(2.18)

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

На правах рукописи

Ив. ГАНЧЕВ

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СОВРЕМЕННОЙ ЛОГИКИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Научные руководители:
доц. П. Иванов (Болгария),
ст. науч. сотрудник А. И. Фетисов (СССР)

МОСКВА — 1967

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

На многоуважаемия ми преподавател проф. А. Матеев. От автора
13 XI 1967 г.
София.

На правах рукописи

Ив. ГАНЧЕВ

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СОВРЕМЕННОЙ ЛОГИКИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук

Научные руководители:
доц. П. Иванов (Болгария),
ст. научный сотрудник А. И. Фетисов (СССР)

МОСКВА — 1967

Современное развитие производительных сил и быстрое развитие технического прогресса ставят все большие требования к научной, в частности, к математической квалификации людей. Это со своей стороны ставит новые задачи перед обучением математике, и выдвигает требования более настойчиво искать причины недостатков в нынешнем обучении, чтобы устранить их. Изученная литература и проведенные нами исследования позволили нам прийти к выводу, что одна из основных задач обучения математике — овладение фактическими знаниями относительно разных математических понятий (отношения и объекты) — неразрывно связана с формированием умений оперировать над ними. Однако наши наблюдения показали, что в значительной степени все трудности и неудачи, которые существуют в обучении математике, связаны с неумением учащихся самостоятельно действовать с полученными знаниями на данном этапе обучения, что очень затрудняет получение ими новых знаний. Со знаниями же, плохо усвоенными на следующем этапе обучения, ученики действуют еще хуже и т. д.

Основной деятельностью в обучении математике является та, которую мы обозначаем словами «процесс решения задач» *. До сих пор, однако, в методике обучения математике недостаточно последовательно и углубленно разработаны вопросы, связанные как с этой, так и с другими деятельностями, которые выполняют учащиеся. По этой причине не ведется достаточно целенаправленная работа по обучению действиям. А человек может выполнять ту или иную деятельность после того, как его обучали этой деятельности. В жизни человеку приходится выполнять большое число самых разнообразных видов деятельности, и мы не в силах обучить его каждой из них. По этой причине к обучению предъявляется требование о том, что его целью, а отсюда, и продуктом должно быть не только умение выполнять данную конкретную деятельность, но и способность строить различные деятельности определенных типов на основе знаний о тех объектах, с которыми связаны эти деятельности. Так как процесс решения математических задач является частным случаем деятельности, только что высказанная мысль вполне относится и к нему, и может быть высказана так: целью обучения решению задач, а отсюда и продуктом обучения должно быть не только умение решать определенные конкретные задачи, но и способность строить различные новые виды деятельности при решении задач определенных типов на основе знаний о структуре их решения.

---

* Сюда включаем и доказывание теорем.

Чтобы была достигнута эта цель нужно: во-первых, знать структуру решения математических задач, абстрагированную от конкретных задач, т. е. нужно знать «что такое решение математической задачи вообще» и, во-вторых, нужно знать, как зависит деятельность, посредством которой открывается это решение (процесс решения), от самой его структуры.

До сих пор в учебниках по методике математики эти два вопроса не рассматриваются достаточно последовательно. Обычно говорится о решении задач, но ничего не говорится о том, «что такое решение задач», а следовательно, и не дается информация, необходимая для получения последовательных выводов при обучении деятельности, посредством которой конструируется решение. Наоборот, каждый автор дает свою рекомендацию, продиктованную иногда случайными факторами, и по этой причине часто возникают ненужные споры. Оказывается, что и в процессе решения задач присутствуют объективные сущности, познание которых дает возможность уменьшить влияние субъективного фактора, т. е. личных взглядов методиста, приводящих к недопустимо неадэкватному описанию самого процесса.

