко потапяне в областта, създаване на условия за протичане на инкубацията, позволяване на идеите да възникват възможно най-естествено и свободно, улавяне на същността им, без да се пречи на напредъка им към крайния момент на просветление, и обективна и естетическа проверка на творческата стойност на крайния резултат.“ (Sadler-Smith, 2015)

В статията „Фактори, които оказват влияние върху математическата креативност“ след подробен анализ на литература и изследвания по темата се прави изводът, че този тип мислене може да бъде култивирано под ръководството на учител не само при надарени, но и сред всички ученици. „Четири специфични методи на преподаване, които насърчават творческото мислене са (а) *Problem-solving and Problem-posting* (PSPPT); (б) математическо моделиране; (в) задачи с повече от едно решение (MST); (г) въпроси с отворен отговор. Задачите, които насърчават творчеството, имат определени характеристики, които включват конструиране, **връзка с реалността**, самооценка, документиране, множество решения и обосновки.“ (Kozlowski, Chamberlin, & Mann, 2019)

## Обобщение

Разгледаните аспекти на образованието по математика, смяната на образователната парадигма, нуждата от повишаване на мотивацията за учене и устойчивост на придобитите знания, възможните пътища за развитие на креативността у подрастващите са в подкрепа на заложените хипотези на дисертацията. Образованието по математиката се очаква да развива математическото мислене да стимулира интелектуалното любопитство. Чрез приложните задачи учениците откриват връзката на науката с действителността, което повишава интереса и ангажираността. Личният пример на учителя като активно учещ и неговият изследователски дух са най-силният стимул за развитие на същите качества при учениците. Чрез приложните задачи се постигат и интердисциплинарни цели, наред с това чрез разнообразната си тематика служат като инструмент за осъществяване на междупредметни връзки.



### 3. ГЛАВА: КОНТЕКСТ НА ПРОБЛЕМА

---

Приложните задачи са заложи в курса по математика още от първите класове. Преди да могат да четат децата се учат да събират и изваждат например бонбони. Задачите ангажират въображението им, но и са свързани с познати предмети и действията им с тях.

М. Върбанова подчертава „Изграждането на правилна методика в обучението на учениците в решаване на текстови задачи осигурява достатъчни условия: за изграждане на математически стил на мислене..., изграждане на умения за активно използване на „депата“ на паметта с цел актуализиране на необходими, преди това изучени знания.“ (Върбанова, 2002)

#### 3.1. Парадокс – образование и очаквания

До 80те години на 20 век в България е срамно да се посещават частни уроци и извънредна помощ за предметите от училищния курс. Допълнителни школи има само за учениците с изявени способности и там те се подготвят за международни състезания. С времето това се променя. Разбира се, занимания за изявени ученици продължава да има и с годините те получават по-голяма подкрепа от институции, сдружения като напр. Сдружение на олимпийските отбори по природни науки и фондации, напр. Америка за България. Държавата от своя страна увеличава местата в математическите гимназии, макар да липсва положителен прираст на населението. Превес над школите за състезатели имат множеството курсове по математика, които подготвят учениците за приемни изпити след четвърти и седми клас. Родителите подчертават важността на математиката за образованието на децата им и желаят те да бъдат обучавани в математически паралелки с очакването за по-добро образование и обучение в конкурентна среда. За жалост не науката и мисленето, което тя развива, а оценката по предмета остава основната цел. Математиката от Царица на всички науки се превръща в пръчка за овчарски скок за прием в гимназиите. Пак родителите с присмех говорят за „задачите с думи“, което показва, че дори много от възрастните не вникват в значението им, а именно необходимостта от развитието на уменията за аналитично четене и създаване на математически модел на дадена реална ситуация. Трудно е за подрастващите да направят връзка между житейски проблем и разрешаването му с познанията си по математика. Още по-трудна е задачата на учителите да просветят учениците и родителите им. Така приложните задачи на ранен етап се превръщат в препъни камък. В гимназията учениците, които са усвоили задачите с директно приложение на конкретни правила или последователност от такива, бързо абдикират при проблеми, които имат по-дълги формулировки. Математиката от „важна“ става „трудна“ и наблюдаваме родителски инициативи за олекотяване на материала по математика, докато в други страни по света се

наблюдава обратната тенденция. Вместо инструмент за развиване на мислене и компетентности, математиката се третира като средство за постигане на високи резултати на конкретен изпит.

Програмата за международно оценяване на учениците (PISA) „измерва способността на 15-годишните да използват знанията и уменията си по четене, математика и природни науки, за да се справят с предизвикателствата в реалния живот“ (PISA, 2023). В края на 2023 г. очакваме резултатите от проведеното през 2022 г. изследване. Според резултатите през 2018 г. от PISA по математика сред повече от половин милион 15 – 16-годишни ученици от 79 държави със среден резултат 436 (в точки) се нареждаме на 54. място. За сравнение на първо място е Китай с 591 точки. (ИИО, 2019). В същото време талантливи и мотивирани младежи печелят призови места на международни математически надпревари. Като например на Младежката балканска олимпиада по математика през 2022 г. в Сараево българските ученици завоюваха 1 златен медал, 1 сребърен медал и 3 бронзови отличия, а от Международна олимпиада по математика през 2022 г. в Осло донесоха 2 златни, 2 сребърни и един бронзов медал за страната ни.

Настоящата дисертация се занимава с проблематика, свързана с мястото и ролята на приложните задачи в курса по математика и значението им за развитието на уменията на 21. век, както когнитивните така и метакогнитивните, компетентностите и функционалната грамотност на учащите. Наш дълг като учители и родители е да повишим средните резултати.

### 3.2. Извънкласни занимания

В последните години се наблюдава тенденция на повишен интерес от страна на родителите към подготовката на децата им по математика в началното образование. Увеличи се броят на школите и курсовете, подготвящи четвъртокласници. Сред утвърдените в гр. София школи са:

- [Академия „Атлантида“](#);
- [Курсове НПМГ](#);
- [Образователен Център „Да Винчи“](#);
- [Образователен център „Междучасие“](#);
- [Курсове на ПЧМГ](#);
- Сдружение [СМГ учители](#).

Интересът към такива школи не е случаен. Училищата с математически паралелки се славят с по-високи изисквания към възпитаниците си, с по-добра подготовка и по-високи резултати на НВО след 7. клас. Съответно нараснаха и местата в математическите гимназии с прием след 4. клас. Напр. през учебната 2017-18 г. са обявени 140 места за петокласници в СМГ, а за учебната 2022-23 са записани 203 ученици, а НПМГ „Академик Любомир Чакалов“ от учебната 2021/2022 г. има държавен план-прием след завършен четвърти клас.

Списъкът на школи по-горе е по-скоро маркиращ, отколкото представителен и изчерпателен. Наред с учебните центрове в повечето столични училища се организират допълнителни курсове за подготовка по математика на ученици. Търсенето за варианти за групови допълнителни занимания по математика е още по-голямо сред родителите на ученици от 6.-7. клас. Така към списъка се добавят още не малко школи, например:

- [Образователни технологии](#);
- [Учебен център „Лого 3“](#);
- [Учебен център „Регалия“](#);
- [Школа Веди](#).

Наблюдава се бум и в състезанията по математика за ученици във възраст между 1. и 7. клас. Календарът на надпреварите с традиции, провеждани под егидата на МОН, Съюза на математиците в България (СМБ), Регионалните управления на образованието (РУО) е богат на събития. Въпреки това се появяват нови състезания, които се радват на голям родителски интерес. Вълнението за подготовка, задачи и представяне широко се коментира в социалните мрежи, обменят се условия, кипи взаимопомощ сред хора с различно образование и математическа подготовка. Някои от тези състезания са:

- [Математически звезди](#) (от 2010 г.);
- [Математика без граници](#) (от 2013 г.);
- [Софийски математически турнир за малки таланти](#) (от 2014 г.)
- [Ключът към знанието](#) (от 2023 г.);

По време на пандемията някои школи не успяха да реагират на промените и свиха дейността си, напр. [Учебен център Милениум](#).

На тяхно място се появиха други, които бързо се адаптираха към онлайн обучение, предлагат дистанционна подготовка и редица обучителни видеа, напр. [EasyMath](#). Платформи с образователен характер като [Уча.се](#) укрепиха позициите си на пазара. Инициативата за доброволческо превеждане от английски на български език на безплатната платформа [KhanAcademy](#) добави хранилище с множество задачи и тестове, в които решенията често не отговарят на преподавания в училище подход, обосновка, терминология и методика. Така във виртуалното пространство са достъпни множество задачи, често с решения, образователни видеа, записани от учители по време на пандемията или за целите на онлайн курсове. Дали това допринася за вникване в проблематиката и усвояване на математическия апарат на ниво повече от упражнение или просто служат за преписване на готови решения остава спорно. Критичен преглед върху свободно достъпни материали е подготвен за целите на избираемия курс за магистри във ФМИ на СУ – „Съвременни образователни технологии в обучението по математика“ (СОТОМ). Подчертава се, че във виртуалното пространство, има качествени ресурси и съмнителни такива. Следвайки парадигмата за учене през целия живот

предизвикателството пред учители и ученици е как да се ползват и подбират такива материали. От една страна учителят като ментор (6. Хипотеза – стр. 8) трябва да е информиран и подготвен, за да анализира силните и слабите страни, да препоръча методически издържани материали. Той трябва да може да възпита сред учащите критичен поглед, който се базира не само на опита на учениците в интернет пространството, но и да лежи на тяхната математическа грамотност и подготовка. От друга страна това е подходящ инструмент учениците да развият умения за самостоятелно учене, да търсят информация, да надграждат знанията си – 1. Хипотеза (стр. 7).

Отмина времето, в което сборниците бързо изчерпваха тиража и се предаваха от ръка на ръка. В интернет пространството се споделят сканирани версии на нови и стари сборници, издателствата също реагират бързо и препечатват търсените заглавия. В онлайн форумите и социалните мрежи освен обмен на материали, текат разпалени дискусии сред родители относно задачи по математика за главно 1. – 4. клас от състезания и изпити. Учениците имат свои канали, използват същите или други социалните мрежи, участват във форуми, съответстващи на интересите им, споделят затруднения и задачи. Тук отново учителят-фасилитатор деликатно може да се намеси, да даде съвети как да се структурират хранилищата със споделени задачи, в кои форуми участват водещи учители, в кои платформи могат да намерят висококачествени лекции подходящи за възрастта на възпитаниците си. Преди пандемията университети започнаха отварянето на достъпа до образователни материали. Този процес беше ускорен във времето на COVID-19 и към момента скъпи, елитни учебни заведения предлагат достъп до част от ресурсите си.

Проблемът с преписването без мисъл винаги е съществувал. Мисия на учителя не е да се бори с него, а да провокира, да накара учениците да се замислят над решението, което са записали, да внуши, че във време на достъп до огромна база данни от задачи, човек има откъде да потърси помощ, но негова отговорност е да я разбере, осмисли, доразвие и да приложи в последствие усвоеното знание и придобитото умение. Учениците трябва да се възпитават в дома и училище да не бъдат просто консуматори на информацията, а да използват източниците, за да обогатяват знанията си. „Превръщането на преподавателя в ментор, който трябва да направлява учениците в търсене на информация, анализирането, трансформирането и дори на ниво ново знание е предизвикателство и отговорност.“ (Кюркчийска, 2020)

Камелия Йотовска предлага сравнителен анализа на образователните парадигми на Бихейвиоризма, Когнитивизма, Конструктивизма и Конективизма и значението им за характеристиките за учене, ролята на паметта и образователния софтуер и обобщава: „Конструктивистката философска и образователна парадигма е възприета като методология на дизайна на електронното обучение. Еволюцията на технологиите, от своя страна, влияе върху развитието на електронното

обучение – създава се качествено нова учебна среда, която е гъвкава и адаптирана към индивидуалните особености и потребности на обучаемите в сравнение с традиционната среда.“ (Йотовска, 2016) Все още такава гъвкавост на електронното образование у нас в училищен курс не е реалност. По време на пандемията повечето училища преминаха към дистанционно обучение в електронна среда. За целта се използваха възможностите на MS Teams, Moodle, Google Classroom. В следствие много от тях продължиха да ги използват с цел достъпност до материали на отсъстващи ученици, за самостоятелна работа при отсъствие на учител, за споделяне на задачи, за домашна работа и упражнение, за тестове. Учителите, създаващи електронни курсове, активно учат следвайки парадигмата за учене през целия живот. Те познават учениците, за които са предназначени тези материали и могат да са гъвкави в постигането на образователните си цели. От друга страна стимулирането на критична и проактивна обратната връзка от ученици и колеги е начин за подобряване качеството на тези курсове. Това е друг начин ученикът да бъде активен участник в образователния процес.

### 3.3. Пример – участие в Европейско кенгуру

От 2017 г. участието в Европейско кенгуру става безплатно за четвъртокласници, а по-късно и за всички участници. Причината е, че е рейтингово за прием в математическите гимназии след 4. клас. След като години наред е провеждано в събота (неучебен ден), от 2021 г. се присъединяваме към традицията на другите страни, събитието да в третия четвъртък на месец март. През 2023 г. състезанието отново е организирано в учебен ден, в учебно време. Таблица 5 онаглежда броя участници по класове. Участниците от 10. клас са около 30 пъти по-малко от третокласниците.

Таблица 5: Европейско кенгуру 2023 г. (София – Град)

Клас	Участници
1. клас	3618
2. клас	3716
3. клас	3391
4. клас	3231
5. клас	1816
6. клас	1649
7. клас	850
8. клас	148
9. клас	119
10. клас	109

Спадът е естествен. С възрастта учениците се преориентират според интересите си, започва профилирането, но все още всички гимназисти учат по една

и съща учебна програма, а явно интересът спада. За сравнение в Германия логично се наблюдава също спад, но около 8 пъти (3. клас – 159 230 ученици, 10. клас – 19 632 участници) (Mathematik, 2023). Това е показателно за динамиката на интереса и ангажираността към математиката. Разбира се, не може да се правят така груби и формални обобщения. Макар и изключение, учениците от НЕГ за втора поредна година (2022 и 2023 г.) инициират провеждане на Европейско кенгуру със задачите от училищата в Германия в духа на гимназията и със самочувствие за познаване на езика.

Състезанието Европейско кенгуру не е изолиран случай, през същата година (2023 г.) средните резултати по математика от НВО сред четвъртокласниците е 64,4 от 100 точки, а сред десетокласниците е 34,5 от 100 точки. Средните резултати са признак за много по-големи проблеми в образованието, които не са цел на настоящата дисертация. Очевидно е, че платформи като [domashno.bg](https://domashno.bg) и множеството приложения са удобни за написване на домашни и преписване на контролни, но не допринасят за знанията. Описаната до тук картина, дава контекст на нагласите на родителите и на учениците в по-малките класове. Резултатите на гимназистите приличат на масово абдикирали хора. Промените, които са в ръцете на учителите, опират до мотивираща работа в класната стая. След задълбочена работа по теоретичната част и упражнения, с които да се развие умение за прилагане на алгоритми за решаване на различни задачи, идва ред и място на приложни задачи, които да стимулират и развиват аналитично четене, творческо и критично мислене, справяне с реални проблеми, разрешаване на ситуация. Не на последно място е нужно и отговорно отношение в дома, защото математиката не се изчерпва с приема в желаното училище. Семейството също трябва да е ангажирано с възпитаване и контрол върху ценностните нагласи и ориентации. Докато в малките класове жезълът на подготовката е повече в ръцете на родителите, в по-късен етап мотивацията зависи от самосъзнанието на вече по-зрелите ученици.

Естеството на задачите е подходящ стимул за повишаване на интелектуалното любопитство и интерес в подрастващите. В статията *Problem solving model in Mathematics* е посочено, че един от признаците за класификация на математическите задачи е според „брой на участващите неизвестни компоненти:

- **обучаващи** – с един неизвестен компонент, съставлящи основното съдържание на учебниците по математика;
- **творчески** – с два неизвестни компонента, най-често присъстващи на математическите олимпиади;
- **проблемни** – с повече неизвестни компонента, рядко се срещат в обучението по математика, имат по-скоро производствен и битов характер.“ (Георгиева, 2018)

„Творческите“ задачи са характерни за сериозни математически състезания и олимпиади и не са тема на настоящата дисертация. При тях се изисква прилагане

на комплексни евристични стратегии. Констатацията, че „проблемните“ рядко се срещат, изтъква необходимостта от допълнение на курса по математика с точно такива задачи с тематика от реалния живот. Същият проблем е дискутиран и от Филип Петров в статията му „Приложение на изследователския подход в образованието по информатика чрез един популярен математически фокус (Нов поглед към стари идеи)“. Изследването му показва, че сегашните български учебници имат прекалено много математически задачи и много малко имат пряко практическо приложение. „Мотивирано е мнение, че е нужно в по-голяма степен да се стимулира изследователски подход в обучението по информатика с помощта на практически задачи с фокуси, игри и софизми, а въвеждането в темите да се извършва чрез поставяне на учениците в проблемна ситуация с цел предизвикване на по-силен когнитивен дисонанс.“ (Петров, 2022) Направеният извод не може директно да се пренесе към часовете по математика, където е задължителна предварителна грамотност, за да се включат такива „предизвикателни“ задачи. Въпреки това е безспорно, че при работа по темите поставянето на учениците в проблемна ситуация е стимул за когнитивните процеси.

Тревожен е фактът, че като естествено продължение на резултатите на НВО по математика, все повече ученици споделят, че искат във висшето си образование специалност, в която няма математика. Интересно е, че дори неориентираните какво точно искат, с готовност посочват какво НЕ искат. Това е в остър конфликт с целите на Съвета на Европа „Да се засили съществуващото сътрудничество с цел увеличаване броя на избиращите да учат математика и точни науки в по-високите нива на образование и обучение, както и да се укрепи преподаването по точни науки.“ (ЕСЕТ, 2009)

Разбира се достатъчно избират математика, макар и някои само защото смятат, че ИТ образованието за перспективно и доходоносно, не са тайна възнагражденията и възможностите за реализация в сектора. Проблем от една страна е недостатъчната осведоменост за значението на уменията на 21. век и как математиката ги стимулира и развива. От друга страна е липсата на информация за сферите на приложение на математиката, напр. дори студентите-психолози посещават задължителен курс по статистика, която им е необходима при анализ на резултати от проучвания. Срещи за ранно професионално ориентиране биха били мотивиращи за по-отговорно и заинтересовано отношение към предмета. Допълнение на материала с приложни задачи, които да онагледяват по-широкото приложение на математиката в практиката, е инструмент за повишаване на интелектуалното любопитство и когнитивния интерес.

За целите на дисертацията се прави разглеждане на типовете задачи в учебниците в отделните етапи на обучение. Интерес представляват количеството и разнообразието на приложните такива в паралел с тези в чуждестранните образователни системи.

### 3.4. Прогимназиален курс (5. – 7. клас)

Приложните задачи, често наричани от ученици, родители и учители „текстови задачи“ са големият препъни-камък в прогимназиалния курс. Анекдотите за задачите с тръби и басейни, комбайни и багери, леки коли и камиони, които се движат с средна скорост от 60 км/ч, адресират задачите, които са заложили в учебниците за шести и седми клас. Каква е целта на тези задачи рядко се коментира и остава неразбрана от мнозина. Присмехът, с който възрастни се изказват по темата, е показателен, че порасналите ученици, станали вече родители, не вникват в същността на заданията, а само предават негативното си отношение по темата на децата си. Единствена цел е преследването на максималния брой точки на НВО. Това за пореден път адресира парадокса – математиката е важна, но остава неразбрана. Търсените умения са не за развитие на математическото мислене у подрастващите, а шаблонно решаване на задачи в преследването на високи резултати на изпит.

България не е изолиран пример за този проблем. В биографичната книга „Сигурно се шегувате, г-н Файнман – Приключения с любопитен характер“ американският физик, носител на Нобелова награда, Ричард Файнман е особено остър в критиката си към висшето образование чрез коментар за студентите си: „... така че, както виждате, те могат да полагат изпити и да „научат“ всички тези неща, но да не знаят нищо, освен това, което са запомнили... Накрая казах, че не мога да разбера как някой може да бъде образован чрез тази (само)разпространяваща се система, в която хората полагат изпити и учат другите да полагат изпити, но никой не знае нищо.“ (Richard Feynman, 1985)

Високи резултати на НВО не могат да са цел на образованието, те трябва да са резултат от качествено такова. Как допринасят за това текстовите задачи на тази възраст? Препратка към избраните критерии (стр. 21) посочва, че явно застъпени са „3. Задачата допринася за развитие на концептуалното мислене.“ и „5. Учениците могат да подхождат към задачата по различни начини, като използват различни стратегии за решаване.“, т.е. задачите имат високо познавателно ниво, защото допуснат различни подходи – например аритметичен или алгебричен. Изборът зависи от уменията на отделния ученик, времето за изпълнение, формата на задачата според отговора – затворен или отворен. Изпълнените критерии са в подкрепа на 2. Хипотеза – развитие на компетентности. В допълнение тези задачи правят връзката между езиковата грамотност, която се развива в часовете по Български език и Литература със заданията за „четене с разбиране“ и аналитично четене, при което освен анализ на информационното съдържание на задачата, то трябва да се синтезира до базов математически модел. Боравенето с информация, анализ и синтез са заложили в 4. Хипотеза – тези задачи са стимул за когнитивните процеси.

Конкретно умение, заложило в плана за седми клас, е разлагане на квадратен



тричлен на множители, следвайки метода за отделяне на точен квадрат или чрез подходящо групиране. В края на курса се очаква учениците да умеят да решават уравнения от по-висока степен чрез разлагане на множители и свеждане до решаване на две или повече линейни уравнения.

Сходен тип задачи, който се разглежда впоследствие и в гимназиалната степен, е този за намиране на най-малка и най-голяма стойност на израз. На ниво седми клас стратегията е да се следва отново алгоритъмът за отделяне на точен квадрат.

**Задача 1** (част от 22 задача от НВО 2022 – 7. клас): Да се определи най-малката стойност на израза  $A = (x + 3)^2 + 1$ .

*Примерно решение:*

$$A = (x + 3)^2 + 1$$
$$(x + 3)^2 \geq 0$$

Най-малката стойност на израза  $(x + 3)^2$  е нула, защото всеки точен квадрат приема само неотрицателни стойности. Следователно най-малката стойност на израза  $A$  е 1.

**Задача 2:** Да се определи стойността на параметъра  $c$ , ако най-малката стойност на израза  $B = x^2 + c$  е равна на 2.

*Примерно решение:*

$$B = x^2 + c$$
$$x^2 \geq 0$$

Най-малката стойност на израза  $x^2$  е нула, защото всяко рационално число повдигнато на квадрат е неотрицателно. На този етап учениците боравят само с рационални числа. Следователно най-малката стойност на израза  $B$  е равна на  $c$ , но по условие най-малката стойност на израза е равна на две.

$$\Rightarrow c = 2$$

**Задача 3:** Да се определи най-голямата стойност на израза  $C = -t^2 + 2t + 3$  и стойността на променливата, за която тя се достига.

*Примерно решение:*

$$C = -(t^2 - 2t + 1 - 1) + 3$$
$$C = -[(t^2 - 2t + 1) - 1] + 3$$
$$C = -[(t - 1)^2 - 1] + 3$$
$$C = -(t - 1)^2 + 1 + 3$$
$$C = -(t - 1)^2 + 4$$
$$-(t - 1)^2 \leq 0$$

Най-голямата стойност на израза  $-(t - 1)^2$  е нула и се достига при  $t - 1 = 0$ .

Следователно най-голямата стойност на израза  $C$  е 4 и се достига при  $t = 1$ .

На този етап учениците развиват умение да следват стъпка по стъпка даден

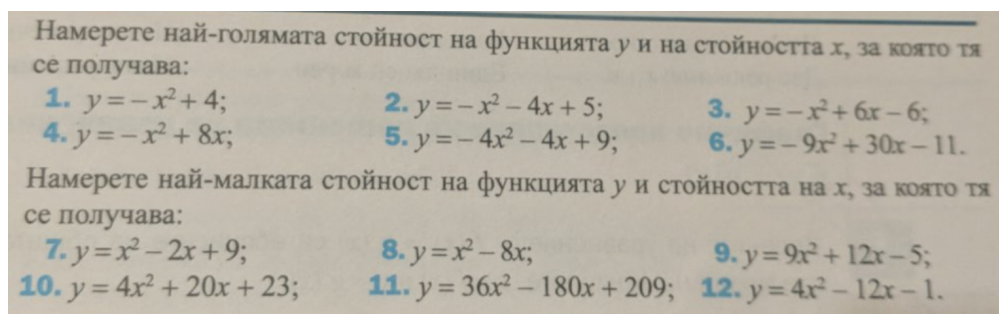
алгоритъм за решаване на задача, като комбинират знанията си за формулите за съкратено умножение, действия с числа и техни свойства. Какво е значението на тази най-малка или най-голяма стойност и с какво тя е полезна при решаване на реални проблеми не се предвижда на този етап на зрялост. В контекста на НВО този въпрос не се повдига. Целта е усъвършенстване на стратегията за решаване на този тип задачи. Някои ученици запомнят подхода за дълго и успешно прилагат алгоритъма и на по-късен етап, но за други остава смътният спомен.

Това поведение е описано от Ив Шевалар като основен проблем на старата образователна парадигма „Основният ефект от тази дългосрочна ситуация е нарастващата тенденция сред учениците да развиват връзка с ‚официалните‘, училищни знания в съгласие с това, което ще нарека принципа ‚Кошче за боклук/Изпразване на кошчето за боклук‘: цялото преподавано знание може легитимно да бъдат забравено или по-точно игнорирано, веднага щом изпитите са положени. Разбира се, това вероятно е толкова старо, колкото системата училище-изпити, но е оформило отношение към знанието, водено от институционални, краткосрочни и лабилни мотиви. Това стои далеч от функционалния подход към знанието, основаващ се на полезността му в реалния свят – да разбереш ситуация, независимо дали е математическа или не, да вземеш решение, или да направиш по-нататъшно проучване на засегнатия проблем.“ (Chevallard, 2015)

### 3.5. Първи гимназиален етап (8. – 10. клас)

В осми клас, следвайки спираловидния модел, се въвеждат формули за решаване на квадратно уравнение, изучават се и формулите на Виет.

В девети клас се разглежда квадратна функция. Учениците определят интервалите на растене и намаляване на функцията като цяло и в интервал, развиват умение да определят координатите на върха на параболата и уравнението на оста на симетрия (Фиг. 9).

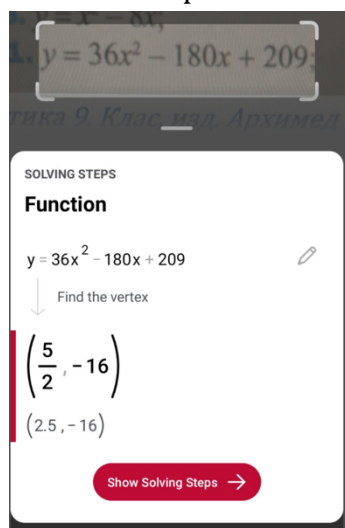


Фиг. 9: Учебник по математика 9. Клас, изд. Архимед (Георги Паскалев, 2018)

Според изисквания на МОН, заложили в програмата за общообразователната подготовка (ООП) по математика за 9. клас (МОН, Учебни програми за IX клас, 2020) като нови понятия са посочени: най-малка стойност на квадратна функция, най-голяма стойност на квадратна функция. Ако се върнем на материала от седми клас,

най-малка и най-голяма стойност не са напълно нови понятия, ново е само разглеждането им в контекста на функция.

Приложни задачи липсват на този етап. Материалът остава строго теоретичен и за много ученици абстрактен. Очакваното умение е отново да се следва ясен алгоритъм за определяне на най-малка и най-голяма стойност на функция с директно прилагане на формула. Така цитираните по-горе примери са по-скоро задачи-упражнения, които се решават, като се следват ясно зададени стъпки. Учениците са винаги с телефон в джоба, а в интернет могат да открият множество приложения, които вместо тях да решат задачата.



Фиг. 10: Photomath (зад. 11)

Пример за това е приложението Photomath (Photomath, 2014), което не само дава директното решение, но то е придружено с разбито на стъпки обяснение. Поради разликите в образователните системи и подхода за решаване на задачи, често има разминаване с очаквания запис и обосновка. В случая няма зададен интервал, а задачата опира до определяне на координатите на върха на параболата, което не е предизвикателство и автоматично се получават търсените стойности (Фиг. 10). Така голямото методическо и морално предизвикателство за учителите е да обяснят защо е важно да се познават теоремите и правилата, как алгоритмите за решаване на тези задачи-упражнения имат значение при решаване на по-сложни проблеми. Невъзможно е да се забрани или ограничи употребата на приложения, затова е ценно да се внуши необходимостта от познание на теоретичния материал и да се развиват уменията за грамотно боравене със съществуващите инструменти. Както развили умения за умножение на числа, използваме калкулатори при по-сложни изчисления, така и с познанието за същността на квадратната функция може да се използват приложения за определяне на особени точки, но тълкуването им и отговорите на поставените въпроси са показателни за нивото на придобитото познание. Следвайки новата образователна парадигма за учене през целия живот и учителите трябва да са в крак с технологиите, да познават приложенията, които учениците използват и компетентно да посочват положителните и отрицателните страни, да напътстват грамотното използване на инструментите и да задават насочващи въпроси за критично тълкуване на предложените решения.

Теоретичните знания са важна основа, нейно естествено надграждане са приложните задачи. Те отговарят на неизменния ученически въпрос „Това за какво го учим?“ Опитните учители умеят да парират подобни въпроси, но задачи, свързани с примери от реалния живот сами по себе си ангажират вниманието и повишават интереса. Безспорно приложните задачи са полезни едва след като е усвоен съответния теоретичен материал. Впечатление прави помагало по

математика за 9. Клас на издателство Cornelsen (Cornelsen, 2022), където след разглеждане на квадратна функция – чертане, определяне на върха на параболата, определяне на коефициентите на квадратна функция по три точки, определяне на функция по връх и допълнителна точка, следва раздел с приложни задачи, като логично обобщение на темата. Без приложни задачи ограничаваме уменията на учениците и подхранваме недоумението им. Често в часовете по География изниква въпросът, защо е нужно да знаем, например столиците на държавите по света, щом Google винаги ще отговори на този въпрос, а с приложението GoogleMaps може за секунди да открием и разгледаме дадена столица. Така в часовете по математика идва въпросът, защото да се учим да решаваме дадени задачи-упражнения, щом подходящо приложение може да ги реши вместо нас.

Според учебната програмата на МОН в 9 клас ученикът трябва да умее да „извлича информация за функции, зададени по различен начин“ и да осъществява междупредметни връзки „с физика и астрономия, химия и опазване на околната среда, биология и здравно образование, география и икономика при темата функции“. (МОН, Учебни програми за IX клас, 2020)

Интересни приложни задачи могат да свържат по-горе изброените предмети и съответните интереси на учениците в различни области. Примери за това са задачи за тяло движещо се по траектория, която може да се опише чрез парабола и съответно да се определи кога се достига най-голяма височина и каква е тя (физика). Мостове, тунели и акри, могат също да се визуализират приближено и опростено чрез парабола, което ангажира вниманието на бъдещите архитекти. Печалбата на дадено производство се представя като разлика на приходите и разходите, които зависят от количеството стока и нейната цена. Ако печалбата се описва със зададена квадратна функция, то при какво количество или при каква цена се постига максимална печалба и каква е тя (икономика). Размножаването на различни биологични видове или процесът на разграждането на инжектиран препарат в организъм могат опростено да се опишат с квадратна функция, което би повишило интереса на ученици, насочили се към биология и медицина. Както в статията си „Математически модели и моделиране в училищния курс по математика – дидактически аспекти и значение“ В. Маринова посочва: „Необходима е системна, целенасочена работа за формиране у учениците на следните умения:

- умение да се открива и изразява на математически език изменението на величините и зависимости между тях, често пъти това са закони от физиката, химията, електротехниката и др.;
- умение внимателно да четат текста на задачата;
- умение да правят първичен анализ на текста, т.е. да отделят условието и въпросите на задачата;“ (Маринова, 2011)

В книгата си „Математическото откритие“ Д. Поля (Pólya, 1981) разграничава четири типа градиращи задачи:

- (1) **Правилото е под носа ти** – характерно за задачите-упражнение, изисква се прилагане на алгоритъм за решение, който е демонстриран в часа от учителя и следва да се повтори от ученика. Често е механично действие. (Фиг. 9).
- (2) **Приложение с елемент на избор** – задача, която е подобна на решаваните, но се очаква да се направи избор измежду изучените в последния раздел правила.
- (3) **Избор на комбинация** – ученикът следва да комбинира методи, изучавани и демонстрирани в други раздели.
- (4) **Доближаване до изследователско ниво** – трудно е да се направи границата между предходното и това ниво

С нарастване на сложността се увеличава и образователната стойност от гледна точка на целта – развитие на математическото мислене.

Ето един пример, как цитираните по-горе задачи-упражнения могат да се допълнят с приложна задача и от тип (1) от скалата на Д. Пойа да се причислят към тип (3).

**Задача 4:** От втория етаж на сграда се изстрелва топче. Траекторията му се описва от функцията  $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ , като  $t$  отразява секундите, изминали от момента на изстрелване, а  $h(t)$  е височината в метри над земята. Да се определи:

- а) От колко метра височина е изстреляно топчето.
- б) След колко време топчето ще падне на земята.
- в) Интервалът за  $t$ , в който е смислено да се разглежда тази функция.
- г) След колко време топчето достига най-голяма височина в метри и каква е тя.
- д) Да се визуализира чрез подходящо приложение траекторията, която изстреляното топче описва.

*Разрез на задачата според надграждане на сложността:* Въпросите градиращ според описаната структура на сложност (стр. 17). Първите две подточки – а) и б) са свързани с началното и крайното положение – сложност (1). Търсеният интервал отговаря на допустимите стойности – сложност (2), определянето на критичната точка, която е връх на параболата, отговаря на сложност (3) – тълкуване на особените точки от графиката на функцията, а последната подточка е свързана с дигиталната грамотност на учениците, защото изисква работа с приложение, чрез което да се визуализира разглежданият процес.

*Разрез на задачата според критериите за задача:* Задачата покрива всички точки от списъка с критерии за избор на задача (стр. 21). Целта е приложен подход към квадратната функция. Комбинират се знания за определяне на особени точки, което предполага различни подходи. Тук ролята на учителя е, след като проследи решенията на учениците, да направи преговор и сравнение между изучените начини за определяне на особените точки. Уместно е да се даде възможност на учениците да аргументират стратегията, която са избрали. Според справянето на

учениците с поставения проблем се получава обратна връзка за резултатите от обучението.

*Въпроси, които учениците трябва да си задават:* **Какво** точно правя? (Мога ли да го опиша прецизно?) **Защо** го правя? (Как това пасва на решението?) **Как** това ми помага? (Какво ще направя с резултата, когато го получа?) (Schoenfeld, 1992)

*Решение:*

а) В момента на изстрелване  $t = 0 \Rightarrow h(0) = 3$ . Топчето е изстреляно от три метра височина.

*Типични грешки:* „Какво се случва с начинаещия решавач: той не може да се ориентира как да стартира решението, опитва се да направи няколко начални, често хаотични стъпки, но не може да продължи по-нататък и се отказва.“ (Тонов, 2012) В случая това се изразява в реакцията, че не е дадено по условие. След насочване за нулева стойност, на база натрупан опит за решаване на квадратно уравнение, често наблюдаван „хаотичен“ подход е да се търси решение на уравнението  $h(t) = 0$ , вместо променливата да се замести:  $t = 0$ . Умението за решаване на квадратно уравнение е тренирано с много задачи-упражнения и работната памет лесно го намира сред математическото знание, съхранено в дългосрочната памет. За ученици, които бързат да получат някакъв отговор, това е безрезултатно действие. Ученици, които са развили добри метакогнитивни умения и си задават по-горните въпроси, бързо си дават сметка, че подобен подход не е усилие в правилната посока.

б) *Типична спънка:* Какво значи да падне, как името на функцията насочва, че тя оказва височината на позицията, а в момента на падане тя е равна на нула?

При падане височината  $h(t) = 0 \Rightarrow -t^2 + 2t + 3 = 0$ . Определят се корените на квадратното уравнение  $t_1 = -1$  и  $t_2 = 3$ . Тук е подходящо място да се обсъдят различните начини за определяне на корените на квадратното уравнение.

- Знания от 7. клас – това е решението, което повечето дигитални приложения предлагат:

$$\begin{aligned} -t^2 + 3t - t + 3 &= 0 \\ -t(t - 3) - (t - 3) &= 0 \\ (-t - 1)(t - 3) &= 0 \\ -t - 1 = 0 \text{ и } t - 3 = 0 & \\ t_1 = -1 \text{ и } t_2 = 3 & \end{aligned}$$

- Формула за определяне на корените чрез дискриминанта:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)3}}{-2} \\ t_1 = -1 \text{ и } t_2 = 3 & \end{aligned}$$

- Съкратена формула за определяне на корените чрез дискриминанта:

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (-1)3}}{-1}$$

$$t_1 = -1 \text{ и } t_2 = 3$$

- Формули на Виет:

$$t_1 \cdot t_2 = -3 \text{ и } t_1 + t_2 = 2$$

$$t_1 = -1 \text{ и } t_2 = 3$$

Тук трябва да се съобрази, че времето се отброява от нулевия момент – изстрелването, т.е. отрицателната стойност е неприложима. Следователно след три секунди топчето ще достигне земята. Това е пример за движение между света на математиката и реалния свят, описано в модела за решаване на приложна задача (стр. 23).

- в) С оглед на предходното разглеждане интервалът е  $0 \leq t \leq 3$  – от момента на изстрелване до падането на земята.
- г) Най-голяма височина се постига във върха на параболата, описваща траекторията на движение и е необходимо определянето на неговите координати.

$$t_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow t_v = 1$$

Една секунда след изстрелването се достига най-голяма височина и тя е се пресмята чрез заместване във функцията:  $h(1) = 4$ . Максималната достигната височина е 4 метра. Тук отново е мястото да се обърне внимание, че върхът на параболата може да се определи чрез отделяне на точен квадрат – умение от 7. клас:

$$h(t) = -(t^2 - 2t + 1) + 4$$

$$h(t) = -(t - 1)^2 + 4$$

или да се използва оста на симетрия, която се получава като средната стойност на определените в б) подточка корени.

$$t_v = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

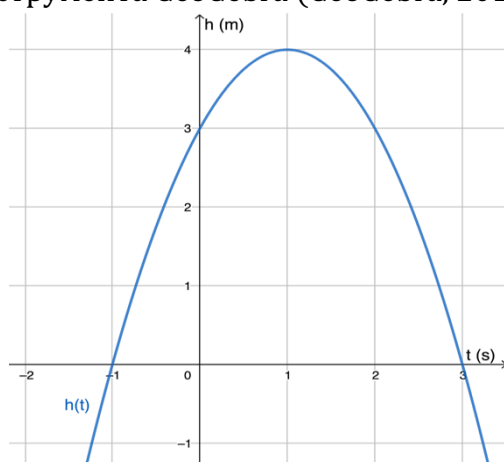
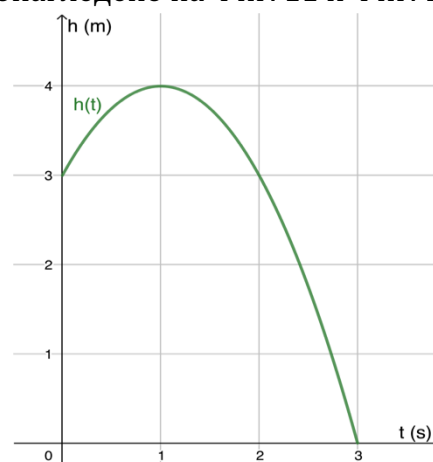
$$t_v = \frac{-1 + 3}{2}$$

$$\Rightarrow t_v = 1$$

**Забележка:** Разглежданата функция неслучайно съвпада с квадратния тричлен, разглеждан в задача 3. Умението за отделяне на точен квадрат се очаква да е придобито още в 7. клас. Според спираловидния модел на обучение на всяко ниво уменията и знанията се задълбочават. Ключово е учителят да спомогне за осъществяване на връзките между предишни знания, да създаде по-стабилни асоциации по темата, според методите на учене на различните ученици. Това е един от начините за постигане на по-устойчиви знания. Напътстващи въпроси, преговор и провокиране на въображението за разнообразни подходи в решението на задачата влияят на когнитивните умения на учениците – 2. и 4. Хипотези

(стр. 7). Сериозен напредък е трудно да се постигне с изолирани примери или спорадични приложни задачи – „... учениците не могат да се превърнат в успешни *problem-solver* за една нощ. Развитието им трябва да бъде дългосрочна цел на обучението, така че трябва да се полагат усилия за постигане на тази цел във всеки клас, във всяка математическа тема и във всеки урок. Изследванията ясно показват, че решаването на проблеми не трябва да се изучава като отделна тема в учебната програма по математика. Всъщност изследванията ни казват, че преподаването на учениците да използват общи стратегии за решаване на проблеми има малък ефект върху успеха им за решаването им. Следователно *problem-solving* трябва да се преподава като неразделна част от обучението по математика и изисква значителен ангажимент в учебната програма във всеки клас и във всяка математическа тема.“ (Jinfa Cai, 2010)

д) Тази подточка изисква използване на дигиталните технологии, което се явява междупредметна връзка. Един от вариантите е реализация чрез инструмента GeoGebra (GeoGebra, 2013) както е онагледено на Фиг. 11 и Фиг. 12.

Фиг. 11:  $h(t)$ Фиг. 12:  $h(t), t \in [1;3]$ 

**Ролята на учителя** при такива задачи е по-скоро насочваща. Напътстващи трябва да са въпросите към анализ на текста на поставената задача. Учениците до седми клас в много по-голяма степен работят с текстови задачи. Умението да се анализира по-сложен текст се очаква да се развива във всички дисциплини – при анализ на литературни произведения, при исторически справки, в икономическата география. Извличането на информация, отделянето на ключовите думи и създаването на математически модели развиват критичното мислене и учат на *problem-solving*. Както всички умения те се градят с целенасочена работа, повторения и много четене. Изследване в курс Алгебра на първа година колежани сочи: „Получените резултати доказват, че подходът за решаване на проблеми, когато се прилага в класната стая, може значително да подобри разбирането и постиженията по математика и също така да насърчи благоприятното отношение към предмета, което показва ефективността на подхода в преподаването на математика.“ (Albay, 2019)



Варианти на насочващи въпроси от страна на учителя са:

- Как тълкувате момента на изстрелване?
- Каква според вас е височината, когато топчето се приземи?
- Какви ограничения за времето и височината бихте поставили?
- Коя точка сочи максималната височина?