При рассмотрении решений математических задач, в конце концов дело сводится к логике, так как в решении каждой задачи используются различные высказывания или логические функции и операции над ними, а также и различные правила вывода, которые являются объектом изучения логики. Поэтому для успешного ответа на многие проблемы, связанные с решением и процессом решения задач, необходимо использовать, кроме психологии, еще и логику. Однако, в традиционной логике рассматривается слишком ограниченный круг вопросов, значение которых для современной методики обучения математике ограниченно. Очень широкий круг вопросов, связанных с высказываниями, рассматривается в современной логике. Часть из этих вопросов и установленные в связи с ними понятия оказываются очень полезными при объяснении в доступной для учащихся форме некоторых рассуждений в процессе решения задач еще в начале изучения систематического курса математики. Речь идет о знакомстве учащихся со смыслом слов «и», «или», «не», «следует» и др. Знание смысла этих слов позволяет выявить логическую структуру признаков понятий, которые даются в определениях и в соответствующих им теоремах. Однако, надо отметить, что смысл употребления большинства из этих слов в обычной жизни определен неоднозначно. А отсутствие однозначно-уточненного смысла слов и соблюдения правил стилистики часто является причиной того, что в процессе решения задач вместо объяснения точно определенных логических операций, на основании которых решение определенной задачи сводится к решению других задач, высказываются другие предложения, посредством которых только показывается, что сделано. Это особенно хорошо видно в ныне действующих учебниках по алгебре. Однако, невозможно дать учащимся все необходимые логические знания еще в восьмилетке, когда лишь впервые появляется необходимость их использовать. Более углубленное изучение математики в IX — XI классах, по нашему мнению, делает необходимым ознакомление учащихся и с некоторыми начальными вопросами символической логики. Это и составляет, вообще говоря, объект нашего диссертационного исследования. Конкретно, основную цель исследования мы могли бы сформулировать следующим образом:

Усовершенствовать методы и содержание обучения по математике в средних школах на основе некоторых понятий современной логики.

Из этой общей проблемы в диссертации сделана попытка разработать следующие вопросы:

1. Выяснение сущности математических задач и логической структуры их решения с точки зрения формирования умений решать математические задачи и формирования представлений учащихся о дедуктивной структуре математики.

2. Уточнение места и роли логических терминов «и», «или», «следует» и «не» при формировании умения решать задачи в начале изучения систематического курса математики.

3. Уточнение места и роли некоторых понятий и символики математической логики, необходимых для повышения эффективности обучения математике в старших классах средней школы, и разработка учебных материалов, предназначенных для ознакомления учащихся с этими понятиями.

4. Разработка для внеклассных форм работы примерной системы вопросов из Булевой алгебры и математической логики, которая является продолжением логической подготовки, полученной в классе.

5. Экспериментальная проверка возможностей учащихся в усвоении предлагаемых нами логических понятий и их пользы для обучения математике, а также проверка предлагаемой нами методики формирования умения решать математические задачи.

Исследование этих задач базируется на изучении обширной литературы по математике, логике, психологии и методике, на личном опыте преподавания математики и элементов математической логики в средней школе, на личном опыте в проведении упражнений по элементарной геометрии и методике математики со студентами последних курсов, а также на изучении и обобщении достижений передовых учителей-математиков.

В своей работе мы использовали следующие методы исследования: наблюдение, экспериментальная работа, анализ проведенного эксперимента, сравнение эффективности предлагаемых нами методов с традиционными методами и теоретическое обобщение.

Диссертация содержит введение, четыре главы, выводы и предложения и библиографию. Кроме того, к диссертации даны три приложения.

Во введении обоснована необходимость разработки темы диссертации, сформулированы задачи исследования и указаны источники, которые использованы в работе.

Библиография содержит 115 заглавий, 26 из которых на болгарском языке, а остальные на русском, французском, польском и других языках.

Приложения, которые оформлены в отдельной книге, содержат тексты почти всех экспериментальных материалов, составленных нами и использованных в работе.

Основное содержание диссертации распределено в 14 параграфах, которые излагаются в следующих четырех главах:

Глава первая. Сущность математических задач и логическая структура их решения.

Глава вторая. Применение выявленной логической структуры решений математических задач в решении некоторых методических вопросов .

Глава третья. Повышение логической культуры учащихся VII и VIII классов.

Глава четвертая. Повышение логической культуры учащихся старших классов.

В первой главе диссертации раскрывается сущность математических задач и структура их решений. Используя некоторые идеи чехословацкого математика Яна Вишина, в основу определений соответственных понятий положены понятия множества и отношения между множествами. В § 1 каждая математическая задача рассматривается как последовательность мыслей, посредством которых задается описательно подмножество R данного множества M математических об'ектов или отношений, и требуется:

а) Задать R конструктивно, если оно конечное; или б) установить, что R есть подмножество уже заданного посредством определений подмножества множества M; или в) показать, что объекты R можно получить посредством каких-то определенных правил; или г) показать, что множество R совпадает с некоторым множеством R', которое принимаем как известное или более удобное.

* Эти способы задания множества R мы называем коротко «требуемое задание множества R» или «требуемый вид задания множества R».

Множество M называется областью решения задачи.

Подмножество R множества M называется системой решения (ответ) задачи.

Например, в задаче «Построить треугольник, если даны угол γ, сторона c и радиус выписанной окружности r» множество M состоит из всех треугольников плоскости, а множество R состоит из треугольников, соответственные элементы которых равны элементам γ, c и r. В задаче «Длина сторон треугольника ABC суть: $AB=10$ *см*, $BC=8$ *см* и $AC=12$ *см*. На стороне AC, как на диаметре, построена полуокружность, которая пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N. Найти площадь четырехугольника $AMNC$» множество M — это множество реальных чисел, а множество R состоит из одного числа $\frac{945\sqrt{7}}{64}$.

Последовательность слов обычного языка и символов, выражающих мысли, посредством которых задается множество M и свойства объектов подмножества R, и требуется соответственное задание R, называется *текстом задачи.*

Деятельность, посредством которой из данного в тексте задачи R, достигается требуемого его задания, называется *процессом решения задачи.*

В процессе решения каждой задачи фактически меняются последовательно способы описательного задания R, т. е. задача заменяется другими задачами, пока будет достигнуто требуемое его задание.

Говорят, что данная задача решена, если посредством конечной последовательности описательных заданий R, получено требуемое его задание.

В сущности, когда решаем произвольную математическую задачу, мы всегда рассматриваем не только способы непосредственного задания множества R, но и способы задания некоторых других множеств R_k, которые позволяют потом получить требуемое задание R.

Последовательность способов описательных заданий R и R_k до получения требуемых их заданий называется *решением задачи.*

Надо заметить, что последовательность способов задания каждого R_k тоже является решением какой-то задачи. Кроме того, последовательность способов задания R и R_k не всегда единственны.

Поэтому можно сказать, что каждое решение математической задачи состоит из конечного числа так упорядоченных решений других задач, каждое из которых содержит перед ним стоящие решения других задач, или аксиомы, или определения понятий.

Задачи, решения которых содержатся в решении данной задачи, коротко мы называем задачи-составки этой задачи.

Обозначим через A_n решение определенной задачи Z_n, а через $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$, последовательно соответственно высказывания, истинность которых дана в условии* Z_n, аксиомы и определения, встречающиеся в A_n, и решения задач-составок задачи Z_n. Наглядно отношения между $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots A_{n-1}, A_n$ можно выразить посредством широко применяемых в традиционной логике и алгебре множеств кругов Эйлера или диаграмм Венна, сопоставляя каждому A_k круг (диаграмму).

В зависимости от характера объектов или отношений, принадлежащих M, и в зависимости от способов задания объектов или отношений, принадлежащих R, рассматриваемые в систематическом курсе в средней школе математические задачи делятся на три основных типа: на вычисление, на доказательство и на построение.

В задачах на вычисление M есть определенное множество реальных чисел, а искомое его подмножество R не задано предварительно в требуемом виде. В этих задачах часто множество M не указано явно, а подразумевается.

В задачах на доказательство M есть определенное множество математических объектов или отношений, а искомое его подмножество R задано в требуемом виде, но не указана последовательность способов его описательного задания, посредством которой достигается это требуемое его задание.