Провокиращ творчество би бил въпрос за изменението на функцията, ако изстрелването е от по-малка или по-голяма височина. Разбира се, подпомагащите и стимулиращите въпроси зависят от подготовката на учениците и времето, което може да се отдели. Измененията на функцията лесно могат да се проследят с използване на инструмент като GeoGebra. Това повишава дигиталната компетентност и същевременно се осъществява и междупредметна връзка. Предизвикателство е да се експериментира с друг подходящ софтуер за онагледяване на функцията, напр. [desmos](#). Стимулиране на екипната работа може да се постигне например чрез групова работа с използване на различни инструменти в отделните екипи. Друг вариант за надграждане на задачата е поставяне на изисквания за модифициране на функцията като се наблюдават измененията на вида ѝ с промяната на стойностите на коефициентите. След задълбочен анализ на функцията и нейните особени точки, тълкувани в контекст на приложна задача, е уместно да се добави и задача за синтез, която е тип (3–4) според класификацията на Д. Пойа. По дадена графика – точна или изображение с подходящо означени стойности – да се реконструира нейната функция.

На Фиг. 13 е представена задача 6 от НВО за 10 клас (2023 г.), която не би впечатлила учениците, които са развили стабилна престава за квадратна функция и смисъла ѝ, които могат да проверят решението си, подхождайки по различни алгоритми към проблема. За ученици, които не знаят как да подхождат, остава възможността да заместят с предложените стойности.

6. Най-голямата стойност на функцията  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$  е:

А) –1

Б) 1

В) 2

Г) 5

Фиг. 13: НВО за 10 клас (2023 г.)

### 3.6. Втори гимназиален етап (11. – 12. клас)

Изисквания на МОН, заложен в програмата за ООП по математика за 11. и 12. клас (МОН, Учебни програми за профилирана подготовка, 2020)

- Умее да намира най-малка и/или най-голяма стойност на квадратна функция в интервал;
- Умее да решава екстремални задачи, които се моделират с линейна или квадратна функция;
- Да разчитат и интерпретират данни
- Да използват софтуерни продукти за демонстрация на графики
- Компетентност: Практически задачи за намиране на най-голяма и най-малка стойност на елементарни функции.

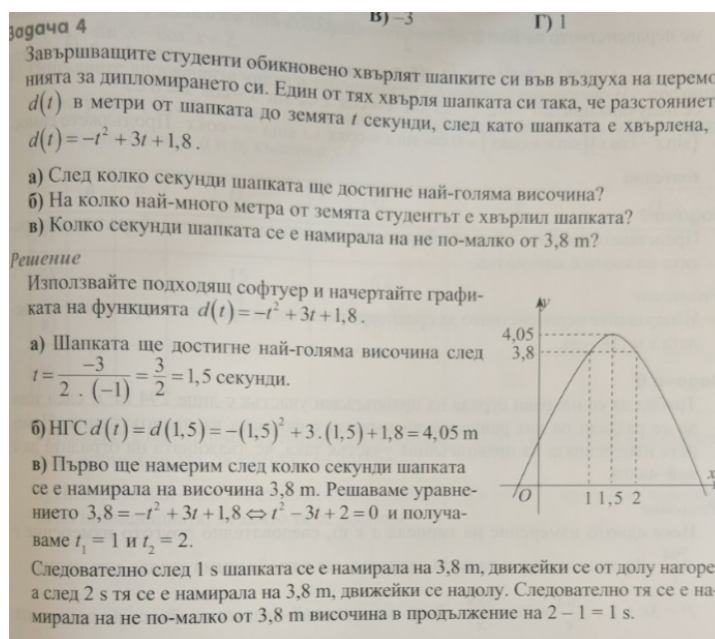
Изисквания на МОН, заложи в програмата за профилирана подготовка по математика за 11. и 12, клас (МОН, Учебни програми за профилирана подготовка, 2020):

- Знанията трябва да се излагат предимно на приложно ниво. Не бива да се залага в излишно задълбаване в теорията и самоцелни подробности.
- Обучението в модул „Практическа математика“ е насочено за ... изграждане на умения за моделиране на реални или теоретични ситуации с изучените средства, умения за интерпретиране на получените резултати и за разглеждане на поставените проблеми като съвкупност от отделни проблеми.
- Модулът има приложна насоченост. При изучаването на някои теми е препоръчително използването на подходящ софтуер. Препоръчително е уменията: по теми 1.5, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11 и от 3.1 до 3.6 да се разработват и оценяват с проекти чрез използване на софтуер. Използването на ИТ може да се осъществи при подготовката на проекти, които илюстрират наученото в темите на модула, и при разработката на проекти с данни от други области, като например география, биология, химия, физика, технологии и предприемачество.

Според изискванията на МОН приложната насоченост засяга повече инструментите, които се използват, но не и естеството на задачите.

В 11. клас с навлизане в полето на математическия анализ с помощта на първа производна се разглеждат отново като начало свойствата на квадратната функция. Следва разглеждане и на други функции, но само в профилирана подготовка, като това изследване се разширява и задълбочава в 12. клас.

В 12. Клас курсът по ООП разглежда отново най-малка и най-голяма стойност на квадратна функция в интервал. Реално няма теоретично надграждане на материала от 9. клас, а по-скоро обобщение на изученото с по-широк контекст и с внимание на приложението, което е по-уместно да се направи още в 9. клас, а за зрелостниците да има приложно по-ангажиращи задачи за преговор на научения материал като Задача 4 (Фиг. 14) от обобщителния урок на тема Екстремални задачи (Кирил Банков, 2021).



Фиг. 14: Учебник 12. Клас ООП (изд. Просвета)

В динамичното време, в което живеем, при възможност за след-гимназиално образование и в други страни, това би улеснило по-нататъшната мобилност на младежите. При сблъсък с приемни тестове от други държави често реакцията е „Това не сме го учили“, не защото липсва математическата основа, а поради непознаване на приложната страна на проблема и неумението за аналитично боравене с текста на задача. В повечето чуждестранни образователни системи, този тип задачи са отработени съответно по-рано. С цел адресиране на проблемите и значението на приложните задачи в общообразователния курс, в тази част на дисертацията не се разглежда материалът от профилираната подготовка.

### 3.7. ДЗИ и прием в университети

Една от приоритетните области на Стратегическата рамка за развитие на образованието (Стратегически документи, 2021) е насърчаване на мобилността. Все повече чуждестранни университети придобиват скептицизъм към дипломите на зрелостниците ни и поставят допълнително условие за положен ДЗИ по математика. Очакването е за синхронизирани учебни програми в рамките на Европейския Съюз и свободно движение на хора, в разглеждания случай – учащи, в рамките на Съюза. Редуцираният материал по ООП по математика е спънка за прием в чуждестранни университети. Допълнението на нормативните документи с възможността ученици, които не са изучавали математика като профилиращ предмет, да положат ДЗИ по математика, е някакво облекчение, но не решава проблема с разминаването на подготовката по математика на българските ученици в сравнение с връстниците им от другите европейски страни. Задача на настоящата дисертация (стр. 4) е съпоставка с нормативните документи в

подкрепа на 5. Хипотеза. Според Стратегическата рамка, която е основана на предходни препоръки на ЕК за развитие на образованието у нас и действащите документи, се цели „Активизиране на обмена с преподаватели, служители и **учащи** в чуждестранни образователни институции и включване в международни мрежи;“ (Стратегически документи, 2021). Ограниченият набор приложни задачи е компонент, който следва да се развие в аспекта на *problem-solving*, умения на 21. век и учене през целия живот, за да са конкурентни и мобилни зрелостниците ни.

### 3.8. Анализ на научни публикации

Разглежданият проблем е актуален не само в България. В цял свят математици и дидактици, учители и други специалисти, припознали образованието като своя мисия, активно изследват и работят за едно по-добро образование. Отворените граници, споделените във виртуалното пространство учебници, изпитни материали и научни публикации позволяват изследователите да обменят опит и обединят сили.

Изследвания в други страни наблягат на емоционалната реакция сред учениците: „... математическите трудности и преживявания на неуспех през ранните училищни години могат да предизвикат и увеличат математическата тревожност. Вследствие на това децата могат да избягват по-нататъшното обучение в областта на математиката, да придобиват все по-негативен опит в областта на математиката и да стават все по-тревожни по отношение на математиката. По този начин се получава порочен кръг.“ (Jarise Kaskens, 2020) Според нормативните документи на МОН компетентностите са знания, умения и отношения, като последните включват ценностни нагласи и ориентации. Описаният по-горе порочен кръг засяга **отношенията**. Тук е ключова ролята на учителя за преодоляване на стреса. В рамките на една задача, това са насоки за справяне с блокажа. Според Д. Пойа това е подкрепата, която учителят оказва, без да кара ученикът да се чувства безсилен наблюдател на решението.

Изследване от края на миналия век сочи: „Например, почти 50% от американските ученици споделят, че изучаването на математика е предимно запомняне и около една пета от учениците не са съгласни с твърдението, че даден математически проблем може да бъде решен по различни начини“ (Lindquist, 1989) Това мнение на ученици и възрастни може да се промени чрез системна работа върху задачи, които онагледяват връзката на науката с реалния живот.

В последните години популярност придобиха медийни изяви на учени, посветили се на образованието. Целта е обществеността да се ангажира и отговорно да се отнася към образованието, да се замисли как може да допринесе, да се приобщи към идеята за учене през целия живот. Виден техен представител е английският учен Кен Робинсън (Ken Robinson). Наред с познатите истини, че подготвяме ученици, които ще работят активно след повече от 10 години, време,

чиито нужди не можем да предвидим, той призовава за промени в образованието. Ученият поставя на преден план личностното, културно, икономическо и социално развитие на индивида. Неговото кредо също е образование, развиващо основните компетентности, уменията на 21. век. „Концепцията за дисциплините ни води до по-добра отправна точка при планирането на учебната програма, а именно да се запитаме какво трябва да знаят и да могат да правят учениците в резултат на своето образование.“ (Robinson & Robinson, 2022) В тази връзка приложните задачи с междупредметни връзки развиват наред с компетентностите един по-комплексен поглед върху науките и приложността на овладените знания (2. Хипотеза – стр. 7).

**„Защо решаването на проблеми е толкова важно? Учениците, които мечтаят за кариера в бизнеса, медицината, инженерството, архитектурата или множество други професии, се нуждаят от солидни математически познания, с особено силен акцент върху решаването на проблеми. Например, докато строителните инженери работят, за да определят най-доброто разположение за кула за клетъчни телефони, мислите им смътно са свързани с училищни математически процедури и концепции. Те предимно решават проблеми, като използват компютърни програми за конструиране математически модели, които отчитат триизмерната топография на земята... Наистина, решаването на проблеми е почти синоним на прилагане на математика. Следователно, естествено е да се очаква, че самата цел на изучаването на математика в училище е да даде възможност на учениците да решават проблеми; това означава, че способността за решаване на проблеми трябва да бъде важен резултат от изучаването на математика.“** (Rachel Wing DiMatteo, 2010)

Интересно проучване в областта е описано в статията „Когнитивни и мета когнитивни способности, свързани с решаването на математически текстови задачи: Валидиране на цялостен модел“. Изследването е проведено сред ученици от 3. – 7. клас и си поставя за цел да анализира аспектите, които са цел и на настоящата дисертация: „Моделът, който избрахме да тестваме, включва следните компоненти: разбиране на текста, представяне на проблема, категоризиране на проблема, оценяване на резултата, планиране на стъпките към решението, самооценка на процедурата и самооценка на изчисленията.“ (Daniela Lucangeli, 1998)

В статията „Визуални представяния при решаване на математически текстови задачи“ (Azizah Ahmada, 2010) се разглеждат подходите на учениците при решаване на задачи, като се отбелязва, че повечето от тях използват схематично или картинно онагледяване на проблема. Авторът отново изтъква методическото и интелектуалното предизвикателство: „Словесната задача всъщност е кратък разказ и учениците обикновено трябва да свържат известното с неизвестното. Обичайно учениците срещат трудности при решаването на текстови задачи първоначално от превеждането на текстовите представи в математически

представи.“

Обзорът на други изследователи в областта (Suherman & Vidákovich, 2022) сочи, че повечето описани изследвания в литературата са върху ученици 5.–8. клас (61,43%), а едва 20% от наблюденията са върху гимназисти. Работата по текстови задачи започва в прогимназиалния курс. В часовете по математика се поставят основите на аналитичното четене, което се очаква да се развива и в часовете по други дисциплини – литература, история, география. В гимназиалния курс това умение продължава да се развива и надгражда с работа по задачи, третиращи близки до житейски ситуации. Цитираните по-горе източници са свързани със задачите на дисертацията за паралел на изследвания в областта в други страни.

Изследването от научния труд на Мария Тулис е в подкрепа на 1. Хипотеза (стр. 7). Ученият разглежда връзката между постиженията и емоциите в учебния курс по математика. Отделна глава е посветена на задълбочен преглед на описани в литературата изследвания върху влиянието на текстовите задачи. Макар повечето наблюдения, както вече бе отбелязано, да са върху ученици 5.-7. клас, изтъкнатите проблеми са общовалидни при работата с такива задачи: „разбирането на текста, разбирането на ситуацията, създаване на математически модел, пресмятане и накрая на формулировка на отговора, свързан със ситуацията“ (Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998). Обобщението потвърждава тревожния факт, проучванч и в настоящата дисертация: „Обикновено в хода на учебните години се наблюдава намаляване на удоволствието и интереса и увеличаване на досадата от математиката.“ (Tulis, 2010) В цитираното изследване оста на разглеждане е ориентацията на учениците. Видът на задачите, проблемите, пред които учениците се поставят, могат да повлияят на тяхната нагласа и отношение, което е директно свързано с ангажираността и мотивацията им.

## Обобщение

Темата на настоящата дисертация е ролята на приложните задачи за целите на образованието по математика. В прогимназиалния курс на обучение текстовите задачи са широко застъпени. Значението им за резултатите от НВО по математика допринася за високия им емоционален заряд. От началното образование до 7. клас родителите са активни участници, интересуват се от допълнителни състезания и извънкласни форми на обучение. В гимназиалния етап се наблюдава ограничен набор от практически ориентирани задачи, спад на броя участници в математически състезания, занижаване на интереса и мотивацията на учениците – 1. Хипотеза (стр. 7). Дигиталните технологии са инструмент, чрез който лесно се постигат готови решения, които не водят до устойчиви знания. Следвайки парадигмата за учене през целия живот, учителите е наложително да са в крак с актуалните образователни тенденции и използваните от учениците приложения – 5. Хипотеза (стр. 7). Тяхна задача е да са пример за непрестанно учене, но и

осведомено да възпитават у учениците си умения за грамотно използване на инструментите и разбиране, че информацията не е познание – 3. Хипотеза (стр. 7). Разместванията в учебния план и олекотяването на ООП затрудняват мобилността на зрелостниците – 5. Хипотеза (стр. 7). Разгледаният разрез на решението на приложна задача, която надгражда задача-упражнение, онагледява нейното допълнително познавателно значение, изтъква ролята на учителя като фасилитатор на процеса, представя добавената стойност при използването на дигиталните технологии.

## 4. ГЛАВА: МЕЖДУНАРОДЕН АСПЕКТ, АНАЛИЗ, ПАРАЛЕЛИ

---

За целите на дисертацията се прави паралел между българската образователна система и руската, немската, австрийската, английската, италианската, американската системи. Прегледът прави сравнителен анализ на ролята, типовете и количеството на приложните задачи, застъпени в гимназиален курс в други държави – Австрия, Германия, Англия, Италия и в България. Направеният обзор има за задача да анализира къде е нашето образование в европейски план. Търсят се начини как можем чрез обогатяване на курса на обучение с такива задачи да повишим резултатите по математика и мотивацията на учениците, как по-добре да развием математическото мислене, компетентностите, уменията за учене през целия живот и уменията на 21. век.

### 4.1. Прогимназиален курс (5. – 7. клас)

Лесно се намират сходства между задачите в различните образователни системи и нива. Един такъв пример е следната задача:

- (1) В „Книга за ученика по математика за 6. Клас“ на издателство Архимед: „Стопанин гледа зайци и кокошки. Краката на всички животни са 220, а главите им са 70. Колко зайци и колко кокошки гледа стопанинът?“ (Паскалева, Алашка, & Алашка, 2017, стр. 78) – задача с повишена трудност, подходяща за ученици, които проявяват интерес към математиката и се подготвят за математически състезания.
- (2) „В един двор има зайци и фазани. Краката на всички животни са 100, а главите им са 36. Колко са зайците и колко са фазаните?“ (Паскалева, Алашка, & Алашка, 2018, стр. 54) – задача достъпна за всички ученици, която осигурява допълнителна самостоятелна работа по изучавания материал.
- (3) В учебник по математика в Австрия: „Auf einem Bauernhof leben 38 Hasen und Hühner. Insgesamt haben sie 110 Beine. Wie viele Hasen und Hühner leben auf dem Bauernhof?“ (*Във фермерски двор живеят зайци и кокошки. Животните са 38 и имат общо 110 крака. Колко заека и колко кокошки живеят на двора?*) (öbv, 2013).
- (4) В „Първа математическа читанка за 3. - 4. Клас“ в секцията „Зайци и кокошки“: „Баба Цоцолана има 15 животни – зайци и кокошки. Общо имат 40 крака. Колко са зайците и колко са кокошките?“ (Тонова, Златилов, & Цветкова, 2019)

В дисертационния си труд „Когнитивни модели в обучението по математика на ученици от 3 – 6 клас“ Т. Тонова анализира изследване, направено сред ученици от четвърти клас със сходна на последната задача (4), в подкрепа на хипотезата „Знание, базирано на индивидуалните психолого-познавателни особености на



отделния ученик е не само знание само по себе си, но и инструмент за развитие и използване на самостоятелни познавателни процеси, които са необходими за реализиране на принципа *Учене през целия живот.*“ (Тонова, 2012) Интересно е, че изследването е направено сред четвъртокласници, посещаващи школа за допълнителни занимания. Очакваното решение е аритметично: щом има 15 глави за тях има по два крака, т.е. 30 крака, но остават още 10 крака, по още два за всеки заек. Това означава, че зайците са 5, а останалите 10 животни са кокошки. Някои деца успяват по пътя на пробата и грешката да открият: ако има 10 зайци, то те има 40 крака, но краката са по-малко, ами ако са 5 зайци, то те имат 20 крака, а останалите 10 животни са кокошки с по два крака, което прави още 20 крака.



Фигура 15: ID 92759453  
© Gurinaleksandr /  
Dreamstime.com

Разбира се второто решение е по-скоро щастливо хрумване, което води до верен отговор, но дали така ще е при следващата задача. Ролята на учителя е да обърне внимание на по-структуриран подход, при който не се разчита на късмет в решаването. Т. Тонова предлага като решение учениците да си представят, че зайците за малко са застанали на два крака. Целта е обучаемите да получат визуален модел, как на всяка глава съответстват по два крака, а след това да се преборят вдигнатите във въздуха по две заешки крачета. Ив. Тонов споделя опита си с ученици, с които е практикувал подобно решение. При последващо решение на сходна задача децата имитират с ръце вдигнатите във въздуха заешки лапи, което е показателно за изграден модел за справяне с подобни ситуации.

Първата цитирана задача (1) предполага евристичен подход, защото теоремите за еквивалентни преобразувания на уравнения се изучават в 7. клас и не са преподадени в явен вид. За сметка на това втората цитирана задача (2) е за седмокласници. Предполага се, че учениците са постигнали нужната зрялост, натрупали са знания за разкриване на скоби и решаване на линейни уравнения. Задачата развива умение за съставяне на математически модел. На този етап той е линейно уравнение с едно неизвестно, т.е. подходът към поставения проблем е алгебричен:

$$\begin{aligned} \text{зайци} &= x, \text{ заешки крака} = 4x, \\ \text{фазани} &= 36 - x, \text{ крака на фазани} = 2(36 - x) \\ \text{заешки крака} + \text{крака на фазани} &= \text{всички крака} \\ 4x + 2(36 - x) &= 100 \\ 2x &= 28 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

**Отговор:** Зайците са 14, а фазаните – 22. Редно е да се направи проверка. Общо животните са  $14 + 22 = 36$ , крака  $4 \cdot 14 + 2 \cdot 22 = 100$ . Според немската и австрийската системи, проверката е задължителна и се третира като част от

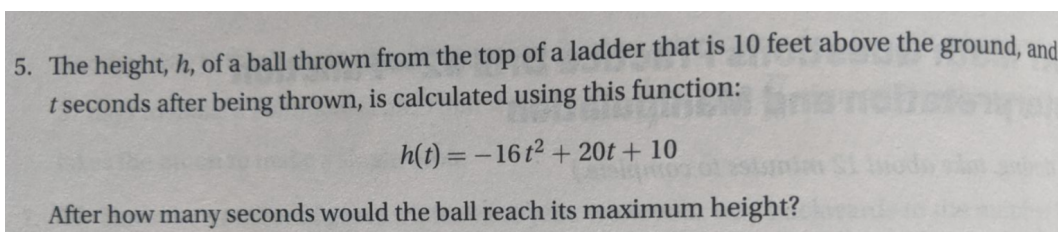
решението, т.е. компонент е от крайната оценка на задачата. В този случай това е и поглед назад според етапите на Д. Пойа.

Задача (3) е от австрийската образователна система и присъства и в 8. клас – съставяне на едно уравнение, и в 9. клас – очаква се да се реши чрез съставяне на линейна система с две уравнения и две неизвестни. Като особено внимание се обръща на въвеждането на неизвестните и ясното им означение  $x$  – брой на зайците,  $y$  – брой на кокошките,  $x, y \in N$ .

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ 4x + 2y = 110 \end{cases}$$

Независимо от избрания математически апарат това е приложна задача, изискваща пренос на познание от реалния живот към поставения проблем. Разглежданите примери са в подкрепа на 2. Хипотеза, че при приложните задачи трудността се изразява в избор на метод за решаване, често учениците споделят „Не знам как да започна“. Решаването на линейното уравнение не е сериозната спънка, притеснява ги стъпката с избор и въвеждане на неизвестно, проблематичен е и синтезът на дадената информация в уравнение. Тези проблеми засягат компетентностите – творчество при избор на неизвестно, поемане на отговорност – избор между аритметичен или алгебричен метод, според знания и умения, аргументирано прилагане на модел за решение. Учителят от своя страна с насочващи въпроси може да помогне на учениците да открият аритметичен и/или няколко алгебрични подходи, където това е подходящо, като изтъкне предимствата и ролята на всеки от тях. След това заедно с учениците да направи паралел между решенията, да подчертае, че често има повече от една успешна стратегия. Така в рамките на една задача може да демонстрира процеса на надграждане на знанията. С конкретен пример може да онагледява ползите от учене през целия живот – 1. Хипотеза (стр. 7), защото всеки нов инструмент и познание разширява кръга на решимите от индивида проблеми. Възможността за осъзнат избор повишава самочувствието, мотивацията и удовлетворението от успеха.

## 4.2. Първи гимназиален етап (8. – 10. клас)



Фиг. 16: SAT

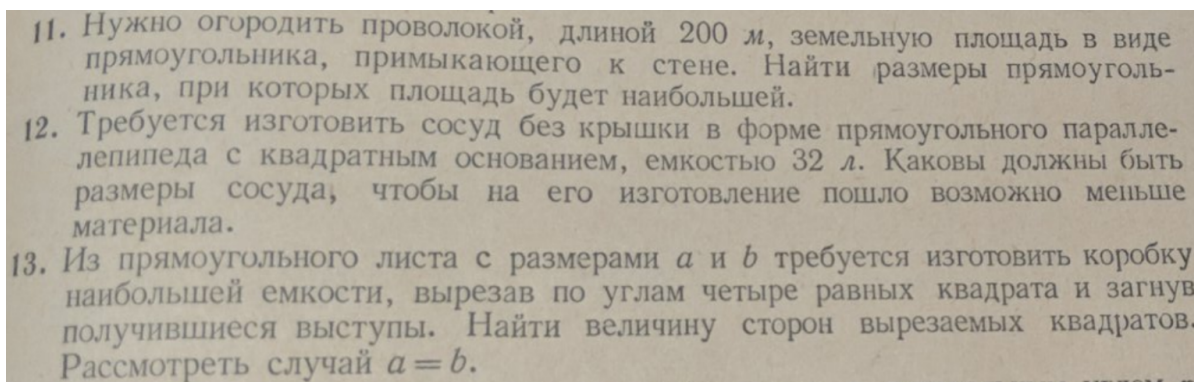
Прави впечатление, че задача 5 от Фиг. 16 е сходна на задача 4 от Фиг. 14. Очакването е, че такъв вид проблем е по силите на ученици от първи гимназиален етап. В нашите учебници за ООП е заложен едва във втори срок на 12. клас. Това е

време, в което зрелостниците са строго профилирани, готвят се за изпити и е под въпрос до колко този материал се усвоява.

При задачата със зайците и кокошките, нашите ученици видно изпреварват връстниците си от други страни. Парадоксално е как в хода на годините с образователните реформи, задачите, които са реално математика от първи гимназиален етап, са изместени в края на втори гимназиален. Такъв подход е уместен, ако значението на този раздел беше преговорно, т.е. да затваря тематично цикъла на изследване на функции. Това отново сочи, че е препоръчително по-рано в курса на обучение да присъстват приложни задачи, за да може на етап преговор в 12. клас, учениците да са подготвени на ниво, сравнимо с Европейските изисквания – 4. Хипотеза (стр. 7).

С годините са се утвърдили основните типове задачи и съответните задачи-упражнения, които се очаква да бъдат усвоени в часовете за ООП по математика. Както проф. д-р Иван Тонов неведнъж в лекциите си е обръщал внимание, че се препечатват и размножават, без хранилището особено да се обогатява. Той препоръчва сборника от средата на миналия век „Сборник задач по специалному курсу Элементарной математики“ (Моденов, 1957) като уникална колекция от задачи. В предговора на книгата е посочено, че част от задачите са приложими за обучението по математика в гимназиален курс.

Нека разгледаме задача 11 от Фиг. 17.



Фиг. 17: Сборник задач (Моденов, 1957)

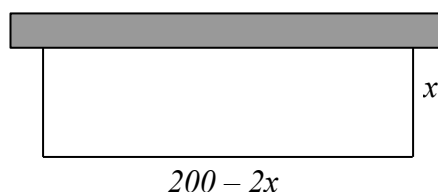
11. Разполагаме с 200 м тел, с която да се огради правоъгълно дворно място, като едната страна е по продължението на стена. Да се определят размерите, при които оградената площ е най-голяма.

**Анализ:** Реално и тази задача се свежда до съставяне на квадратна функция и определяне на максимума ѝ. Интересно е как протича решението в паралел с компетентностната рамка:

- аналитичното четене – какво е дадено, какво се търси, отделяне на известните и неизвестните величини;
- критично мислене – какво е значението на стената;
- творчество – скица на проблема;

- *problem-solving* – каква е връзката между известните и неизвестните величини;
- знанията по математика – как се намира обиколка и лице на правоъгълник, как да се направи модел с една променлива, как се намира най-голяма стойност, какво е значението ѝ;
- преценка – какви са ограниченията, как се тълкуват намерените стойности;
- самооценка – смислени ли са получените стойности, има ли други начини за решаване на задачата.

**Решение:** Първа стъпка адресира компетентността за аналитично мислене и творчество. Подготовката на скица, онагледяваща проблема е ключова за решението (Фиг. 18).



Фиг. 18: Модел на задача 11

Лицето на правоъгълното дворно място се намира по формулата:

$$S = x(200 - 2x)$$

$$S = -2x^2 + 200x$$

По своята същност имаме квадратна функция, за която търсим най-голяма стойност. Уместно е да се отбележи, че разглеждането е смислено за  $0 < x < 100$ .

$$S(x) = -2x^2 + 200x$$

$$x_v = -\frac{200}{-4}$$

$$x_v = 50$$

$$y_v = S(50)$$

$$y_v = 5000$$

**Извод:** Дворното място трябва да е с размери 100 м дължина, успоредна на стената, и 50 м ширина. Най-голямата заградена площ с 200 м тел, като едната страна граничи със стена, е 5 000 м<sup>2</sup>.

#### 4.2.1. ChatGPT


Допълнително методическо предизвикателство в работата на учителите са приложенията с изкуствен интелект (AI), особено ChatGPT (OpenAI, 2015), който набира популярност и е тема на спорни дискусии относно предимства и недостатъци в образователен, социален и етичен план. Опитен учител лесно може да прецени авторството на решението, а с допълнителни въпроси да провери действително наученото от учениците. По-важно е да се внуши на подрастващите, че за да могат грамотно да използват съвременните технологии, трябва да имат

базова подготовка, знания и умения сами да се справят и критично да разглеждат заимстван резултат било той приложение, което сканира и решава задачата, или изкуствен интелект. Трябва да се демонстрира как комбинирането на знания и модели ги обогатява когнитивно, как самостоятелното справяне с проблемите повишава увереността в собствените сили, как анализирането и разрешаването на проблеми ситуации е значимо за бъдещия им успех.

Доскоро родителите с подходящо образование можеха да помагат на учениците и запазили спомен от университетски курс по анализ се възмущаваха как се очаква от деветокласници да решават задачи за намиране на най-малка и най-голяма стойност или решаваха аритметичните задачи за четвъртокласници чрез система от първа степен с две уравнения и две неизвестни. При надграждане на знанията обичайно се запомня последно наученият алгоритъм за решаване на даден проблем. Съответно идва недоумението на родители, готови да помогнат, но не прочели материала от учебника.

В съвременното учениците, все по-рядко се налага да се обърнат за помощ към родителите си, защото в мрежата са достъпни форуми, в които ученици, студенти и учители, на доброволен принцип или с минимално възнаграждение отговарят на такива запитвания. Често и други ученици са срещали същата задача и в архивите лесно се намира търсеното решение. Какво биха получили учениците, ако зададат същия въпрос на (ChatGPT, 2023)?


Поставено е като въпрос условието на задача 11, а отговорът е представен на Фиг. 19.

 <p>За да определим размерите на правоъгълното дворно място, при които оградената площ е най-голяма, трябва да формулираме задачата като математическа функция и да намерим максимума на тази функция.</p> <p>Нека "x" представлява дължината на страната, паралелна на стената, а "y" - дължината на другата страна на правоъгълника.</p> <p>Ограничението е, че периметърът на дворното място трябва да е равен на 200 м:</p> $2x + y = 200.$ <p>За да намерим максимума на оградената площ, трябва да определим функцията на площта и да я максимизираме:</p> $\text{Площ} = x * y.$ <p>Можем да решим уравнението за периметъра за "y" и да го изразим в зависимост от "x":</p> $y = 200 - 2x.$ <p>Сега можем да заместим това изражение за "y" в функцията за площта:</p> $\text{Площ} = x * (200 - 2x) = 200x - 2x^2.$ <p>Търсим максимума на тази функция в интервала [0, 100], тъй като дължината на страна не може да бъде по-голяма от 100 м (половината от периметъра).</p>	<p>За да намерим максимума, можем да вземем първата производна на функцията по отношение на "x" и да я приравним на нула:</p> $d(\text{Площ})/dx = 200 - 4x = 0.$ <p>Решавайки това уравнение, получаваме:</p> $4x = 200,$ $x = 50.$ <p>Така намерихме, че x = 50 м е дължината на страната, паралелна на стената.</p> <p>За да намерим дължината на другата страна "y", можем да използваме уравнението за периметъра:</p> $2x + y = 200,$ $2 * 50 + y = 200,$ $100 + y = 200,$ $y = 100.$ <p>Следователно, дължината на другата страна на правоъгълното дворно място е y = 100 м.</p> <p>Така, за да се оградят правоъгълно дворно място с най-голяма оградена площ, трябва да се използват размерите x = 50 м и y = 100 м.</p>
---	---

Фиг. 19: ChatGPT „решава“ задача 11 (Моденов)

С цел да се намери решение, което отговаря на познавателното ниво на учениците се подставя ограничаващ въпрос: „Без използване на производна да се

реши задачата: Разполагаме с 200 м тел, с която да се ограда правоъгълно дворно място, като едната страна е по продължението на стена. Да се определят размерите, при които оградената площ е най-голяма.“ Отговорът е представен на Фиг. 20.

 Ако не искате да използвате производна, можем да решим задачата чрез метода на заместването. Нека "x" представлява дължината на страната, паралелна на стената, а "y" - дължината на другата страна на правоъгълника.

Ограничението е, че периметърът на дворното място трябва да е равен на 200 м:

$$2x + y = 200.$$

Оттук можем да изразим "y" в зависимост от "x":

$$y = 200 - 2x.$$

Сега можем да заместим това изразение за "y" в функцията за площта:

$$\text{Площ} = x * y = x * (200 - 2x) = 200x - 2x^2.$$

За да намерим размерите, при които оградената площ е най-голяма, трябва да намерим максимума на тази функция.

За да решим това, можем да построим таблица със стойности за площта при различни стойности на "x":

markdown Copy code


x	Площ
0	0
50	5000
100	0

От таблицата виждаме, че площта е най-голяма при x = 50 м, където имаме площ от 5000 кв.м.

Така, за да се ограда правоъгълно дворно място с най-голяма оградена площ, трябва да се използват размерите x = 50 м и y = 200 - 2x = 100 м.

Фиг. 20: ChatGPT отговор без използване на производни

Следващ насочващ въпрос: „Като използваме характеристиките на квадратната функция да се реши задачата: Разполагаме с 200 м тел, с която да се ограда правоъгълно дворно място, като едната страна е по продължението на стена. Да се определят размерите, при които оградената площ е най-голяма.“ Отговорът е представен на Фиг. 21.

 За да решим задачата, можем да използваме характеристиките на квадратната функция.

Нека "x" представлява дължината на страната, паралелна на стената, а "y" - дължината на другата страна на правоъгълника.

Ограничението е, че периметърът на дворното място трябва да е равен на 200 м:

$$2x + y = 200.$$

От това уравнение можем да изразим "y" в зависимост от "x":

$$y = 200 - 2x.$$

Формулата за площта на правоъгълник е:

$$\text{Площ} = x * y.$$

Замествайки израза за "y" във формулата за площта, получаваме:

$$\text{Площ} = x * (200 - 2x) = 200x - 2x^2.$$

Забелязваме, че тази функция е квадратна функция с отрицателен коефициент пред членът с x^2. Тъй като отрицателният коефициент пред x^2 означава, че параболата е ориентирана надолу, максимумът на функцията ще се намира върху върха на параболата.

За да намерим върха на параболата и стойността на "x" при която достига максимум, можем да използваме формулата:

$$x = -b / (2a),$$

където a и b са коефициентите на квадратната функция ax^2 + bx + c.

В нашия случай, имаме функцията Площ = -2x^2 + 200x, която съответства на уравнението ax^2 + bx + c = 0, с a = -2, b = 200 и c = 0.

Използвайки формулата за върха на параболата, получаваме:

$$x = -200 / (2 * (-2)) = 50.$$

Така, намерихме, че x = 50 м е дължината на страната, паралелна на стената, при която достига максималната площ.

За да намерим дължината на другата страна "y", можем да заместим стойността на "x" в уравнението за периметъра:

$$2x + y = 200,$$

$$2 * 50 + y = 200,$$

$$100 + y = 200,$$

$$y = 100.$$

Следователно, дължината на другата страна на правоъгълното дворно място е y = 100 м.

Така, при размерите x = 50 м и y = 100 м, оградената площ ще бъде най-голяма.

Фиг. 21: ChatGPT решение с материала на ниво 9. клас

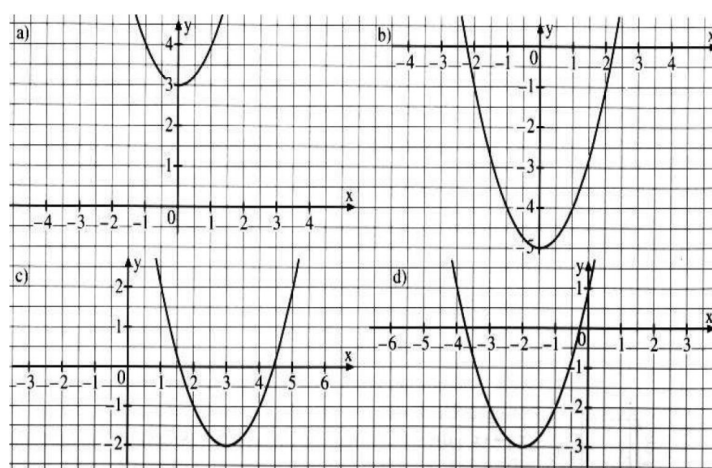
Видно е, че в горното решение има грешка – „паралелната“ страна е всъщност перпендикулярна. След още няколко итерации с насоки в „общуването“ се достига

до окончателно вярното решение. Предвид само-обучаването и развитието на изкуствения интелект, вероятно в бъдеще ще става все по-лесно да се получи задоволително решение. Демонстрираните решения и „диалогът“ с изкуствения интелект в този им вид на са по силите на ученик, който не би могъл сам да реши задачата. Това не значи, че учениците няма да се изкушат да използват ChatGPT. В повечето случаи опитният учител забелязва заимстван труд и има своите подходи за справяне в такива ситуации. В потвърждение на 6. Хипотеза (стр. 8) – учителят трябва да е активно учещ и интересуваш се, за да е наясно с възможните източници и инструменти, до които имат достъп учениците. Споделяйки за умението си за учене през целия живот, благодарение, на което са наясно със съществуващите „помощни“ средства, преподавателите могат да демонстрират как дигиталните приложения могат да са от полза, но за хора, които имат нужната предварителна подготовка. В подкрепа на 1. Хипотеза (стр. 7) път към повишаване на мотивацията е да се онагледят пред учениците, защо е важно умеят да се справят сами с проблемите – как да разчитат условието, как да съставят математически модел, как да поставят съответните ограничения и едва в допълнение – как с дигиталните технологии могат да допълнят решението.

#### 4.2.2. Графични модели

Друг популярен тип задачи в курса по математика за 9-10. клас в Германия, Австрия и Англия са свързани с „разпознаване“. Целта е да се открие съответствие между функция, записана по различен начин, и графиката ѝ. Решението им не изключва използването на дигитални технологии в курса по математика. В повечето случаи този тип задачи предшестват заниманията, при които се използва подходящ софтуер за визуализиране на функция. Графичното задаване на функция адресира друг мисловен аспект – визуалната памет. Провокиращи са задачи с повече възможности. Пример за такава е извадката от учебна тетрадка – Фиг. 22.

37) Welcher Funktionsterm gehört nicht zu einem der abgebildeten Funktionsgraphen?  
 $f_1(x) = x^2 - 5$   
 $f_2(x) = (x + 2)^2 - 3$   
 $f_3(x) = x^2 + 3$   
 $f_4(x) = x^2 - 6x + 7$   
 $f_5(x) = x^2 + 5$   
 $f_6(x) = (x - 3)^2 - 2$   
 $f_7(x) = x^2 + 4x + 1$



Фиг. 22: Работна тетрадка за 9. клас (Австрия)

*Превод на условието* (Фиг. 22): 37) Коя от изброените функции не съответства на нито една от изобразените графики? (Keller, 2013)

В задачите за „свързване“ обикновено предложените функции и съответните графики са равен брой. Тук предизвикателството е, че някои от функциите са идентични, а една отсъства и задачата не се свежда до бързо напасване, а е необходимо критично разглеждането на всичките седем предложени варианта, за да се оцени кои имат еднакви графики и изображението на коя функция липсва. Различното представяне на квадратната функция – нормален или квадратичен вид, провокира уменията за разчитане на особените точки във всеки от тях. Развива се и компетентността за критично мислене и стратегии за бързо справяне с проблема. Подобни задачи са характерни за частта от контролните, в която не могат да се използват помощни средства и времето за работа е силно ограничено.

Такава задача е предшествана от задълбочено разглеждане на квадратната функция и анализ на различни нейни записи, които позволяват „разчитането“ на специфични точки от графиката. За сравнение при нас е популярна работата само с нормален вид на функцията.

В германската и английската системи обръщат внимание на три форми.

1. Allgemeine Form (немски), General Form (английски) – „нормален вид“, с който е прието да се работи у нас:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , като се обръща внимание на пресечната точка  $(0, c)$  с ординатната ос.
2. Scheitelpunktform (немски)  $f(x) = a(x - d)^2 + e$  – форма, оказваща върха на параболата  $S(d|e)$ , Standard Form или Vertex Form (английски)  $f(x) = a(x - h)^2 + k - V(h, k)$ , която при нас е позната като „отделяне на точен квадрат“.
3. Nullstellenform (немски), intercept form (английски)  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  или  $f(x) = a(x - p)(x - q)$  – форма, оказваща  $x$  – стойностите на пресечните точки на графиката с абсцисната ос, позната при нас като „разложен на множители вид“.

Отделните записи предполагат съответно различен подход за разчитане. Според вида съображенията са или за пресичането на ординатната ос (1), или за върха на параболата (2), или за пресечни точки с абсцисната ос и за оста на симетрия (3), не се очаква преобразуване на функцията до нормален вид, а само тълкуване.

Тези знания дават възможност и за гъвкав подход при задачите за синтез. Обикновено за зададени няколко точки от квадратна функция, те могат да са директно посочени или да се „разчитат“ от графика или изображение. Задачата е да се състави уравнение на съответната функция. В зависимост от подадената информация учениците избират най-удобната форма за представяне. В подкрепа на 4. Хипотеза е интелектуалният стимул, който се предлага от изучени многообразни подходи. Те развиват когнитивните умения на учениците, взимането на решение, комбинативната работа с характерните записи.

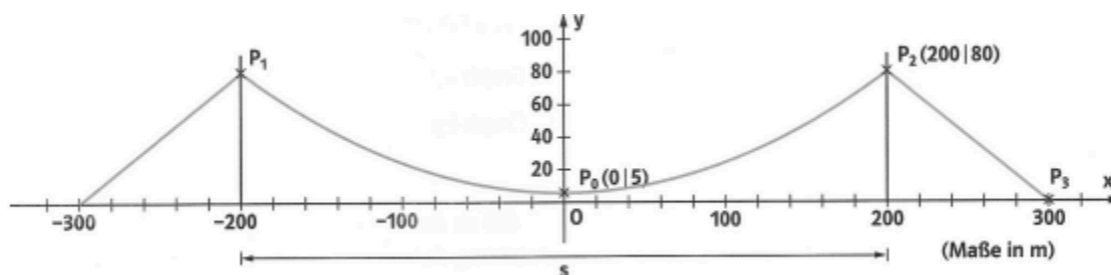




Фиг. 23: Storebæltsbroen (Francis)

Комбинацията от подходящо изображение и приложна задача стимулира въображението. Така поставен проблемът парира въпроса, за какво са нужни функциите и онагледява едно тяхно приложение – задачата от примера на Фиг. 24. *Превод:* „Теленото въже на мост виси в параболична форма между стълбовете на моста. Намерете уравнението на параболата.“ (Ostwald, 2020)

Das Drahtseil einer Hängebrücke hängt parabelförmig zwischen den Brückenpfeilern.  
Bestimme die Gleichung der Parabel.