В задачах на построение в плоскости множество M состоит из каких-то определенных геометрических объектов (фигур) в плоскости, а способы задания R даются так: Геометрические объекты, которые связаны со свойствами объектов, принадлежащих R, рассматриваются как определенное множество G и называются *данными* объектами. Потом указываются правила, посредством которых к G можно присоединять новые элементы. Эти правила характеризуют в абстрактно-логической форме определенный чертежный инструмент или группу инструментов, которая рассматривается как один инструмент. Принимают, что посредством этих правил даются в требуемом виде некоторые множества R_k геометрических объектов, которые заданы описательно посредством соответственных задач, называемых основными. Множество геометрических объектов, заданное описательно посредством произвольной другой задачи, принимается заданным в требуемом виде, если показано, что его объекты можно присоединить к объектам G посредством конечного числа применений этих правил.

Когда математика оформлялась как дедуктивная наука, большая часть из задач на доказательстве выделились как основные и постепенно впоследствии при решении других задач, которым они являются составками, использовались прямо, как установленные утверждения, с готовыми результатами, без изложения их решения. Это теоремы обязательного курса различных математических дисциплин. Таким способом решения задач становятся более короткими и сжатыми; устраняется повторение доказательства теорем. То же самое относится и к задачам на построение. При решении этих задач, однако, в практике используются очень мало задач в «готовом виде».

Вот, например, решение одной задачи на построение, которое записано в несколько необычной форме, с целью показать лучше его структуру.

Задача: Построить треугольник ABC, если даны угол γ, сторона c и радиус r вписанной окружности $k(0;\ r)$.

Решение:

1. $\sphericalangle AOB = 180° - \left(\frac{\sphericalangle A}{2} + \frac{\sphericalangle B}{2}\right) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° + \frac{\gamma}{2}$.

Строим

2. $\Delta ABO \begin{cases} AB = c \\ \sphericalangle AOB = 90° + \frac{\gamma}{2} \\ h_0 = r. \end{cases}$

3. $k(0;\ r)$.

4. $t_1 \ni A$ — касательная к окружности k.

5. $t_2 \ni B$ — касательная к окружности k.

6. $C = t_1 \times t_2$.

Решение этой задачи не единственное, или как говорят, эту задачу можно решить и другими способами. Однако этот вопрос мы не рассматриваем. Для нас важно, что это решение является совокупностью конечного числа так упорядоченных решений других задач, что каждое из них содержит стоящие перед ним решения.

* Подчеркиваем, что здесь под условием задачи подразумеваем не ее текст, а то, что дано о соответственных объектах и отношениях.

В самом деле решение этой задачи содержит решение задачи «Построить треугольник, если даны сторона, угол лежащий против этой стороны, и высота через вершину данного угла», а решение этой задачи со своей стороны содержит решение задачи «Построить геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом». Решение последней задачи содержит решение задачи для нахождения угла AOB и т. д.

В указанном выше описании задач и их решений нас интересовали прежде всего множества объектов, которые задаются задачей, а в явном виде мы почти не обращали внимания на способы связывания высказываний, с помощью которых задаются эти множества. Так же не обращали внимания и на правила вывода, на основании которых устанавливается истинность соответственных высказываний. Чтобы учесть и это, в § 2 диссертации показано, что в зависимости от того, рассматривается ли в задачах-составках некоторое другое задание множества R или некоторых других множеств для задач-составок существуют следующие возможности:

1. Иметь одну и ту же область решения с основной задачей и определять то же самое множество R. В таком случае говорят, что каждая задача-составка эквивалентна с основной задачей. В школьном курсе математики типичным примером эквивалентных задач являются эквивалентные уравнения (логические функции).

2. Задают R или некоторое его надмножество R_i, т. е. выполнена зависимость $R \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \ldots \subseteq R_i \subseteq \ldots \subseteq R_s$. Когда $R \subset R_i$, задача, с помощью которой задается R_i называется следствием задачи, задающей R. В школьном курсе по математике типичным примером задач-следствий являются уравнения получаемых посредством возвышения в какую-то степень двух частей данного уравнения.

3. Задают различные подмножества множества R.

4. Задают другие множества, которые потом позволяют получить требуемое задание множества R.

Последние два случая встречаются очень часто, например, при геометрических задачах на вычисление и на построение.

В решениях большинства задач фактически эти четыре случая встречаются одновременно, но чтобы смогли лучше показать общее в решениях различных задач, мы рассматриваем отдельно задачи, составки которых бывают только первого или второго типа, а потом останавливаемся на остальных задачах.

Когда решаются задачи первого типа, последовательно открываются эквивалентные им задачи-составки, пока будет достигнута такая задача, система решений которой известна. Так, например, чтобы решить уравнение (неравенство) B_0, последовательно открываются (получаются) уравнения (неравенства) $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ такие, что

$$B_0 \approx B_1,\ B_1 \approx B_2,\ B_2 \approx B_3,\ \ldots,\ B_{k-1} \approx B_k,$$

где B_k — уравнение (неравенство), корни которого известны.

Тогда на основании правила

$$(1)\qquad \frac{A_0 \longleftrightarrow B_1,\ B_1 \longleftrightarrow B_2,\ B_2 \longleftrightarrow B_3,\ \ldots,\ B_{k-1} \longleftrightarrow B_k}{B_0 \longleftrightarrow B_k}$$

следует эквивалентность $B_0 \approx B_k$.

Здесь истинность каждой двойной импликации

$$B_0 \longleftrightarrow B_1,\ B_1 \longleftrightarrow B_2,\ B_2 \longleftrightarrow B_3,\ \ldots,\ B_{k-1} \longleftrightarrow B_k$$

следует из некоторых теорем об эквивалентности двух уравнений (неравенств), так как уравнение (неравенство) B_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ получается из B_{i-1} на основании некоторой из этих теорем. Так как нас интересует система решений B_0, а $B_0 \approx B_k$, то система решений B_k есть система решения и B_0.

Рассмотрим $B_0 \longleftrightarrow B_1$ и $B_1 \longleftrightarrow B_2$. На основании правила

$$\frac{B_0 \longleftrightarrow B_1,\ B_1 \longleftrightarrow B_2}{B_0 \longleftrightarrow B_2}$$

получаем $B_0 \approx B_2$.

Аналогичным способом из

$$\frac{B_{k-3} \longleftrightarrow B_{k-2},\ B_{k-2} \longleftrightarrow B_{k-1},\ B_{k-1} \longleftrightarrow B_k}{B_{k-3} \longleftrightarrow B_k}$$

получаем $B_{k-3} \approx B_k$.

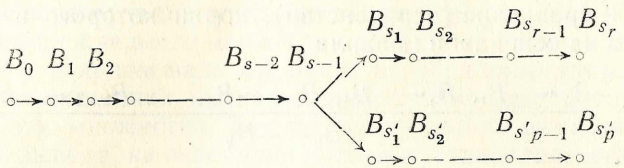
Тогда решение задачи, записанное с (1), можно записать и так

$$\frac{B_0 \longleftrightarrow B_2,\ B_2 \longleftrightarrow B_3,\ \ldots,\ B_{k-3} \longleftrightarrow B_k}{B_0 \longleftrightarrow B_k}.$$

Понятно, что запись этого решения будет иметь четыре двойных импликации — меньше по сравнению с первым.

Сказанное выше относится только к таким последовательностям эквивалентностей уравнений (неравенств), у которых для всех i, B_i не является конъюнкцией или дизъюнкцией других уравнений или неравенств.

Дальше в диссертации аналогичным способом рассматривается случай, когда некоторое B_s имеет вид $B_{s_i} \vee B_{s'_i}$. Структура решения этого типа задач (когда только одно B_s является дизъюнкцией), видна хорошо из следующей схемы:



Решения этого вида мы назвали решениями с разветвленными последовательностями эквивалентностей уравнений.

Потом показано, что все особенности решений задач второго типа являются аналогичными особенностям решений первого типа, только с той разницей, что некоторые из двойных импликаций заменяются простыми импликациями. Таким образом задачи первого типа можно рассматривать как частный случай задач второго типа, в решениях которых все пары задач B_r, B_{r+1} эквивалентны между собой.

Чтобы показать логическую структуру задач третьего и четвертого типа, в диссертации далее показано, что все задачи, в которых даются некоторые свойства объектов подмножества R множества M и требуется соответственное задание R, можно выразить только с высказываниями в условной форме. Действительно:

1. Задачи-теоремы могут быть выражены предложениями следующего типа: «Дано... Доказать....». На месте многоточия в первом предложении указываются данные свойства множества R, называемых условием теоремы, а на месте многоточия во втором предложении указываются те свойства множества R, называемые заключением, посредством которых осуществляется его требуемое задание. Принято каждую теорему такого типа выражать и в условной форме «Если..., то...», подставляя на месте первого многоточия условие теоремы, а на месте второго многоточия — ее заключение.