Фиг. 24: Квадратна функция

Описаните по-горе задачи за анализ и синтез са полезно допълнение към курса на обучение. Значението им е за споделяне на добра практика и партньорство в образованието според изискванията на ЕК – 5. Хипотеза (стр. 7). В настоящите учебници има множество задачи-упражнение за определяне по формула на върха на параболата и интервалите на растене и намаляване. Обогащването им с приложни поставя провокира творчеството и комбинативното мислене – 2. Хипотеза (стр. 7) и надгражда задачите за упражнение с по-сериозни такива, които поощряват интелектуалното любопитство, защото не са рутинно прилагане на формула – 4. Хипотеза (стр. 7)

### 4.3. Втори гимназиален етап (11. – 12. клас)

В международен план приложните задачите за изследване на екстремални стойности на квадратна функция за заложи в плана за 9. клас. Обективно залагането на тези задачи едва в края на 12. клас подценява и заедно с това оцелява нашите ученици. Редно е теория и практика да са неразривно свързани, когато целта е развиване на ключови компетентности в целия курс на обучение.

Според действащата програма обучението във втори гимназиален етап е профилирано. Всички ученици изучават математика като общообразователен предмет. Трудно може да се направи паралел с друга чуждестранна образователна система, в която също да не се учат „Елементи на математически анализ“ в гимназиален курс. Практиката в другите страни е за залагане на този материал за

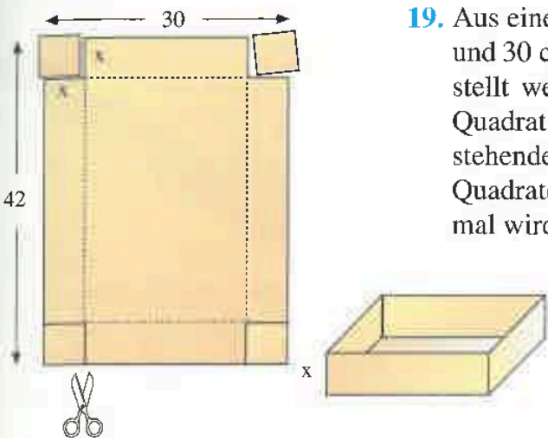
всички учаци в 11. клас, независимо от профилната им ориентация, и надграждането му в 12. клас. Реално общообразователното ниво в Германия, Австрия, Италия и IB – програмата, са по-скоро сравними с профилираната подготовка по математика у нас. Този материал е конкретен пример за разминаване с препоръките на ЕК за единно образование и затруднява мобилността на зрелостниците – 5. Хипотеза.

Доскоро това не беше проблем и учениците ни използваха уводните курсове по математика преди началото на първи курс в чуждестранни университети за адаптиране към системата и специфичната езикова терминология, а не за наваксване на двугодишен материал. Зрелостниците ни имаха задълбочени знания за изследване на различни видове функции и подхождаха с разбиране към задачи като напр. Задача 13 (Фиг. 17).

*Превод на Фиг. 17:* 13. От правоъгълен лист с размери  $a$  и  $b$  трябва да се изработи кутия с най-голяма вместимост, като се отрежат от ъглите четири еднакви квадрата и получените части се прегънат.

Аналогична задача (Фиг. 25) откриваме в немски учебник по математика за 11. клас (Oberstufe, 2017). Задачата е сходна на тази от руския сборник, но значително олекотена – зададени са конкретни размери на листа и е приложен чертеж, онагледяващ дадения проблем.

**Einfache Extremalprobleme** 167-1



**19.** Aus einem rechteckigen Stück Pappe von 42 cm Länge und 30 cm Breite soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu wird an jeder der vier Ecken ein Quadrat abgeschnitten. Anschließend werden die überstehenden Streifen hochgeklappt. Wie groß müssen die Quadrate sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?

Hinweis: Die Aufgabe eignet sich auch gut als Experiment. Man baut verschiedene Schachteln und füllt sie mit Granulat.

Фиг. 25: Немски учебник (задача за самостоятелна работа)

*Превод на Фиг. 25:* 19. От правоъгълен лист картон с дължина 42 см и ширина 30 см трябва да се изработи кутия без капак. За целта от всеки от четирите ъгъла, трябва да се отреже по един квадрат. Впоследствие оставащите странични ленти се прегъват, за да стоят изправени. Колко големи трябва да са квадратите, за да има кутията максимален обем? Забележка: Задачата е подходяща и за експеримент. Необходими са различни кутии и да се пълнят с гранули. Очакваното решение с приложение на елементи от Математическия анализ.

Сходни задачи присъстват и в курса по ООП за 12. клас в раздела екстремални

задачи в планиметрията. По план са в края на последната учебна година, когато учениците са профилирани в други предметни области, а очакваните решения са евристични и предполагат дълга и задълбочена работа.

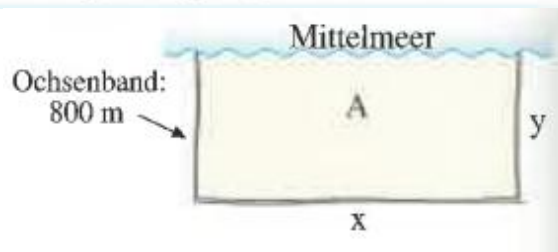
**Задача 2:** От квадратен лист картон със страна 60 cm трябва да се направи кутия с максимален обем, като се изрежат еднакви квадрати от ъглите на картона. Намерете страната на изрязаните квадрати. (Кирил Банков, 2021, стр. 197)

*Решение:* Условието не съдържа чертеж, но има предложено решение, което включва и чертеж, който е сходен на този от Фиг. 25. Означаване на дължина на страната на отрязаните квадрати с  $x$ ,  $0 < x < 30$ . При решението се използва неравенството на Коши. След ограничен брой приложни задачи през първи гимназиален етап, се поставят високи очаквания за самостоятелна работа на учениците по подобна задача. В предходните уроци са изучени основните неравенства между средно хармонично, средно геометрично, средно аритметично и средно квадратично. Тяхното приложение в алгебрата и планиметрията са свързани с 3. Хипотеза (стр. 7) и е редно да са разгледани по-рано през годината с достатъчно време за решаване, което планът и разпределението не предполагат. Това води до невъзможност тези интересни и полезни задачи да се усвоят качествено и учениците да имат самочувствие, знание, умения за решаване на близки до практиката задачи по елегантен начин.

#### 4.3.1. Мястото на приложните задачи

В един от действащите учебници в Германия за 11 клас (Oberstufe, 2017) се среща сходна задача измежду решените към урока „Приложение на решаването на екстремални проблеми“ (Фиг. 26). Разделът е за приложения на изследване на функция, чрез първа и втора производни, материал, който отпадна от ООП по математика у нас.

**Beispiel:** Es ist nicht genau bekannt, welche Form Dido dem Landstück gab, das sie mit dem ca. 800 m langen Ochsenhautband abgrenzte. Nehmen wir einmal an, dass sie die Form eines Rechtecks am Meerufer wählte. Welche Länge und welche Breite hätte Dido dem Rechteck wohl geben müssen, wenn sie dessen Flächeninhalt möglichst groß gestalten wollte?



Фиг. 26: Немски учебник (решена задача)

*Превод на Фиг. 26:* Пример: Не е известно точно каква е формата на парцела, който Дидона иска да ограда с 800 м дълга лента от волска кожа. Да приемем, че

земята се намира на морския бряг и е с форма на правоъгълник. Какви дължина и ширина трябва да се изберат, за да се загради възможно най-голяма площ?

Тук необичайна междупредметна връзка дава името на момичето, а именно паралел с древногръцката митология „Дидона (на латински: Dido) е митична царица и основателка на град Картаген. Тя купува от берберския цар Ярба земя. Според условията на сделката тя получава правото на толкова земя, колкото заеме една волска кожа. Съобразителната Дидона нарязва кожата на тънки ивици и така огражда много земя.“ (Ниф, 1985) Разказването на истории е в човешката природа, свидетелства за това са приказки, легенди и предания стигнали до наши дни. Те са възпитаващ фактор, изграждат ценности в подрастващите, влияят на въображението, развиват мисленето. Преплитането на митология и математика ангажира вниманието и провокира асоциативната памет. Цитираната по-горе задача можем да причислим към математическия фолклор. Тя звучи съвременно в контекста на уменията на 21. век. Подходът на Дидона към проблемната ситуация е модерно да се нарича днес “Think outside the box” – мисли оригинално, творчески. При подходяща работа по задачата учениците могат да запомнят нестандартния подход на царицата, но и изводите от задачата за връзка между страните на правоъгълник с най-голямо лице. Такава задача повишава мотивацията и познавателните процеси и води до по-устойчиви знания – 1. Хипотеза (стр. 7).

С цел придържане към означенията от изображението, в предложените решения лицето се отбелязва с  $A$ , а не с  $S$ .

В цитирания учебник очакването е за сходно решение със съответните означения:

Главно условие:  $A = xy$  трябва да е максимално

Допълнително условие:  $x + 2y = 800$

$$x = 800 - 2y$$

Измеренията на парцела трябва да имат положителни стойности.

$$x > 0$$

$$0 < y < 400$$

Целева функция:  $A(y) = (800 - 2y)y, 0 < y < 400$

Необходимо условие за екстремум:  $A'(y) = 0$

$$A'(y) = 800 - 4y$$

$$800 - 4y = 0$$

$$y_0 = 200$$

Достатъчно условие за екстремум:  $A''(y_0) \neq 0$

$$A''(y_0) = -2$$

$$A''(y_0) < 0 \Rightarrow \max$$

Извод: Парцелът с най-голяма площ е дълъг 400 м – по продължението на морския бряг и широк – 200 м.

Елементи на Математическия анализ не се предвиждат в курса по ООП по математика. Решението опира до изследване на квадратна функция. Следвайки идеята за затваряне на образователния цикъл в 12. клас, задачата може да се реши като приложен преговор на материала от 9. клас. Особено полезно е, ако учениците имат опит със задачи като задача 11 от Фиг. 17 (стр. 66).

*Решение 1:*

Лицето  $A = xy$  трябва да е възможно най-голямо.

Дължина на ограждението:  $x + 2y = 800$

$$x = 800 - 2y$$

Измеренията на парцела трябва да имат положителни стойности.

$$x > 0$$

$$0 < y < 400$$

Заместваме:  $A(y) = (800 - 2y)y$

Квадратна функция:  $A(y) = -2y^2 + 800y, 0 < y < 400$

Върх на параболата – тук е възможно да има объркване между означенията на променливите, поради навика да се използва  $x$ , за означение на променлива, и  $y$  – за функционална стойност. Избор на учителя е дали да насочи чрез кое неизвестно да се подходи в решението. Полезна провокация е използването на  $y$  за онагледяване, че изборът на променлива зависи от предпочитанията на решаващия с оглед спецификата на задачата. С прилагане на формулата за определяне на върха на параболата, който сочи нейния максимум, се получава:  $V(200; 80\,000)$ . Откъдето лесно се определят стойностите на неизвестните величини:  $y = 200\text{ m}$  и  $x = 400\text{ m}$  и се стига до извода за максималното лице:

$$A_{max} = 80\,000\text{ m}^2$$

Полезно би било да се направи и паралелно решение, при което се работи с променливата  $x$ :

$$y = 400 - \frac{x}{2}$$

И още едно, което преговаря алтернативен подход за определяне на върха на параболата.

*Решение 2:*

Лицето  $A = xy$  трябва да е възможно най-голямо.

Дължина на ограждението:  $x + 2y = 800, x > 0, y > 0$

Да разгледаме:  $2A = x \cdot 2y$

Според неравенството на Коши между средно геометрично и средно аритметично за положителни числа:

$$\sqrt{x \cdot 2y} \leq \frac{x + 2y}{2}$$

$$\sqrt{2A} \leq \frac{800}{2}$$

$$2A \leq 160\,000$$

$$A \leq 80\,000$$

Най-голямата площ е  $80\,000\text{ m}^2$  и се постига при  $x = 2y$ , ако се замести в началното условие:  $x + 2y = 800$ , се получава  $4y = 800$ , което води до извода:  $x = 400\text{ m}$  и  $y = 200\text{ m}$

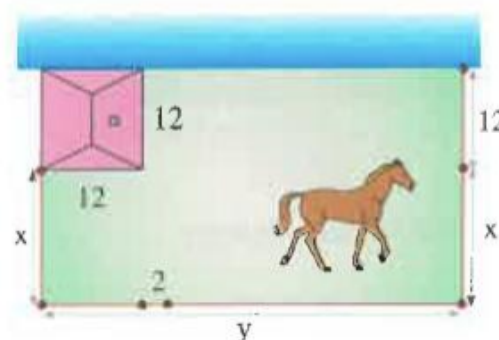
Тук ролята на учителя е да насочи вниманието към различни подходи като обърне внимание как придобитите знания в курса се надграждат, следвайки спираловидния модел на обучение. Важно е да се подчертае, че неравенството на Коши предлага по-икономичен и елегантен подход за решение. Наред с това в синхрон с новата образователна парадигма за учене през целия живот, надграждането на знанията дава възможност за решаване на все по-сложни проблеми. В подкрепа на това твърдение е уместно да се използва разгледаната по-горе Задача 2 (стр. 74).

Приложните задачи дават възможност за различни подходи като влияят на мотивацията, демонстрират ползите от учене през целия живот и развиват уменията на 21. век – аргументиран избор измежду стратегии, творчество и *problem-solving*. Разгледаният пример и различните му решения са в подкрепа на 1. и 2. Хипотеза (стр. 7).

В същия учебник следват задачи за самостоятелна работа и една от тях в 26. задача, която следва сходен модел и отново е с предложена скица с означенията (Фиг. 27).

### 26. Pferdekoppel

Ein Farmer besitzt direkt am Fluss ein Landhaus. Durch einen dreiseitigen Zaun möchte er eine Pferdekoppel abgrenzen. Er hat 100 m Gitter zum Abzäunen erworben sowie ein 2 m breites Tor. Wie lang muss er die drei Zaunseiten wählen, um eine maximale Auslauffläche für sein Pferd zu erhalten?



Фиг. 27: Немски учебник (задача за самостоятелна работа)

**Превод: 26. Имение край реката:** Фермер разполага със 100 м метална мрежа и иска да ограда от три страни падок за коня си, като остави отвор от 2 м за врата. Как трябва да избере дължините на трите страни, за да ограда максимално голям двор за коня? (Фиг. 27)

Задача с изображение, онагледяващо проблема, повишава интереса и мотивацията, защото представя реален проблем. Стимул за творческото мислене би било отсъствието на буквени и числови означения. Тогава в решението ще е

застъпена точка 5 от стратегията на Лайзен (стр. 25).

В учебника по математика за 12. клас на издателство Просвета на 196 стр. откриваме подобна задача: „7. В наличност имаме 60 м ограда. Трябва да оградим правоъгълен участък, на който едната страна е залепена до стената на сграда. Определете размерите на участъка така, че той да има с максимално лице.“ и в задачите за самоконтрол, съвсем опростената версия: „7. От всички правоъгълници с периметър 14 см определете измеренията на този с най-голямо лице. Намерете лицето на този правоъгълник.“ (Кирил Банков, 2021, стр. 202) И двете цитирани по-горе задачи използват целевите умения според програмата за 9. клас. За зрелостниците това трябва да са добре познати ситуации, при които е уместно да се направи обобщение за затваряне на цикъла по темата за функции. Учениците са натрупали опит за:

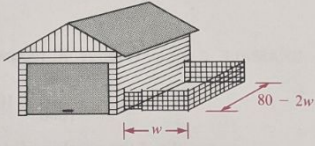
- емпирично решение – заместване на стойности и нанасянето им в таблица;
- евристично решение по няколко начина – чрез функция и чрез класически неравенства;
- технологично – от часовете по ИТ за работа с електронни таблици (Excel).

Приложните задачи демонстрират какво е особеното значение на образованието по математиката. Те „разчупват“ съзнанието в посока, че един проблем има много пътища за решаване и печелившата стратегия е определянето на оптимален такъв – спрямо време и ресурси. В живота ежедневно се сблъскваме с проблемни ситуации, при които комбинативното мислене, чрез обхващане на цялата налична информация, чрез анализ и синтез се достига до оптимално решение – 1. Хипотеза (стр. 7).

В сборника Задачи по Алгебра 7-12 клас (Коста Коларов, 2013) в глава Приложение на производните в група Б намираме следната задача, която по настоящата програма би трябвал да се решава в профилирана подготовка по математика в 12. клас. „Измежду всички правоъгълници с периметър 40 см има един с най-голямо лице. Да се намери диагоналът му.“ Очевидно е сходна цитираната по-горе задача. Разбира се, тя може да се разглежда в 12. клас с прилагане на елементи на Математическия анализ, но и в раздела за приложението на екстремалните задачи (Фиг. 14). Сходна е и задача 43. от Фиг. 3, както и пример 4 на Фиг. 28, при който е предложено едно възможно решение с последователно обяснение на стъпките (Gustafson & Frisk, 1992).

**EXAMPLE 4** A man wants to build a rectangular pen for his dog. To save fencing, he intends to use one side of his garage. Find the maximum area that he can enclose with 80 feet of fencing.

**Solution** Let the width of the area be represented by  $w$ . Then the length is represented by  $80 - 2w$ . See Figure 9-8.



**FIGURE 9-8**

The area of the pen is given by the product of the length and the width. Thus, we have

$$A = w(80 - 2w)$$

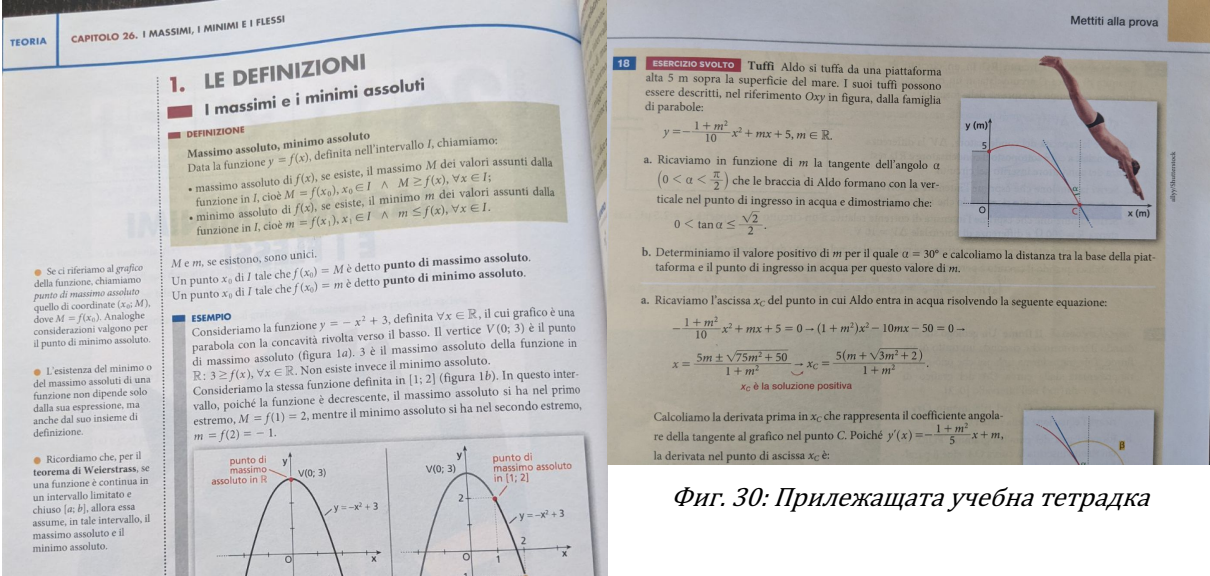
Find the maximum value of  $A$  as follows:

$$\begin{aligned} A &= w(80 - 2w) && \text{Remove parentheses.} \\ &= 80w - 2w^2 && \text{Factor out } -2 \text{ and rearrange terms.} \\ &= -2(w^2 - 40w) && \text{Subtract and add 800.} \\ &= -2(w^2 - 40w + 400) + 800 && \text{Factor } w^2 - 40w + 400. \\ &= -2(w - 20)^2 + 800 \end{aligned}$$

Thus, the coordinates of the vertex of the graph of the quadratic function are  $(20, 800)$ , and the maximum area is 800 square feet, attained when the width is 20 feet and the length is  $80 - 2w$ , or 40 feet. ■

Фиг. 28: Максимална заградена площ

Примерите на Фиг. 29 и Фиг. 30 от италиански учебник и прилежащата учебна тетрадка за 12. клас (Bergamini & Barozzi, 2016) сочат драстично по-високо ниво на преподаваната в училище, математика. В учебника е обяснена подробно теорията с редица задачи за упражнение, а в учебната тетрадка задачите са главно приложни.



**TEORIA** CAPITOLO 26. I MASSIMI, I MINIMI E I FLESSI

### 1. LE DEFINIZIONI

#### I massimi e i minimi assoluti

**DEFINIZIONE**  
**Massimo assoluto, minimo assoluto**  
 Data la funzione  $y = f(x)$ , definita nell'intervallo  $I$ , chiamiamo:  
 • massimo assoluto di  $f(x)$ , se esiste, il massimo  $M$  dei valori assunti dalla funzione in  $I$ , cioè  $M = f(x_0)$ ,  $x_0 \in I \wedge M \geq f(x)$ ,  $\forall x \in I$ ;  
 • minimo assoluto di  $f(x)$ , se esiste, il minimo  $m$  dei valori assunti dalla funzione in  $I$ , cioè  $m = f(x_1)$ ,  $x_1 \in I \wedge m \leq f(x)$ ,  $\forall x \in I$ .

$M$  e  $m$ , se esistono, sono unici.  
 Un punto  $x_0$  di  $I$  tale che  $f(x_0) = M$  è detto **punto di massimo assoluto**.  
 Un punto  $x_1$  di  $I$  tale che  $f(x_1) = m$  è detto **punto di minimo assoluto**.

**ESEMPIO**  
 Consideriamo la funzione  $y = -x^2 + 3$ , definita  $\forall x \in \mathbb{R}$ , il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Il vertice  $V(0; 3)$  è il punto di massimo assoluto della funzione in  $\mathbb{R}$ :  $3 \geq f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Non esiste invece il minimo assoluto.  
 Consideriamo la stessa funzione definita in  $[1; 2]$  (figura 1b). In questo intervallo, poiché la funzione è decrescente, il massimo assoluto si ha nel primo estremo,  $M = f(1) = 2$ , mentre il minimo assoluto si ha nel secondo estremo,  $m = f(2) = -1$ .

**18 ESERCIZIO SVOLTO** Tuffi Aldo si tuffa da una piattaforma alta 5 m sopra la superficie del mare. I suoi tuffi possono essere descritti, nel riferimento  $Oxy$  in figura, dalla famiglia di parabole:

$$y = -\frac{1+m^2}{10}x^2 + mx + 5, m \in \mathbb{R}.$$

a. Ricaviamo in funzione di  $m$  la tangente dell'angolo  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) che le braccia di Aldo formano con la verticale nel punto di ingresso in acqua e dimostriamo che:

$$0 < \tan \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b. Determiniamo il valore positivo di  $m$  per il quale  $\alpha = 30^\circ$  e calcoliamo la distanza tra la base della piattaforma e il punto di ingresso in acqua per questo valore di  $m$ .

a. Ricaviamo l'ascissa  $x_C$  del punto in cui Aldo entra in acqua risolvendo la seguente equazione:

$$-\frac{1+m^2}{10}x^2 + mx + 5 = 0 \rightarrow (1+m^2)x^2 - 10mx - 50 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{5m \pm \sqrt{75m^2 + 50}}{1+m^2} \rightarrow x_C = \frac{5(m + \sqrt{3m^2 + 2})}{1+m^2}.$$

$x_C$  è la soluzione positiva

Calcoliamo la derivata prima in  $x_C$  che rappresenta il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto C. Poiché  $y'(x) = -\frac{1+m^2}{5}x + m$ , la derivata nel punto di ascissa  $x_C$  è:

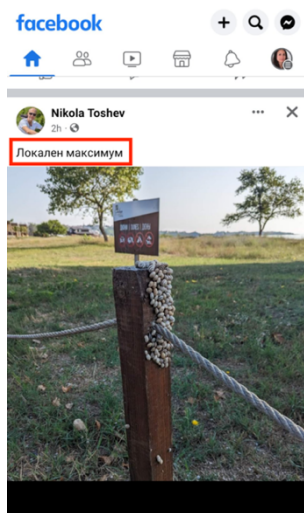
Фиг. 30: Прилежащата учебна тетрадка

Фиг. 29: Италиански учебник

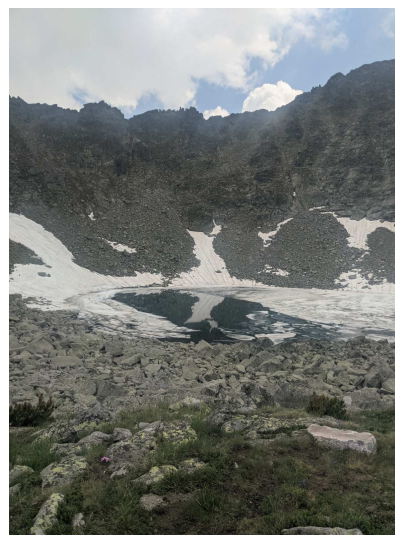
Колко от българските ученици след години ще оценят закачливия коментар в социалните мрежи на Фиг. 31? Ще могат ли да отговорят или да забележат и



коментират, изучавана в часовете по математика, закономерност? Колко от тях ще припознаят задача за отражение и ще се зададат съответните въпроси при вида на Фиг. 32?



Фиг. 31: Локален максимум



Фиг. 32: Отражение

Наблюдаваме чести промени в учебния план и броя на часовете по математика. Новите учебници са изготвени в кратки срокове. Във форуми и споделени файлове се открива директно преведени задачи от други образователни системи, което не е удачен подход с оглед на културни и образователни различия при въвеждане на заложения теоретичен материал. Не е реалистично очакването без съответните сборници и учебници учителите да подготвят подобни допълнителни задачи при разчета на материала в силно ограничено време. С оглед на мобилност и конкурентоспособност на учениците ни е редно да се работи в посока на допълване на курса на обучение с адаптирани приложни задачи.

Прави впечатление разнообразието на текстови задачи в учебниците и сборниците по математика в прогимназиалния курс. В 7. клас те са специално застъпени и се работи много по темата, заради НВО. След това сякаш изчезват и остават предимно задачи-упражнение, без да се поставят в контекст знанията и да се онагледят тяхното приложение. Някои теми от първи гимназиален етап завършват с урок за „Моделирание с...“ или „... – Приложение“. Учениците ги третираят като нов урок с неприятните текстови задачи. Нереалистично е да се очаква, че с 2-3 решени задачи и още няколко за упражнение могат да се изградят навици за евристични подходи и функционално четене. Рядкост са задачите, които да преплитат повече от една тема и да излизат от строго прилагане на алгоритъма на решените такива. Сякаш приложните задачи остават като изолиран урок, а не са пътят към развиване на заложените компетентности. Липсват обемни като текст задачи, в които да се развива аналитично четене и критично мислене. Дори да допуснем, че се очаква до края на седми клас да са развити тези умения, то те са развити на съответното ниво на зрялост. Задачи във формата на реален проблем

не присъстват реално. Умението за пренос на знанията и вникване в поставения проблем, онагледяването му, използването на различни евристични подходи не са сериозно застъпени в първи гимназиален етап. „Подходът *problem-solving* подчертава, че важните математически концепции и процедури могат да бъдат най-добре преподавани чрез задачи или дейности, които ангажират учениците да мислят за важните математически концепции и умения, които трябва да научат.“ (Albay, 2019)

Паралелът с учебниците за зрелостници у нас е драстичен. На теория до голяма степен застъпеният материал следва препоръките за единно Европейско образование. В плановете на МОН са заложили желаните компетентности, но как те могат да се постигнат само с шаблонни задачи, които много дигитални приложения могат да решат за миг. Как без извличане на важната информация от по-комплексен текст могат да се развият ключовите умения? Тук може да се перифразира Д. Пойа (Пойа, 1972), с твърдението, че функционалното четене се развива с функционално четене. В дисертацията си „Сравнителен анализ на успешни практики за формиране на математически умения у ученици 8-12 клас“ Б. Виденова прави паралел между българската образователна система и ИВО (International Baccalaureate Organization) и подчертава „В българските учебници почти липсват подходящи текстове за придобиване на умения да се чете и интерпретира в математически контекст дадена информация“. (Виденова, 2015)

Образователна система, която в хода на прогимназиалния курс е създала умения за работа с разнообразни текстови задачи, може да постави по-сериозно интелектуално предизвикателство пред учениците си като се обогати и гимназиалният курс със задачи, които третират близки до реалността проблеми.

#### 4.4. Дигитални технологии и образование

Съвременните ученици са представители на поколението-Z, а учителите, които сега се обучават, ще работят с ученици от поколението-Алфа (Eldridge, 2023). Става дума за подрастващи, които прекарват часове пред екраните, свободно боравят с дигитални технологии и ги смятат за естествена част от живота си. В динамичното ни съвремие и следвайки парадигмата за учене през целия живот неизбежно учителите и бъдещите такива трябва да са в крак с времето, да са информирани и да използват технологиите критично и уместно в образователния процес – б. Хипотеза (стр. 8). От метаанализа, направен от А. Чунг и Р. Славин върху ефективността на образователните технологии за подобряване на постиженията по математика в училище, е недвусмислен изводът, че съвременният свят се дигитализира и няма как училището да прави изключение. Според учените не стои въпросът дали, а как учителите успешно да използват новите инструменти за целите на образованието (Cheung & Slavin, 2013). Авторите подчертават, че технологиите могат да са в помощ за образованието, но не могат да са негов

заместител.

Няма как да се забрани на учениците да използват приложения и да търсят информация в мрежата, ролята на учителите е да ги насочват за постигане на образователните цели. Приложните задачи са един от начините в действие да се види, че наличието на технологиите сами по себе си не решават комплексни задачи и не заместват умения. Намерената информация в интернет не се превръща в устойчиво знание. Чрез подходящи задачи учениците добиват увереност да ги решават като „стъпват“ на стабилни математически знания, развити компетентности и умения. Чрез грамотно използване на дигитални образователни приложения, те могат да се справят с реални проблеми от живота – 1. Хипотеза (стр. 7). Сред уменията на 21. век са самонасочването и дигиталната грамотност, които се надграждат при употребата на технологиите като помощен инструмент в процеса на решаване на задачи – 2. Хипотеза (стр. 7).

#### 4.4.1. България

Ев. Сендова подчертава „Да внушим на учениците си идеята, че да овладеем технологиите е важно, но най-важното е да ги използваме СЕГА така, че да се научим да се справяме със сложни проблемни ситуации в БЪДЕЩЕ“ (Сендова, 2014)

Според програмите на МОН в някои методични единици е заложена работа с подходящ за целите софтуер, но няма как да се ограничим само с това. Характеристиките на дигиталните приложения дават възможности за по-тясна интеграция с учебната програма в почти всички изучавани теми в курса по математика. Една такава реализация е осъществена в материалите на Виртуален училищен кабинет по математика (ИМИ-БАН, 2013), който е водещ пример за споделяне на опит и материали. Свободно достъпна е колекция от разработени на GeoGebra упражнения и задачи. Ръководството на Тони Чехларова „Разработване на система от практико-приложни задачи за формиране на ключови компетентности по математика“ цели в примери да предложи промяна в учебния процес, съобразена с новата реалност като поставя акцент върху:

- „Внедряване на изследователския подход в математическото образование и разширяване на уменията за решаване на практически задачи от различни области и с различно ниво на определеност;
- Създаване на условия за усещане на радост от ученето и удовлетвореност от постиженията, активно участие на ученика в учебния процес, развитие на качества на мисленето и въображението, увереността в способността за решаване на практически проблеми с използване на математически средства;
- Съчетаването на класически и иновационни средства, базирани на педагогически модели и дигитални технологии (включително на специализиран динамичен образователен софтуер). (Чехларова, 2014)

Viva Математика с компютър (VivaCognita, 2023) е единственото у нас състезание за ученици, което е без такса за участие и е с награден фонд. Въпреки това остава недостатъчно популярно сред учениците, особено сред тези от втори гимназиален етап. Материалите, които виртуалното хранилище предлага, не са широко използвани в училищата. Екипът застъпва идеята, че „... математическото моделиране и приложенията на математиката не са застъпени в достатъчна степен в училищния курс“ и всички модели при такива задачи са опростени и не отговарят на реалността (Кендеров & Чехларова, 2021). Използването на подходящ софтуер при решаване на заданията, дава възможност да се разшири кръгът на приложните задачи, които съответстват по сложност на реалния живот. Такива задачи от своя страна повишават мотивацията на учениците, които виждат как математиката „оживява“ – 1. Хипотеза (стр. 7).

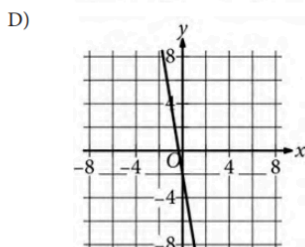
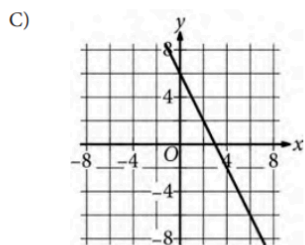
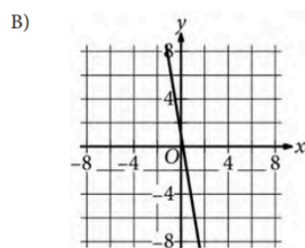
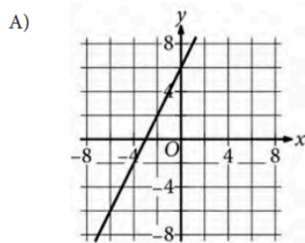
#### **4.4.2. Опитът на Германия и изпитите на IB и SAT**

Години наред в Германските провинции се провеждат задължителни изпити по математика след 10. клас и след 12. клас – понастоящем последната година варира до 12,5 или 13 клас. Те са съпоставими с НВО с края на 10. клас и ДЗИ в края на 12. клас в България. В часовете по математика учениците работят активно с калкулатори, което е отбелязано като проблем. Като недостатък се отбелязва, че свикнали да прибегват към помощното средство, учениците срещат затруднения при елементарни пресмятания. При избор на вариант с и без калкулатор 90% избират версията с помощни средства (Baier, 2023). Изследвания на математическата грамотност сред учащите сочат ниски математически умения и това налага промяна – разделяне на изпита в две части – без и с калкулатор. Това нововъведение постепенно в периода 2017–2019 г. обхваща всички провинции.

Изпитът по математика по програмата IB и математическите секции на Scholastic Assessment Test (SAT) са разделени на част без помощни средства и част с графичен калкулатор, като задачите в двете части са съобразени със съответно регламентираните помощните средства. Фиг. 33 и Фиг. 34 представят две сходни задачи съответно от SAT (SAT, 2022, р. 36) и НВО за 10. клас (МОН, НВО за X клас).

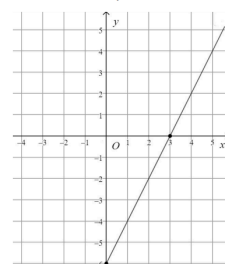
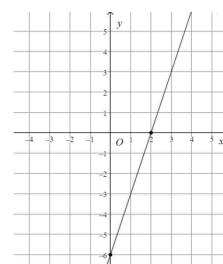
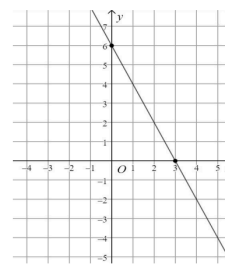
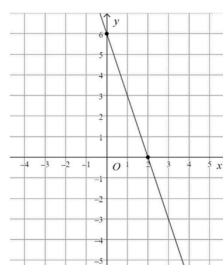
4

The function  $f$  is defined by  $f(x) = 2x + 6$ . What is the graph of  $y = f(x)$  ?



Фиг. 33: SAT – Октомври 2022 г.

6. На кой чертеж е представена графиката на функцията  $f(x) = 6 - 3x$  ?



Фиг. 34: НВО – 10 клас 2021 г.

Приложните задачи, които са застъпени във втората част са по-обемни спрямо текста на изложение на проблема. На Фиг. 35 и Фиг. 36 са представени две задачи от втори модул на IB изпит (Awada, и др., 2019, стр. 273) и ДЗИ – Профилирана подготовка (ПП) (МОН, 2022). Тези примери са показателни, защото посочените изпити – SAT и IB са утвърдени в практиката като международно признати от водещи образователни институции. Впечатление прави преплитането на теория и практика в IB изпита на фона на строго теоретичния подход при задачата от ДЗИ.

**21 P2:** An epidemic is spreading through a country. Authorities estimate that the number of people who will be affected by the disease can be modelled by the function  $N(t) = 450t^2 - 30t^3$  where  $0 \leq t \leq 30$  represents the time measured in days.

- a** Compare the average rate of change at which the disease is expected to spread between the 1st and 3rd day, with the average rate of change at which the disease is expected to spread between the 4th and 5th day. (3 marks)
- b** Find an expression for the instantaneous rate of change of the spread of the disease for  $0 \leq t \leq 30$ . (2 marks)
- c** Hence determine when the spread of the disease reaches its maximum. (2 marks)
- d** Find  $\frac{d^2N}{dt^2}$  and comment on its meaning in the context of the question. (3 marks)

Фиг. 35: Примерна задача от частта с калкулатор (1B)

*Превод:* Епидемия се разпространява в дадена страна. Властите изчисляват, че броят на засегнатите от болестта може да се представи чрез функцията  $N(t) = 450t^2 - 30t^3$ , където  $0 \leq t \leq 30$  е времето, измервано в дни.

**a.** Сравнете средното изменение на очакваното разпространение на болестта между първия и третия ден със средния темп на очакваното разпространение на заразата между 4-тия и 5-ти ден.

**б.** Намерете израз за моментната скорост на изменение на разпространението на болестта за  $0 \leq t \leq 30$ .

**в.** Въз основа на б) определете кога разпространението на болестта достига своя максимум.

**г.** Намерете

$$\frac{d^2N}{dt^2}$$

и коментирайте нейното значение според контекста на задачата.

**16. Дадена е функцията:  $y = ax^3 - 3x^2 + 3a^2$  за  $a > 0$ .**

**а) Намерете локалните екстремуми на функцията.**

**б) Намерете стойностите на реалния параметър  $a$ , ако сборът от локалните екстремуми на функцията е равен на 2.**

Фиг. 36: ДЗИ по математика 26 август 2022 г. ПП

При работа с функции се изхожда от възможностите на разрешените инструменти, обикновено Computer Algebra System (CAS) – графичен калкулатор. Ученикът може да начертае функцията, да открива критични точки, пресечни точки с други функции. Оценява се умението на учениците да „разшифроват“ задачата и да се постави правилният въпрос. За техническата работа се разчита на инструмента. Това е дидактическо предизвикателство за съставителите на задачите, но и поставя под съмнение до каква степен се проверяват отделните математически знания и умения по темата.

### 4.4.3. Златната среда

Според регламента на Висшите училища (ВУ) след 1998 г. е забранена употреба на калкулатори на приемните изпити и съответно в работата в часовете по математика. В исторически план и в паралел с другите държави у нас не е имало такава „залитане“ в прекомерна употреба на калкулатори. В учебните програми в годините математиката е застъпена строго теоретично без помощни средства и очакването е учениците да могат да правят всички необходими пресмятания сами. Настоящата дисертация разглежда ролята на приложните задачи за целите на образованието. Застъпената теза е, че теоретичният материал има нужда от надграждане с приложни задачи. При тях правилното интерпретиране на условието и аналитичното вникване в застъпения проблем са в основата на първата стъпка от решението на задачата. Грамотното използване на подходящи софтуерни решения не замества теоретичните знания, но дава възможност за по-добра визуализация. Важно е учениците да се отнасят към технологичните решения като към помощно средство. Наложително е да развиват дигиталните си умения при избор и активна работа с инструментите – онлайн приложения или други софтуерни решения.

След тълкуване на поставен проблем ученикът следва:

- да превърне условието на задачата в математически модел
- да извърши необходимото изследване
- да избере подходящ дигитален инструмент
- да пренесе в него изследвания математически модел
- да тълкува визуализирания модел
- да тълкува получените резултатите
- да даде отговор на поставените в задачата въпроси в контекста на разглеждания проблем.

Настоящото поколение ученици има в джоба си устройство, което е в пъти по-мощно от компютрите, с които са работили при обучението си повечето действащи учители. Интернет предлага достъп до разнообразна литература, платформи и дигитални приложения. Разнообразието от материали и инструменти поставят въпроси пред образованието: „Има ли нужда от промяна на вече познатите методи на преподаване? Лесно ли се променят тези методи? Дали промяната ще доведе до подобряване на обучението и по-ефективно постигане на целите?“ (Топова & Петрова, 2019) Оптималният баланс се търси от математици и дидактици в областта, за да се предложат адекватни възможности за допълнителна квалификация на действащите и подготовка на бъдещите учители. Изследването на Т. Топова и Д. Петрова завършва със заключението, че „... за съвременните ученици знанията по математика остават затворени между кориците на учебника... Убедени сме, че правилното и умело използване на технологиите в образованието ще разкрие на учениците математиката като експериментална,

приложна и предизвикателна област на знанието.“ В съчетание с темата на дисертацията може да се добави към извода на учените, че за целта са необходими и съответните приложни задачи, които в комбинация с технологиите повишават интереса и мотивацията на учениците –1. Хипотеза (стр. 7).

В статията „Информационните технологии в обучението по математика: средство за или бариера пред формирането на абстрактно мислене“ се анализира ролята на информационните технологии за постигане общ и конкретен план на „основната цел на математическото образование – да развие абстрактното мислене и способността да се извършват дедуктивни заключения.“ (Тонова & Николова, 2013) Както Р. Славин отбелязва, технологиите неизбежно влизат в класната стая. Динамиката на времето, в което живеем поставя и методически предизвикателства пред учителите, които трябва да са активно учещи в духа на новата образователна парадигма – 6. Хипотеза (стр. 8). Практиката и проблемите, които тя създава не са от вчера, а са непреходна част от живота. Нужно е преподавателите да са гъвкави и адаптивни в търсене на Златната среда за използване на технологиите в образованието, за постигане на устойчиви знания и умения сред учащите.

#### 4.5. Проектно-базирано обучение

Все още популярните проектно-ориентирани задания в училище често се третират от учениците като „безплатни шестици за презентация“. Изработване на макети, образователни игри, презентации за живота и приноса на изтъкнати математици, изчисляване на бюджет – приходи и разходи с помощта на приложен софтуер са част от примерите, които се използват в различните образователни степени. Често учителите задават на ученици представянето на следващата методична единица като презентация. Този подход, както много други образователен алтернативи, има своите предимства и недостатъци.

В българската научна литература един от авторите е Я. Тоцева (Тоцева, 2021), която разглежда и подробно описва образователните цели и структурата на проектно-базираното обучение. Други автори споделят опит или наблюдения в класната стая, като често това са изследвания на терен от докторанти като това на Ив. Делинова (Делинова, 2012), които проследяват предимствата на този подход. При проектите ролята на учителя е силно насочваща, а очакваните артефакти са презентации. Настоящата дисертация се занимава с ролята на приложните задачи, затова изброяването на тези дейности е по-скоро маркиращо, а не изчерпателно. Интерес представлява вплитането на приложни задачи в писмени разработки и създаване и решаване на задачи, които са близки до реални житейски проблеми. Такава творческа работа предполага опит в решаването на такива задачи, а понастоящем в гимназиалния курс на обучение те не са така широко застъпени.

Във ФМИ на СУ в програмата за магистри в рамките на изборния курс



„Проектно-базирано обучение“ се разглежда образователният потенциал на този подход. Целта е бъдещите учители по математика да са запознати със световните тенденции в областта, да почерпят опит от добрите практики и да могат успешно да ги реализират в класната стая.

Математически проекти с научна и приложна дълбочина се разработват главно от талантиливи ученици. Опит в областта има Ученическият Институт по Математика и Информатика (УЧИМИ, 2001). При подготовката на проектите учениците могат да се консултират с преподаватели, ясно определени са изискванията към формата и съдържанието на разработката. Високи са очакванията за творчество и академичен математически подход. Това е извор на безценен опит в сходна област, който следва да се предаде в училищния курс по математика. Писмени разработки тип есе са популярна практика в други страни. С оглед мобилност на зрелостниците наред с надграждането на задачите-упражнение с приложни такива, които стимулират аналитично четене, анализ и синтез на текст, е необходимо да се развият и умения за писане, да се даде поле на действие на учениците, за да развият творческия си потенциал в сферата на математиката – 2. Хипотеза.

#### 4.6. Математическото есе като инструмент в обучението по математика

*„Самообразованието е, твърдо вярвам, единственият вид образование, което съществува.“  
Исак Азимов (1920-1992)*

В чуждестранни образователни системи е практика да се залагат едногодишни проекти. Видна е ориентацията към подготовка за професионална реализация, при която уменията да се работи дългосрочно, планирано и целенасочено, да се аргументира и защитава позиция са ключови компетентности.

В настоящия дисертационен труд са представени два наложили се подхода за стимулиране на математическото мислене и мотивацията на зрелостници:

1. Математическото есе – Internal Assessment (IA), което е част от образователната програма International Baccalaureate (IB) за 11. и 12. клас.
2. Третата изборна устна матура по математика. В някои провинции на Германия и в интернационалните немски училища в чужбина тя е известна като пета матура за зрелостниците.

Методическите и интелектуалните предизвикателства, които те крият за преподаватели и ученици, дават друг ъгъл на разглеждане на приложните задачи. Естеството на заданията предполага развити умения в работата с математически текст и зрялост за създаване на такъв.

Учениците трябва:

- самостоятелно да изберат и опишат проблем от реална житейска ситуация или близка до такава;
- да формулират и подробно опишат математически проблема;
- да анализират наличната информация;
- да изградят математически обосновано подробно решение на базата на усвоения вече математически апарат или съответно негово надграждане;
- да формулират отговор или извод в контекста на поставения проблем;
- да вземат под внимание и комуникират ограниченията, с които се сблъскват – поради характера на проблема или нужда от допълнителни математически знания.

И двете разглеждани форми не са задължителна част от курса на обучение. Въпреки това учителите стимулират възпитаниците си да се заемат с тези проекти с оглед на уменията, които се развиват в процеса на писане. Разгледаните методи са използвани като форма на изпитване и оценяване. Резултатите влияят върху дипломата за завършена образователна степен.

За целите на дисертацията се разглежда от една страна влиянието на такива разработки върху мотивацията, интелектуалното любопитство и задълбоченото разбиране на учебния материал по математика, а от друга като инструмент за повишаване на функционалната грамотност на зрелостниците. Направен е обзор как и какви необходими качества, изисквани от Европейската компетентностната рамка (DigComp, 2023), се развиват и с какво този метод допринася за постигане на устойчиви знания.

2. Хипотеза (стр. 7) разглежда значенето на приложните задачи за изграждане на умения за самоинициатива, самонасочване, самооценяване, математическа грамотност, дигитална грамотност, евристично мислене, изследователски подход, задълбочени познания по предмета, критично мислене, новаторство, учене за цял живот. Разглежданият казус има значение и за уменията, които студентите, бъдещи учители, се очаква да развият в курса на обучение, за да могат да формулират и оценяват задания от този тип. Докато опитните преподаватели знаят как да напътстват, коригират и подават насочваща обратна връзка, за младите учители това е област, в която следва да се усъвършенстват и развиват собствения си потенциал. Следвайки новата образователна парадигма, действащите учители обогатяват компетентности при усвояването на различни образователни стратегии. За целите на дисертацията фокусът е върху дефинирането на такъв вид задание, рамката на очаквания резултат и матрицата за оценяването на писмената разработка или презентацията, както и математическото есе като стимул за учене.

Математическото есе не е популярен подход в училищния курс у нас. То е застъпено от години в курса на обучение по математика във втория гимназиален етап на чуждестранните образователни програми. Във ФМИ на СУ в програмата за магистри в рамките на изборния курс „Познавателни процеси по математика“

есето се използва активно – и като начин на представяне на материала от страна на лектора, и като една от възможностите за финален проект на студентите. Констатацията на ръководителя на курса Т. Топова е, че малко студенти избират тази форма за изпитно задание. Очакването е учителите да са активно търсещи и учени според 6. Хипотеза (стр. 8). Писането на математически текст е нелека задача и очакването е студентите да се възползват от тази възможност, да имат волята да положат усилие, за да могат от своя страна да възпитат такива умения и в класната стая.

Математическото есе като инструмент за обучение стимулира учениците да излязат от рамката на използване на математиката само в контекста на прилагане на формули в решаването на задачи. Кара ги да са изследователи и откриватели, да комбинират знанията си, да формулират проблем и търсят решението му чрез прилагане на целия математически арсенал, с който разполагат. Това е и подготовка за представянето им по-късно във висшите училища. Този тип писмена разработка допринася за развитие на когнитивните им умения. Умението да формулират и доказват твърдения в текст (комбиниран с формули и математически символи) е полезно и за ученици, които нямат цел да се продължат образованието си в сферата на математиката. Изложението на математически идеи в параграфи, разбираеми и за неспециалисти, развиват способността за структуриране и доказване на идеи, споделяне на начин на мислене на достъпен и ясен език. Това е друг подход за развитие на уменията на 21. век – 2. Хипотеза (стр. 7). За разлика от готовите приложните задачи, в които трябва да се създаде математически модел, при есето формулировката и проблемът са в ръцете на ученика.

Есе по математика като ІА има ясно определен формат и процес на разработване. Учениците първоначално получават базова форма, която ги насочва както за избор и формулиране на темата, така и за изискванията към цялостното изложение и критериите за оценка.

#### **4.6.1. Основни точки на базовата форма**

- Тема
- Цел
- Обосновка
- Източници
- Област или области от математиката, с която е свързан проблема (тема от курса по математика)
- Какво трябва да се изследва и анализира в процеса на разработка
- Какво трябва да се обясни по-подробно, за да е достъпно есето и за неспециалисти в областта
- Какви са възможните визуални елементи (изображения, графики,

таблицы, диаграми), които следва да бъдат включени

#### **4.6.2. Целите на писмената разработка според програмата**

- Прилагане на умения в различни ситуации и бъдещо развитие
- Осъзнаване на моралната, социалната и етична страна на математиката
- Разбиране на математиката като универсален език
- Вникване в приноса на математиката за други дисциплини

#### **4.6.3. Формат на разработката**

- Обем – 6-12 страници
- Правилно цитиране на източниците, използваните дефиниции и изображения
- Да не бъде изброяване на факти или историческа справка, а реален проблем с ясно формулирано решение
- Достъпност – целевата аудитория не е академично общество, а съученици, съответно изказът трябва да е разбираем за по-широка публика
- Математическите понятия и приложеният апарат не трябва да излиза от преподавания в курса по математика – задълбочени знания и разбиране по предмета
- Насърчава се използването на приложения и инструменти като графичен калкулатор и GeoGebra и WolframAlpha – дигитални компетентности

Шаблонът е документ, който посочва препоръчителната структура на изложението и съдържа напътстващи въпроси и разяснения. Това поставя ясна рамка на изложението, но и спомага да се преодолее проблемът на учениците, които трябва да започнат от нула работата си на бял лист.

Развитите умения за справяне с приложните задачи в годините са предпоставка да се направи преходът към това ниво на евристичен подход към заданието. Натрупаният опит като лексика от текстовите задачи благоприятства създаването на есето. В него се очаква ученикът да покаже лично отношение, да обоснове причините за избор на разглеждания проблем, да изрази ангажираност, да заяви позиция. По този начин се набляга на социалните страни на обучението. Свободата за избор на тема и проблематика стимулират компетентностите творчество и новаторство.

#### **4.6.4. Критерии за оценка**

- Изложение (4 точки)
  - формулировка
  - яснота на изказа
  - ясна формулировка на темата и целта на изложението
  - фокус върху конкретната тема

- логическа свързаност
- коректно цитиране на източниците
- онагледяване на изложението с изображения, таблици и диаграми
- Математическа обосновка (3 точки)
  - използване на подходящ математически език и представяне (символи, терминология)
  - дефиниране на основни понятия, където това се налага
  - избор на подходящи инструменти (графики, Equation Editor, изображения)
  - формулиране на резултатите според изискванията (напр. закръгляне до 3 значещи символа)
  - използване на различни инструменти (формули, диаграми, графики)
- Лично отношение към темата (4 точки)
  - креативност
  - поставяне на проблем, търсене на връзки
  - търсене и създаване на математически модел на реален житейски проблем
  - самостоятелно мислене и подход
  - израз на личен интерес по темата
  - задаване на въпроси и търсене на отговори
- Анализ (3 точки)
  - Самоанализ и оценка на изложението
  - Анализ на резултатите
  - Значимост на изложението
  - Представяне на ограниченията на изследването на конкретния проблем
  - Бъдещи възможности за анализ и разширение на изложението
  - Връзка с други области на математиката
- Приложение на математическия апарат (6 точки)
  - Демонстрирано познание и разбиране
  - Прилагане на математиката в различен от учебниковия контекст
  - Прилагане на евристични методи
  - Коректност на математическите решения
  - Разпознаване и обяснение на зависимостите

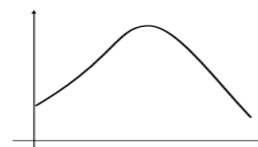
Детайлната разбивка на критериите за оценка включват всички умения на 21. век, разглеждани в дисертацията.

Очакваният резултат е ясно дефиниран, което от една страна дава скеле и опора за работа, от друга страна явно подчертава целите на разработката и критериите, по които тя ще се оценява. Правилата са обстойно описани, като символичен договор за изпълнение на проект, в който мерило за успеха е нивото на образователните компетентности.

Технологичното време, в което живеем, налага **дигиталната грамотност** като

необходимост за бъдещата реализация на учениците. Това включва умението за използване на допълнителни инструменти, в случая специализирани приложения или калкулатори, умението за правилно форматиране на текст (текстообработка) като се следва зададен шаблон – шрифт, заглавия, вмъкване на изображения, графики, диаграми и таблици, форматиране на математически изрази чрез използване на съответния редактор. Формулите, символите и пресмятанията трябва да са въведени коректно, но и ясно обяснени, което се различава от подхода за писане на решение на задача от домашно задание или писмено изпитване, защото трябва да са придружени с текстови обяснение. Примерите по-долу (Фиг. 37 и Фиг. 38) онагледяват възможни резултати от работата на учениците. На Фиг. 37 е посочен некоректен запис на решение и съответно графика, която не отговаря на изискванията. Графиките и диаграмите се очаква да са с коректно надписани оси и видни стойности, особено на адресираните точки.

$$3^{2x} - 2(3^x) = -1 = (3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0 = (3^x - 1)^2 = 0 = 3^x = 1 = x = 0.$$



Фиг. 37: Неприемлив израз и графика

Алтернативно решение на уравнението е представено на Фиг. 38. Важно е и как е изпълнено позоваването на отделните визуални елементи, те трябва да са номерирани и озаглавени, за да е ясно с кое от тях е свързан съответният коментар в текста. (Lee, 2022)

We want to solve for  $x$  in the equation

$$3^{2x} - 2(3^x) = -1.$$

We can rewrite this equation in terms of  $3^x$ :

$$(3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0.$$

After factoring, this becomes

$$(3^x - 1)^2 = 1$$

and it follows that  $3^x = 1$ , or  $x = 0$ .

Фиг. 38: Коректно изложено решение

Учениците не са поставени в безтегловност. Във виртуалното пространство са достъпни разработки на други ученици през годините, от които могат да извлекат поука и да имат очакване за обратната връзка, която ще получат (Exploration, 2022). В напътствията са посочени примери както и ресурси за свободно ползване. Тук е силно изкушението за повлияване от чужд труд, но политиката срещу плагиатстване е строга и се следва категорично.

Примерни теми – важно е да са вдъхновени от реални ситуации:

- Задръствания;
- Баркодове;
- Игри;
- Разпространение на вирус;
- Решение на кубично уравнение;
- Лотария;
- Полиноми;
- Задачи за оптимизиране.

Процесът на подготовка и реализация предполага първоначална дискусия с преподавател за избрания проблем и формулировката му. Учителят има насочваща роля, той не избира и не предлага тема, това е задачата на ученика. След финализиране на темата, всеки ученик има право на еднократна обратна връзка от учителя. Препоръката е това да бъде върху завършена цялостна разработка. Отново ролята на учителя е не да редактира написаното, а само да даде насоки за доработка. Той не поправя, а само маркира местата, които съдържат неточности, грешки или имат нужда от друга преработка. Следва ученикът да отрази коментарите и да преработи при нужда изложението преди окончателно предаване. Фиг. 39 онагледява формата на коментарите, които се получават като обратна връзка. (Exploration, 2022)

Така вмешателството е минимално, както съветва Д. Пойа. Насърчава се самостоятелната работа, самокритичността и самооценката.

Let the initial estimate =  $x_1$

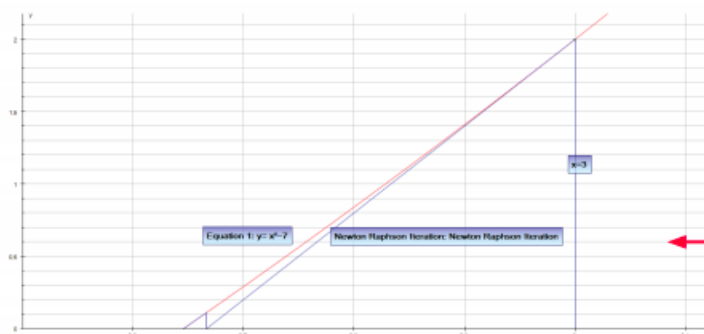
**B** Poor use of subscripts throughout explanation

The intercept of the tangent at  $x_1$  with the x-axis will be closer to the root than the initial estimate. This intercept can be called  $x_2$ .

**E** No explanation of how student knows it will be closer

Calculating  $x_2$  is done by studying the triangle bounded by the x-axis, the line  $x=x_1$ , and the tangent to the line at  $x_1$ . This only works when the gradient of the function at  $x_1$  is not equal to zero.

An example of a triangle is shown in the following graph (where the square root of 7 is being estimated):



**B** Graph could be larger and clearer, zooming in on the pertinent domain and range

In this case  $x_1=3$

Фиг. 39: Примерна работа с междинна обратна връзка

Прави впечатление нивото на свобода при разработката. Правилата са ясно зададени, учителят не е бавачка, а само ментор, ученикът е изправен пред предизвикателството за дългосрочна работа. Развива се умение за планиране и системна работа, самосъзнание и саморегулиране са следващите компетентности, които са част от дългосрочната цел.

Окончателната оценка се дава въз основа на първоначално зададените критерии като е придружена с подробен коментар по отделните секции, който обосновава точките, с които е оценено изпълнението на заданието.

## Assessment

Criterion	A	B	C	D	E (S L)	E (H L)	To tal (S L)	To tal (H L)
Achievement level awarded	3	3	2	2	6	6	16	16
Maximum possible achievement level	4	3	4	3	6	6	20	20

## Comments

Фиг. 40: Крайна подробна оценка

Първоначалната нагласа на учениците е, че това е лесен начин да повишат успеха си. Свободата за избор на тема и възможността да приложат математиката извън контекста на учебника, домашните задания и тестовите изпитвания им вдъхва увереност да се заемат с проекта. В крайна сметка, пътят на писането им е непознат и често учениците споделят, че са подценили времето и силите, които трябва да инвестират за изпълнение на заданието. Отново можем да се позовем на Д. Пойа: „Ако искате да се научите да плувате, трябва да влезете във водата и ако искате да станете *problem-solver*, трябва да решавате задачи.“ (Пойа, 1972), така и писането на математически текст се развива в процеса на писане. Това е умение, което цял живот се използва и доразвива – в духа на новата образователна парадигма. Предимство е, когато основите са положени още в защитената среда на училището.

Сходна по цел, но коренно различна по формат е петата матура в Германия и интернационалните немски училища в чужбина. От учениците се очаква да подготвят презентация, която да представят устно пред комисия. Идеята е сходна – ученикът сам избира проблем, който да разглежда. При този случай се наблюдава по-тясна работа с учителя, който има право по-активно да насочва разработката. Ученикът, при желание, получава многократна обратна връзка, която предварително е планирана във времето. За разлика от IA, където има еднократно взаимодействие ученик-учител и се набляга на самостоятелната работа, развива се самонасочването и самокритичното мислене, при германския формат ролята на учителя е по-голяма. Разчита се, че преподавателят познава обучаемия и може повече да допринесе за развитието на знанията и уменията му в процеса на



разработката, с което заедно работят за развитието на компетентностите му.

Наред с презентацията трябва да се подготви и писмена разработка, но в по-малък обем в сравнение с IA – около 5 страници. Няма шаблон за презентацията, а само насоки какво трябва да включва задължително, как да се изгради изложението. В допълнение се предоставят списъци с изисквания, които трябва да се покрият, които спомагат подготовката и саморефлексията.

Отделните критериални матрици са за:

- самопроверка на правилното цитиране (Фиг. 41);
- писмената работа – отделен чеклист, който набляга на критичното мислене и умението за самооценка. Принос за това има самата формулировка на въпросите в първо лице единствено число. Примерна част от въпросника:
  - Фокусирано и целенасочено по темата ли съм изградил изложението?
  - Да проверя отделните части за тематична свързаност.
  - Да изградя мисловна карта за представяне на връзките.
  - Балансирал ли съм отделните части и еднакво добре ли съм ги изследвал?
  - Добре ли съм структурирал писмената разработка и презентацията?
  - Ясен ли съм във въведение по темата?
  - Формулирал ли съм точна теза?
  - Ясно ли съм разделил проблема на подпроблеми, които разглеждам?
  - Достатъчно ясен ли е изказът ми?
- подготовка на презентацията;
- планиране на презентирането и подготовка за сесията за въпроси;
- самооценка на презентацията (Фиг. 42).

Checkliste – Habe ich beim Zitieren alles richtig gemacht?

<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Ist mein Zitat als solches zu erkennen?</li> <li>▪ Ist mein wörtliches Zitat durch Anführungszeichen am Anfang und Ende gekennzeichnet?</li> <li>▪ Ist das Zitat verständlich und habe ich es ggf. erklärt?</li> <li>▪ Ist das Zitat in den Zusammenhang eingebettet?</li> <li>▪ Entspricht das Zitat, sowohl die Form als auch den Inhalt betreffend, der Originalquelle?</li> <li>▪ Erfüllt das Zitat einen bestimmten Zweck?</li> <li>▪ Ist das Zitat nicht zu lang?</li> <li>▪ Ist das Zitat genau?</li> <li>▪ Habe ich durchgehend eine einheitliche Zitierweise verwendet?</li> <li>▪ Enthalten die Literaturangabe jeweils alle relevanten Angaben?</li> <li>▪ Steht am Ende eines jeden Literaturmachweises ein Punkt?</li> <li>▪ Sind die Bestandteile der bibliografischen Angaben durch Punkte bzw. Kommata u. a. voneinander getrennt?</li> <li>▪ Sind die Titel in der Bibliografie alphabetisch sortiert?</li> <li>▪ Erscheinen alle zitierten Titel auch im Literaturverzeichnis?</li> <li>▪ Sind Paraphrasen und indirekte Zitate auch als solche erkennbar?</li> </ul>	✓
--	---

Фиг. 41: Самопроверка на цитирането

Kriterien	++	+	-	--
<b>Organisatorisches</b>				
Ich habe den Raum für die Präsentation gut vorbereitet.				
Ich habe den Teilnehmern gut strukturierte Unterlagen ausgeteilt.				
Ich habe die Technik ohne Probleme bedient.				
Meine Visualisierung (z. B. OH-Folien, Fotos) war gut vorbereitet.				
<b>Zielgruppe</b>				
Ich bin auf die Fragen meiner Zuhörer eingegangen.				
<b>Ziel der Präsentation</b>				
Ich habe das Ziel meiner Präsentation erreicht.				
<b>Strukturierung des Themas</b>				
Meine Präsentation hatte einen „roten“ Faden. Sie war nachvollziehbar aufgebaut.				
Meine Präsentation war zeitlich gut strukturiert.				
Meine Präsentation war thematisch gut strukturiert.				
Ich habe zentrale Aspekte ausführlich dargestellt und Nebensächliches nachrangig behandelt.				
<b>Fachliches Können</b>				
Meine Ausführungen waren sachlich richtig.				
Ich habe mein Thema kompetent und differenziert dargestellt.				
<b>Präsentationstechnik und Präsentationsmedien</b>				
Meine Präsentationstechnik (Flipchart, PowerPoint, Plakat...) passte zu meinem Thema.				
Aufwand und Nutzen standen bei meiner Präsentationstechnik in einem angemessenen Verhältnis.				
Ich habe mein Thema gut visualisiert.				
Ich habe die Präsentationsmedien (Bild, Grafik...) meinem Thema angemessen ausgewählt.				
<b>Auftreten</b>				
Ich habe frei gesprochen.				
Ich habe Blickkontakt zu den Zuhörern / Zuschauern gehabt.				
Ich habe meinen Vortrag verständlich formuliert.				
Ich habe laut und deutlich gesprochen.				
Meine Körpersprache hat meinen Vortrag unterstützt.				
<b>Summe:</b>				

Фиг. 42: Самооценка на презентирането

Самокритичната проверка развива уменията на 21. век – самонасочване и самооценка. Сходна оценъчна рамка използва и изпитващата комисия. В различните провинции разработката предполага да е индивидуална или групова работа, което от своя страна развива допълнителни умения в участниците – работа в екип, разпределение на задачи и отговорност. Независимо от броя на участниците, комисията освен въпроси по разглеждания проблем има право да задава чисто математически въпроси, свързани с приложения в презентацията математически материал. Целта е оценка на устойчиви знания по темата.

По смисъл изискванията се припокриват с тези на IA, затова няма да бъдат изброени подробно. Интересни са различията в метода на подготовка и формата на представяне. Една от тях е настойчивата препоръка към германските ученици да представят разработката си пред семейство и приятели. Целта е от тази публика да получат коригираща обратна връзка, според която да усъвършенстват писменото изложение, но в по-голяма степен презентацията и поведението пред публика. Работата с учителя и обратната връзка от близките придават на работата и социален оттенък. Ново преживяване и подготовка за бъдещи изяви са изслушването и контролът на реакциите към критики и коментари.

Комисията разполага с по-подробни оценъчни матрици (Фиг. 43) за писменото и устното представяне. Те съдържат средно 15 критерии, като всеки от тях има 6 нива за оценка. (Dr. Gisela Beste, 2012)

	++	+	+ -	- +	-	--
<b>Formale Beurteilungsebene</b>						
bezogen auf die Teile der schriftlichen Ausarbeitung (Vollständigkeit, leserfreundliche Form, sprachliche Darstellungsleistung, sprachliche Korrektheit)						
- Deckblatt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Darstellung des Arbeitsprozesses	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Quellenverzeichnis	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Tabelle	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Reflexion	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>fachlich-inhaltliche Beurteilungsebene</b>						
<b>Fachliche Darstellung zur Themenwahl (Eingrenzung, Bedeutung)</b>						
- nachvollziehbare Begründung des Themas	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Einordnung in einen Gesamtzusammenhang (auch fachübergreifend)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Argumentative Logik und Stringenz der Darstellung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Stimmigkeit der fachlichen Aussagen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>ggf. Begründung zur Medienwahl und zu den Arbeitsmethoden</b> (z. B. Medieneignung, Aufwand-Nutzen-Relation, Schwerpunktsetzung, Gliederung)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Nachvollziehbare Darstellung der Planung der Präsentation</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Überlegungen zur Tragfähigkeit der Planung</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Überzeugende und angemessene Analyse der Quellen</b>						
- Funktionalität der Quellen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Qualität und Aussagekraft	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Nachvollziehbarkeit der (individuellen) Reflexion</b> (z. B. Umgang mit der Themenstellung, Arbeitsprozess, Ertrag, Stolpersteine)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Фиг. 43: Оценъчна таблица за писмената разработка

При двете разгледани системи тежестта се поставя върху избора на тема, математически коректни действия, логическа свързаност на отделните части, достъпност на изложението, ясен изказ, техническа реализация, които измерват функционалната грамотност на учащите. По този начин ясно се адресират повечето умения на 21. век.

#### 4.6.5. Математическото есе и ЕКР

Заложените критерии са ясни и измерват нивото на уменията на ученика. Посочени са конкретни изисквания. В контекста на Европейската рамка (DigComp, 2023) се проследява развитието на следните ключови компетентности, които експлицитно са заложили. В Таблица 6 е описано съответствието между ключовите компетентности и зададените критерии за оценка.

Таблица 6: Компетентности и критерии

Компетентност	Критерии за оценка
Математическа грамотност	Ниво на сложност на поставения проблем, коректност на решението

Компетентност	Критерии за оценка
Задълбочени познания по предмета	Математическа обосновка
Дигитална грамотност	Оформяне на текст и презентация, боравене с дигитални инструменти за визуализиране на графики и формули
Изследователски подход и новаторство	Избор на тема, откриване на проблем, който не е неразгледан в часовете и в учебника
Евристично мислене	Търсене на решение на нерешен още проблем
Критично мислене	Към информацията в интернет пространството и към разсъжденията и резултатите, които реализира
Самоинициатива	Свобода на избора
Самонасочване	Системна и мотивирана работа, изискванията за обем и качество не могат да бъдат покрити за една нощ
Самооценяване	При ясно зададени критерии поставяне на обективна самооценка, умение да се види работата отстрани
Отговорност	Избор на тема; спазване на срокове; цитиране

Математическото есе учи как да се излагат идеи, да се формулира проблем и комуникира неговото решение, но не само чрез формули и пресмятания, но и с ясни обяснения на разбираем за по-широка публика език. Така се излиза от схемата на писане на домашно задание и се демонстрира по-задълбочено разбиране на същността на математиката. От учениците се очаква да имат опит с развиването на есета в други области, като литература, история, философия. Необходимо е да пренесат уменията си в създаването на изложението и структуриране на заданието от тези области, като го комбинират с математически формули и съждения. В математическото есе е важен точният изказ и ясното изразяване на идеите. Ролята на учителя е да подготви учащите да направят тази следваща стъпка в развитието си както на ниво математическо мислене, така и на ниво на конкретните компетентности. Преносът на умения между предметните области изгражда спойката, която е образованието.

#### **4.6.6. Добавената стойност на математическото есе като инструмент**

Училищният курс няма за цел само запознаване с науката, правилата и теоремите, решаването на задачи, но и развитието на когнитивните умения на учениците. Математическото есе е инструмент, чрез който учащите са стимулирани да работят самостоятелно. Свободата в избора на тема, която съответства на интересите им, възможността да ползват допълнителни инструменти и литература, предизвикателството да изложат и защитят идеите, са

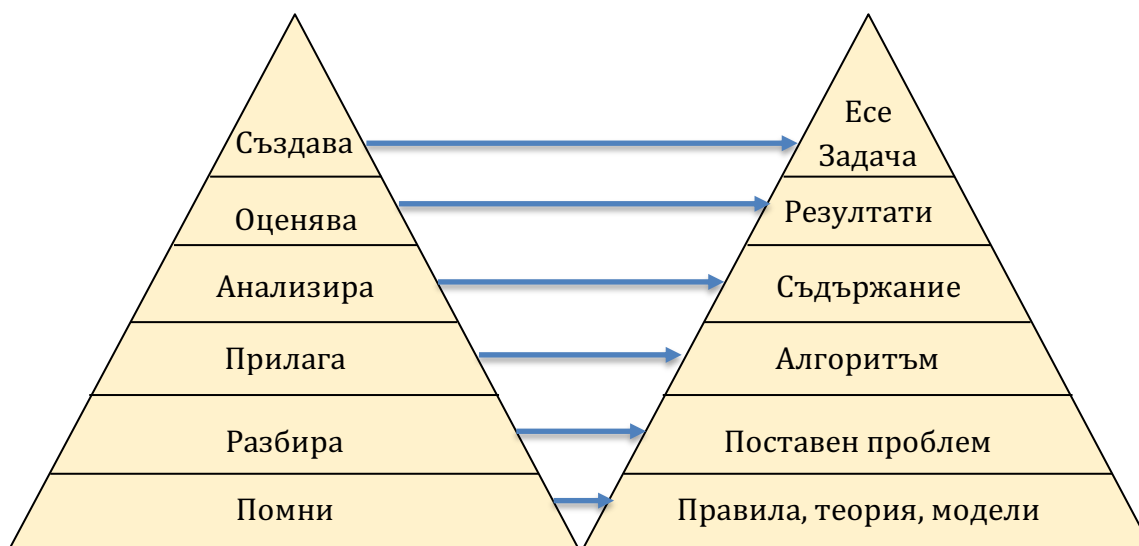
умения от ученето за цял живот и повишава мотивацията за работа – собствена писмена разработка. Свободата носи със себе си отговорност за поет ангажимент, за задание, което трябва успешно да бъде доведено до край.

Анализът на двата метода на математическо изложение е интересен сам по себе си. Оригиналността на ученическото авторство при IA е морално предизвикателство за съвестта на учениците. С развитието на антиплагиаторски програми и публикуването на разработките в мрежата, младите творци трябва да са коректни в цитирането и е недопустимо да заимстват чужди работи. Разбира се, няма как да се проследи доколко самостоятелно е направена разработката, но това е част от възпитанието. Опитните учители, които познават възпитаниците си, могат да адресират проблема при голяма разлика между резултатите от тестовете в училищния курс и нивото на писмената работа.

Външната намеса при изготвянето на презентациите по германския модел също не може да бъде контролирана. Безспорна остава методическата страна на такива разработки и добрите практики, които можем да заимстваме и прилагаме както в подготовката на учениците във втори гимназиален етап, така и в подготовката на бъдещите учители по математика и допълнителните курсове за действащи учители.

#### 4.7. Приложните задачи според таксономията на Блум

С оглед проблематиката на дисертацията е направен разрез на приложните задачи (Фиг. 44), който следва преработената таксономия на Блум според Андерсон и Кратвол (Anderson & Krathwohl, 2001).



Фиг. 44: Преработена таксономия на Блум според Андерсон и Кратвол в паралел с приложните задачи

Добавена е ос на изследване на отделните нива. Тя цели да илюстрира как приложните задачи свързват когнитивните нива и уменията на 21. век. За целта са

посочени както конкретни примери от математическото съдържание от курса на обучение, така и съответстващи на нивото компетентности.

**Помни формула** за лице, **метод** за намиране на най-голяма и най-малка стойност на функция, **неравенство** на Коши. Очакването е, че заложените по план математически знания са усвоени – математическа грамотност.

**Разбира** отделните думи от условието на задачата, текста като цяло и *поставения проблем* – какво се търси в задачата. При аналитично четене е важно да се обхване цялото условие – четивна грамотност, боравене с предоставена информация, дисциплина, концентрация, *problem-solving*. **Разбира** как се прилага запомненият теоретичен материал в конкретна задача – математическа грамотност, *problem-solving*.

**Прилага** и комбинира запомнени формули, изучен *алгоритъм* или натрупан опит за решаване на такива задачи – математическа грамотност, комбинативно и критично мислене, *problem-solving*, самостоятелност, самонасочване.

**Анализира** значението *съдържанието* на задачата и смисъла на получените стойности в контекста на зададения проблем – критично мислене, боравене с предоставената информация.

**Оценява** избраната стратегия, алтернативни подходи, кои получени *резултати* са смислени според поставената задача, формулира логичен отговор – критично мислене, оценка, самонасочване и самооценка.

**Създава** допълнителни условия или изменения на разглежданата задача, нова *задача*, математическо *есе*, презентация по зададена тема – творчество, математическа грамотност, *problem-solving*, самонасочване и самооценка.

Писмената разработка се позиционира директно в последния етап – **създава**, който е дефиниран като „обединява заедно елементи, за да състави разбираемо или функциониращо цяло; реорганизира елементи в нов модел или структура чрез генериране, планиране, произвеждане“ (Anderson L. , et al., 2000). Разбира се това е възможно само при добри математически познания и висока математическа грамотност, които да послужат за основа за развитие на ученика. Писането не бива да е самоцел, а следващ етап в развитието и усъвършенстването на учениците. Ролята на учителя е като водещ в процеса на цялостната подготовка по математика и като фасилитатор чрез допълнителните насоки, които дава за писането на есето. Подробно описаният очакван формат за разработката на математическото есе дава насока за развитие, мотивира участниците да са активно учещи.

## Обобщение

Паралелът между българската и чуждестранната образователни системи сочи сходно ниво на заложените приложните задачи в прогимназиалния курс, образователен етап, в който българската образователна система изпреварва повечето европейски такива. В гимназиалния курс у нас текстовите задачи и

графичните модели при разглеждане на функции са по-слабо застъпени. Потенциалът на връзката между теоретичните знания по математика и реалния живот не е достатъчно развит съобразно зрелостта на учениците, което влияе на мотивацията – 1. Хипотеза (стр. 7). Навлизането на дигиталните технологии в класната стая поставя методически предизвикателства към учителите и е причина те да следват новата образователна парадигма за учене през целия живот – 6. Хипотеза. Изкуственият интелект и достъпните в мрежата приложения предлагат готови решения, но не са фактор за устойчиви знания. Подходящи приложни задачи преплитат теоретичните знания и грамотното използване на технологиите, с което влияят положително на когнитивните и метакогнитивни умения на учениците – 4. Хипотеза. Проектно-базираното обучение и писмените разработки следва да навлизат в курса на обучение, защото са стъпка към общото европейско образование според документите на ЕК и способстват мобилността на зрелостниците – 5. Хипотеза. Разрезът на математическото есе според заложените в гимназиален етап компетентности и умения онагледява неговата роля като образователен инструмент и го позиционира в последния етап на таксономията на Блум – създава. От ученика може да се очаква да поставя и описва приложни проблеми едва след като има натрупан опит в решаване на разнообразни задачи, третиращи близки до реални проблеми.

## 5. ГЛАВА: ИЗСЛЕДВАНИЯ НА ТЕРЕН

---

Проведеното независимо изследване е **предшествано** от **наблюдения** върху възпитаници от Интернационалното училище към посолството на Германия в София (НУС) – предимно с българско гражданство и израснали в България. Учениците в това училище не са преминали подбор според математическите им познания и малцина от тях избират математика като зрелостен изпит. **Предварителното** проследяване е пряко, явно (открито), в половината от случаите включено, съответно в другата половина – невключено, с продължителност от няколко месеца, осъществено главно в часовете за писане на домашни и самостоятелна работа. По характера си това е естествен експеримент и следва принципите на качествено педагогическо изследване. (Бижков & Краевски, 2007) Въпреки отличната си езикова подготовка се наблюдава, че учениците срещат сериозни трудности при работа с приложни задачи. Посочената основна спънка е разбирането на условието на задачата. Подпомогнати от учител при тълкуването, те превъзможват „блокажа“, но спонтанната реакцията на много от тях след насочването е „Защо не се посочва директно какво се търси?“. Дори ученици в система, която е с традиции в преподаването на математика чрез приложни задачи през целия курс на обучение, срещат трудности при вникване в условието, въпреки познанията по необходимия математически материал. Това показва необходимостта от различни нива, методи и форми на обучение по математика (DigComp, 2023).

**Предварително наблюдаваният казус и паралелът** с очакваните компетентности според програмата на МОН са в основата на емпиричната информация и служат за първоначално ориентиране в проблема (Кожухарова, Ганчев, & Делчев, 2004). Следвайки метода на качествените педагогически изследвания въз основа на участващи наблюдения се достига до разбиране за проблема, с който изследваните лица се сблъскват. Събраната информация дава възможност за поставяне на изследователските задачи на настоящата дисертация и формулиране на 3. Хипотеза (стр. 7) – теория, основана на данни (Glaser & Strauss, 1967).

В литературата са описани и се цитират изследвания, които варират според наблюдаваните възрастови групи, според видове училища, според провеждането – еднократно или отместени във времето. При едни емпиричните изследвания учениците във всяко училище и съответно във всеки клас са разделени на две равни групи. При други – всички ученици през период от време получават първо единия вид задание, а после – другия. Мащабно сходно изследване сред 3 000 ученици филтрира работите на тези, които не са имали затруднения с чисто математическата задача. Разделението на грешките е математически (М), създаване на математически модел (ММ), разбиране на текста (Т), комбинация от



неразбиране на текста и реализиране на модела (МТ). Сравнение се прави сред работите на учениците, които не са имали математически грешки и статистиката сочи, че на различните текстови задачи, те имат успеваемост между 30 % и 70 %, макар чисто математическите да са решили правилно (Jordan, 2011). Въз основа на литературния преглед на разгледани изследвания и опита на други изследователи в областта, предвид темата на дисертацията и заложените 2. Хипотеза и 3. Хипотеза (стр. 7) се следва моделът – **split in a half**. Контролната група (КГ) получава готов математически модел, който трябва да бъде решен. Фокус групата (ФГ) получава текстова задача, която води до съставяне на същия математически модел.

Хипотезите на настоящата дисертация разглеждат от една страна четивна – разбиране на условието и функционалната грамотност на учениците – работата с текст и изображение. Друга ос на разглеждане са компетентностите и уменията на 21. век. С цел минимизиране на негативното влияние на недостатъчна математическа подготовка в непрофилираните гимназии, настоящето изследване е проведено в училища с приеман изпит по математика, в които учениците показват високи резултати на НВО в края на 10. клас. Подобно на по-горе цитираното изследване се цели да се изолира и анализира конкретно работата с приложни задачи. Допускането е, че ученици с висока математическа подготовка срещат по-малки трудности при решаване на чисто математическата страна на възложеното задание. Това дава възможност да се проследи подходът към приложната страна на задачата – 3. Хипотеза (стр. 7). Грешки в пресмятанията се наблюдават и са описани, но не са предмет на настоящата дисертация.

## 5.1. Подготовка – избор на конкретни задачи

Многообразието на изучавани теми в гимназиалния курс по математика е свързано с различни приложни задачи. Настоящата дисертация има за цел да разгледа ролята и значението им в курса на обучение и няма претенции да разгледа целия материал.

Интерес представляват темите, свързани с изследване на функции, в частност квадратна функция, която е предмет на изучаване в различна степен в отделните етапи на образование (класове). Следвайки спираловиден модел на изучаване за първи път квадратен тричлен се изучава в 7. клас в уроците за разлагане на квадратен тричлен на множители, решаване на уравнения от по-висока степен и намиране на най-голяма и най-малка стойност на квадратен тричлен. В 8. клас се изучават методи за решаване на квадратно уравнение – формули за намиране на корените и формули на Виет. В 9. клас се разглежда квадратна функция и се определят интервали на растене и намаляване, както и се определя най-малка и най-голяма стойност на квадратна функция в интервал. В 12. клас се разглеждат отново задачи, свързани с намиране на най-малка и най-голяма стойност, решават се и приложни задачи, които адресират тези стойности. В профилираната

подготовка в 11. и 12. клас се развиват умения за изследване на функции от висока степен. Фактът, че тази тема се разглежда в различни етапи на зрялост на учениците, дава възможност да се формулират различни приложни задачи и да се разгледа значението им за развитието на заложените ключови компетентности. Така освен надграждането на познанието, може да се проследи и процесът на изграждане на когнитивни умения, значими за ученето за цял живот. Учителите могат да обърнат внимание как сходен по вид задачи могат да се решават с различни алгоритми и какви са предимствата на разширяването на знанията и уменията.

Разместванията в учебната програма през годините са налагали различен подход към материята с оглед възрастта (зрелостта) на учениците. Разпределението на изучавания материал по математика по години не е предмет на това изследване. Дисертацията анализира само как съответните знания и умения могат да бъдат да използвани при решаването на подходящи приложни задачи и тяхното значение за затвърдяване на познанията, развитието на уменията и компетентностите.

Материалите за дисертацията са подготвени в периода 2019-2022 г., когато учениците в различните випуски са обучавани по различни програми. Цитираните задачи и анализа на съответния материал са от действащите учебници според програмите влезли в сила в следния ред:

- 8. клас от 2017-18 г.
- 9. клас от 2018-19 г.
- 11. клас от 2020-21 г.
- 12. клас от 2021-22 г.

Два различни типа задачи се използват за целите на изследването. Техните конкретни представители коренно се различават по формулировка. Единият (Задача А) ясно задава характерни точки на функция, чиито коефициенти трябва да се определят. Целта е да се отбележи нивото на познание на съответния материал по математика. Вторият (Задача Б) се състои от описателен текст и онагледяваща графика. В този случай въз основа на аналитично четене, комбинирано с разчитане на графиката, трябва да се отделят условията за намиране на същите коефициенти. Зададените в двете задачи ограничения са еднакви, еднакъв е и математическият модел, и съответно крайните отговори.

На Фиг. 45 са представени паралелно двете задачи, които се зареждат в браузър. За реализацията е използвана платформата Jotform (Jotform, 2022).

**Задача А:** <https://eu.jotform.com/211106094426346>

**Задача Б:** <https://eu.jotform.com/211106151163338>

## Задача А

Прочете внимателно задачата и я решете на лист.

Дадени са функциите  $f(x) = \frac{d}{x}$  и  $g(x) = ax^2 + bx + c$ . Ако е известно, че:

- $f(x)$  има функционална стойност 3 при  $x = 5$
- Графиката на  $g(x)$  е симетрична спрямо ординатната ос, минава през точка  $(5, 3)$ , а върхът на параболата е с координати  $V(0, 2)$ .
  - 1) Да се определят коефициентите на функциите.
  - 2) Да се определи стойността  $f(15)$ .