2. Задачи на построение можно выразить аналогичными предложениями вида: «Дано... Построить...». Принимается, что то же самое выражает и условная форма «Если дано (даны)..., то ... построимы (построемые)». Если данные элементы

рассматриваем как построимые*, то задачи этого типа могли бы быть выражены в условной форме «Если ... построимы (построимые), то ... построимы (построимые)».

3. Наконец, и задачи на вычисление можно выразить предложениями вида: «Дано... Вычислить (найти)...». И здесь, если данные элементы рассматриваем как определимые **), принимаем, что задачи этого типа можно выразить в условной форме «Если ... определимы (определимые), то ... определимы (определимые)».

Следовательно задачи рассматриваемых типов можем записать символически посредством импликации $p \to q$ и требование решить такую задачу означает требовать доказать истинность этой импликации. Таким образом мы пришли к немного странному, на первый взгляд, выводу, что можно рассматривать задачи на вычисление и задачи на построение как задачи — теоремы. В сущности здесь нет ничего удивительного потому, что, построив данную фигуру, мы фактически доказываем, что она построима при данных элементах. Также получив меру геометрического объекта, или значение параметра в уравнении, или числовое значение выражения и т. д. мы доказываем, что они определимы при соответственных данных. Такая точка зрения, как увидим, значительно поможет нам в дальнейшем.

Рассмотрим теоремы вида «p тогда и только тогда, когда q» (Чтобы было истино p, необходимо и достаточно, чтобы было истино q). Известно, что таким способом сразу высказывают две одновременно верные взаимно-обратные теоремы

$$p \to q \quad \text{и} \quad q \to p.$$

Следовательно, посредством теорем этого типа выражаются две импликации и при их доказывании устанавливается истинность обеих импликаций поотдельно. К этому типу принадлежат специально и теоремы о равносильности уравнений и неравенств.

Наконец, показано, что решение одной части из задач, посредством которых утверждается, что объем данного понятия

---

* В литературе часто поступают и повидимому обратно: с момента, когда показано, что определенный геометрический объект построим, он рассматривается как данный. Понятно, что в сущности речь идет об одном и том же, только разменяются термины. Мы считаем, что эта условность, по крайней мере не меньше интуитивно, более приемлема, чем первая. А одинаковость высказываний является необходимой, чтобы было возможно дальше перейти к символической записи.

** Случай аналогичен этому при задачах на построение. Вместо «определимы» мы будем говорить еще «известны», называя известный элемент тот, который дан или выражен посредством данных.

не пустое множество, встречающееся очень редко в школьном обучении, в конце концов тоже сводится к установлению истинности некоторой импликации. Поэтому дальше рассматриваются разные способы доказывания истинности импликации $p \to q$, а именно:

Чтобы доказать, что $v(p \to q) = 1$, достаточно, как известно, доказать, что $v(p) = 0$. Также достаточно доказать, что $v(q) = 1$, потому что в этом случае тоже $v(p \to q) = 1$. Однако в практике эти два случая почти не встречаются. Чаще всего встречаемые случаи те, при которых сначала открываются несколько промежуточных импликаций

$$p \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ \ldots,\ p_k \to q,$$

которые суть истинные высказывания, а потом на их основании доказывается истинность импликации $p \to q$. Кроме того, встречаются и такие случаи, при которых используется одна из следующих эквивалентностей:

$$p \to q \approx \neg q \to \neg q,$$

$$p \to q \approx \neg q \wedge p \to \neg p,$$

$$p \to q \approx \neg q \wedge p \to q \text{ и}$$

$$p \to q \approx \neg q \wedge p \to r \wedge \neg r,$$

т. е. такие, где применяется так называемый «метод от противного».

Как видим, второй из этих двух случаев сводится тоже к доказыванию истинности некоторой импликации. А истинность этой импликации устанавливается путем использования других промежуточных импликаций. Таким образом, и этот случай сводится к первому. Следовательно, достаточно рассмотреть только первый случай.

При первом случае существуют следующие две возможности:

1. В последовательности импликаций

$$p \to p_1,\ p_1 \to p_2, p_2 \to p_3,\ \ldots,\ p_k \to q$$

высказывание $p_i, (1 \leqslant i \leqslant k)$, которое является следствием в импликации с номером i и основанием в импликации с номером $i+1$ есть простое высказывание. Такую последовательность импликаций назовем *линейной*.

2. В последовательности импликаций $p \to p_1$, $p_1 \to p_2$, $p_2 \to p_3$, ..., $p_k \to q$ некоторые p_i суть составные высказывания, составлляющих высказываний, которых являются следствия-

ми различных импликаций с номерами меньше i. Такую последовательность импликаций назовем *разветвленной*.

Если последовательность импликаций — линейная, тогда истинность $p \to q$ следует из истинности

$$p \to p_1,\ \ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ \ldots,\ p_k \to q$$

на основании правила вывода

$$\frac{p \to p_1,\ \ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ \ldots,\ p_k \to q}{p \to q}, \qquad (2)$$

которое хотя и в неявном виде, использует каждый человек, решающий соответствующую задачу. Здесь истинность каждой из импликаций $p \to p_1$, $p_1 \to p_2$, $p_2 \to p_3$, ..., $p_k \to q$ известна предварительно, т. е. каждая из этих импликаций получена из аксиомы, или из определения, или раньше решенной задачи (чаще всего теоремы).

Рассмотрим импликации $p \to p_1$ и $p_1 \to p_2$. На основании гипотетического силлогизма получаем

$$\frac{p \to p_1,\ \ p_1 \to p_2,}{p \to p_2}.$$

Аналогичным способом получаем

$$\frac{p_3 \to p_4,\ \ p_4 \to p_5, p_5 \to p_6}{p_3 \to p_6}.$$

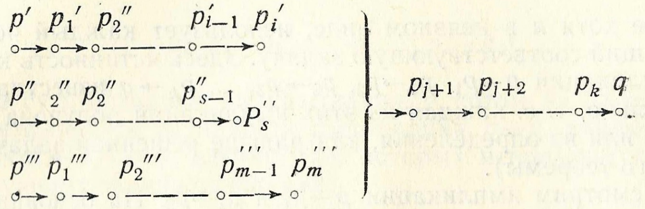
Тогда решение задачи, записанной в (2), можно записать так:

$$\frac{p \to p_2,\ p_2 \to p_3, p_3 \to p_6,\ \ p_6 \to p_7,\ \ldots,\ p_k \to q}{p \to q}.$$

Запись этого решения содержит четыре импликации, меньше по сравнению с первым. Очевидно импликации $p \to p_2$ и $p_3 \to p_6$ являются задачами, решения которых входят в решение задачи $p \to q$. Следовательно $p \to p_2$ и $p_3 \to p_6$ являются задачами составками задачи $p \to q$. Если выберем различные последовательности импликаций, в которых высказывания поставлены последовательно по своим индексам, тогда получим различные задачи-составки задачи $p \to q$. На практике однако не каждую последовательность импликаций этого вида можно использовать, чтобы формулировать задачу-составку. В данном случае имеются в виду и некоторые дополнительные соображения, а именно содержание задач, возникших на основании решения практических проблем или связь с некоторыми замечательными свойствами соответственных математических объектов и т. д.

И здесь, как при первом и втором типе задач, дальше аналогично рассматриваются задачи, решения которых являются разветвленными последовательностями импликаций. Рассмотрено конкретное решение такой задачи, в которой только одно высказывание p_j есть конъюнкция $p_i' \wedge p_s'' \wedge p_m'''$, а все другие p_r суть простые.

Структура этого решения видна хорошо в следующей схеме:



Исследуя структуру решений разных типов задач мы показываем, что рассматриваемые до сих пор в традиционной методике математики схемы анализа и синтеза решений задач, относятся только к тем решениям, которые являются линейными последовательностями импликаций и что в сущности встречаются гораздо чаще те задачи, решения которых являются разветвленными последовательностями импликаций.