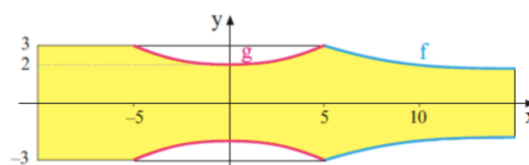
Прикачете тук беловата на решението.

Upload a File

You can upload any type of file. Max: 300 MB

## Задача Б

Прочете внимателно задачата и я решете на лист.



Изображението показва напречен разрез на бутилка, която може да се опише като цилиндър, вдлъбната част и гърло. Вдлъбнатата част се описва от функцията  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , като максималното вдлъбване е 1 см спрямо линията на цилиндъра. Гърлото на бутилката се описва от функцията  $f(x) = \frac{d}{x}$ .

- 1) Да се определи диаметъра на дъното на бутилката.
- 2) Да се определят коефициентите  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ .
- 3) Да се намери диаметърът на гърлото на бутилката.

Прикачете тук беловата на решението.

Upload a File

You can upload any type of file. Max: 300 MB

Фиг. 45: Формулировка на задачите – изследване Фаза '21

За основа е използвана задача от действащ учебник по математика за 11. клас в Германия (Oberstufe, 2017). Задачата е преведена и адаптирана, а след предварителното изследване, и коригирана.

Изборът не е случаен. Целта е от една страна да се почерпи опит от образователна система с традиции в приложните задачи, от друга страна се търси формулировка, която не се среща в учебниците по математика в България. Задачата в първоизточника е приложна. Въз основа на нея е съставена адаптирана задача за контролната група. Тя се базира на същия математически модел, но е във вида на популярните задачи, които учениците решават, с ясно зададени стойности. При тях основното наблюдение е за нивото на математическа подготовка. В следствие качествения анализ на събраните решения се получава насока за коригиране на формулировката.

Условията на двете задачи от второто изследване на терен следват модела на първото изследване. На база обратна връзка от първия експеримент има корекция единствено в дума от текста на Задача Б. Думата „гърло“ е заменена с „отвор“ – Таблица 7.

Таблица 7: Условия на задачите – изследване Фаза '22

**Задача А**

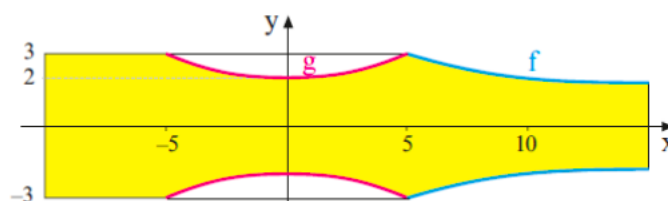
Дадени са функциите

$$f(x) = \frac{d}{x} \text{ и } g(x) = ax^2 + bx + c.$$

Ако е известно, че:

- $f(x)$  има функционална стойност 3 при  $x = 5$
- Графиката на  $g(x)$  е симетрична спрямо ординатната ос, минава през точка  $(5, 3)$ , а върхът на параболата е с координати  $V(0, 2)$ .

- 1) Да се определят коефициентите на функциите.
- 2) Да се определи стойността  $f(15)$ .

**Задача Б**

Изображението показва напречен разрез на бутилка, която може да се опише като цилиндър, вдлъбната част и гърло. Вдлъбнатата част се описва от функцията  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , като максималното вдлъбване е 1 см спрямо линията на цилиндъра. Гърлото на бутилката се описва от функцията:

$$f(x) = \frac{d}{x}$$

- 1) Да се определи диаметърът на дъното на бутилката.
- 2) Да се определят коефициентите  $a, b, c$  и  $d$ .
- 3) Да се намери диаметърът на отвора на бутилката.

Изследването е анонимно и не са събирани лични данни на участниците с изключение на пол, но тази информация не е предмет на разглеждане в дисертационния труд.

**5.2. Методи и инструментариум**

С цел проверка на хипотезите на дисертацията е проведено теоретично-емпирично (приложно) изследване, което по своя характер е диагностично (констатиращо) и верификационно – да се анализират затрудненията при решаване на текстова задача с изображение и да се направи паралел с решенията на чисто математическия модел. Експериментът според условията е естествен; според провеждане – основен; спазена е висока „чистота“ на реализация.

**Инструментариумът** на изследването включва две представителни задачи и

анкета. Дидактическият **тест** е индивидуален; критериален; за текущ контрол на постижения и отношение. Очакваният отговор е отворен – подробно и аргументирано решение на задачата с ясно посочени стойности на търсените величини.

**Анкетната** част е въпросник (писмен, задочен) със закрити отговори, които са няколко вида (Фиг. 46 и Фиг. 47):

- Отворен отговор;
- Да/Не;
- Скалирани;
- Меню-отговори с пълно изброяване на случаите.

Фиг. 46 съдържа общата част за двата въпросника. Три от въпросите използват Ликъртова скала (Likert, 1932), която е често използван метод за измерване на нагласи, убеждения, предпочитания и поведение или реакция, под въздействие на афект. Това е частта от анкетата, в която се изгражда „профилът“ на изследваните лица – честност и самооценка. Педагогическият експеримент е като цяло социален, макар подрастващите все още да не са формирани напълно като завършени личности (Бижков & Краевски, 2007).

<p><b>Колко минути Ви отне цялостното решение и записване на задачата?</b></p> <input type="text"/> Минути	<p><b>Решавали ли сте друг път такава задача?</b></p> <input type="radio"/> Да <input type="radio"/> Не
<p><b>Как оценявате интереса си към математиката?</b></p> <p style="text-align: center;">1    2    3    4    5</p> <hr/> Слаб <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> Любим предмет	<p><b>Пол</b></p> <input type="radio"/> Жена <input type="radio"/> Мъж
<p><b>Как оценявате трудността на задачата?</b></p> <p style="text-align: center;">1    2    3    4    5</p> <hr/> Лесна <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> Трудна	<p><b>Клас</b></p> <input type="text" value="v"/>
<p><b>Как оценявате своето представяне?</b></p> <p style="text-align: center;">1    2    3    4    5</p> <hr/> Слабо <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> Отлично	<p><b>Училище</b></p> <input type="text"/>

Фиг. 46: Анкета – 1

Фиг. 47 отразява частта от анкетата за обратна връзка от учениците, коя конкретна част от съответната задача ги е затруднила.

Задача А	Задача Б
Коя част оценявате като най-сложна?	Коя част оценявате като най-сложна?
<input type="radio"/> Определянето на $f(x)$ <input type="radio"/> Определянето на $g(x)$ <input type="radio"/> Не срещнах затруднения	<input type="radio"/> Разчитането на условието <input type="radio"/> Разбирането на въпросите <input type="radio"/> Не срещнах затруднения

Фиг. 47: Анкета – обратна връзка за трудността на заданието

**Стратегическият** план е от *аналитичен тип*, като целта е на база качествените и количествените оценки да се проверят заложените хипотези. (Бижков & Краевски, 2007) и (Кожухарова, Ганчев, & Делчев, 2004)

**Предварително** изследване на задачите е чрез тяхната апробация сред отделни ученици от различни училища. Някои от тях през период от време решиха и двата варианта, други – само единият. Задачите бяха коментирани и от базови учители. Въз основа на получената обратна връзка и наблюдаваните реакции у учениците, са направени корекции.

С цел качествена оценка на предадените решения е подготвен многовариантен модел на очакваното решение и за двете задачи, за да може да бъдат оценени не бинарно, а на нива. Предадените писмени работи на учениците са прегледани обстойно и кодирани по степен на успеваемост. Това дава възможност за качествен и количествен анализ на данните. Количествена оценка предполагат данните от анкетата.

### 5.3. Критерии и показатели за оценка

Заложените в дисертацията показатели (стр. 10) са допълнително декомпозирани според спецификата на конкретните задачи и съобразно избраните методи за изследване.

За целите на дисертацията е разгледан казус от практиката (case study). Изследването следва смесения модел (Creswell, 2014) и е проведено в две поредни години – през пролетта на 2021 г. и на 2022 г. Първият експеримент е в дистанционна среда, а вторият – при присъствено обучение. От една страна се оценява качествено решението на задачите според заложените показатели. От друга страна се води количествена статистика за степен за справяне с проблема – решен, частично решен и нерешен. Целта е да се анализират решенията на учениците в контекста на компетентностната рамка, на която са основани критериите и показателите.

### 5.3.1. Показатели

1. Степен на усвояване на знания и умения
  - 1.1. Определяне на един или повече от търсените параметри
  - 1.2. Определяне на функционална стойност
2. Задълбоченост при решаването
  - 2.1. Анализирание на отделни характеристики на функциите – отместване, четност, симетрия
  - 2.2. Връх на параболата
  - 2.3. Особени точки
3. Обмисленост на проблема
  - 3.1. Каква е целта на задачата
  - 3.2. Какви са смислените стойности на параметрите и променливата (радиус)
4. Трансфер на знания
5. Умения за наблюдения при работа с текст и изображение
6. Самостоятелност
  - 6.1. Дублиране на предадени работи
  - 6.2. Търсене на готово решение в интернет
7. Творчество и инициативност
  - 7.1. Повече от едно решение.
  - 7.2. Коментар по условието
8. Дисциплинираност и отговорност
  - 8.1. Качествена работа, макар и да не е за оценка
  - 8.2. Положени усилия (чернова – белова)
9. Самокритичност
  - 9.1. Паралел между самооценка и качество на предаденото решение
  - 9.2. Паралел между оценка за трудност и реално справяне
10. Дигитални умения
  - 10.1. Вид и формат на предадените файлове (при експеримента онлайн)
11. Критично мислене
  - 11.1. Коректна ли е скицата или е само за ориентир
  - 11.2. Задачата преопределена ли е
  - 11.3. Кой получени стойности са смислени от гледана точка на текста на задачата.
12. Ясно формулиран отговор.

### 5.3.2. Разрез на примерно решение според показателите

2) Графиката на  $g(x) = ax^2 + bx + c$  е с връх на параболата  $V(0, 2)$ .

$$\Rightarrow g(0) = 2$$

$$g(0) = c$$

$$\Rightarrow c = 2$$

Показатели 1.1, 1, 2, 2.2

Параболата е отместена с 2 м. ед. нагоре и може да се запише във вида:

$$g(x) = ax^2 + 2$$

$$\Rightarrow b = 0$$

Показатели 2.1, 1.1

Информацията за симетрия спрямо ординатната ос е излишна, защото координатите на върха сочат, че оста на симетрия е с уравнение:

$$y = y_v$$

$$y = 0$$

Показатели 2.1, 5, 7.2

От друга страна информацията за симетрия спрямо ординатната ос може да се използва за определяне на стойността на параметъра  $b = 0$  с прилагане на свойството на четна функция  $g(-x) = g(x)$ .

$$\begin{cases} g(5) = 3 \\ g(-5) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25a + 5b + 2 = 3 \\ 25a - 5b + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 0$$

Показатели 2.1, 7, 11

По условие функция минава през точка с координати  $(5, 3)$

$$\Rightarrow g(5) = 3$$

$$25a + 2 = 3$$

$$\Rightarrow a = 0,04$$

Показатели 5, 1.1, 1.2

Показател 12

Търсените коефициенти са съответно  $a = 0,04$ ;  $b = 0$ ;  $c = 2$ , а функцията има вида  $g(x) = 0,04x^2 + 2$ .

Неслучайно опростен вид на задачата е Задача 2, разглеждана по-горе в контекста на материала от 7. клас. Първоначалната цел на изследването е осъществяването му в присъствена форма и след това провеждане на отворена дискусия с учениците с цел кодиране на реакциите им относно вида на задачите. Критичният коментар за преопределеност на условието не се очаква да се срещне като коментар в писмените работи, но за обективност е заложен в показателите. Допълнителна дискусия не беше възможна поради ограниченията, наложени от епидемичната обстановка.

## 5.4. Изследователска фаза

Според темата и задачите на дисертацията е направен преглед на литературата и изследванията в областта за значението на математиката за развитието на когнитивните умения и новата образователна парадигма за учене през целия живот. Очакваните компетентности според плановете на МОН и



документите на ЕК, чуждестранни и български учебници, учебни помагала и използвани изпитни материали потвърждават актуалността на хипотезите. Сходни изследвания са реализирани като често дискутираният проблем е прекомерната употреба на дигитални технологии. Наблюдението, което предшества изследването, резонира с 3. Хипотеза и дава основание за подготовка и провеждане на полеви експеримент.

Предварителният експеримент е проведен сред ученици от различни училища – Първа частна математическа гимназия (ПЧМГ), Интернационалното училище към посолството на Германия в София (Deutsche Schule Sofia), Увекинд, Италиански лицей. Те са с различно ниво на владение на разглеждания математически апарат. Затова е нереалистично да се сравняват техните резултати с тези на КГ и на ФГ. Тяхната обратна връзка служи само за прецизиране на формулировката на условието на математическата задача.

Дисертацията не цели разглеждане на влиянието на образователните платформи, а само поради ограниченията от пандемията при първата итерация е използвано уеб-базирано приложение. Форматът и видът на предадените файлове дават възможност за анализиране на първоначално непланиран аспект – дигитална грамотност.

## 5.5. Провеждане

Участниците в описаното изследване са ученици от две столични училища с приеман изпит и по математика след 7. клас – Софийска математическа гимназия (СМГ) и Немска езикова гимназия (НЕГ). Първата фаза на изследването обхваща разнородна група от ученици. От една страна зрелостници от СМГ, от друга страна ученици от 9, 10, 11, 12 клас от НЕГ. Втората фаза на изследването е само сред ученици от 10. клас от НЕГ. Изследването не оценява учениците, а анализира подхода им в решаване на приложна задача, свързани с използване на вече изучен материал по математика. Изследването цели проверка на 2. и 3. Хипотези (стр. 7) – наблюдават се компетентностите, заложи в Европейската рамка.

Първоначалната идея на изследването е независимо проучване върху по-голяма група от ученици от различни училища в България. Поради извънредната обстановка, проучването е ограничено върху две училища от София-град. Това е причината да се преформулира до известна степен целта на изследването като първа итерация, да се използва за коригиране при необходимост на условията и първоначално тестване на хипотезата.

Наблюдаваните ученици са кандидатствали след 7. клас за съответната гимназия. Успешният прием се дължи на високи резултати от НВО по математика. Едно от условията за завършване на гимназиалния курс на обучение е успешно полагане на задължителен ДЗИ по математика и според статистиките предходни випуски са имали конкурентни постижения. Това предполага, че участниците и в

КГ, и във ФГ имат висока математическа грамотност, добра подготовка по предмета и силна мотивация за добро представяне в областта.

### 5.5.1. Изследване 2020-21 г. – Фаза '21

Първата фаза на изследването обхваща разнородна група от ученици. От една страна зрелостници от СМГ, от друга страна ученици от 9, 10, 11, 12 клас от НЕГ. Наблюдаваната група е от 138 ученици ( $N = 138$ ). Те са представители на първи и втори гимназиален етап. Учениците от различните випуски са учили по различни образователни програми, поради промените в образователната система в последните години. Трябва да се отбележи, че учениците от 12. клас са от последния випуск преди промените в учебната програма влезли в сила за 8. клас от учебната 2016/17 г. Тази фаза отчасти служи за допълнителна апробация на задачите сред повече ученици, но и е първата итерация на емпиричния цикъл на изследването.

Участниците са разделени равномерно на две групи като едната получава Задача А, а другата – Задача Б. Двете групи получават след завършване на задачата и допълнителен въпросник за оценката на проблема по няколко параметри, както и за самооценка. Паралелният анализ на резултатите по задачи и по училища е показателен, на какво ниво учениците правят връзката – теория-практика в гимназиален етап. Въпросникът отразява време за изпълнение, самооценка на представянето, обща оценка на трудността на задачата, избор на проблемен елемент – Фиг. 46 и Фиг. 47.

Събраните данни включват пол и интерес към математиката, но те не са обект на изследването. Първоначалното очакване е експериментът да се проведе на живо, но поради неприсъственото обучение във време на пандемия (COVID-19), е реализиран дистанционно в електронна среда. Това води до ограничения.

Натрупаните данни не са напълно реалистични, поради риска за неконтролиран обмен на решения и използване на допълнителни помощни материали. Подробен анализ на решенията дава основание да се смята, че въпреки липсата на мониторинг, данните са с висока „чистота“, не са открити дублирани решения – преписване, няма основание да се смята, че някое решение е заимствано от готово такова. Задочната форма на провеждане не дава възможност да се наблюдават реакциите на учениците и да се отразят евентуалните им въпроси или обратна връзка. Задачите са подадени на учениците от техните преподаватели, като изрично е подчертано, че предаването е анонимно и няма да се оценява. Вероятно въпреки това някои ученици са се чувствали изпитвани, а не обект на случаен експеримент. Ситуацията, в която са поставени е сравнима с тази при проектно или домашно задание. Наблюдават се и двете крайности – голямо старание, творчески стремеж за изява, както и пълна незаинтересованост и безотговорна работа. Приема се, че това отразява отношението към поставен от учителя проблем и оценката му е заложена в 7. Показател (стр. 10).

Проведеното изследване е през уеб базиран въпросник, който съдържа формуляр за попълване и се очаква да се приложи файл с решението на съответната задача. Целият процес е проведен онлайн, което дава поглед и върху дигиталната компетентност на участниците. Предмет на сравнителен анализ е формата на качените файлове и качеството им – 10. Показател (стр. 10).

Първото изследване цели от една страна апробация на задачите, а от друга проверка на 2. Хипотеза (стр. 7), че дори ученици с висока подготовка по математика срещат затруднения при извличане на информация при комплексно формулирано условие. Според хипотезата причината е липса на опит със задачи с такава формулировка, а не проблеми в усвояването на нужния математически материал.

### 5.5.2. Изследване 2021-22 г. – Фаза '22

През 2022 г. изследването е проведено в класна стая като събраните работи са от 54 ученици ( $N = 54$ ). Ограниченият достъп до училищата в този период поради пандемията (COVID-19) е причина да не се проведе дискусия с учениците. Поради рестрикциите липсват преки наблюдения върху реакциите и въпросите на изследваните. В час по математика гимназистите получават на хартиен носител условията на задачите. Предупредени са, че това не е писмено изпитване, а анонимна анкета с цел научно изследване. Обяснено е устно, че се очаква сериозно отношение и съвестна, самостоятелна работа по задачите.

Втората фаза на изследването е само сред ученици от 10. клас от НЕГ, показали впоследствие едни от най-добрите резултати по математика на проведеното през 2022 г. НВО. Изследването е реализирано в края на учебната 2021-2022 г. Задача А е поставена на 27 ученици от 10. клас, съответно на съседния клас със същия брой присъстващи, е поставена Задача Б. Двата класа работят независимо в отделни класни стаи. В двете зали има квестор, учител по нематематическа дисциплина, който съблюдава реда и няма компетентности да отговаря на въпроси по задачите. Предоставеното време за работа е 30 минути. Средно-отчетеното време за решаване е около 15 минути. Няма ученик, който да е пожелал допълнително време, защото всички са предали предсрочно. Учениците са предали решенията си на хартия и не са имали право на помощни материали като формули, калкулатори или телефони. По време на решаване не са отправени въпроси към преподавателя, не е имало регистрирани коментари върху задачите, вероятно поради профила на квестора.

## Обобщение

Няколкомесечно предварително наблюдение върху работата на ученици във времето за подготовка на домашни и при самостоятелна работа дава основание за 3. Хипотеза – приложните задачи в по-голяма степен затрудняват учениците, дори

те добре да се справят с необходимия набор от знания по математическа. Избраните задачи за *case-study* се различават по формулировка на проблема и съвпадат като математически модел. Тестът, който е съставен за целите на изследването, включва задача с подробно решение и въпросник. Целта е качествена анализ на когнитивните и мета-когнитивни умения на учениците при решаване на приложна задача – 4. Хипотеза (стр. 7). Едната задача е разнородна – комбинация от текст и изображение, което съдържа графики на функции (стр. 16). Разрезът ѝ според заложените в изследването показатели онагледява значението на приложните задачи за развитие на уменията на 21. век и компетентностите – 2. Хипотеза (стр. 7). В анкетата са заложили критерии за нивото на обективна оценка на разглеждания проблем и способността за самооценка на отделния ученик. Проектираното педагогическо изследване цели проверка на 3. Хипотеза. Анкетата и качествената оценка на резултатите са в подкрепа на хипотези две и четири.

## 6. ГЛАВА: АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

---

Предварителното изследване се основава на включено наблюдение. Натрупаните данни дават основание да се формулира 3. Хипотеза (стр. 7). Предварително наблюдаваната група е малка и непредставителна за българската образователна система, затова не може да се представи теория, основана на факти, а по-скоро само хипотеза. Сравнителният анализ на учебните материали в българската и чуждестранната образователни системи сочат недостатъчното застъпване на приложни задачи в гимназиалния курс на обучение у нас, което е в подкрепа на формулираната 3. Хипотеза. Поради наложени ограничения от пандемията проучванията в настоящата дисертация не продължават метода на качествените педагогически изследвания, а се развиват по правилата на емпирично педагогическо проследяване. Тема на дисертацията е ролята на приложните задачи за развитието на ключови компетентности и умения на 21. век. Коментирането на наблюдаваните качества на учениците е причина за придържане към емпиричен анализ на равнище – описание (Бижков & Краевски, 2007, стр. 232).

Целта на изследването е качествена проверка на поставените хипотези 2, 3 и 4 (стр. 7) – проследяване на уменията на 21. век, ключовите компетентности, когнитивни и метакогнитивни модели при решаване на приложна задача по математика. Цел е обследване доколко заложените хипотези са релевантни в реална учебна среда. Паралелът между резултатите на КГ и ФГ цели проверка на 3. Хипотеза. Качественият анализ на решенията на ФГ са подкрепени с числов материал, който е представен чрез кръгови диаграми или таблично. Обобщаването на данните цели получаване на относително пълна картина на актуалното състояние на разглежданите умения на учениците в контекста на приложните задачи (Бижков & Краевски, 2007, стр. 333).

### 6.1. Оценка на решенията от двата експеримента

Описателният анализ се фокусира на качествата на решенията в паралел с разглежданите умения и компетентности. Успеваемостта е отразена количествено, като резултатите са показани паралелно за двете изследвания с цел сравнителен анализ – Таблица 8 и Таблица 9. Част от учениците са от математически гимназии или са били в училища с допълнителни часове по математика, където са стимулирани за развитие на математическите си умения, част от тях са били обучавани като надарени ученици (Diana Starja, 2019). Успеваемостта при КГ и ФГ при първото изследване е близка, което съвпада с очаквано за ученици с висока подготовка по математика. Все пак дори добре тренирани ученици срещат повече затруднения с нестандартно формулираната задача.

Таблица 8: Резултати (първо изследване)

	Решена	Частично решена	Нерешена
Задача А	87,5%	5,5%	7%
Задача Б	83%	7,5%	9,5%

Второто изследване е проведено в еднородна група и резултатите, макар и при по-малко участници, са показателни за проблемите, свързани с разчитане на условието. Основният проблем е в комбинирането на информацията, от изображението и разглежданите функции.

Таблица 9: Резултати (второ изследване)

	Решена	Частично решена	Нерешена
Задача А	55,6%	40,7%	3,7%
Задача Б	22,2%	66,7%	11,1%

Тези данни могат да послужат като отправна точка за бъдещи изследвания. При подробно оценяване на задачите по нивата на показателите и статистическа оценка на резултатите сред ученици от различни училища може да се изготви подробен каузален анализ на проблема. Разликата в успеваемостта при второто изследване дава основание за причинно-следствен анализ и потвърждава 3. Хипотеза.

## 6.2. Отчет на резултатите от фаза '21 г.

Събраните отговори са общо 151, но след отсяване на дублиращи се записи (многократно изпращане на формата, вероятно вследствие на проблем с Интернет връзката, защото записите са идентични) се разглеждат 138 уникални попълвания на анкетата и предадени задачи.

Според 3. Хипотеза (стр. 7) успеваемостта при решаването на двете задачи трябва значително да се различава. Поради спецификата на ФГ и КГ, хипотезата не се потвърждава, но това не е повод да бъде отхвърлена. Наблюденията на резултатите показват, че въпреки високата математическа подготовка на участниците има различия в успеваемостта, обратната връзка и самооценката. Събраните данни са добра основа на следващо изследване сред повече ученици от различни училища в страната. Качественият анализ на решенията дава насоки за усъвършенстване на условието на задача Б. Формата на предадените файлове с решенията сочат висока дигитална компетентност. Безспорно това се дължи на факта, че поради пандемията (COVID-19) повече от година образованието е провеждано предимно в електронна среда. В този период повечето домашни задания са изпращани като прикачени файлове. С времето и според изискванията на учителите, учениците добиха по-висока култура на работа със сканирани файлове и изображения.

### 6.3. Качествена оценка на решенията фаза '21 г.

Събраните решения са разгледани подробно, групирани и кодирани. Впечатление прави, че болшинството от учениците и от ФГ и от КГ са избрали строго математически подход за определяне на коефициента  $b$ . Чрез прилагане на формулата за определяне на абсцисата на върха на параболата

$$x = -\frac{b}{2a}$$

определят, че коефициентът  $b$  има стойност нула. В някои работи се наблюдава следната грешка при преобразуване:

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= 0 \\ \Rightarrow -b &= 2a \end{aligned}$$

В този случай задачата се оценява като нерешена.

Очакването към решението на Задача Б е да се използва симетрията на дадената квадратна функция спрямо ординатната ос, което директно води до извода, че коефициентът  $b$  е равен на нула. Не липсват грешки и странни преобразувания, но те са по-скоро рядкост – Фиг. 48.

3аг.  $g(x) = ax^2 + bx + c$   
 $f(x) = \frac{d}{x}$   
 2)  $g(x) = 0,04x^2 + 2$   
 $\Rightarrow a = 0,04; b = 0; c = 3; d = ?$   
 3)  $d = 4 \text{ cm}$   
 1)  $d = 6 \text{ cm}$   
 2)  $V(0; 2) \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 2$   
 $x_1, 2 = \pm 5$   
 $g(x) = a(x-0)^2 + 2$   
 $V(10; 2) \Rightarrow f(x) = a(x-10)^2 + 2$   
 $a = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$   
 $a = \frac{1}{5^2} = 0,04 \Rightarrow f(x) = 0,04x^2 - 0,8x + 2$   
 $f(x) = 0,04x^2 - 0,8x + 6$   
 $d = \frac{0,04x^2 - 0,8x + 6}{x}$

Фиг. 48: Отговор на задача Б (грешно)

Като недостатък на формулировката на задачата се отчита въпросът за диаметъра на гърлото на бутилката. 13% от учениците са избрали да посочат за диаметър, този в средата на гърлото на бутилката. Мнозина по усет са посочили диаметъра на отвора, като един ученик в допълнение е коментирал, че чертежът не онагледява достатъчно добре тази стойност. Само един ученик аргументирано и използвайки свойствата на функцията е описал подробно и изчерпателно решение. Върху работата му са нанесени показателите, които са заложиени в методологията на изследването (Фиг. 49).

### Решение на задачата

#### 1. Подточка

Диаметърът на дъното на бутилката е равен на разстоянието между правите  $y = 3$  и  $y = -3$ , което се равнява на  $3 - (-3) = 6$  cm

#### 2. Подточка

$$f(x) = \frac{d}{x}$$

$$3 = \frac{d}{5}$$

$$d = 15$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{15}{x}$$

Параболата  $g$  пресича ординатата в точка  $(0; 2) \Rightarrow c = 0$  1

Доказателство:

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

$$2 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot b + c$$

$$c = 2$$

Параболата  $g$  е симетрична по правата  $x = 0 \Rightarrow b = 0$  2

Доказателство:

$$g(x) = g(-x)$$

$$g(5) = g(-5)$$

$$a \cdot 5^2 + 5b + c = a \cdot (-5)^2 - 5b + c$$

$$10b = 0$$

$$b = 0$$

$$g(x) = ax^2 + bx + 2$$

$$3 = a \cdot 5^2 + 0 \cdot x + 2$$

$$a = \frac{1}{25}$$
 3

От 1, 2 и 3  $\Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{25} + 2$

#### 3. Подточка

Диаметърът на дулото на бутилката следва правата  $x = 15$  и е еквивалентен на отсечката между точките  $(15; f(15))$  и  $(15; -f(15))$ .

Следователно той е равен на  $f(15) - (-f(15)) = 2 \cdot f(15) = 2 \cdot \frac{15}{15} = 2$  cm

Дигитални умения ✓

Умения за наблюдения при работа с текст и изображение ✓

Определяне на коефициентите ✓

Аргументация ✓

Задълбоченост при решаването ✓

Критично мислене ✓

Ясно формулиран отговор ✓

Фиг. 49: Отговор на задача Б

Наблюдават се и решения чрез система от линейни уравнения (Фиг. 50), които отразяват симетрията на функцията, без тя да бъде пряко забелязана и използвана. Вместо това се използват две симетрични точки за определяне на коефициента  $b$ . Няколко ученици от 12. клас (СМГ) са използвали първа производна за определяне на минимума на функцията (Фиг. 51). Това е поредното доказателство, за високо ниво на математическа подготовка. Не е разглеждана четността на функцията, познание, което зрелостниците би трябвало да притежават. Откроява се адресираният от 2. Хипотеза проблем за уменията за творчество и *problem-solving*, които следват да се развиват наред с математическия апарат.



$V_{g(x)}((0;2) | (g(0)=c) \Rightarrow c=2)$   
 $g(x)=3 \Rightarrow T.A(5;3) \in g \Rightarrow a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3 \Leftrightarrow$   
 $T.B(-5;3) \in g \Rightarrow a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c = 3 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 25a + 5b = 1 \\ 25a - 5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{25} \\ b = 0 \end{cases}$

Фиг. 50: Използване на система

1) бсм  
 2)  $g(x) = ax^2 + bx + c$   $g'(x) = 2ax + b$   
 $g(0) = 2 \Rightarrow c = 2$   
 $g(5) = 3$   
 $g'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$   
 $a \cdot 5^2 + b \cdot 5 = 1$   
 $a \cdot 5^2 = 1$   
 $a = \frac{1}{25}$   
 $f(x) = \frac{d}{x}$   
 $f(5) = 3$   
 $\frac{d}{5} = 3$   
 $d = 15$

Фиг. 51: Използване на производна

Навиците за стриктно прилагане на формули и следване на алгоритми за решаване ограничават креативността и рационалния подход в решаването на задачите. Интересно е наблюдението, че никой ученик не е предложил повече от едно решение на проблема, макар мнозина да са оценили задачата като лесна и са разполагали с достатъчно време (точка 4 от списъка на Cai & Lester). Липсват иновативност и активност, които могат да се изявят с алтернативни решения. В учебниците често се предлагат няколко варианта на решение на една задача, мнозина учители също стимулират различни подходи към един и същи проблем. За съжаление, макар и неограничени във времето за решаване, няма ученик, който да е добавил втори начин на решение. Единственият наблюдаван израз на новаторство е изборът на инструмент за реализация на записа на решението – работа с приложение от дигитално устройство.

Въпреки правилното откриване на коефициентите, учениците от ФГ, често не са направили връзка между отделните функции и естеството на задачата. В няколко решения като диаметър са посочени две стойности +2 и -2, което показва опит в разглеждане на задачи с повече от един възможен верен решение, но е неадекватен отговор за дължина на отсечка, което е показателно за връзка между решение на уравнение и критично тълкуване на получените резултати. Това дава насока за адаптиране на Задача Б с оглед на допълнителни практически ориентирани въпроси, в които определянето на коефициентите не е така пряко заложено като въпрос. Натрупаните данни дават насоки и за корекции по формулировката. Задача Б засяга директно уменията на 21 век – творчество, *problem-solving*, умения за боравене с предоставената информация. Според 2. Хипотеза приложните задачи развиват тези умения. Наблюденията от изследването сочат за ограничен опит за работа с такива задачи.

### 6.3.1. Диаметър на „гърлото“ на бутилката

В изследването, проведено 2020-21 г. във формулировката под „гърло“ се разбира отвора на бутилката, като това се оказва, че не е най-подходящата дума.

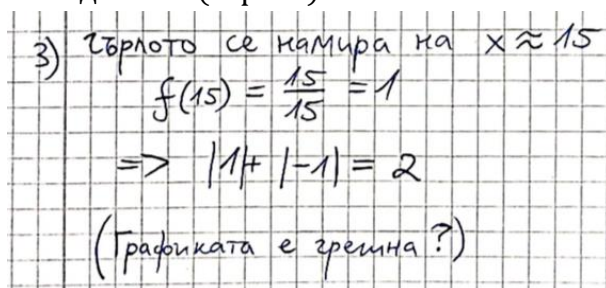
Един от учениците е записал, че предполага, че се търси диаметърът на „дулото“ на бутилката, като съответно го пресмята правилно. Интересно е разпределението на отговорите на този въпрос.

Таблица 10: Диаметър (Първо изследване)

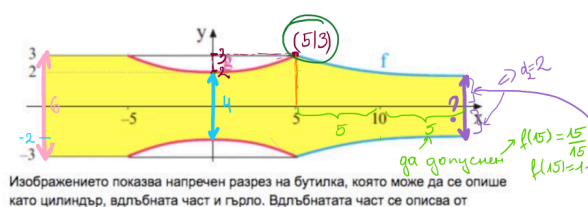
Диаметър:	2 см (верен отговор)	4 см	Друг отговор	Без отговор
Брой:	33	22	6	3
В проценти:	51,6%	34,4%	9,4%	4,6%

Важно е да се обърне внимание, че повече от половината ученици са пресметнали вярно търсения диаметър. За паралел – всички ученици правилно са посочили диаметъра на дъното. Откъде идват грешките? Повечето ученици, посочили отговор 4 см, са „разчели“ тази стойност от чертежа, но някои са разтълкували, че се търси диаметърът на стеснената част в средата на бутилката. Грешните отговори са 3 см (без пояснение), 1 см (радиус вместо диаметър), посочен е и отговор – „обиколка“ като е приложена формулата за определяне на дължина на окръжност. Само един ученик споделя забелязаното разминаване между скалата и пресметнатата стойност (Фиг. 52).

Няколко ученици са пренесли чертежа на листа си, но само една работа (Фиг. 53) илюстрира на практика стъпка 5 от стратегията на Лайзен – „допълване на наличните чертеж, графика, изображение с данните от другите части на условието на задачата“ (стр. 25).



Фиг. 52: Коментар



Фиг. 53: Активна работа с условието

## 6.4. Анкета

Целта на анкетата е събиране на количествена информация, която да бъде съпоставяна. Респондентите дават оценка на разглеждания проблем и правят самооценка на изпълнението си. Поради липсата на мониторинг се разчита на честност при попълването на времето за изпълнение – поле за отворен отговор.

Анкетата е стандартизирана – от анкетираните се очаква да посочат един отговор, който отговаря на тяхното мнение (Бижков & Краевски, 2007, стр. 397).

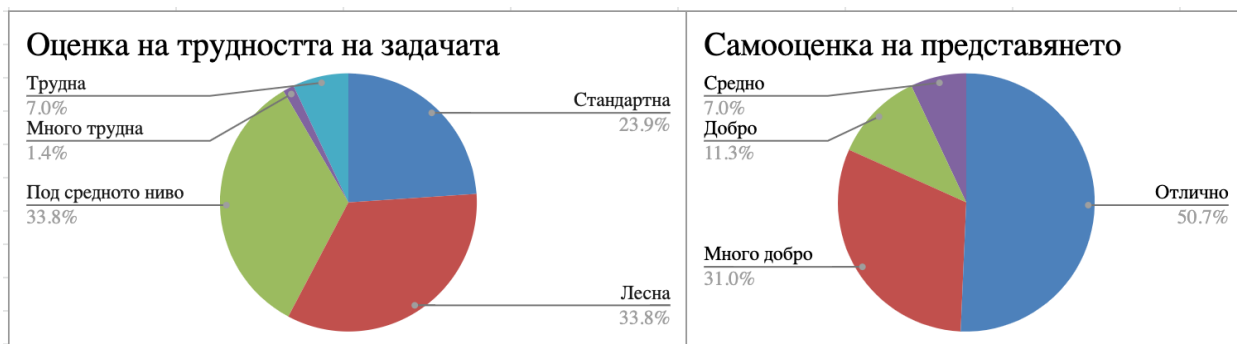
### **6.4.1. Съпоставка между самооценка и оценка**

Според социологията отговорите на въпроси като „Как оценявате интереса си към математиката? Как оценявате трудността? Как оценявате представянето си?“ рискуват да бъдат повлияни от социална желателност (Krupal, 2013). От друга страна авторите на изследване в областта смятат, че: „ролята на самооценката е доста специфична. Като метакогнитивна способност тя изисква умение да се оценява коректно правилността на процедурите, използвани във фазата на решаване. Колкото по-правилна е връзката между получения резултат и неговата оценка, толкова повече субектът демонстрира добро ниво на метакогнитивно познание за избора на решение.“ (Daniela Lucangeli, 1998) С цел коригиране на социалния компонент и извличане на по-ясна оценка на трудността на задачите е добавен контролен въпрос – „Коя част оценявате като най-сложна?“. Отговорът предполага избор един от предложените елементи.

Целта на въпросите от анкетата, свързани с оценка на задачите и самооценка, е да се адресират уменията на 21 век за критично мислене и самонаблюдение. Важно е да се обърне внимание и на ангажираността на учениците в изпълнението на заданието. Задачите са формулирани по-различно от познатите такива. Създадените въпросник и задание целят да поставят учениците в нова ситуация, където освен решение се очаква изразяване на мнение. Търсеният ефект е стимулиране и повишаване на мотивацията и интереса, а не обезкуражаване и поставяне на гимназистите в ситуация, в която да се чувстват безпомощни пред екрана (Съвет на Европейския съюз, 2018).

### **Задача А**

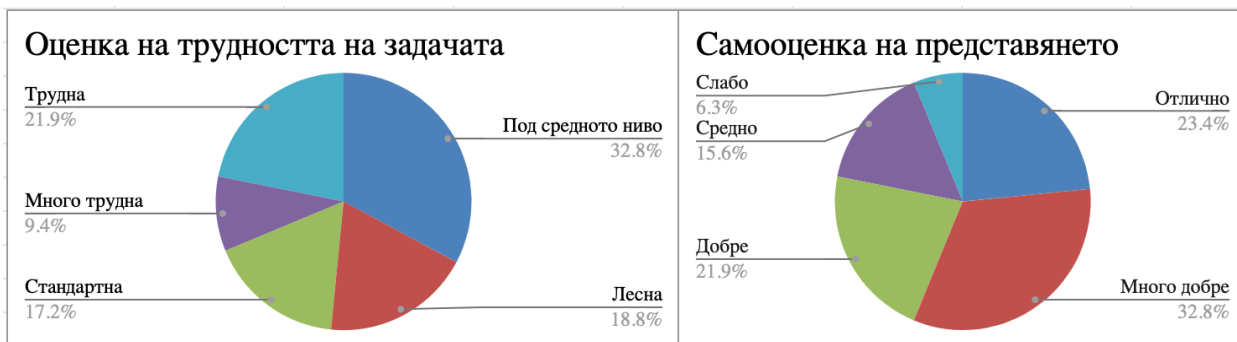
Впечатление прави, че повечето ученици определят задача А като лесна (Фиг. 54). Това съвпада с идеята, тя да е представителна за нивото на подготовка по математика в двете групи. Оценката за трудността отразява пряка връзка между учениците, които не са решили задачата – 7% (Таблица 8) и оценка – „трудна“ и „много трудна“ – 8,4% (Фиг. 54: Оценка на задача А). Самооценката за представянето „средно“ и „добро“ – 18,3% кореспондира с учениците, които не са решили или само частично са се справили – 12,5%. Разминаването в процентите е показателно за по-голяма самокритичност на респондентите.



Фиг. 54: Оценка на задача А

### Задача Б

При задача Б се наблюдава известно разминаване между резултати и самооценка (Фиг. 55). Учениците са се справили до голяма степен с математическия модел, но рядко са подхождали с разбиране към приложния проблем и са формулирали ясен отговор. Липсва словесен анализ и обосновка, решенията повече пасват на формата на Задача А. Отново самооценката е доста адекватна, но този път завишена. Наблюдава се подценяване на проблема, по-повърхностно решение, което остава в областта на решаване на задачи за упражнение.

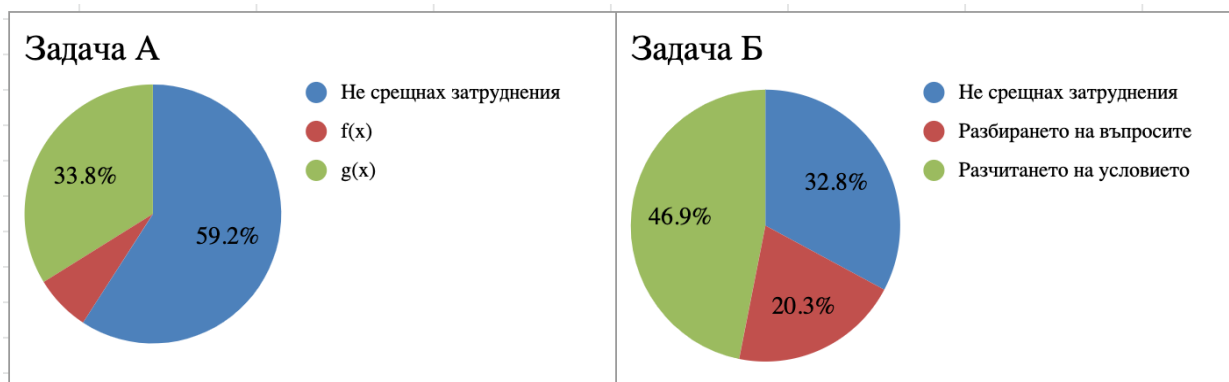


Фиг. 55: Оценка на задача Б

### 6.4.2. Обратна връзка

Въпросът „Коя част оценявате като най-сложна?“ предполага избор на един от предложените елементи. Няма как да се проследи по-конкретно причината за затруднението. Личната обратна връзка е много по-подходяща към този въпрос на изследването. Интервю или отворена дискусия могат по-конкретно да посочат, къде учениците срещат затруднения. Подобни форуми дават насока за преподавателите и изследователите за подобряване на учебния процес, обогатяване на задачите и поставяне на нови предизвикателства пред учениците. Показателна е обратната връзка (Фиг. 56), че 46.9% срещат затруднения в разбирането на поставената задача Б. Това адресира разглеждания проблем и заложените хипотези. Същевременно се поставят допълнителни цели към курса по

математика с оглед развиването на умение за извличане на информация от индиректно поднесен проблем.



Фиг. 56: Къде се крие трудността?

### 6.4.3. Допълнителни данни за анализ

Натрупаните допълнителни данни са свързани със средно време на изпълнение (Таблица 11). Отчетеното време за работа е между 3 и 100 минути, като време под 5 минути е нереалистично за прочитане на условието и записване на решението. При изследване в присъствено занимание или форма с таймер, може да се разчита на адекватност на данните. В този формат, това повече адресира уменията за самооценка и преценка на времето. Въпросът, свързан с опит с подобни задачи, е по-подходящ за интервю и дискусия, в които могат да се обсъдят сходни примери и да се обърне внимание на разликите във формулировките на задачите. Тук особено важна е ролята на учителя за напътствия в разчитането на условието, тълкуване на ключови думи, формулиране на математическия проблем и решаването му. „По-специално, учителите трябва да ангажират учениците в разнообразни дейности: а) намиране на множество стратегии за решаване на даден проблем, (б) участие в математическо изследване, (в) обосноваване на своите решения, и (г) правене на обобщения. Фокусирането върху решаването на проблеми в класната стая не само оказва влияние върху развитието на уменията за мислене от по-висок порядък на учениците, но и засилва положителните нагласи.“ (Jinfa Cai, 2010)

Таблица 11: Популярност на задачите

	Средно време в минути	Предишен опит с такива задачи	
		ДА	НЕ
Задача А	13,7	83%	17%
Задача Б	15,5	45%	55%

### 6.4.4. Анализ на предадените файлове

Наблюдения върху дигиталните компетентности не са заложиени в

първоначалните хипотези и самото изследване. Проведеният онлайн експеримент дава възможност за дискутиране и на дигиталната грамотност. Над година българската образователна система работи ефективно онлайн. По математика учениците предават домашни задания и правят контролни работи. Изпитването е предимно в тестов формат, но въпреки това повечето преподаватели изискват да се предаде и чернова на решенията.

Само 3 от 138 предадени решения са направени на таблет, като записът демонстрира опит в работата с устройството. Една работа е предадена като текстов файл (MS Word). Тези четири работи можем да разгледаме по-скоро като статистически нетипични (outliers). Останалите ученици са записвали според инструкцията решенията на ръка на лист, като заснетите изображения са изпратени като файлове. Разпределението на файловете формати е представено в Таблица 12.

В 20% от случаите предадената работа е по-скоро чернова, а не белова, което демонстрира отношение към заданието. Над бутона за предаване е посочено „Прикачете тук беловата на решението“. Без възможност за наблюдение на учениците е трудно да се прецени дали това е личностна характеристика, дали задачата не е представлявала достатъчен интерес или е оценена като твърде лесна и не заслужаваща по-задълбочена работа. Информацията, че заданието няма да бъде пряко оценено, вероятно е повлияло негативно към отношението към проблема. Въпреки това е уместно да се обърне внимание на нивото на комуникативни умения. Независимо дали пред учител или външен наблюдател, видът на предаденото решение е лицето на ученика. Това открива проблем, който е редно да се адресира и изследва допълнително.

Handwritten solution for a quadratic function problem. The student is given the function  $f(x) = \frac{d}{x}$  and  $g(x) = ax^2 + bx + c$ . They are given the conditions  $f(5) = 3$  and  $f(0) = 2$ . The student uses the condition  $f(0) = 2$  to find  $c = 2$ . Then they use  $f(5) = 3$  to find  $25a + 5b + c = 3$ , which simplifies to  $25a + 5b = 1$ . They then use the condition  $-b = 0$  to find  $b = 0$ . Substituting  $b = 0$  into  $25a + 5b = 1$  gives  $25a = 1$ , so  $a = \frac{1}{25}$ . Finally, they substitute  $a = \frac{1}{25}$  and  $c = 2$  into the quadratic function to get  $f(x) = \frac{1}{25}x^2 + 2$ .

Фиг. 57: Отговор на задача А (1)

Предадените файлове са изображения съхранени в PDF документ, съдържащ една или няколко страници или директно приложени снимки на решението (Таблица 12). Файловете са генерирани с популярни приложения, като например CamScanner (CamScanner, 2011), което показва висока дигитална култура и умение за работа с различни приложения. Очакваната грамотност, заложена по план в часовете по информационни технологии – коректно задаване на имена на файлове, не се наблюдава. Впечатление прави хаотичното именуване на материалите – само

при 22 от 144 файла (15,3%) учениците са положили усилие да променят автоматично генерираното име.

Таблица 12: Файлов формат

	PDF	Изображение (jpg, png)	Друг
Задача А	16 (22%)	56 (76,7%)	1 docx (1,3%)
Задача В	16 (24,6%)	49 (75,4%)	

Неизбежен е паралелът с разглежданото математическо есе, което започва да се подготвя в 11. клас и се изисква да е в електронен вариант. Само един ученик е използвал възможността решението да се оформи като документ, в който е използвал редактор за формулите. Това е показателно за друг аспект на компетентности сред участниците в експеримента. Разбираемо е, че лесно и бързо се прилага снимка с решението. Част от причината е и създаденият навик в периода на обучение от разстояние така да се предават множество писмени работи. Реално учителите оценяват положително усилието да се използва сканираща програма, която автоматично генерира общ файл с всички приложени изображения, а не множество отделни снимки. Въпреки това експериментът не е част от стандартните домашни задания и предполага лична ангажираност и дава свобода на избор са графичното оформяне на решението. Вероятно поощряваща инициативността би била насока в заданието, която посочва да се използва подходящ инструмент за създаване на файл с решението. В контекста на уменията на 21 век, по-полезно е това да е заложено в обратната връзка към учениците, за да натрупат опит за следващи подобни ситуации. Компетентности се градят с работа, опират до опит и подкрепяща обратна връзка. На този етап може да се отбележи ниско ниво на творчество, новаторство и инициативност и да се маркират посоки за развитие.

## 6.5. Качествена оценка на решенията от фаза '22 г.

В решенията в прегледаните 27 работи на задача А прави впечатление отново подходът към проблема. Само двама ученици интерпретират правилно информацията от условието за симетрията спрямо ординатната ос и бързо намират стойностите на коефициентите  $b$  и  $c$  (Фиг. 58). Останалите верни решения са базирани на съставяне на система от две линейни уравнения с две неизвестни ( $a$  и  $b$ ) или чрез прилагане на формулата за определяне на абсцисата на върха на параболата

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Само един ученик е поставил условие  $a \neq 0$ .

$$f(x) = \frac{d}{x}$$

$$3 = f(5) = \frac{d}{5}$$

$$d = 15$$

$$f(x) = \frac{15}{x}$$

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

симетрична спрямо  $Oy \Rightarrow b = 0$

връх  $V(0; 2) \Rightarrow c = 2$

$$g(x) = ax^2 + 2$$

$$V(5; 3) \Rightarrow 3 = a(5)^2 + 2$$

$$a = \frac{1}{25}$$

$$f(15) = \frac{15}{15} = 1$$

Фиг. 58: Отговор на задача А

Често срещаните грешки при определяне на коефициентите на квадратната функция са:

- технически при решаване на системата линейни уравнения;
- погрешно интерпретиране на координатите на върха

$$-\frac{b}{2a} = 2$$

(размяна на абсциса и ордината);

- погрешно интерпретиране на симетрията с извод:
- $f(3) = 5 \Rightarrow f(-3) = -5$ ;
- използване на точката  $(5, 3)$  за връх на параболата вместо  $V(0, 2)$ .

Почти всички ученици правилно са намерили стойността на коефициента  $d$ , но една трета от тях не успяват да заместят правилно и да определят функционалната стойност  $f(15)$  (Фиг. 59). Наблюдаваните грешки са:

- объркване на имената на функциите, вероятно по навик, защото често в учебниците квадратната функция е  $f(x)$ ;
- неразбиране на въпроса.



$f(x) = \frac{d}{x}$   
 $3 = \frac{d}{5}$   
 $d = 15$   
 $f(15) = \frac{d}{15}$   
 $d = 1$   
 $f(15) = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 1$

Фиг. 59: Отговор на задача А – грешки при определяне на  $f(15)$

$\left(-\frac{b}{2a} \mid -\frac{D}{4a}\right)$   
 $\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 2$   
 $+ \frac{b^2 - 8a}{4a} = -2$   
 $b^2 - 8a = -8a$   
 $b^2 = a$   
 $b = 0$   
 $a = 0,2$

Фиг. 60: Отговор на задача Б

При решаването на Задача Б много повече ученици са забелязали на първа стъпка стойността на коефициента и са отбелязали  $c = 2$ . Отново повечето са предпочели решение с формула или система линейни уравнения с две неизвестни. Тук в повече решения са определени стойностите на търсените коефициенти, но малцина правилно определят диаметъра на отвора. Двама ученици проявяват инициатива и определят уравнението на функцията, симетрична на  $g(x)$  спрямо абсцисната ос, като посочват  $a = -0,04$ . В едната работа напълно вярно е определена цялостно функцията, но в другата некоректно е запазен знакът на третия коефициент  $c = 2$ . Интересно е, че повечето ученици са научили формулите и правилно ги посочват. Проблемите са при заместване или при извършване на преобразувания на ниво 6–7 клас (Фиг. 60). Както проф. д-р Тонов отбеляза: „Това не означава, че не съществуват затруднения при изпълнението на упражнението.“. Тези грешки се отразяват на крайния отговор. Не липсват и грешките в решаването на системата уравнения.

### 6.5.1. Диаметър на „отвора“ на бутилката

В изследването, проведено 2021-22 г. думата „гърло“ е заменена с „отвор“, поради отчетената некоректност. Впечатление тук прави промяната на броя верни отговори и увеличеният брой на работите, в които се посочва, че диаметърът е 4 см (Таблица 13). В една от работите се среща следното пояснение: „3) диаметърът е 4 (гледам просто графиката на функцията)“. В разглеждането на чертежа малцина от участници са направили връзка, че функцията  $f(x)$  описва гърлото на бутилката и съответно трябва да се използва за определяне на диаметъра на отвора. Вместо това се подвеждат по неравномерно надписаната ординатна ос и разчитат на чисто визуална интерпретация. В друга работа се среща коментара „Взимаме координати (15; 2) и заместваме  $2 = d/15 \Rightarrow d = 30$ “. В повечето работи се наблюдава липса на критично мислене и проверка с друга точка и връзка между двете зададени функции.

В книгата си „Мисленето“ Нобеловият лауреат Даниъл Канеман пише „Нашите мозъци се състоят от два героя, един, който мисли бързо, Система 1, и един, който мисли бавно, Система 2. Система 1 работи автоматично, интуитивно, неволно и без усилие - като когато шофираме... Система 2 изисква забавяне, обмисляне, решаване на проблеми, разсъждения, изчисления, фокусиране, концентрация, разглеждане на други данни и не прибързани заключения – като когато изчисляваме математическа задача, избираме къде да инвестираме пари...“ (Kahneman, 2011)

С развиването на компетентности в учениците целим да активираме система ДВЕ. Разбира се задачата може да бъде критикувана като подвеждаща с ориентировъчно надписаната ординатна ос. Тук целта е провокиране на критичното мислене, на търсене на връзки между функциите и проверка на привидната стойност на радиуса на отвора. В динамичното време, в което тези ученици живеят, все по-често говорим за фалшиви новини. Мисия на учителите е да развият уменията да се поставя под съмнение лесното решение и да се търси аналитично, аргументирано и подлежащо на проверка обяснение на проблемите.

Таблица 13: Диаметър (Второ изследване)

Диаметър:	2 см (верен отговор)	4 см	Друг отговор	Без отговор
Брой:	6	18	3	0
В проценти:	22,2%	66,7%	11,1%	0%

## 6.6. Обобщение

Проведените първоначални изследвания на терен и анализиранияте литературни източници дават основание за формулиране на хипотези, основаващи се на данни. Ограниченията, наложени от пандемията, не позволяват наблюдение и дискусия. Изследването придобива емпиричен формат като целта е качествен анализ на резултатите с оглед проследяване на заложените в дисертацията цели – изследване на компетентности и умения в контекста на приложните задачи. Групите не са представителна извадка, а условията на провеждане не са надеждни, за да е уместно да се прилагат задълбочени статистически анализи. Качественият анализ на събраните писмени работи, паралелът между представянето на контролната и фокус групата са в подкрепа на 2. и 3. Хипотези (стр. 7), че задача, която предполага аналитично четене и творчество в по-голяма степен затруднява учениците. Обратната връзка сочи, че повече от половината участници нямат опит със задачи за моделиране. Това дава основание за 5. Хипотеза (стр. 7) – полезно е допълването на курса на обучение с практически задачи в синхрон със заложеното учебно съдържание в духа на единно Европейско образование. Разрезът на

решенията според показателите сочи за затруднения при паралелна работа с текст и изображение, недостатъчна задълбоченост в решението и аргументацията, трудности при анализиране на междинните резултати и формулирането на крайния отговор.

## 6.7. Дискусия и изводи

Разгледаните критерии и показателите са:

- математическа грамотност – умение за разчитане на условието на поставената задача;
- математически знания – предвид профила на участниците очакването е за високи резултати;
- изследователски подход и новаторство – отсъства предложение с повече от едно решение;
- критично мислене – никой не е обърнал внимание на преопределеността на задачата, а само един ученик е забелязал разминаването в надписаната скала;
- самоинициатива – само един ученик предлага по-подходяща дума за отвора на бутилката;
- самонасочване – повечето ученици строго се придържат към прилагане на формули без аналитичен паралел между текст и изображение, формулиране на отговор, цялостно оформление на решението;
- отговорност – отношение към представянето – повечето работи имат вид на чернова;
- творчество и презентативни умения – главно изразени в оформлението на решението и избора на инструмент;
- дигитална грамотност – техническа реализация, оформление и предадени файлове. Реално това е допълнително наблюдение, получено поради извънредните условия, при които е проведен експериментът, но дава представа за дигиталната култура на участниците. Без предварително да е заложена се осъществява междупредметна връзка с Информационни технологии.

Повече от половината участници споделят, че нямат опит в решаването на такъв тип задача. Разминаването между оценката на трудността, самооценката и действително постигнатите резултати е показателно за ограничения опит са работа с такива проблеми.

Детайлният разрез на решенията според заложените критерии и показатели потвърждава значението на приложните задачи за развитието на компетентностите и уменията на 21 век – творчество, *problem-solving*, умения за боравене с предоставената информация.

## 7. ГЛАВА: ПОГЛЕД НАЗАД

---

След дефиниране на проблема, задълбочен преглед на литература и анализ на проведеното изследване, следвайки метода на Д. Пойа е ред на една по-широка ретроспекция.

България е страна с традиции в образованието по математика. Националният отбор по математика и отделни ученици от години печелят призови отличия от участия в международни математически състезания. Наред с това резултатите от PISA за страната са ниски и незадоволителни. Това откроява проблеми в образованието, свързани с развитието на уменията на учениците за аналитичен, креативен и комбинативен подход, при справянето с разнообразни задачи. Цел на изследването е анализ на представянето на обучаемите при решаване на сходни математически задачи. Подробно разглеждане на решенията, самооценката, критичното мислене и общото представяне на ученици с висока математическа подготовка показва необходимостта от разширяване на формите и обогатяване на методите на обучението по математика (DigComp, 2023). Наред с високото академично ниво, динамичното време, в което живеем, изисква подготовката по математика да не се свежда само до прилагане на алгоритми и формули. Нужни са умения за задълбочен анализ, интерпретация на данните, синтез на информацията по пътя на изграждане на модел, чрез който да се постигне решение на поставения проблем. После с поглед назад е необходимо аргументирано и ясно да се комуникира постигнатото решение.

Различията в резултатите на ФГ и КГ, обратната връзка и анализът на решенията дават насока за следващо изследване в по-голям мащаб. Наред с това се открояват слабостите на учениците. Забелязаните пропуски са комуникирани с преподавателите в двете училища. Данните са полезни и за подготовката на бъдещи учители.

### 7.1. Задача за втори гимназиален етап – профилирана подготовка

В програмите за профилирана подготовка „Модул 2. Елементи на Математическия анализ“ и „Модул 3. Практическа математика“ описаните очаквани умения се прекриват. В двете програми е заложен един и същи текст, като единствената разлика е в името на модула.

„Обучението в модул...

„Елементи на математическия анализ“ е насочено за овладяване

„Практическа математика“ е насочено за придобиване

... на компетентности, свързани с постигане на държавните образователни стандарти по математика за профилирана подготовка, *изграждане на умения за*

моделиране на реални или теоретични ситуации с изучените средства, умения за интерпретиране на получените резултати и за разглеждане на поставените проблеми като съвкупност от отделни проблеми“. (МОН, Учебни програми за профилирана подготовка, 2020)

В целите не е посочено явно значението на **приложността** извън необходимото надграждане на теоретичните знания. За основна цел на модулите е посочено съответно:

- Модул 2. – „изучаване на някои елементи на математическия анализ и придобиване на основни изчислителни умения в тази област.“
- Модул 3. – „е изучаване на някои приложения на знанията по математика, придобити с изучаване на първите два модула на профилираната подготовка“

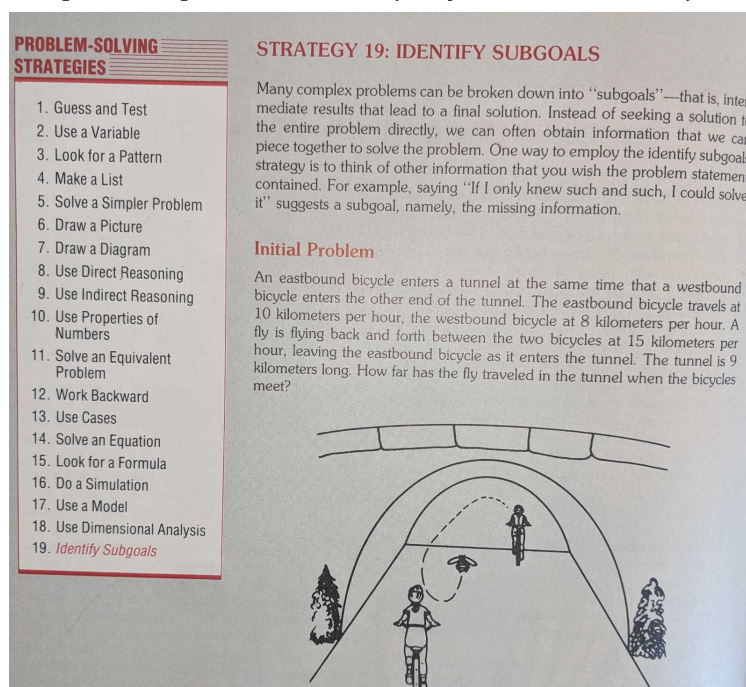
В графата „Компетентности като очаквани резултати от обучението“ на съответните таблици, съдържащи заложеното учебното съдържание, са изброени подробно умения и знания, които са пряко свързани със заложения теоретичен материал по математика. В Модул 2. не са посочени умения, които адресират моделиране на реални ситуации и тяхното интерпретиране. В Модул 3. единственото умение, което се отнася пряко към моделирането е „умее да решава екстремални задачи чрез моделиране с функции“. С оглед на учебното съдържание и поставените цели първият параграф на програмите звучи по-скоро пожелателно. Липсва отделна и ясна формулировка на нужните знания и умения за моделиране. Очакваните теоретични знания са специфицирани, но не и тяхното приложение в контекста на реални ситуации. Не са посочени експлицитно компетентностите за справянето с такива задачи и интерпретиране на резултатите в контекста на описания проблем.

В това отношение разминаването с чуждестранните образователни системи е драстично. Колегите от Австрия, Германия, Англия и САЩ създават задачи, в които многопластово се комбинира математическият апарат с реални житейски проблеми. В едни задачи те поставят високи изисквания към функционалната грамотност на зрелостниците, уменията за разчитане на проблем и съставяне на подходящ математически модел. В други задачи зададена функция трябва да се интерпретира в контекста на поставен проблем, като критичните точки не само трябва да се определят, но и тълкуват според поставеното условие.

В действащите учебници по математика за 12. клас (Учебната програма в сила от 2021 г.) има множество задачи за изследване на функция. Заложеният теоретичен материал дава висока подготовка на учениците, но липсващата брънка е моделирането на реалистични, близки до житейските, ситуации. В уроците за полиномни функции няма задачи, чиято формулировка е свързана с решаването на описан в текст проблем. Изследването се фокусира върху развитието на уменията на учениците да приложат алгоритъма за изследване на функция. За добиване на увереност и устойчиви знания са необходими упражнения и системна работа. Ако

спрем до тук, математиката в училище остава красива, чиста и самодостатъчна наука. Проектите, реализирани с допълнителни инструменти и технологии, адресират повече дигиталните компетентности и спомагат за онагледяване на резултатите, но не допринасят за аналитичното четене и превръщането на реален проблем в математически модел и анализирането на функциите в контекста на зададен казус. Приложните задачи свързват стъпките на алгоритъма и критичните точки на функцията с тяхното значение в различен контекст. Задачи, свързани с реални проблеми, са естественото продължение на теорията и липсващата приложна страна, която съществува от години в чуждестранни образователни програми.

Фиг. 61 е от учебник по училищен курс – математика за студенти, бъдещи учители. Според предговора курсът е структуриран около идеята, че студентите трябва да развият уменията да прилагат четиристъпковия модел на Д. Пойа. В началото на всяка глава е описана нова стратегия, която надгражда предходните. Прави впечатление, че при въвеждане те са вплетени в проблем, който е близък до реален такъв. Идеята на книгата е да послужи като наръчник за по-нататъшната работа в училище, да предложи структура на протичане на урок. Освен математическата теория и задачите за упражнение учебникът предлага набор от приложни проблеми към всеки урок, както и общи такива в края съответната тема. Текстовите задачи не са обособени в отделен урок, а са неразривна част от всяка методическа единица. Според авторите математическото съдържание, когнитивните нива и представителните нива трябва да са интегрирани на ниво урок чрез теория и разнообразни задачи. (Gary L. Musser, 1988)



Фиг. 61: Mathematics for Elementary Teachers (A Contemporary Approach)

## 7.2. Задача 1

**Задача:** Да се изследва функцията  $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$  (Иван Тонов, 2021).

Тази задача можем спокойно да сложим в графата **упражнения**. „Имаме цел и пътят към нея е ясно очертан“ (Тонов, 2012). При преподаването на изследване на функция се посочва алгоритъм. Изследването на тази полиномна функция има ясна структура. Не са нужни евристични методи, които да спомогнат в решението.

Алгоритъм за изследване на полиномна функция (според същия учебник) (1):

1. Определяне на дефиниционна област (ДО);
2. Определяне поведението на функцията в краищата на дефиниционните интервали;
3. Изследване за монотонност и определяне на локалните екстремуми;
4. Определяне къде функцията е изпъкнала или вдлъбната и определяне на инфлексните ѝ точки;
5. Начертаване графиката на функцията.

В друг учебник (Гълъбова & Сидерова, 2021) е изложен сходен план (2):

1. Установяване дали функцията е четна или нечетна.
2. Намиране на интервалите на монотонност и екстремумите.
3. Намиране на интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост и точките на инфлексия.
4. Допълнителни изследвания: Намиране на  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ; изчисляване на някои функционални стойности.
5. Построяване на графиката.

За целите на приложната задача, разгледана по-долу, изследваната функция е модифицирана до вида:  $f(x) = x(x - 2)^2$

Решението по-долу следва описания универсален алгоритъм (1):

1. ДО:  $x \in (-\infty; +\infty)$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 = +\infty$
3. Монотонност и екстремуми:

$$f'(x) = (x - 2)^2 + 2x(x - 2)$$

$$f'(x) = (x - 2)(x - 2 + 2x)$$

$$f'(x) = (x - 2)(3x - 2)$$

Необходимо условие за екстремум:

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = 2$$

Достатъчно условие за екстремум е смяна на знака на първата производна в

околност. Интервалите на монотонност са

$$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}; 2\right) \text{ и } (2; +\infty)$$

Посредством метода на интервалите се определя знакът на първата производна. При  $x \in (-\infty; 2/3) \cup (2; +\infty)$  имаме  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  е растяща, в интервала  $x \in (2/3; 2)$  имаме  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  е намаляваща. Следователно при  $x = 2/3$  имаме локален максимум  $f_{max} = f(2/3) = 32/27$ , а при  $x = 2$  имаме локален минимум  $f_{min} = f(2) = 0$ . С оглед поведението на функцията в краищата на ДО, локалните екстремуми, не са глобални, т.е. функцията няма най-малка и най-голяма стойност в ДО.

**Забележка:** Тук ролята на учителя е да обърне внимание, че локалният минимум може да бъде определен без изследване на функцията чрез първа производна или поне да създаде навик за евристичен подход и очаквано поведение на функцията. Функционалните стойности за  $x \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$  са само положителни, а при  $x = 2$  има двоен корен (нулиране на функцията). Значението на двойния корен сочи, че функцията допира абсцисната ос и в случая, с оглед на функционалните стойности, достига локален минимум.

4. Изпъкналост, вдлъбнатост, инфлексни точки.

Необходимо условие за инфлексна точка е  $f''(x) = 0$

$$f''(x) = (3x - 2) + 3(x - 2)$$

$$f''(x) = 6x - 8$$

$$6x - 8 = 0$$

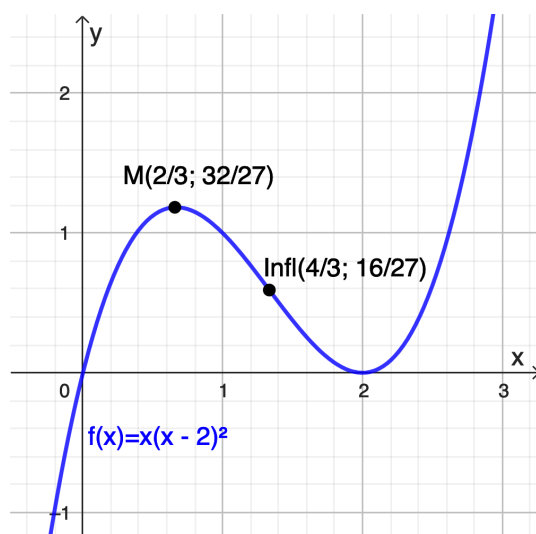
$$x = \frac{4}{3}$$

Достатъчно условие за инфлексна точка е смяна на знака на втората производна в околност. В интервала  $x \in (-\infty; 4/3)$  имаме  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  е вдлъбната, а в интервала  $x \in (4/3; +\infty)$  имаме  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  е изпъкнала. Инфлексната точка е при  $x = 4/3$ , която е

$$I\left(\frac{4}{3}; \frac{16}{27}\right).$$

5. Графика на функцията (Фиг. 62) е препоръчително учениците да направят самостоятелно на лист с молив и линия.





Фиг. 62: Графика на функцията (GeoGebra)

„Когато задачата има интересна и интригуваща формулировка, а особено, когато тя допуска неочаквано решение, работата по нея е по-привлекателна и мотивираща.“ (Тонов, 2012)

Подходящо надграждане в контекста на изследователския подход при решаването на задачи развива уменията за аналитично четене и тълкуване на проблем в термините на математиката. Освен разглеждане на функцията като цяло, ученикът е важно да умее да интерпретира или дефинира интервал, в който функцията описва процес, явление или форма. Ценна е интерпретацията на значението на особените точки в контекста на поставения проблем, а не само определянето им, следвайки алгоритъма.

Направеният литературен обзор подкрепя хипотезите на дисертацията (стр. 7), че практическите задачи влияят върху мотивацията и онагледяват смисъла на изучавания математически апарат, че са ключови за развиване на уменията на 21. век. Многобройните сфери на приложение на математиката дават голяма свобода при задаване на задачи, които провокират критичното мислене и творчеството, наред с аналитичното мислене.

Задачи 2, 3 и 4 са съставени и описани за целите на дисертацията. Решението им се основава на изследването на същата функция, но тя е поставена като проблем, който следва да се анализира и да се даде отговор в термините на условието. Работата по задачата следва модела на кръговрата при моделирането (стр. 23). Описаното движение между математически и реален свят е съответно коментирано.

### 7.3. Задача 2 (приложна)

След инжектиране с лек наркотик на опитни мишки се следят нивата на еозинофилни\* левкоцити в кръвта им (\*индикатори за алергична реакция).

Приемаме, че в началото нивото на тези ензими е било близо до 0%. Нивото (1 м. ед. = 10%) на наркотика в кръвта в периода на действие се описва от функцията  $f(t) = t(t - 2)^2$ , като времето се измерва в денонощия.

1. Колко време минава до пълно изчистване на кръвта?
2. За кой интервал на променливата разглежданата функция описва поставения проблем?
3. Кога се достигат най-високи стойности на левкоцитите и какви са те в проценти?
4. Кога се наблюдава най-бързото спадане на нивата?
5. Ако непосредствено след момента на най-големия спад изменението на нивото на ензимите може да се опише с линейна функция, то какво би било нейното уравнение (графика)? Как това ще промени моментът на пълно изчистване на кръвта?
6. Колко време трае алергичната реакция (референтни стойности 0 – 6%)?

**Решение (първи вариант):** За да може да се отговори на поставените по-горе въпроси е необходимо да отчасти да се изследва зададената функция според цитирания алгоритъм (1). Тук е важна ролята на учителя като фасилитатор на процеса. Ключови са насоките му по тълкуването на поставените въпроси. Полезни би било такава задача да се постави на дискусия в класната стая. Учебният материал, свързан с изследване на функция, се очаква вече да е усвоен. Ако учениците са плахи и са в „блокаж“, ако не знаят как да започнат, то въпросът „Кога започва процесът?“ е насочващият въпрос, който отключва дискусията, който дава старт на задачата, който подсказва за първоначално ограничение на разглежданата ДО.

1. Дефиниционна област: в началото е важно да се посочи  $t \geq 0$ . Въпрос 2 навежда на мисълта, че ще има допълнително ограничение.
2. Поведение на функцията в краищата на ДО:  $f(0) = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ . „Смислено ли е разглеждането за големи стойности на променливата?“ – кръговрат теория  $\Leftrightarrow$  практика  $\Leftrightarrow$  теория. Границата в контекста на задачата няма смисъл, функционална стойност над 10 (100%) е неприложима, но и след изчистване на организма нямаме основание да разглеждаме функцията, тъй като няма как да се самозароди активно вещество след разграждането му. Образователната подготовка и представите за реалния свят се преплитат с математическото решение.
3. Монотонност и екстремуми са почти идентични на горното разглеждане. При  $t \in [0; 2/3) \cup (2; +\infty)$  имаме  $f'(t) > 0 \Rightarrow f(t)$  е растяща, при  $t \in (2/3; 2)$  имаме  $f'(t) < 0 \Rightarrow f(t)$  е намаляваща. Следователно при  $t = 2/3$  имаме локален максимум

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$$

а при  $t = 2$  имаме локален минимум  $f(2) = 0$ .

„Какво е значението на тези стойности в контекста на поставения проблем?“  
 Едно възможно тълкуване: В момента на инжектиране нивото на разглеждания ензим е 0%. След това нивото нараства. Времето се измерва в денонощия, т.е. след 16 часа ( $\frac{2}{3}$  от денонощието) се достига най-голяма стойност от 12% ( $\frac{32}{27} \times 10\%$ ). След този момент до края на второто денонощие процентното съдържание спада до пълното изчистване на кръвта 48 часа след първоначалния прием. Това показва, че функцията описва дадения процес само в интервала  $t \in [0; 2]$ . Подобно стройно обяснение не е реалистично да се постигне от всеки ученик при първа среща с такава задача. Множество провокативни и насочващи въпроси, отворената дискусия в класната стая биха подтикнали учениците към съответните изводи.

4. С натрупания опит в тълкуването на локалните екстремуми се преминава към следващата стъпка. Тук отново учителят може да насочи разсъжденията по аналогия. **Какво** е значението на втората производна? **Как** тя насочва към екстремалната скорост? **Защо** търсим стойността на променливата в инфлексната точка? Ако направим аналогия на път (изходна функция) – скорост (първа производна) – ускорение (втора производна), то инфлексната точка сочи момента на екстремална скорост. В конкретния казус функцията описва нивото на ензимите – скорост на изменението им (първа производна) – изменение на скоростта (втора производна). За да се определи моментът на най-бързо разграждане на веществото трябва да се определи инфлексната точка. Аналогично на предходното разглеждане се определя, че тя е при  $t = 4/3$ . Тук учениците трябва да се подсетят, че зададеното време е в денонощия и е редно да се превърне в часове, за по-ясно описание. След 32 часа се наблюдава най-големият спад на нивото. Друго предизвикателство е къде е уместно да се замести така получената стойност за променливата и какво е значението на резултата. Често учениците заместват обратно във втората производна и тук учителят е добре да ги остави да направят тази грешка, за да обърне внимание как е получена тази стойност и защо това действие е безпредметно. Следващата реакция е да се замести в изходната функция, като това е показателно за нивото на ензима в този момент  $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{27}$ , което може да тълкува като 6% ( $\frac{16}{27} \times 10\%$ ) или  $f'\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}$ , което може да тълкува като моментна скорост на спад от 13,3% ( $\frac{4}{3} \times 10\%$ ) в денонощие. Уместно да се обърне внимание какво значи скоростта да е отрицателна. Какво е характерно за процеса в този момент. Каква е скоростта на изменение в периодите на натрупване и разпад, каква е скоростта в момента на достигане на максимално и минимално ниво на веществото. Задачата предполага изследване в дълбочина. Учениците имат умения за необходимите математически операции. Отворена дискусия подпомага

осъществяването на кръговрата теория  $\Leftrightarrow$  практика и натрупване на устойчиви знания.

5. Коя е линейната функция, която приближава разгледана функция в точка? Подобна задача е представяна на Национален семинар по математическо образование (Изследователският подход в математическото образование) през 2019 г. и отправен въпрос от учител от профилирана паралелка по математика беше: „Как се очаква учениците да разберат, че се търси уравнението на допирателната към графиката на функцията?“. Според програмата на МОН ученикът трябва да „умее да намира допирателна към крива в точка“. Тук насочващите въпроси трябва да подпомогнат учениците, да направят връзката, че при  $t = 4/3$  процесът може да се замени с друг, само ако вторият има същата стойност, но и същото изменение в този момент. Втората характеристика насочва, че линейната функция, не е произволна права, минаваща през тази точка, но и трябва да има същия ъглов коефициент. Така са налични две условия, които са достатъчни за определяне на коефициентите на линейната функция.

$$\begin{cases} f' \left( \frac{4}{3} \right) = -\frac{4}{3} \\ f \left( \frac{4}{3} \right) = \frac{16}{27} \end{cases}$$

Общо уравнение на допирателната в точка  $t$ :  $y = mt + b$ , където

$$m = f' \left( \frac{4}{3} \right) = -\frac{4}{3}$$

Остава да се използват горните стойности. С последователно заместване на ъгловия коефициент в уравнението и стойностите на функцията и променливата от инфлексната точка.

$$t: y = -\frac{4}{3}t + b$$

$$\frac{16}{27} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} + b$$

$$b = \frac{64}{27}$$

$$t: y = -\frac{4}{3}t + \frac{64}{27}$$

Асоциирането на крайния момент на процеса с нулиране на ензимите насочва да се реши линейното уравнение:

$$0 = -\frac{4}{3}t + \frac{64}{27}$$

$$\Rightarrow t = \frac{16}{9}$$

Според условието времето се измерва в денонощия, т.е. това е близо 1,78 денонощия или едно денонощие и 18 часа и 40 минути, или след 42 часа и 40

минути. Въпросът на колегата беше съвсем основателен, но и дава насока в коя част на задачата учителят е удачно да се намеси.

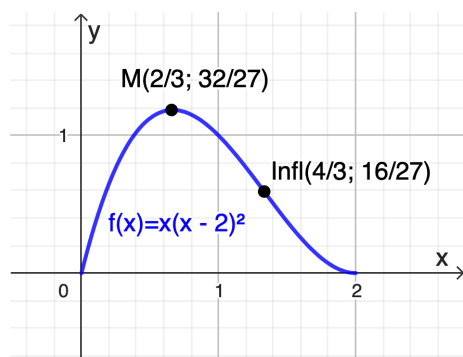
Ситуацията се описва най-добре от понятието на Виготски за зона на най-близко развитие, хипотетичното пространство между това, което човек може да постигне сам, и това, което не може да постигне, дори и с помощ. „Зоната на проксималното развитие (ZPD) е разстоянието между действителното ниво на развитие, определено чрез независимо решаване на проблеми, и нивото на потенциално развитие, определено чрез решаване на проблеми под ръководството на възрастен или в сътрудничество с по-способни връстници“ (Vygotsky, 1978). На този етап участието на учителя трябва да е адаптивно, с насочващи въпроси и преговор. Според Вернер Блум „интервенциите и подкрепата от страна на учителите няма да имат дългосрочен ефект, ако се прилагат само ситуативно, защото не може да се очаква трансфер. Само съпътстващите метакогнитивни дейности могат да обещаят устойчиви ефекти. На ученици трябва да се даде възможност да видят общата характеристика в конкретната стъпка, в конкретната познавателна бариера: Как мога да си помогна при такава трудност? Как мога да реша такава вид задачи сам? Защо в ситуациите на оценяване или в контекста на реалния живот няма помощ от учителя.“ (Blum, 2015)

6. Какво е значението на референтни стойности при изследване? Повечето ученици са виждали лабораторен лист. В него срещу стойностите, които са измерените при изследването, са посочени референтни, които сочат интервала на здравословната норма. Хубаво е учителят да разполага с подобен лист, съвместна работа с медицинско лице, учител по биология или химия, 2-3 минутно видео по темата още по-силно обвързва математическата задача с реалния живот. След часове, прекарани в упражнения и изучаване на правила, чрез приложната задача теорията „оживява“. В случая нива над 6% са извън норма и е интересно кога се надвишават. Според мерните единици на функцията, въпросът е „Кога функционалните стойности надминават стойността 0,6?“. Това води до решаване на неравенство от трета степен:

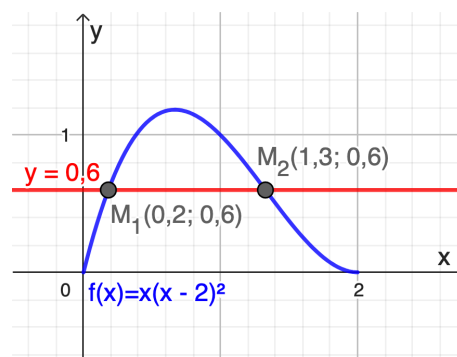
$$f(t) > 0,6$$
$$t(t - 2)^2 > 0,6$$

Моментът е подходящ да се предложи визуализиране на разглежданата функция с информацията до момента (Фиг. 63).

Целесъобразно е учителят да насочи учениците към разглеждане на двете страни на неравенството като две отделни функции. Това тълкуване не им е чуждо, защото подобни задачи фигурират в учебника. Упражняваните задачи по учебен материал разглеждат само определянето на съществуване или брой на пресечни точки, но подходът съвпада (Фиг. 64). В случая фокусът е върху тълкуването на резултатите.



Фиг. 63: Графика на функцията в ДО

Фиг. 64: Червената линия е с уравнение  $y=0,6$ 

Последната стъпка е да се формулира отговор според въпроса на задачата. Това е завършекът на кръговрата на решаването на практически задачи. Учениците интерпретират информацията от задачата, съставят математически модел, решават го, тълкуват получените резултати, като ги превеждат обратно към езика на условието. Например: По-малко от 5 часа след инжектирането мишките са в състояние на алергична реакция, която продължава малко повече от денонощие (дължина на интервала в денонощия =  $1,3 - 0,2$ ). След повече от 31 часа от началото на експериментът нивото на ензимите отново са в норма.

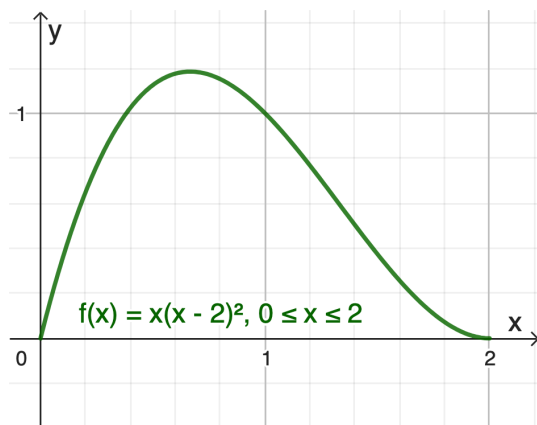
**Решение (втори вариант)** чрез изцяло изследователски подход. Това решение е много по-подходящо, ако това е първа задача от този род. Целта е да се раздели проблемът на отделни стъпки.

1. Пълно изследване на функция (теоретична подготовка, силно застъпена в ПП), определяне на граници, точки на нулиране, локални екстремуми, инфлексна точка;
2. Аналитично препрочитане на задачата, с тълкуване на условието с цел отделяне на предоставената информация и търсените стойности;
3. Тълкуване поведението на функцията спрямо дадения реален казус. Определяне на значението на намерените стойности в термините на поставения проблем.

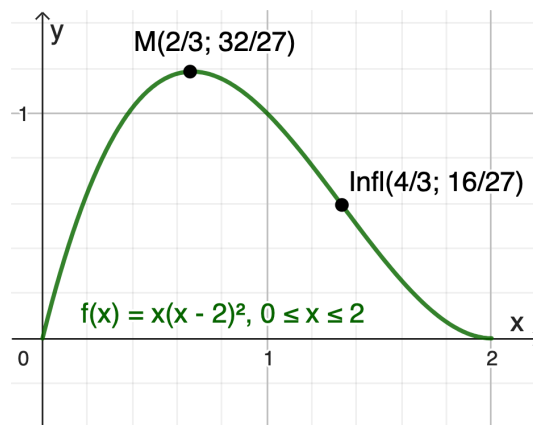
При това решение учениците след пълно изследване на функцията по зададения алгоритъм (1) са начертали нейната графика. Алтернативен подход е директно визуализиране с помощта на подходящ софтуер. Важно е учениците да разполагат с координатите на забележителните точки според изследването – екстремуми и инфлексни точки. Предполага се на този етап учениците са достигнали до резултата от Фиг. 62. Таблица 14 и Таблица 15 представят съответствието между необходимите действия в GeoGebra по пътя на визуализирането на разглежданата част от функцията и съответните точки.

Таблица 14: Стъпки от работа с GeoGebra - 1

Задача	GeoGebra code
1. Задаване на подходящи ограничителни (Фиг. 65)	$f(x)=If(0\leq x\leq 2, x(x-2)^2)$
2. Съобразяване на мерни единици $x \Rightarrow 1$ м. ед. = 1 денонощие = 24 ч. $y \Rightarrow 1$ м. ед. = 10%	
3. Откриване на екстремуми (Фиг. 66)	$M = \text{Max}(f(x), 0, 2)$
4. Откриване на инфлексните точки (Фиг. 66)	$I = \text{InflectionPoint}(f(x))$



Фиг. 65: Смесово ограничение за ДО

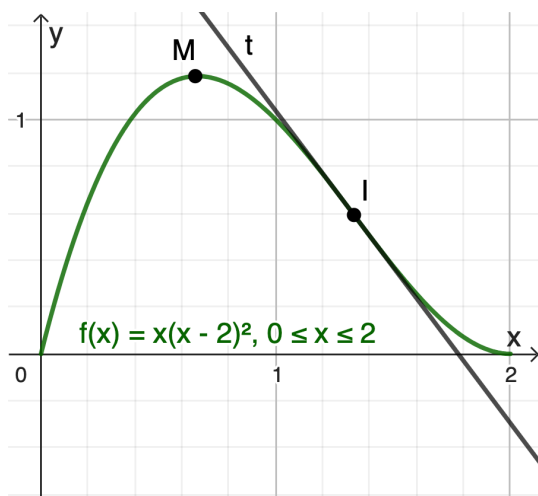


Фиг. 66: Максимум и инфлексна точка

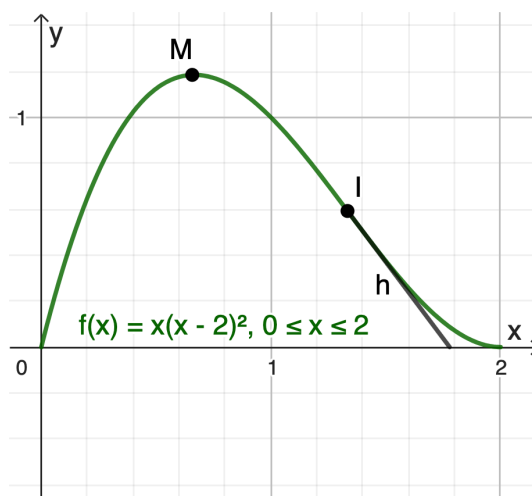
Следваща стъпка е тълкуване на условието, което учителят подпомага с насочващи въпроси. Отбелязване на смисловата връзка между съответните точки от функцията и търсените в задачата стойности – могат да се маркират на чертежа, да се запишат в тетрадките бележки или като структурирано в таблица съответствие. В края се формулира отговор в контекста на конкретната задача.

Таблица 15: Стъпки от работа с GeoGebra - 2

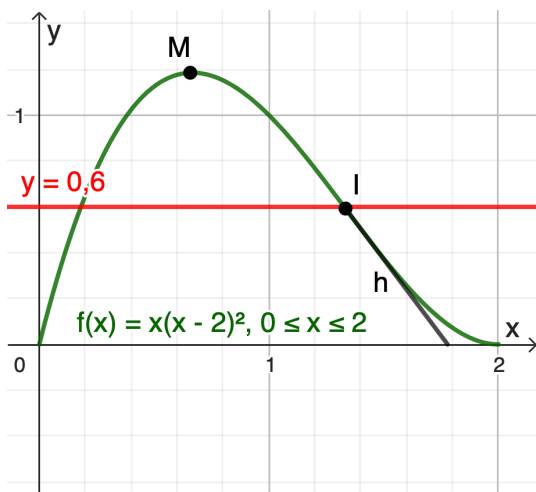
Задача	GeoGebra код
5. Построяване на допирателна към графиката на функцията в зададена нейна точка (Фиг. 67)	$t: \text{Tangent}(I, f(x))$
6. Ограничаване на допирателната само от точката на допиране до пресичането ѝ с абсцисата (Фиг. 68)	$C = \text{Intersect}(t, x\text{Axis})$ $h = \text{Segment}(I, C)$
7. Въвеждане на нова функция (Фиг. 69)	$y = 0,6$
8. Маркиране на пресечните точки на двете функции (Фиг. 70)	



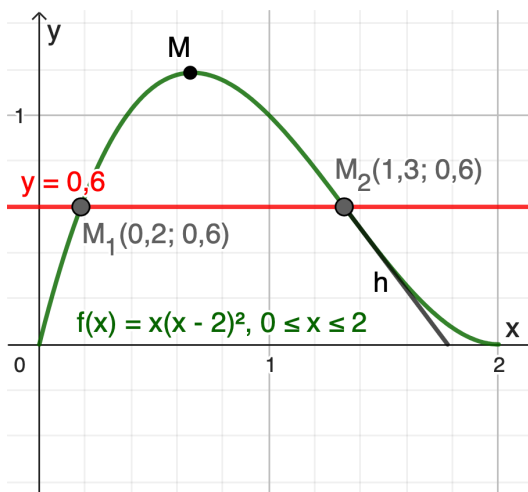
Фиг. 67: Допирателна в инфлексната точка (I)



Фиг. 68: Част от допирателна в I



Фиг. 69:  $f(x)$  и правата  $y = 0,6$



Фиг. 70: Пресечни точки на  $f(x)$  и  $y = 0,6$

„Математическият опит на ученика не бива да се счита пълен, ако той никога не е имал възможност да реши задача, измислена от самия него.“ (Пойа, 1972)

Като следваща стъпка за самостоятелна работа, или за домашно задание, или като проект може да се даде следната задача:

### 7.4. Задача 3 (творчество)

**Задача:** Дадена е функцията  $f(x) = x(x - 2)^2$

Съставете задача, в която дадената функция описва процес по избор от сферата на география, биология, химия, физика, технологии и предприемачество. Задайте подходящи спрямо процеса въпроси, свързани със стойностите на функцията, екстремумите, инфлексната точка, разгледайте допирателни към



графиката на функцията.

Може в часа учителят да стимулира описанието на проблем от друга сфера на познанието. Ето няколко примерни формулировки.



Фиг. 71: Духова могила  
(Пловдив, 2018)

**Изкачване на склон (география, физика):** Близо до гр. Перушица се намира тракийска надгробна могила с изключително интересна форма. Ако се направи напречен разрез на могилата, то той може приблизително да се опише с функцията

$$f(x) = x(x - 2)^2,$$

където 1 м. ед. съответства на 100 м.

Нека началото на склона е начало на координатна система, а хоризонталната ос съответства на нивото на селото. Начертайте в координатна система напречен разрез на могилата.

1. Колко метра е дълъг по хоризонтала напречният разрез?
2. Колко метра над нивото на селото е най-високата точка на могилата?
3. Къде е най-стръмният участък?
4. Иван взел книжка и обмислял дали може да помогне на археолозите като се качи с джипа на дядо си до върха на могилата. Нека проходимостта на терена е според възможностите на джипа. Ако превозното средство може да изкачва наклон до 32%, то ще успее ли Иван в начинанието си?

**Хоризонтална планировка (архитектура):** Поради строителни работи се налага пренасочването на трафика от дадена точка по обходен маршрут. Ако приемем началната точка на ремонтната дейност за начало на координатната система (1 м. ед. = 1 км), а хоризонталата за основния път, то обходният маршрут се описва от функцията  $f(x) = x(x - 2)^2$ . Постройте в една координатна система основния и обходния път.

1. Колко км от основния път ще бъдат заобиколени?
2. Може ли да се поставят трамвайни линии, които без чупка да минават по обходния маршрут?
3. Къде се достига най-голямо разстояние от основния път и какво е то?
4. Един от пътните инженери обърнал внимание, че не се налага толкова голям обход. Според него когато обходният път за втори път е на разстояние 562,5 м може да се продължи гладко по права линия към основния път. Според шефа му подобна промяна е смислена, ако това ще доведе до намаляване с поне 10% на заобиколения участък от основния път. Обосновете дали предложението на инженера отговаря на този критерий.

За целите на дисертацията е описана структура на въпросите по нива на

сложност (стр. 17). В немската образователна система е възприет друг подход за целите на оценяването. Първите подточки се отнасят към задължителното (първо) ниво, което се очаква учениците да покрият. Чрез тях се проверява доколко са усвоени математическите знания по темата. При функции например това са въпроси за определяне на точки от графиката на функцията, минимум/максимум, инфлексни точки. Според предложената структура съответстват на – 1, 2 и 3. Следват подточки от второ ниво на сложност, които комбинират няколко умения, например определяне на допирателна в точката с най-голям ъглов коефициент – част от точка 3 по въведената в дисертацията структура. Последната подточка е трето ниво и очаква комбиниране на няколко умения, като такава комбинация се предполага, че не е упражнявана в часовете – съответства на точка 4. Представената по-долу задача онагледява проблем с указани нива на сложност, който следват модела на Д. Пойа (стр. 51):

- Първо ниво – може да се отнесе към задачи-упражнение (2).
- Второ ниво – комбиниране на повече от едно правила (3).
- Трето ниво – евристичен подход (4).

Учители и университетски преподаватели се сблъскват с оплакването на обучаемите, че изпитно задание включва „неупражняван материал“. Оплакването „Това не сме го правили в час“ е доста неуместно за предмет по математика, където истинското владение на материала се демонстрира чрез комбиниране на знания и умения. Подходящ регламент на изпитванията може да елиминира подобно недоволство сред учащите и би ги подтикнало да търсят подходящи примери за упражнения.

## 7.5. Задача 4 (*problem-solving*)



Фиг. 72: Възвишение на Канарските острови

Напречното сечение на възвишение, заобиколено от две долини, може да се опише чрез функцията

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 3$$

в интервала

$$\frac{-2 - 2\sqrt{10}}{3} \leq x \leq \frac{-2 + 2\sqrt{10}}{3}.$$

На върха на хълма трябва да се монтира пилон с два прожектора, които да осветяват най-ниските точки на двете долини. Прожекторите трябва да се намират на най-малката възможна височина спрямо основата на пилоната. Една линейна единица от графиката на функцията отговаря на 100 м в действителност.

1. Да се начертае профилът на разглеждания терен. Да се определят

- височината на хълма и най-голямата дълбочина на двете низини, ако абсцисната ос отговаря на нулева надморска височина. (първо ниво)
2. Да се определи надморската височина на точката с най-стръмно изкачване/слизание спрямо хълма (второ ниво).
  3. (Разглежданият интервал може да е заложен като допълнителен въпрос): Да се определи интервалът, в който функцията описва този релеф, ако е дадено, че двете страни на низините достигат височина, равняваща се на тази на най-високата точка на хълма. Или да се даде по-лек от изчислителна гледна точка интервал, за да не се дублират тежките пресмятания, ако са на ръка.
  4. Да се намери къде трябва да се монтира пилонът и на каква височина на него от основата му се намират прожекторите (трето ниво).

*Решение:* Първата стъпка е изследване на графиката на функцията, с цел определяне на особените точки на хълма и низините и построяване на визуален модел на зададения релеф.

1. Изследване на функцията

- а) Стойности на функцията в краищата на интервала.

$$f\left(\frac{-2 - 2\sqrt{10}}{3}\right) = 3 \text{ и } f\left(\frac{-2 + 2\sqrt{10}}{3}\right) = 3$$

- б) Първа производна:

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x$$

- в) Необходимо условие за екстремум:

$$f'(x) = 0$$

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

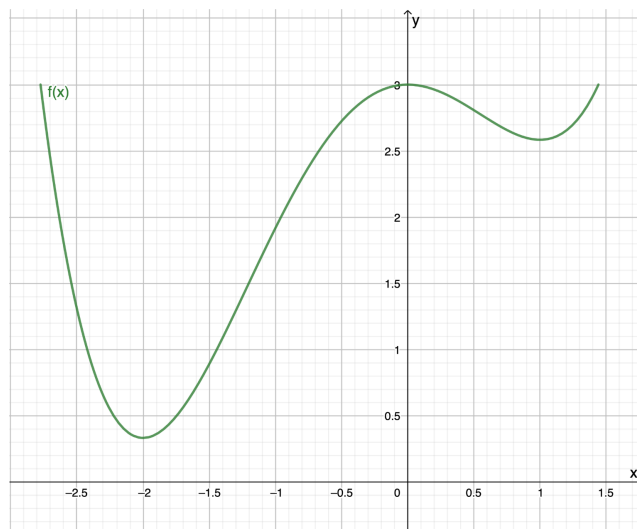
- г) Достатъчно условие (изменението на знака на първата производна в околност на точките на нулирането ѝ)

$$f'(x) = x(x + 2)(x - 1)$$

$$f'(x) > 0 \text{ за } -2 < x < 0 \wedge 1 < x < \frac{-2 + 2\sqrt{10}}{3}$$

$$f'(x) < 0 \text{ за } \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{3} < x < -2 \wedge 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow f_{\min} = f(-2) = \frac{1}{3} \wedge f_{\max} = f(0) = 3 \wedge f_{\min} = f(1) = \frac{31}{12}$$



Фиг. 73: а) Графика

- д) **Отговор (извод):** Най-високата точка на хълма е на 300 м надморска височина. Западната (лявата) низина има най-ниска точка от 33,33 м, а източната (дясната) низина 258,33 м надморска височина.
2. Най-стръмно е на местата с най-голям по абсолютна стойност ъглов коефициент. За целта трябва да се определи максималната (минималната стойност) на първата производна. Необходимо условие за екстремум на функцията, описваща ъгловия коефициент, е нейната производна да има стойност нула.

$$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

$$f''(x) = 0$$

$$3x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \wedge x_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$$

Достатъчно условие за екстремум е смяна на знака на производната (в случая втората производна на функцията) в околност на точките. Предвид вида на втората производна – квадратна функция с точки на нулиране, то тя си сменя знака техните околности. От гледна точка на функцията това са инфлексните точки:

$$I_1 \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}, f \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) \right) \text{ и } I_2 \left( \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}, f \left( \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \right) \right)$$

$$f \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right)^4 + \frac{1}{3} \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right)^3 - \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right)^2 + 3 = 1,4702$$

$$f \left( \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \right)^4 + \frac{1}{3} \left( \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \right)^3 - \left( \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \right)^2 + 3 = 2,7767$$

Нужните пресмятания са маркирани като полезно упражнения за рационално

пресмятане, но то не е фокус на настоящото разглеждане. Възможно е и в много случаи препоръчително да се постави като допълнително задание за преговор и определяне на отговора с точност до втория знак. С оглед на по-нататъшни пресмятания се изчислява точно само едната стойност:

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \frac{1-1-\sqrt{7}}{3} - 1\right) + 3$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{8+2\sqrt{7}}{9} \left(\frac{18+2\sqrt{7}}{4} + \frac{-\sqrt{7}-1}{9} - 1\right) + 3$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{2(4+\sqrt{7})}{9} \left(\frac{2(4+\sqrt{7})}{4.9} + \frac{-\sqrt{7}-1}{9} - 1\right) + 3$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{2(4+\sqrt{7})}{9} \left(\frac{4+\sqrt{7}}{18} + \frac{-2\sqrt{7}-2}{18} - 1\right) + 3$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{2(4+\sqrt{7})}{9} \left(\frac{2-\sqrt{7}}{18} - 1\right) + 3$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{2(4+\sqrt{7})}{9} \left(\frac{-\sqrt{7}-16}{18}\right) + 3$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{2(4+\sqrt{7})}{9} \frac{(-\sqrt{7}-16)}{18} + 3$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = -\frac{4+\sqrt{7}\sqrt{7}+16}{9} + 3$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = -\frac{20\sqrt{7}+71}{81} + 3$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{172-20\sqrt{7}}{81}$$

**Извод:** Най-стръмните точки се намират съответно на 147 и на 277, 67 м надморска височина.

3. Определяне на интервала на разглеждане. Определяне на пресечните точки на функцията с правата, отговаряща на абсцисата на максимума (върха на хълма)  $y = 3$ .

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 3 = 3$$

$$\frac{x^2}{12}(3x^2 + 4x - 12) = 0$$

$$3x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{3}, x_{3,4} = 0$$

Подходящ интервал за разглеждане е:

$$x \in \left[ \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{3}, \frac{-2 + 2\sqrt{10}}{3} \right]$$

4. На пръв поглед решението изглежда просто. Достатъчно е да се свърже с права най-ниската точка на долината с върха на хълма. Това решение бързо се отхвърля, защото релефът се очаква да е непрозрачен и няма как да се постигне осветяване. Второто хрумване е да се използва, получената вече инфлексна точка, което навежда на мисълта, че става дума за по-особена допирателна. Пресмятането на ъгловия коефициент в инфлексната точка дава:

$$f' \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) = \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} + 2 \right) \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} - 1 \right)$$

$$f' \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) = \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) \left( \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \right) \left( \frac{-4 - \sqrt{7}}{3} \right)$$

$$f' \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) = \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) \left( \frac{-13 - \sqrt{7}}{9} \right)$$

$$f' \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) = \frac{20 + 20\sqrt{7}}{81}$$

$$f' \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) \approx 0,9$$

Ако пресметнем ъгловия коефициент на правата, свързваща най-ниската точка и инфлексната точка се получава:

$$m = \frac{f \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right) - f(-2)}{\frac{-1 - \sqrt{7}}{3} - (-2)}$$

$$m = \frac{\frac{172 - 20\sqrt{7}}{81} - \frac{1}{3}}{\frac{-1 - \sqrt{7}}{3} - (-2)}$$

$$m = \frac{\frac{145 - 20\sqrt{7}}{81}}{\frac{5 - \sqrt{7}}{3}}$$

$$m = \frac{(145 - 20\sqrt{7})(5 + \sqrt{7})}{27(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})}$$

$$m = \frac{585 + 45\sqrt{7}}{27.18}$$

$$m = \frac{585 + 45\sqrt{7}}{486}$$

$$m \approx 1,45$$

Този резултат сочи, че допускането, че инфлексната точка е търсеното място не е правилно. Защо изобщо се разглежда инфлексната точка? От опит в решаване на комплексни задачи учениците са забелязали закономерност – получени в предишни подточки резултати, могат да бъдат полезни. Какъв е изводът? Не трябва да се атакува проблемът с предположения, а строго теоретично. Така учениците сами изграждат алгоритъм за решаване на такъв проблем. За да се постигне минимална височина на монтажа, светлинният лъч, тръгващ от прожектора, трябва да е допирателна към склона, която минава през най-ниската точка на низината. Това решение не е разглеждано подробно в учебниците, но градивните му елементи са застъпени в изследването на функция. Учениците знаят как се съставя уравнение на допирателна към графиката на функция в точка. Знаят как се определя и уравнение на права по две точки. Предизвикателството е да се комбинират знанията за постигане на крайното решение.

Нека точката на допиране означим с  $T$ , то координатите ѝ са  $T(u, f(u))$ . Ъгловият коефициент в тази точка ще е

$$f'(u) = u^3 + u^2 - 2u.$$

Натрупаният опит в проследяването на ъгловия коефициент в инфлексната точка и сравняването му с ъгловия коефициент на правата, минаваща през две точки, навежда на мисълта, че ни трябва онази точка чийто ъглов коефициент се равнява на ъгловия коефициент на правата, свързваща търсената точка с дъното на низината:

$$m = \frac{f(u) - f(-2)}{u - (-2)}$$

$$m = \frac{\frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} - u^2 + 3 - \frac{1}{3}}{u + 2}$$

$$u^3 + u^2 - 2u = \frac{\frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} - u^2 + 3 - \frac{1}{3}}{u + 2}$$

$$u^4 + u^3 - 2u^2 + 2u^3 + 2u^2 - 4u = \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} - u^2 + 3 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4}u^4 + \frac{8}{3}u^3 + u^2 - 4u - \frac{8}{3} = 0$$

$$9u^4 + 32u^3 + 12u^2 - 48u - 32 = 0$$

Тук е моментът да си припомним, че дъното на низината е минимум и допирателната в тази точка изпълнява желаните условия от гледна точка на ъглов коефициент, но е успоредна на абсцисната ос и не би довела до желаното решение. Интерес за нас представлява ограничен набор от стойности на променливата  $-2 < u < 0$ .

Знанието, че допирателната в дъното отговаря на търсеното условие ни помага да

решим уравнението от четвърта степен. Един вариант е чрез Схемата на Хорнер, а друг е чрез делене на полиноми, използвайки, че  $u = -2$  е двукратен корен на уравнението:

$$(9u^4 + 32u^3 + 12u^2 - 48u - 32) : (u^2 + 4u + 4) = 9u^2 - 4u - 8$$

В зависимост от опита си ученик може вместо с делене на полиноми да отдели желанния множител с елементарни преобразувания:

$$\begin{aligned} & 9u^4 + 32u^3 + 12u^2 - 48u - 32 = \\ & = 9u^4 + 36u^3 + 36u^2 - 4u^3 - 16u^2 - 16u - 8u^2 - 32u - 32 = \\ & = 9u^2(u + 2)^2 - 4u(u + 2)^2 - 8(u + 2)^2 = \\ & = (u + 2)^2(9u^2 - 4u - 8) \\ & 9u^4 + 32u^3 + 12u^2 - 48u - 32 = 0 \end{aligned}$$

Така първоначалното уравнение се свежда до:

$$(u + 2)^2(9u^2 - 4u - 8) = 0$$

А търсените решения, различни от  $-2$  са:

$$u_1 = \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} \wedge u_2 = \frac{2 + 2\sqrt{19}}{9}$$

с оглед на разглеждания интервал ( $-2 < u < 0$ ) единствено решение остава

$$u = \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}$$

Следва да се определи уравнението на допирателната в тази точка. Като подготовка за тази стъпка се определят координатите на точката и ъгловият коефициент:

$$f\left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right) = \left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} - 1\right) + 3$$

$$f\left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right) = \frac{80 - 8\sqrt{19}}{81} \left(-\frac{55 + 8\sqrt{19}}{81}\right) + 3$$

$$f\left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right) = \frac{(8\sqrt{19} - 80)(55 + 8\sqrt{19})}{6561} + 3$$

$$f\left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right) = \frac{-3184 - 200\sqrt{19}}{6561} + 3$$

$$f\left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right) = \frac{16499 - 200\sqrt{19}}{6561}$$

$$f\left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right) \approx 2,3818$$

$$f'\left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right) = \left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}\right) \left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} + 2\right) \left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} - 1\right)$$



$$f' \left( \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} \right) = \left( \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} \right) \left( \frac{20 - 2\sqrt{19}}{9} \right) \left( \frac{-7 - 2\sqrt{19}}{9} \right)$$

$$f' \left( \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} \right) = \frac{(2\sqrt{19} - 2)(20 - 2\sqrt{19})(7 + 2\sqrt{19})}{729}$$

$$f' \left( \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} \right) = \frac{(44\sqrt{19} - 116)(7 + 2\sqrt{19})}{729}$$

$$f' \left( \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} \right) = \frac{860 + 76\sqrt{19}}{729}$$

$$f' \left( \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} \right) \approx 1,6341$$

$$t: y - \frac{16499 - 200\sqrt{19}}{6561} = \frac{860 + 76\sqrt{19}}{729} \left( x - \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} \right)$$

$$t: y = \frac{860 + 76\sqrt{19}}{729} \left( x - \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} \right) + \frac{16499 - 200\sqrt{19}}{6561}$$

$$t: y = \frac{860 + 76\sqrt{19}}{729} x - \frac{860 + 76\sqrt{19}}{729} \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9} + \frac{16499 - 200\sqrt{19}}{6561}$$

$$t: y = \frac{860 + 76\sqrt{19}}{729} x - \frac{-1168 - 1568\sqrt{19}}{6561} + \frac{16499 - 200\sqrt{19}}{6561}$$

$$t: y = \frac{860 + 76\sqrt{19}}{729} x + \frac{1168 + 1568\sqrt{19} + 16499 - 200\sqrt{19}}{6561}$$

$$t: y = \frac{860 + 76\sqrt{19}}{729} x + \frac{17667 + 1368\sqrt{19}}{6561}$$

$$t_{\text{приблизителни стойности}}: y = 1,6341x + 3,6016$$

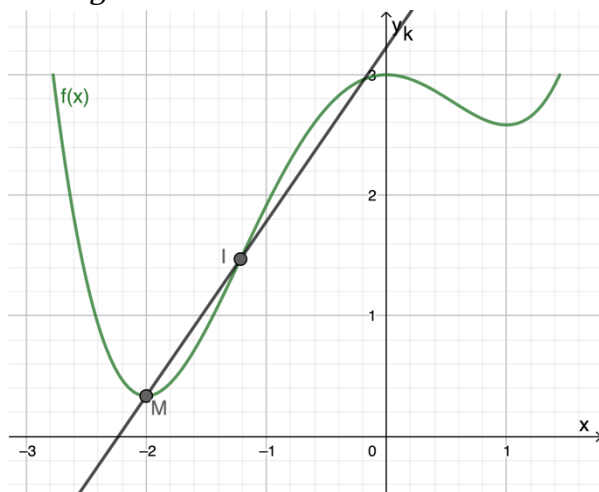
**Отговор:** За да осветява най-ниската точка на западната (дясната) низина прожекторът трябва да се намира на 360,16 м надморска височина. Предвид разположението на най-високата точка на хълма (300 м надморска височина), прожекторът трябва да бъде монтиран на стълба на височина от 60,16 м, за да осветява най-ниската точка на низината.

Аналогични са разсъжденията за лявата страна на низината. В хода на решенията може с цел опростяване на пресмятанията да се използва калкулатор, но е важно да се обърне внимание кога е уместно да се използват закръглени стойности, до кой знак и как те се отразяват на крайния резултат.

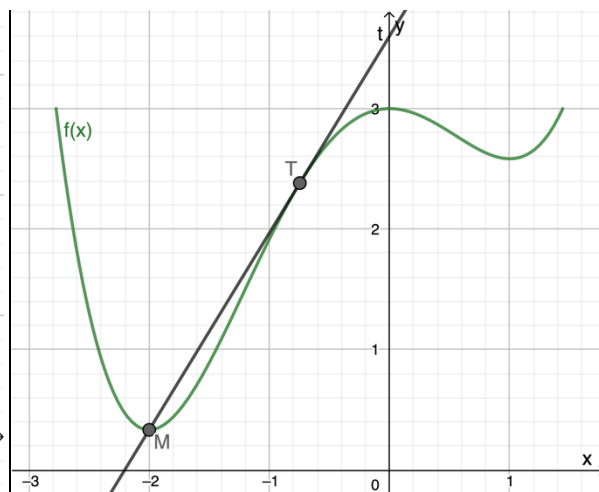
Полезно е учителят да насочи при разбор на задачата към различни подходи за решаване на уравнението от четвърта степен и да припомни действия с корени.

Ключови са разсъжденията за построяване на допирателна през неизвестна точка и как се подхожда за намирането на тази точка и желаната допирателна. Умелото комбиниране на знанията е индикатор на нивото на постигнатото познание и развитите компетентности. Тук освен прилагане на математически

модели и знания се търси и анализ, адресират се творчество и уменията за *problem-solving*.



Фиг. 74: Права през инфлексната точка



Фиг. 75: Търсената допирателна

На по-горе споменатия семинар Ев. Сендова провокативно отправя въпроса „А как се е стигнало до тази функция, как сме сигурни, че тя описва този процес?“. Въпросът е съвсем основателен и навежда на друга гледна точка към проблема. Реално при многократно наблюдаване на процес емпирично може да се определят различни стойности, да се осреднят и да се състави функционален модел. При анализ на икономически или експериментални физически данни, функциите на приближение не са така опростени. Затова може да разграничим два основни типа проблеми – за анализ и за реконструкция. Описаната по-горе задача спада към първия тип.

В немската и австрийската образователни системи са популярни задачите за синтез. В тях по информация за особени точки на функция се конструира нейното уравнение. Интересно разширение на задачата по-горе би било условие, което допълва примерно така:

Екип от Центъра по геодезия и кадастър е направил замерване на терена и е определил:

**Вариант А:** следните 5 точки:

$$A\left(-2; \frac{1}{3}\right); B\left(-1; \frac{23}{12}\right); C(0; 3); D\left(1; \frac{31}{12}\right); E\left(\frac{6}{5}; \frac{1659}{625}\right).$$

**Вариант В:** следната информация:

Най-ниска измерена точка  $A\left(-2; \frac{1}{3}\right)$ , на-висока измерена точка  $C(0; 3)$ , допълнителна точка  $B\left(-1; \frac{23}{12}\right)$ .

**Въпрос:** Полиномна функция от коя степен може да се състави еднозначно по тези точки и какво е нейното уравнение?

Тук е уместно да се даде уравнението на функцията като контролен отговор

и после да се продължи с условието на изложената по-горе задача.

## 7.6. Задача 5 (комбинация на проблеми)

Цитираните по-долу задачи са съответно от германски (Fundus, 2020) и американски учебници (King, Smith, & Goldie, 2016). Те са добър пример за обобщаващи в края на годината задачи, които включват няколко от изучаваните теми.

### 7.6.1. Задача Стохастика 1

Задачата според името си е в основната си част поставя въпроси, които са от тема Вероятности. Последната подточка преплита темата с екстремален проблем.

#### **Aufgabe Sto 1**

Ein Glücksrad besteht aus drei farbigen Sektoren mit den Mittelpunktswinkeln  $180^\circ$  (rot),  $90^\circ$  (gelb) und  $90^\circ$  (blau).

- a) Das Glücksrad wird zehn Mal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:  
A: Die Farbe Blau tritt genau vier Mal auf.  
B: Die Farbe Blau tritt mindestens vier Mal auf.

- b) Bestimmen Sie, wie oft man das Glücksrad mindestens drehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen

Eine Klasse setzt dieses Glücksrad beim Schulfest ein, wobei folgende Spielregeln gelten: Für einen Einsatz von einem Euro darf ein Spieler das Glücksrad drei Mal drehen. Wenn drei Mal dieselbe Farbe erscheint, erhält er zwei Euro zurück; wenn drei verschiedene Farben erscheinen, bekommt er nichts ausbezahlt; in allen anderen Fällen erhält er seinen Einsatz zurück.

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Spieler Verlust macht, wenn er dieses Spiel einmal spielt.
- d) Die Klasse will im nächsten Jahr zwar die Spielregeln beibehalten, aber durch Veränderung der Sektorengößen ihre Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen. Dabei soll der rote Sektor weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe.  
Es sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Drehung „gelb“ erscheint.  
Berechnen Sie denjenigen Wert von  $p$ , für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, am größten ist.

*Фиг. 76: Задача германски учебник за зрелостници*

*Превод на Фиг. 76:* Колелото на късмета се състои от три цветни сектора с централни ъгли  $180^\circ$  (червено),  $90^\circ$  (жълто) и  $90^\circ$  (синьо).

а) Колелото на късмета се завърта десет пъти. Изчислете вероятностите за следните събития:

A: Синият цвят се среща точно четири пъти.

B: Синият цвят се среща поне четири пъти.

б) Определете колко пъти трябва да се завърти колелото на късмета, за да се получи поне веднъж син цвят с вероятност над 99 %.

Един клас използва това колело на късмета на училищния фестивал със следните правила: Срещу залог от едно евро играчът може да завърти колелото на

късмета три пъти. Ако три пъти се появи един и същ цвят, той получава обратно две евро; ако се появят три различни цвята, не му се изплаща нищо; във всички останали случаи той получава обратно заложената сума.

в) Изчислете вероятността играчът да претърпи загуба, ако изиграе тази игра веднъж.

г) Следващата година класът иска да запази правилата на играта, но да увеличи вероятността за печалба, като промени размерите на секторите. Червеният сектор трябва да продължи да бъде два пъти по-голям от жълтия сектор. Нека  $p$  е вероятността „жълтият“ сектор да се появи на даден ход. Изчислете стойността на  $p$ , за която вероятността играчът да загуби е най-голяма.

### 7.6.2. Преговор квадратна функция и вероятности

Задачата започва с въпроси, свързани с квадратен тричлен, разлагане на множители, определяне на корените на квадратно уравнение. Следват въпроси от тема Вероятности. Последните две точки предполагат разсъждения, които се базират на обединените резултати от двете предходни части.

13 а) (i) Factorise  $2x^2 - 35x + 98$ .

(ii) Solve the equation  $2x^2 - 35x + 98 = 0$ .

A bag contains  $(n + 7)$  tennis balls.  $n$  of the balls are yellow. The other seven balls are white. John will take a ball at random from the bag. He will look at its colour and then put it back in the bag.

b) (i) Write down an expression, in terms of  $n$ , for the probability that John will take a white ball.

Bill states that the probability that John will take a white ball is  $\frac{2}{3}$ .

(ii) Prove that Bill's statement cannot be correct.

After John has put the ball back into the bag, Mary will then take at random a ball from the bag. She will note its colour.

c) Given that the probability that John and Mary will take balls with different colours is  $\frac{2}{9}$ , prove that  $2n^2 - 35n + 98 = 0$ .

d) Using your answer to part a) ii), or otherwise, calculate the probability that John and Mary will both take white balls.

[Edexcel]

Фиг. 77: Пример от американски учебник за 9. – 10. клас

Превод на Фиг. 77:

13 а) (i) Да се разложи на множители  $2x^2 - 35x + 98$ .

(ii) Да се реши уравнението  $2x^2 - 35x + 98 = 0$ .

В торба има  $(n + 7)$  топки за тенис. Броят на жълтите топки е  $n$ . Останалите седем са бели. Джон взима произволна топка от торбата. Поглежда я и я връща обратно.

б) (i) Изразете чрез  $n$ , вероятността Джон да изтегли бяла топка.

Бил твърди, че вероятността Джон да изтегли бяла топка е  $\frac{2}{5}$ .

(ii) Докажете, твърдението на Бил не може да е вярно.

След като Джон е върнал топката, Мери изтегля произволна топка и записва нейния цвят.

в) Ако се знае, че вероятността Джон и Мери да са изтеглили различни по цвят топки е  $\frac{2}{9}$ , да се докаже, че  $2x^2 - 35x + 98 = 0$ .

г) Като използвате отговора от а) ii) или по друг начин, пресметнете вероятността и Джон, и Мери да са изтеглили бяла топка.

## 7.7. Банка с въпроси

Качествени приложни задачи се подготвят трудно, често изискват консултации със специалисти, за да бъдат реалистични междупредметните връзки. Процесът на апробиране е по-дълъг, самите решения са времеемки, качествената им оценка – също. Световна практика е използването на хранилища с изпитни задачи – с отворен или ограничен достъп. Смисълът им е споделяне на опит, но и ограничаване на плагиатството сред учителите-автори на задачи за зрелостни изпити. Личният творчески труд на учители при подготовка на задачи за упражнение, подготовка на преговорни уроци и контролни работи остава често скрит. Все по-популярна практика е учениците да бъдат стимулират да създават такива задачи. Пример за това е опитът на учители в НЕГ и DASS през последните пет години. Това поощрява творчеството – **умение на 21. век**, но и създава материал за нови задачи, т.е. е в полза на учителите, които добиват по-добра представа за изразните средства и проблематиката на младото поколение.

Следващите фигури са извадки от ученическо творчество. Фиг. 78 е задача от ученик, с която неговият клас „предизвиква“ друга паралелка от випуска. Своеобразната математическа надпревара е идея на учениците, подкрепена и насочена от техните преподаватели.

B2: Analytische Geometrie

Das künstlerische Gebäude

Der Künstler und Architekt Georgi Tsonev entwirft das Projekt für ein Gebäude, das für das Zentrum der Stadt Bramsche geplant ist. Das Gebäude soll ein schiefes dreiseitiges Prisma sein mit Eckpunkten  $A(5|2|0)$ ,  $B(2.5|6|0)$ ,  $C(-8.8| - 7|0)$ ,  $D, E$ , und  $F(3|3|5)$  und gleich langen Seitenkanten. Zwei der Seitenkanten sind  $AF$  und  $BE$ . Die Reihenfolge der Punkte sollte genauer beschrieben werden. Ich halte den Eindruck, dass  $AF$  und  $BE$  die Seiten  $BCDE$ ,  $F$  über  $C$  liegen sollte.

- a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte  $D$  und  $E$ .
- b) Berechnen Sie den Neigungswinkel des Prisma  $AF$  über  $C$ .
- c) Berechnen Sie das Volumen des Gebäudes.

Ein Kollege von Georgi namens Alexandros Triantafyllidis findet das geplante Gebäude gar nicht ästhetisch. Er schlägt vor, das Prisma die Ebene entlang auszuschneiden, die aus den Punkten  $D, F$  und  $C$  definiert ist, und nur den Körper  $ABDFC$  zu bauen.

- d) Berechnen Sie das Volumen des von Alexandros vorgeschlagenen Körpers. Das ist eine wunderschöne Aufgabe, aber ihr solltet wirklich eine Zeichnung dazu machen.

Georgi und Alexandros entscheiden sich zuletzt, das Prisma zu behalten, aber dazu noch drei Pyramiden zu bauen, jede von deren Grundflächen eine Seitenfläche des Prismas ist und **jeder** deren Spitze auf der  $x, y$ -Ebene liegt. Das Gesamtvolumen des Gebäudes soll  $612.5$  VE betragen, wobei die Volumina zweier Pyramiden gleich sein soll.

- e) Berechnen Sie eine Variante für die Koordinaten der Spitzen der Pyramiden sowie für die entsprechenden Volumina. **da es unendlich viele Möglichkeiten gibt, finde ich die Idee zwar toll, aber als Prüfungsaufgabe nicht so geeignet.** Die Seitenflächen und die Deckfläche des neu geplanten Gebäudes sollen gestrichen werden. Alle Seitenflächen, die mindestens zwei gemeinsame Punkte mit dem Boden haben, sollen grün gestrichen werden; alle anderen Seitenflächen – blau und die Deckfläche – gelb. Für das Streichen eines Quadratmeters braucht man  $0.75$  Liter Farbe. 1 Liter grüne Farbe kostet  $47\text{€}$ , 1 Liter blaue Farbe –  $62\text{€}$  und 1 Liter gelbe Farbe –  $36\text{€}$ .

- f) Berechnen Sie, wieviel das Streichen kosten würde ( $1\text{LE} = 1$  Meter).

Auf dem Dach des Gebäudes soll ein Café gebaut werden. Die Grundfläche des Cafés ist ein Kreis, dessen Zentrum der Schwerpunkt des Dreiecks  $DEF$  ist.

- g) Berechnen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt des Cafés.

Фиг. 78: Задача, предложена от ученик, рецензирана от Анна Цанева (НЕГ 2022-23)

Геометрия Aufgabe 1

In einem Vergnügungspark gibt es einen Nageraum. Die Inhaber möchten eine neue Attraktion konstruieren, "Die Lichtreflexe". Ein Scheinwerfer hat die Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  (eigentlich ein Strahl des Lichts).

(1) Zuerst beleuchtet der Scheinwerfer eine schwarze Wand, die von dem Punkt  $P(0|0|1)$  und den beiden Spitzpunkten  $P_1(6|10|0)$  und  $P_2(0|10|6)$  festgelegt wird.

a) Ermitteln Sie die Koordinatenform dieser Wandebene  $(E)$ .

Kontrollergebnis:  $E: dx + dy + z = 1$

b) Best. der Lichtstrahl durch den Punktkomplex  $P$ ?

(2) Hinter dieser Wandebene steht ein Spiegel, der parallel zur  $E$  ist und  $3\text{LE}$  davon entfernt liegt. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Spiegelebene  $(F)$ . (in Koordinatenform)

Kontrollergebnis:  $F: dx + dy + z = 10$

Фиг. 79: Условие на задача за допълнителна оценка – Аналитична Геометрия (ученик НЕГ 2022/23)

Задачите на Фиг. 79, Фиг. 80 и Фиг. 81 съставени от ученици. Заданието, което изпълняват е за допълнителна оценка. Предложената от тях задача трябва да следва формата на съответните писмени изпитвания, които са правени през 11. и 12. клас. Очаква се да се опише реален проблем. Поставените въпроси трябва да градират по сложност и да адресират различни аспекти на изучавания материал. Освен формулировка на задачата, трябва да се приложи и съответно очаквано решение с ясни междинни отговори. Преди финалното оценяване, ученикът има право на една консултация за обратна връзка от учителя.

**Musikfestival**

Das spektakuläre Musikfestival *Stillwater* wird schließlich am 11. August 2023 wieder stattfinden. Aufgrund von Gesundheitsmaßnahmen während der Covid-19-Pandemie wurde das Festival drei Jahre hintereinander verschoben, was Tausende von Fans enttäuschte. Seit die lang erwartete Nachricht in der ersten Jahreshälfte 2022 angekündigt worden ist, planen Fans aus aller Welt ihre Reise nach London im nächsten Jahr, auch wenn der Verkauf erst im Oktober 2022 begonnen hat. Es ist keine Überraschung, dass der Ticketkauf ein wahrer Krieg ist - die Karten sind bereits Ende November ausverkauft. Das Marketingteam des Festivalveranstalters hat die Statistiken der vergangenen Jahre untersucht und geht davon aus, dass sich der Ticketverkauf über die folgende Funktion beschreiben lässt:

$t$  – Zeit in Tagen seit 30. September 2022  
 $N(t)$  – Anzahl an verkauften Tickets in 100

a) Skizzieren Sie die Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem.  
 b) Berechnen Sie schrittweise, an welchem Tag (auf die Stunde genau) sind die meisten Tickets verkauft. Wie viele Tickets sind an diesem Tag verkauft?  
 Anzeigen in den sozialen Medien spielen eine wesentliche Rolle bei der Werbung für *Stillwater*, deshalb hat das Marketingteam eine optimale Strategie. Das Team hat beschlossen, die Facebook-Werbung einzustellen, wenn mehr als 500 Tickets pro Tag verkauft werden, um Kosten zu sparen.  
 c) Bestimmen Sie, in welchem Zeitraum wird das Festival nicht auf Facebook beworben? Geben Sie die Daten und die Uhrzeiten an.  
 Das Marketingteam hat auch eine neue, verbesserte Anzeige geplant, die es auf allen Plattformen des Festivals hochladen wird, wenn das Interesse an Tickets am stärksten abnimmt.  
 d) Bestimmen Sie, um wie viel Uhr an welchem Tag vorgesehen ist, das neue Werbung veröffentlicht zu werden.

Фиг. 80: Условие на задача за допълнителна оценка – Анализ (ученик НЕГ 22/23)

a) Stärkste Abnahme = Wendestelle  
 GTR:  $f_2(x) = \frac{d}{dx}(f_1(x))$  zeichnen lassen  
 ↳ Die Wendestelle einer Funktion ist die Extremselle ihrer Ableitungsfunktion.  
 ↳ Abnahme  $\Rightarrow$  Tiefpunkt  
 GTR: menu  $\rightarrow$   $\ominus$   $\rightarrow$   $\ominus$  (Minimum)  
 $T(4,91) \approx -0,4667$   
 $N(4,91) \approx 6,678 \Rightarrow W(4,91 | 6,678)$   
 $0,91 \cdot 24 = 21,84$ ;  $0,84 \cdot 60 = 50,4 \Rightarrow 05.10.2022$ , 21:50

(A) Am 5. Oktober 21:50 Uhr wird die neue Werbung des Festivals in den sozialen Medien hochgeladen, da die Interesse zu diesem Zeitpunkt am stärksten abnimmt.

e)  $\int_{10}^{15} N(t) dt = 18,5$   
 $18,5 \cdot 100 = 1850$  Tickets werden zwischen Tag 10 und Tag 15 verkauft.

f)  $\int_{15}^{\infty} N(t) dt =$   
 $F(t) = 10 \cdot \left( \frac{e^{-0,03t}}{-0,03} + e^{-t} \right)$   
 (Stammf. von  $N(t)$ )  
 $F(t) = 10 \cdot (e^{-t} - 12,5 \cdot e^{-0,03t})$   
 $\int_{15}^{\infty} f(t) dt = F(u) - F(15) =$   
 $= F(u) - (-37,65) = F(u) + 37,65$   
 Laufvariab.  $u \rightarrow \infty$   
 $\lim_{u \rightarrow \infty} (F(u) + 37,65) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left( 10 \left( \frac{1}{e^t} - \frac{12,5}{e^{0,03t}} \right) + 37,65 \right) =$   
 $\rightarrow 0 \quad - 37,65$

Фиг. 81: Част от решението на задача за допълнителна оценка (ученик НЕГ 22/23)

Пример за обединените усилия на образователното министерство и учителите е Sinus Project (SINUS.NRW, 2018) – проект, който стартира на национално ниво в Германия и след това се доразвива в отделните провинции. По същността си е огромно хранилище с дидактически статии и споделени материали в полза на учителите. Подобни инициативи за споделяне на материали наблюдаваме у нас в затворените учителски групи в социалните мрежи. Трудно може да се проследи авторството и остава субективна оценката на качеството им, но е видно желанието за обединяване на усилията.

## Обобщение

Училищното образование има основна мисия да подготви подрастващите за живота. За много ученици математиката остава директно прилагане на формули и модели и развитието на уменията на 21. век остава на заден план. Джон Дюи подчертава, че „...ученето в собствения смисъл на думата е учене не на нещата, а на *смислите* на нещата...“ (Дюи, 2002) Аналитичният подход към проблемите, наблюдателността, комбинативното и критично мислене са една от целите на училищния курс по математика и на ученето за цял живот. Идея как да подготвим учениците за живота ни дава Д. Канеман „Интелигентността не е само способност за разсъждение; това е и способността да се намира подходящ материал в паметта

и да се насочва вниманието, когато е необходимо. Паметта е атрибут на Система 1. Въпреки това, всеки има възможност да забави скоростта, за да извърши активно търсене в паметта за всички евентуално уместни факти. Степента на умишлена проверка и търсене е характеристика на Система 2.“ (Kahneman, 2011) Нужни са комплексни, сложни за разчитане проблеми, които да активират Система 2, които да карат умът на ученика да търси натрупани устойчиви знания, които да комбинира по пътя на решаването на поставената задача. Според заложените в дисертацията хипотези приложните задачи подпомагат процеса на връзка между теория и практика на когнитивно ниво. Подходящи такива задачи онагледяват конкретното приложение на математическото познание решаване на реални проблеми. Трудностите, с които човек се сблъсква в живота, рядко са едностранни. Обикновено са комбинация от множество условия, които могат да се разрешат с комбиниране на знания и умения от различни области. По-общо може да се каже, че животът е проблем от тип 4 по Д. Пойа. Динамиката му обаче усложнява контекста на задачата и е необходимо учене през целия живот, за да се набави необходимият инструментариум от умения. Ценните умения, които се развиват в училищния курс по математика, са критично подхождане към проблема, анализ на наличната информация, синтез на модели, комбинативно мислене, съчетаване на различни методи, алгоритми и стратегии, нагласа, че има повече от един път към решението. Предложените и анализирани примерни задачи онагледяват ролята на приложните задачи за осъществяване на междупредметни връзки като обединяват знания и умения в различни области. Ученическото творчество се развива не само в процеса на решаване на задачи, но и при тяхното създаване, за което е нужен опит в работа с такива проблеми.



## РАЗВИТИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

### Развитие на темата

Настоящата дисертация разглежда ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика. Според цялостното изследване техният образователен потенциал е понастоящем недостатъчно развит.

Заложената 3. Хипотеза не е категорично потвърдена от проведеното изследване, но няма основание да бъде отхвърлена. Естествено продължение е планиране и осъществяване на представително изследване. Използваната задача следва да се прецизира. Придружаващият въпросник трябва да се доразвие след консултация със специалисти по статистика. Необходимо е изследването на терен да бъде при неопосредствено наблюдение, да се обогати с допълнителни беседи и дискусии както с учениците, така и с учителите. Анализът на резултатите е възможност за оценка на актуалната ситуация.

### Изследване сред ученици

С цел постигане на представителност на данните групата от участници трябва да се разшири с представители от:

- цялата страна
- различни по профил и специализация гимназии
- първи гимназиален етап
- втори гимназиален етап

### Изследване сред настоящи и бъдещи учители

С цел проследяване на нагласите и опита на учителите подобно изследване е добре да се проведе в два формата. Единият следва да е идентичен с този на учениците. Източник на повече изводи би бил „качествен експеримент“ (Бижков & Краевски, 2007) в търсене на подходи за ефективно минимално вмешателство при напътствие на учениците сами да намерят и аргументират решението си.

Целевата група:

- студенти-магистри учители по математика във ФМИ
- учители по математика, които посещават специализирани курсове за допълнителна квалификация във ФМИ
- лица, които посещават курс за следдипломна квалификация (СДК)

### Анализ на резултатите

Извършване на подробен количествен и статистически анализ на данните от проведеното представително изследване. Въз основа извлечените резултатите да

се направят съответните оценки и изводи. На тяхна база да се формулират основания за предложения за допълнение на училищния курс по математика със съответния набор от задачи.

### **Приложните задачи в годините назад**

Безценен опит може да се почерпи от стари български учебници. За целта е необходимо хронологично проследяване на количеството и типовете приложни задачи от началото на миналия век до днес. Задачите могат да се опишат и направят достъпни в общо хранилище. Трудно е да се постави ясна граница между класовете в последните години, поради промени в разпределението на училищния материал. В резултат на всяка образователна реформа темите менят мястото си – веднъж са в осми, а друг път в девети или в дванадесети клас. Тематичното им структуриране дава възможност за абстрахиране от годишното разпределение според актуалната програма на МОН. Под внимание трябва да се вземат и експерименталните учебни програми, които с тенденцията за олекотяване не са се наложили. Тяхното съдържание излиза от зададената рамка в търсене на нови подходи и предлагат нестандартни задачи, които заслужават внимание. В тях могат да се открият много интересни, апробирани задачи, които крият пропуснати към момента възможности.

### **Приложни задачи**

На базата на дисертацията може да се направи обучителен материал за работа във втори гимназиален етап в часовете по ЗП и ПП по математика.

- Формулировка и апробация на схема от критерии за оценка на комплексността на приложна задача.
- Инструменти за създаване на приложни задачи.
- Банка с апробирани приложни задачи.
- Интеграция със STEM образованието.
- Математика за математиката чрез подходящи задачи, напр. задачи за линейно програмиране.

### **Заклучение**

Изпълнение на изследователските задачи

Разработката на дисертационния труд следва поставените задачи за разглеждане на ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика. Направен е обзор на литературни източници и резултатите от сходни изследвания в областта. Съпоставени са действащите у нас нормативни документи и тези на ЕК за развитие на образованието с оглед на очакваните умения и компетентности. Сравнени са избрани теми от действащите учебници у нас и тези на утвърдени

чуждестранни системи с цел анализира настоящото ниво на използване на задачи за моделиране в гимназиален етап. Анализирана е ролята на приложните задачи като инструмент за осъществяване на междупредметни връзки. Разработен е сценарий на приложните задачи от гледна точка на структура и съдържание. Описани са осите на разглеждане на приложните задачи. Направен е разрез на процеса на решаване на приложна задача според заложените ключови компетентности и уменията на 21. век. Анализирано е тяхното значение за развитието на когнитивните и метакогнитивните умения на учениците.

#### Достоверност на хипотезите

Разгледаните литературни източници, нормативни документи и програми, сходни изследвания в областта потвърждават 1. Хипотеза, че приложните задачи повишават интереса и мотивацията и развиват умения за учене през целия живот и постигане на устойчиви знания.

Направеният анализ на съдържанието и процеса на решаване на приложни задачите, които описват близък до реален житейски проблем, са пречупени през призмата на компетентностния модел и уменията на 21. век. На база на литературен обзор и с конкретни примерни се потвърждава 2. Хипотеза, че такива задачи спомагат постигането на целите на образованието по математика като в по-голяма степен развиват заложените ключови компетентности – критично мислене, аналитично четене, *problem-solving*, творчество. Разгледана е ролята на тези задачи за формиране на аналитично-евристичното мислене и презентативни умения при формулирането на аргументирано изложение. Приложени са, както описани в литературата, така и авторски критерии за разрез на условията и решенията на конкретни задачи, за да се онагледят как компетентностите „оживяват“ на практика чрез използването на приложни задачи. Анализът на част от резултатите от проведеното педагогическо изследване също сочат в подкрепа на 2. Хипотеза.

Резултатите от проведеното педагогическо изследване на терен не са достатъчно убедителни за потвърждаване на 3. Хипотеза, че приложните задачи в по-голяма степен затрудняват дори ученици с добра математическа подготовка. Въпреки това не са повод за отхвърляне на хипотезата, а дават основание за подготовка и провеждане на представително изследване, защото литературният преглед на сходни изследвания потвърждава заложената хипотеза.

Посочено е какво е влиянието на приложните задачи върху концентрацията, когнитивните и метакогнитивните модели. На база на литературни източници и анализ на допълнителните данни от проведеното педагогическо изследване е потвърдена 4. Хипотеза, че целенасочената работа по такива задачи има значение за изграждане на когнитивните и метакогнитивни модели, тренира концентрираното четене и повишава самодисциплината. Комбинирано психологическо и педагогическо изследване следва да се проведе с постигане на

по-добра измеримост.

С конкретни задачи е даден пример как преходът от зададен реален проблем към математически модел реализира „практически ориентирано“ познание, което е заложено в стратегическите документи на МОН. Аргументирано се представя проблемът с недостатъчно приложни задачи по математиката в гимназиален курс на обучение. Разгледано е, че въпреки регулярните промени в учебните планове, нивото на подготовка не отговаря на препоръките за нивото на единно Европейско образование. Извлечените изводи свидетелстват за необходимостта за допълнение на училищния курс с приложни задачи с цел повишаване на конкурентността и мобилността на зрелостниците, с което се потвърждава 5. Хипотеза.

Друга ос на разглеждане е новата образователна парадигма за учене през целия живот, при която водещ е личният пример на учителите – информирани и прилагащи актуалните подходи в образованието, използващи дигиталните технологии, интересувачи се от достъпните за учениците материали и приложения, умеещи да оценяват качеството им. Разгледаните документи, анализиращият процес на решаване на приложни задачи и мястото на дигиталните технологии в образованието потвърждават 6. Хипотеза, че учителите също трябва да развиват уменията си, да учат, да търсят и опознават нови образователни технологии и инструменти.

От изложението е видно, че създаването на качествени приложни задачи изисква съвместна работа на учителите по математика с други специалисти. В този процес по естествен начин възникват междупредметни връзки и се онагледява свързаността на заложените в курса на обучение знания. Ученическото творчество следва да се разглежда като допълнителен източник на вдъхновение в тази дейност. Интеграция със STEM образованието и приложни задачи от математика за математиката дават насока за бъдещо развитие на темата.

## АВТОРСКА СПРАВКА И ПРИНОСИ

---

### Научноизследователски приноси

1. Направен е структуриран обзор на литературни източници, анализиращи ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика като е описано значението им за развитието на когнитивните и метакогнитивните умения, ключовите компетентностите и уменията на 21. век.
2. Направена е съпоставка между действащите нормативни документи в България, в това число и програмите на МОН за курса на обучение по математика, с документите на ЕК за развитие на образованието в контекста на приложните задачи.
3. Анализирано е мястото на приложните задачи при съчетаване на класически и иновативни дидактически подходи, в това число дигитални технологии.
4. Натрупани, кодирани и анализирани са данните от проведените изследвания на терен, които могат да послужат за отправна точка за по-нататъшни проучвания в областта.

### Научноприложни приноси

5. Направен е сравнителен анализ на разнообразието и количеството приложни задачи в курса на обучение по математика у нас и тези в утвърдени чуждестранни системи.
6. Изготвен е структуриран преглед на алтернативни подходи като математическото есе и матурен проект и тяхното значение за стимулиране на ученическото творчество, самонасочването, самодисциплината и мотивацията.
7. Предложен е модел на решаване на приложна задача, базиран на литературни източници и етапите на Пойа с допълнителен разрез на отделните стъпки според адресираните компетентности и умения на 21. век.
8. Направен е анализ на формулировката приложните задачи от гледна точка на основни части на структурата, поставяне на въпроси с надграждащо ниво на трудност, речник, разнообразие, коректно съдържание, базирано на междупредметни връзки.
9. Анализирана е ролята на учителя в представянето, комбинирането и надграждането на знания в паралел със съвременната образователна парадигма за учене през целия живот.
10. Подготвени са материали и план за провеждане на педагогическо

изследване, което цели да оцени уменията за работа с приложна задача, която няма аналог в действащите учебници.

## Приложни приноси

11. Систематизирани са критерии за оценка на приложна задача.
12. Направен е разбор на конкретни задачи, изучавани в курса по математика, следвайки спираловидния модел.
13. Разработени са примерни приложни задачи, допълващи курса на обучение по математика, придружени с решение, разгледано по две оси – математическа обосновка и анализ на адресираните компетентности.
14. Очертани са насоки за развитие на набора от приложни задачи чрез изграждане на банка с въпроси като колективно усилие на учители и ученици и адаптирани добри практики от утвърдени чуждестранни образователни системи.

## Публикации, свързани с дисертационния труд

Researcher ID (Web of Science): AAA-8838-2021

ORCID ID: 0000-0002-1080-2571

1. Ralitz Stamenkova, "Do We Need the Application Problems in Math Classes", EDULEARN21 Proceedings, 2021, pages:11686-11694, ISBN:978-84-09-31267-2
2. Ralitz Stamenkova, "Distance Education in Bulgaria During Covid-19 in a Small Educational Organization – Methodology And Tools", ICERI2020 Proceedings, editor/s:L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres, Publisher:IATED Academy, 2020, pages:5523-5532, ISBN:978-84-09-24232-0, doi:10.21125/iceri.2020, Ref, IF ( - 2020)
3. Ралица Стаменкова, „Електронното образование за целите на обучението на бъдещи учители по математика и информатика“, Електронното обучение във висшите училища, издателство: Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, 2020, стр.:215-226, ISBN:978-954-07-5028-6

### Секционни доклади

„Анализиране на процес, зададен с функция в Geogebra“ – Национален семинар по математическо образование 2019 г., **отличен с награда** от организационния комитет

„Математическото есе като инструмент в обучението по математика“ – Пролетна научна сесия на ФМИ, 2021 г.

## Участия в научни проекти

1. Организационни форми за професионална квалификация на педагогическите специалисти в обучението по математика, информатика и информационни технологии, СУ – Фонд „Научни Изследвания“, Номер на договора: № 80-10-61/25.4.2023
2. 21st Century Skills: Changing the Approach to Teaching in Higher Education, Номер на договора: 2019-1-TR01-KA203-074482 (2021 г.)
3. PLayerful Environment for Inclusive Learning Design in Europe (PLEIADE), ЕС, Erasmus+, Номер на договора: 2020-1-IT02-KA201-080089
4. Методически подходи за повишаване на постиженията на студентите при прилагане на компетентностния подход, Номер на договора: 80-10-151/05.04.2021
5. МОДЕРНИзация в партньорство чрез дигитализация на Академичната екосистема, Номер на договора: BG05M2OP001-2.016
6. Целево използване на организационни форми, заложи в новия учебен план на МОН в културно-образователната област Математика, Информатика и Информационни технологии, СУ – Фонд „Научни Изследвания“, Номер на договора: №80-10-199/28.4.2020
7. Организационни модели за извънкласни дейности в условията на новите учебни програми на МОН в културно-образователната област Математика, Информатика и Информационни технологии, МОН – Фонд „Научни Изследвания“, Номер на договора: № 80-10-210/17.04.2019



## Декларация за оригиналност

Декларирам, че представената във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в Софийски университет „Св. Климент Охридски“ дисертация на тема: „*Ролята на приложните задачи от училищния курс по математика за целите на обучението*“ е мой труд.

Цитиранията на всички източници на информация, текст, илюстрации, таблици, изображения и други са обозначени според стандартите.

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

## БИБЛИОГРАФИЯ

---

- Антипешева, Ц. (2018). *Процесът за решаване на задачи (учебни задачи за общотехническа подготовка)*. Благоевград, България: Издателство на ЮЗУ „Н. Рилски“.
- БАН, М. . (2013). *Виртуален училищен кабинет по математика*. Извлечено от Виртуален училищен кабинет по математика: <https://cabinet.bg/>
- Баптист, П. (2013). *Към нов подход в математическото образование* (Том 1). (Е. Сендова, Ред.) София: „Регалия 6“.
- Бижков, Г., & Краевски, В. (2007). *Методология и методи на педагогическите изследвания*. София: Университетско издателство Св. Климент Охридски.
- Виденова, Б. К. (2015). *В българските учебници почти липсват подходящи текстове за придобиване на умения да се чете и интерпретира в математически контекст дадена информация*. София: БАН.
- Вълчев, Р. (2012). Предизвикателства пред ученето за цял живот в условията на прехода. *Съвременна хуманистика*.
- Върбанова, М. (2002). Текстовите задачи в обучението по математика в началните класове. *Педагогически алманах*, 120-123.
- Георги Паскалев, М. А. (2018). *Учебник*. София: Архимед.
- Георгиева, Д. (2018). Problem Solving Model In Mathematics. *Processing of the 57-th Annual Scientific Conference of Angel Kanchev University of Ruse and Union of Scientists – Ruse*. Ruse: University of Ruse "Angel Kanchev".
- Гълъбова, Д., & Сидерова, М. (2021). *Математика 12. клас Профилирана подготовка*. София: ВЕДИ.
- Делинова, И. А. (2012). *Развиване на интерес към математиката чрез разработване на проекти, прилагащи информационни технологии*. Пловдив.
- Дюи, Д. (2002). *Как мислим*. София: ИК Минерва.
- Здравка Паскалева, М. А. (2017). *Книга за ученика по математика за 6. клас*. София: Архимед.
- Иван Тонов, и. к. (2021). *Математика за 12. клас - Профилирана подготовка - Практическа математика Регалия 6 2021*. Регалия - 6.
- Иванов, И. П. (2005). Постмодерната образователна парадигма. От *Нова философия в образованието*. Шумен: Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“.
- ИИО. (2019). *Качество и равенство в училищното образование: поглед през резултатите от PISA 2018*. Извлечено от Институт за изследвания в образованието: <https://ire-bg.org/%D1%80%D0%B5%D0%B7%D1%83%D0%BB%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8pisa2018/>
- Йотовска, К. (2016). Релацията „Образователни парадигми – информационни и комуникационни технологии“ в контекста на електронното обучение. *Природните науки в образованието*.

ИМИ-БАН. (2013). *Образование по математика и информатика*. Извлечено от ИМИ - БАН: <http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/>

Катански, Ч. (2008). Ученето през целия живот като модерна образователна парадигма. *Bulgarian Journal of Science and Education Policy*.

Кендеров, П., & Чехларова, Т. (2021). *Подготовка за състезания по математика с компютър в 7. - 8. клас*. София: Тонедико.

Кирил Банков, И. Ц. (2021). *Математика 12. клас*. София: Просвета.

Кожухарова, Г. М., Ганчев, Г. К., & Делчев, М. Г. (2004). *Методика на педагогическите изследвания за студенти и учители*. Извлечено от Тракийски университет - Стара Загора – Център за електронни форми на дистанционно обучение: <https://edu.uni-sz.bg/book/22.dipku-gkojuharova-mdeltchev-ggantchev/22.DIPKU-GKojuharova-MDeltchev-Ggantchev-html/index.html>

Коста Коларов, П. П. (2013). *Сборник задачи по алгебра за 7. - 12. клас*. Добрич: Интеграл.

Кюркчийска, В. И. (2020). Иновативните образователни технологии в условия на приобщаващо образование. *Годишник на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“*. Шумен: Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“.

Лавренцова, Е. (2014). Ученето през целия живот като иновативна стратегия за развитие на образованието. *Педагогически форум*.

Маринова, В. (2011). Математически модели и моделиране в училищния курс по математика – дидактически аспекти и значение. *Педагогически алманах*, стр. 111-121.

Николова, Н. (2016). *ФМИ*. Извлечено от Проектно-изследователски подход при преподаването на информатика и ИТ: [https://www.fmi.uni-sofia.bg/sites/default/files/dissertation\\_work\\_of\\_phd/phdthesisnikolinanikolova.pdf](https://www.fmi.uni-sofia.bg/sites/default/files/dissertation_work_of_phd/phdthesisnikolinanikolova.pdf)

Паскалева, З., Алашка, М., & Алашка, Р. (2017). *Книга за ученика по математика за 6. клас*. София: Архимед.

Паскалева, З., Алашка, М., & Алашка, Р. (2018). *Книга за ученика – Математика 7. клас*. София: Архимед.

Петров, Ф. (2022). Приложение на изследователския подход в образованието по информатика чрез един популярен математически фокус (Нов поглед към стари идеи). *Математика и информатика*, 556-573.

Пойа, Д. (1972). *Как да се решава задача*. София: Народна просвета.

Сендова, Е. (2014). Изграждане на компетентности за моделиране чрез работа по проекти по математика и ИТ. София.

Славин, Р. (2004). *Педагогическа психология*. София: Наука и изкуство.

Събева-Колева, Н. (2010). *За мястото на математическото моделиране в училищния курс по математика*. (Т. Атанасова, Ред.) София, България: КТП.

Тонов, п. д.-р. (2012). *Евристиката – наука, изкуство, занаят (Монографичен труд)*. София.

Тонова, Т. (2012). *Когнитивни модели в обучението по математика на ученици от*

3 – 6 клас. София.

Тонова, Т., & Иванов, С. (2022). Пресечна точка. От Е. С. Филип Петров, *Математическото образование 75-годишна мисия и история* (стр. 142-149). София: Университетско издателство „Св. Климент Охридски“.

Тонова, Т., & Николова, Н. (2013). Информационните технологии в обучението по математика: средство за или бариера пред формирането на абстрактното мислене. *Математика и информатика*.

Тонова, Т., Златилов, В., & Цветкова, И. (2019). *Първа математическа читанка за 3. - 4. клас*. София: Труд.

Тонова, Т., Петрова, Д. (2019). Taxonomies and Technologies in Training (of Mathematics). *EDULEARN19 Proceedings*, (стр. 3786-3792).

Тоцева, Я. (2021). Интелигентната специализация – иновативна стратегия за регионална икономическа трансформация. *Reports Awarded with "Best Paper" Crystal Prize*, 303-308.

УЧИМИ. (2001). Извлечено от <http://www.math.bas.bg/omi/hssimi/>.

Фридман, М. Л. (1991). Относно методиката на обучение за решаване на физични задачи. *Научни трудове на ПУ „П. Хилендарски“*.

Чехларова, Т. (2014). *Разработване на система от практикоприложни задачи за формиране на ключови компетентности по математика*. Извлечено от РААБЕ: <https://btmdx1.mat.uni-bayreuth.de/kcm/data/Materials/BG/Learning%20environments%202.pdf>

Моденов, П. С. (1957). *Сборник задач по специалному курсу Элементарной математики*. Москва: Советская наука.

Albay, E. M. (2019). Analyzing the effects of the problem solving approach to the performance and attitude of first year university students. *Social Sciences & Humanities Open*.

Alenezi, D. F. (2008). *A Study of Learning Mathematics Related to some Cognitive Factors and to Attitudes*. Glasgow: University of Glasgow .

Amber Y. Wang, L. S. (2016). Cognitive and linguistic predictors of mathematical word problems with and without irrelevant information. *Learning and Individual Differences*, стр. 79-87.

Anderson, J. R. (2000). *Learning and memory: An integrated approach*. New York: John Wiley & Sons.

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman.

Anderson, L., Krathwohl, D., Airasian, P., Cruikshank, K., Mayer, R., Pintrich, P., . . . Wittrock, M. (2000). *A taxonomy for learning, teaching*. Boston: Allyn & Bacon.

Anthony, G. &. (2009). Characteristics of Effective Teaching of Mathematics: A View from the West. *Mathematics Education*, 147-164.

Appell, K. (н.д.). Lernziele im Mathematikunterricht. От *Didaktik der Mathematik*.

Awada, N., Belcher, P., Buchanan, L., Wathall, J. C., Duxbury, P., Forrest, J., . . . Torres-

- Skoumal, M. (2019). *Mathematics: Analysis and Approaches*. OXFORD: Oxford University Press.
- Azizah Ahmada, R. A. (2010). Visual Representations in Mathematical Word Problem Solving Among Form Four Students in Malacca. *International Conference on Mathematics Education Research 2010*. Elsevier Ltd.
- Baier, T. (1 May 2023 г.). *Abiturienten dürfen Taschenrechner nutzen*. Извлечено от Süddeutsche Zeitung: <https://www.sueddeutsche.de/bayern/bayerische-gymnasien-abiturienten-duerfen-taschenrechner-nutzen-1.2224262#:~:text=Im%20Fr%20C3%BCjahr%202017%20sollen%20die,Aufgaben%20ohne%20Taschenrechner%20zu%20l%C3%B6sen>.
- Baruk, S. (19 9 2016 г.). "No math" is an expression that I reject. (S. Ducatteau, Интервюиращ)
- Baruk, S. (1985). *L'Âge du capitaine – de l'erreur en mathématiques*. Paris: Seuil.
- Bednorz, D. (2020). *Sprachliche Variationen von mathematischen Textaufgaben*. Bielefeld: Springer Spektrum.
- Bergamini, M., & Barozzi, G. (2016). *Verso la seconda prova di matematica*. Begamini: Zanichelli.
- Bewertung der schriftlichen Ausarbeitung der 5. PK*. (2022). Извлечено от Sophie-Charlotte-Gymnasium: <https://scgberlin.de/wp-content/uploads/2021/01/BewertungsschriftlAusarbeitung5PK.pdf>
- Binkley, M. e. (2012). 21st century skills. От D. T.-F. Skills, *Assessment and Teaching of 21st Century Skills* (стр. 17-66). Dordrecht: Springer.
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer.
- Brownell, W. A. (1935). Psychological Considerations in the Learning and Teaching of Arithmetic. От W. D. Reeve, *The Teaching of Arithmetic*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cambridge. (1983). *SMP 11–16*. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge.
- Cheung, A. C., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 89-113.
- Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer.
- Commission, E. (1 5 2023 г.). *Приоритетни теми на ЕПО*. Извлечено от European Education Area: <https://education.ec.europa.eu/bg/focus-topics>
- Cornelsen. (2022). *Quadratische Funktionen*. Извлечено от Der Cornelsen Mathe Trainer: [http://www.mathe-trainer.de/Klasse9/Quadratische\\_Funktionen/Aufgabensammlung.htm](http://www.mathe-trainer.de/Klasse9/Quadratische_Funktionen/Aufgabensammlung.htm)
- Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. California: Thousand Oaks.

- Daniela Lucangeli, P. E. (1998). Cognitive and Metacognitive Abilities Involved in the Solution of Mathematical Word Problems: Validation of a Comprehensive Model. *Contemporary Educational Psychology*, 209-344.
- Diana Starja, B. S. (2019). Gifted and talented in mathematics do not only need hard work, but smart work as well. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 24-29.
- Dr. Gisela Beste, D. C. (2012). *Die fünfte Prüfungskomponente im Abitur*. Berlin: Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg.
- Duncker, K. (1945). *On Problem Solving. Psychological Monograph*.
- Eldridge, S. (2023). *Generation Alpha*. Извлечено от Britannica: <https://www.britannica.com/topic/Generation-Alpha>
- Ellis, M. W., & Berry, R. Q. (2005). The Paradigm Shift in Mathematics Education: Explanations and Implications of Reforming Conceptions of Teaching and Learning. *The Mathematics Educator*.
- Exploration, M. (2022). *Example 5: Student work*. Извлечено от Mathematics SL and HL teacher support material: [https://xmltwo.ibo.org/publications/DP/Group5/d\\_5\\_matsl\\_tsm\\_1205\\_1/pdf/example\\_05\\_annotations\\_e.pdf](https://xmltwo.ibo.org/publications/DP/Group5/d_5_matsl_tsm_1205_1/pdf/example_05_annotations_e.pdf)
- Exploration*. (2022). Извлечено от IB DP Mathematics SL: <http://kimkimsl.weebly.com/internal-assessment.html>
- Field, J. (2001). Lifelong education. *International Journal of Lifelong Education*.
- Filler, P. D. (2015). Anwendungen und Modellbildungen im Mathematikunterricht. Berlin.
- Francis, A. (н.д.). Great Belt Fixed Link, Denmark.
- Führer, L. (1991). *Pädagogik des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg.
- Fundus. (2020). *Schriftliche Abiturprüfung Mathematik 2019 und 2020*. Извлечено от Regierungspräsidien Baden-Württemberg Suchfunktion Suche MenüauswahlRegierungspräsidien Hauptmenü: [https://rp.baden-wuerttemberg.de/fileadmin/RP-Internet/Tuebingen/Abteilung\\_7/Fachberater/\\_DocumentLibraries/Documents/2019-Material\\_Abitur.pdf](https://rp.baden-wuerttemberg.de/fileadmin/RP-Internet/Tuebingen/Abteilung_7/Fachberater/_DocumentLibraries/Documents/2019-Material_Abitur.pdf)
- Gary L. Musser, W. F. (1988). *Mathematics for Elementary Teachers (A Contemporary Approach)*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. New Brunswick: Aldine Transaction.
- Gustafson, R. D., & Frisk, P. D. (1992). *Algebra for College Students*. Belmont: Brooks/Cole Publishing Company.
- Hammer, S. (2015). *Professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften im Umgang mit Aufgaben in der Unterrichtsplanung*. München: Ludwig-Maximilians-Universität.
- Humenberger, H. (1996). Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht – Ergebnisse empirischer Untersuchungen bei Schülern, Studenten und Lehrern. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*.

- Huß, W. (1985). *Geschichte der Karthager*. München: C. H. Beck.
- Islam, M. H. (2015). Thorndike Theory and its Application in Learning. *INZAH Online Journal*.
- Jarise Kaskens, E. S. (2020). Impact of Children's math self-concept, math self-efficacy, math anxiety, and teacher competencies on math development. *Teaching and Teacher Education*.
- Jarkko Hautala, O. L.-R. (2019). What information should I look for again? Attentional difficulties distracts reading of task assignments. *Learning and Individual Differences*.
- Jinfa Cai, F. L. (2010). Why Is Teaching With Problem Solving Important to Student Learning? *National Council of Teachers of Mathematics*.
- Jordan, R. (2011). *Entwicklung und Validierung eines Testverfahrens zur Ermittlung der Lesekompetenz und des mathematischen Textverständnisses mit empirischer Untersuchung an allgemeinbildenden und berufsbildenden Schulen*. Münster: WTMVerlag für wissenschaftliche Texte und Medien.
- Kahneman, D. (2011). *Thinking, Fast and Slow*. Farrar, Straus and Giroux.
- Keller, I. (2013). *DocPlayer*. Извлечено от <https://docplayer.org/128325167-Uebungsbeispiele-zu-linearen-und-quadratischen-funktionen-quadratische-gleichungen.html>
- Keller, I. (2022). *DocPlayer*. Извлечено от <https://docplayer.org/128325167-Uebungsbeispiele-zu-linearen-und-quadratischen-funktionen-quadratische-gleichungen.html>
- King, A., Smith, A., & Goldie, S. (2016). *Edexcel International GCSE (9-1) Mathematics Student*. Hodder Education.
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*. Leipzig: B. G. Teubner, Leipzig.
- Kozlowski, J. S., Chamberlin, S. A., & Mann, E. (2019). Factors that Influence Mathematical Creativity. *The Mathematics Enthusiast*.
- Krumpal, I. (2013). Determinants of social desirability bias in sensitive surveys: A literature review. *Quality & Quantity: International Journal of Methodology*, 2025–2047.
- Lee, D. K. (2022). *A Guide to Writing Mathematics*. Извлечено от Mr. Urbanc's Classroom: [https://mrurbanc.weebly.com/uploads/4/4/2/6/44267585/lees\\_guide\\_to\\_writing\\_mathematics.pdf](https://mrurbanc.weebly.com/uploads/4/4/2/6/44267585/lees_guide_to_writing_mathematics.pdf)
- Leisen, J. (2006). Ein Sachtext – Zehn Strategien zur Bearbeitung von Sachtexten. *Naturwissenschaften im Unterricht. – Physik*.
- Lester, F. K. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Sever. Classes. Final Report*. Washington: National Science Foundation.
- Lester, F. K. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. От R. L. Doerr, *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah: Erlbaum.
- Lester, F. K. (2013). Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving

Instruction. *The Mathematics Enthusiast*.

LEUDERS, T. (2003). *Mathematik Didaktik*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology*.

Lindquist, M. M. (1989). Results from the Fourth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress. *National Council of Teachers of Mathematics*. Reston.

Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., & Cendron, M. (1998). Cognitive and Metacognitive Abilities Involved in the Solution of Mathematical Word Problems: Validation of a Comprehensive Model. *Contemporary Educational Psychology*, 257-275.

Maier, H., & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache*. Vien: öbv.

Mathematik, I. f. (2023). *Känguru-Wettbewerb 2023*. Извлечено от Känguru der Mathematik: <https://www.mathe-kaenguru.de/chronik/ergebnisse/downloads/ergebnisse2023.pdf>

MeKenna, F. P. (1984). Measure of field-dependence: cognitive style or cognitive ability? *Journal of Sociology and Social Psychology*.

Munem, M. A., & Foulis, D. (1986). *College Algebra with Applications*. New York: Worth Publishers, Inc.

Oberstufe, G. (2017). *Mathematik 1*. Brandenburg: Cornelsen.

öbv. (2013). *Mach mit Mathematik 4*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Ostwald, I. (Март 2020 г.). *Übungen zu quadratischen Funktionen*. Извлечено от scoogle: [www.scoogle.de/start.php?id=83104](http://www.scoogle.de/start.php?id=83104)

Piaget, J. (1970). *Science of education and the psychology of the child*. New York: Viking.

PISA. (2023). Извлечено от PISA: <https://www.oecd.org/pisa/>

Poincaré, H. (1914). *Science and Method*. London & New York: T. Nelson and Sons.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. Wiley: John Wiley & Sons.

Rachel Wing DiMatteo, F. K. (2010). The Role of Problem Solving in the Secondary School Mathematics Classroom. От R. & Dimatteo, *Teaching and Learning Mathematics*. NCTM.

Rambe, R. N. (2017). The Effect Of Scanning Technique On Students Reading Comprehension In Narrative Text. *Usia Dini*.

Richard Feynman, R. L. (1985). *"Surely You're Joking, Mr. Feynman!": Adventures of a Curious Character*. New York: W.W. Norton.

Riding, R. &. (1991). Cognitive Styles - an overview and integration. *Educational Psychology*.

Riding, R. &. (1998). *Cognitive Styles and Learning Strategies. Understanding Style Differences in learning and Behaviour*. London: David Fulton Publishers.

Robinson, S. K., & Robinson, K. (2022). What Is Education For? *Edutopia*.

Sadler-Smith, E. (2015). Wallas' four-stage model of the creative process: More than meets the eye? *Creativity Research Journal*.

SAT. (2022). Извлечено от



<https://www.interactive.onlinemathlearning.com/share/cb/sat/2022-Oct-SAT-QAS.pdf>

Schoenfeld, A. (1990). *A Source Book for College Mathematics Teaching*. Washington: Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. От D. Grouws, *NCTM Handbook of research on mathematics teaching and learning* Publisher: Macmillan. Berkeley: Macmillan.

Shavelson, R. J. (2010). On the measurement of competency. *Empirical Research in Vocational Education and Training*, 44.

Siegener, *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik*.

SINUS.NRW. (2018). *Materialien zum Mathematikunterricht*. Извлечено от Schulentwicklung:

[https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front\\_content.php?idcat=3818&lang=9](https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idcat=3818&lang=9)

Sternberg, R. J., & Sternberg, K. (2011). *Cognitive Psychology*. Wadsworth: Cengage Learning.

Suherman, S., & Vidákovich, T. (2022). Assessment of mathematical creative thinking: A systematic review. *Thinking Skills and Creativity*.

Swanson, H. L.-F. (2004). The relationship between working memory and mathematical problem-solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 471–491.

Thorndike, E. L. (1911). *Animal intelligence: Experimental studies*. New York: THE MACMILLAN COMPANY.

Thorndike, E. L. (1929). *The Psychology of Arithmetic*. New York: THE MACMILLAN COMPANY.

Tulis, M. (2010). *Individualisierung im Fach Mathematik. Effekte auf Leistung und Emotionen*. LOGOS Verlag: Berlin.

UNESCO. (11 05 2023 r.). *What you need to know about literacy*. Извлечено от UNESCO: <https://www.unesco.org/en/literacy/need-know#:~:text=Literacy%20is%20a%20continuum%20of,well%20as%20job%2Dspecific%20skills>.

UNESCO. (2003). *Literacy, a UNESCO perspective*. Извлечено от UNESCO: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000131817?posInSet=2&queryId=9c9b61a9-6466-4fac-a902-23375cd34df3>

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Wagemann, E. B. (1994). *Bausteine zu einer Methodik des Mathematikunterrichts*. Gießen.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. London: Jonathan Cape.

Wilhelm, N. (2016). *Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und Bearbeitung mathematischer Textaufgaben*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wolf, M. (2018). Skim reading is the new normal. The effect on society is profound. *The Guardian*.

Yeo, J. B. (2017). Development of a framework to characterise the openness of mathematical tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 175-191.

## Документи

Европейска Комисия. (2009). *Европейската квалификационна рамка за учене през целия живот (ЕКР)*. Люксембург: Служба за официални публикации на Европейските общности.

ЕСЕТ. (28 5 2009 г.). Заключение на Съвета от 12 май 2009 г. относно стратегическа рамка за европейско сътрудничество в областта на образованието и обучението („ЕСЕТ 2020 г.“). *Официален вестник на Европейския съюз*, стр. 119/9.

Съвет на Европейския съюз, О. (4 6 2018 г.). *Препоръка на Съвета от 22 май 2018 година относно ключовите компетентности за учене през целия живот*.

Извлечено от Официален вестник на Европейския съюз: [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/BG/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)&from=G](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/BG/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=G)

DigComp. (1 5 2023 г.). DigComp Framework. Изтеглено на 01 05 2023 г. от EU Science Hub: [https://joint-research-centre.ec.europa.eu/digcomp/digital-competence-framework\\_en#ref-1-information-and-data-literacy](https://joint-research-centre.ec.europa.eu/digcomp/digital-competence-framework_en#ref-1-information-and-data-literacy)

Directorate-General for Education, Y. S. (Май 2023 г.). The EU in support of the Bologna process. Изтеглено на 01 05 2023 г. от An official website of the European Union: <https://op.europa.eu/en/publication-detail/-/publication/e437d57d-5e32-11e8-ab9c-01aa75ed71a1>

Eurydice. (2022). Eurydice. Извлечено от Eurydice: <https://eurydice.eacea.ec.europa.eu/national-education-systems/bulgaria/overview>

## Програми

МОН. (1 5 2020 г.). *Учебни програми за профилирана подготовка*. Извлечено от МОН: [https://web.mon.bg/upload/16252/UP\\_XI\\_%D0%9Cath.pdf](https://web.mon.bg/upload/16252/UP_XI_%D0%9Cath.pdf)

МОН. (11 3 2021 г.). *Стратегически документи*. Извлечено от Министерство на образованието и науката: [https://www.mon.bg/upload/25571/Strategicheska-ramka\\_ObrObuUchene\\_110321.pdf](https://www.mon.bg/upload/25571/Strategicheska-ramka_ObrObuUchene_110321.pdf)

МОН. (2022). *МОН*. Извлечено от Изпитни материали за ДЗИ - 2022 г.: [https://web.mon.bg/upload/32866/2DZI\\_MATEMATIKA.pdf](https://web.mon.bg/upload/32866/2DZI_MATEMATIKA.pdf)

МОН. (22 12 2020 г.). *Учебни програми за IX клас*. Извлечено от МОН: [https://web.mon.bg/upload/12233/UP\\_Math\\_9kl.pdf](https://web.mon.bg/upload/12233/UP_Math_9kl.pdf)

МОН. (Май 2017 г.). *Учебни планове и програми по класове*. Извлечено от МОН: <https://web.mon.bg/bg/28>

МОН. (н.д.). *НВО за X клас*. Извлечено от МОН: [https://web.mon.bg/upload/26733/NVO-MATH\\_10kl\\_18062021.pdf](https://web.mon.bg/upload/26733/NVO-MATH_10kl_18062021.pdf)

## Интернет сайтове и дигитални приложения

Академия „Атлантида“: <https://www.atlantida.bg/>

Курсове НПМГ: <https://kurseve-npmg.com/>

Образователен Център „Да Винчи“: <https://davincikids.eu/home>

Образователен център „Междучасие“: <http://mejduchasie.com/>

ПЧМГ: <https://parvamatematcheska.com/>

СМГ учители: <https://smgood.bg/>

Образователни технологии: <https://www.edutech.bg/activities/produkti-za-uchenici/7th-grade/kurseve-7-mat/>

Учебен център „Лого 3“: <https://logo-3.com/>

Учебен център „Регалия“: <https://www.regalia6.com/>

Школа Веди: <https://www.vedi.bg/>

Математически звезди: <https://www.academy21century.com/>

Математика без граници: <https://www.mathematicalmail.com/>

Софийски математически турнир за малки таланти: <https://childrens-academy-bg.com/index.php?page=sofia-math>

Ключът към знанието: <https://www.sicademy.bg/>

Учебен център Милениум: <https://www.uchebencentarmillenium.com/>

EasyMath: <https://easymath.bg/>

Уча.се: <https://ucha.se/>

KhanAcademy: <https://bg.khanacademy.org/>

domashno.bg: <https://domashno.bg/>

VivaCognita: <http://vivacognita.org/>

CamScanner: <https://www.camscanner.com/>

ChatGPT: <https://chat.openai.com/chat>

desmos: <https://www.desmos.com/>

Jotform: <https://eu.jotform.com/>

GeoGebra: <https://www.geogebra.org/calculator>

OpenAI: <https://openai.com/>

Perplexity: <https://www.perplexity.ai>

Photomath: <https://photomath.com/e>

## Изображения

Пловдив, Перушица още пази тайните на Духова могила и шестнадесетте заровени колесници. Извлечено от PlovdivNow.bg: <https://plovdivnow.bg/obshtina-perushtica/perushtitsa-oshte-pazi-tainite-duhova-mogila-i-6032>

ID 92759453 © Gurinaleksandr | Dreamstime.com