В указанном выше логическом описании решений задач используется только алгебра высказываний, а известно, что ее называют молекулярной логикой, так как она не учитывает внутреннюю структуру простых высказываний. Поэтому и рассмотренное до сих пор описание дает нам возможность решить лучше некоторые вопросы обучения, в предположении, что учащиеся умеют использовать отдельные определения и теоремы. Однако, чтобы можно было более осознанно руководить учащимися в усвоении использований, отдельных определений и теорем, необходимо дать более точное логическое описание применения определений и теорем. Здесь мы рассматриваем только случай для понятия — объекта. В диссертации это сделано в § 3.

Обозначим буквой p предикат «...s», где «s» термин данного понятия. Так получаем логическую функцию $p(x)$, которая задана на множестве, составляющем объем M соответственного родового понятия. Каждый признак понятия «s» тоже

* В школьном курсе бывают и определения, в которых некоторые из признаков образуют дизъюнкцию, но они встречаются редко. Пример такого определения, это определение о прерывности функции.

можно рассматривать как логическую функцию, заданную на M, потому что посредством него задается свойство определенного подмножества множества M. Если обозначим эти логические функции соответственно через $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, определение понятия с термином «s» можно записать так *:

$$(3) \qquad p(x) \longleftrightarrow p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge \ldots \wedge p_n(x).$$

Объем понятия с определением (3) есть множество истинности логической функции $p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge \ldots \wedge p_n(x)$. Поэтому, чтобы доказать, что данный произвольный, но фиксированный объект x_k принадлежит этому объему, надо установить, что

$$v[p_1(x_k) \wedge p_2(x_k) \wedge \ldots \wedge p_n(x_k)] = 1.$$

Если обозначим признаки в условии определеной теоремы, дающей достаточные условия существования понятий с определением (3), соответственно через p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, ..., $p_{i_{n'}}$, то, теорему можно записать символически таким образом

$$p_{i_1}(x) \wedge p_{i_2}(x) \wedge \ldots \wedge p_{i_{n'}}(x) \to p(x)$$

где $1 < n' \leqslant n$ и по крайней мере одно из p_{i_k} не совпадает ни с одним из $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.

Дальше показано, что информация, которая дается посредством определения данного понятия объекта и теорем, обеспечивающих достаточные условия его существования, можно выразить посредством сложного высказывания, названного нами расширенным определением, имеющем такой вид:

$$(4)(p_1(x) \wedge \ldots \wedge p_n(x)) \vee (p_1(x) \wedge \ldots \wedge p_{1_{n'}}(x)) \vee \ldots \vee (p_{k_1}(x) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge (p_{k_{n''}}(x) \to p(x),$$

где $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, $p_{1_1}(x)$, $p_{1_{n'}}(x)$, ..., $p_{k_1}(x)$, ..., $p_{k_{n''}}(x)$ и $p(x)$ являются логическими функциями, заданными на множестве, представляющем объем соответственного родового понятия. Поэтому логическая операция подведение под понятие сводится к подстановке x в (4), с соответствующим объектом и установлению истинности хотя бы одной из элементарных конъюнкций. Так как элементарные конъюнкции образуют дизъюнкцию, оказывается, что деятельность подведения под понятие очень легко можно выполнить и алгоритмическим способом.

С помощью логических функций описана и связь между определениями понятий-объектов и теоремами, обеспечивающими необходимые условия для этих понятий. И здесь показано, что вся информация, которая дается посредством тео-

2 Заказ 1092

рем, обеспечивающих необходимые условия существования данного понятия с термином «s», можно выразить посредством сложного высказывания, имеющего такой вид:

$$(5)\quad p(x) \to (q_{1_1}(x) \wedge \ldots \wedge q_{1_s}(x)) \vee \ldots \vee (q_{k_1}(x) \wedge \ldots \wedge q_{k_l}(x)),$$

где $p(x)$, $q_{1_1}(x)$, ..., $q_{1_s}(x)$, ..., $q_{k_1}(x)$, ..., $q_{k_l}(x)$ являются логическими функциями, заданными на множестве, представляющем объем соответственного родового понятия относительно понятия «s».

Дальше на основании гипотетического силогизма из (4) и (5) получено

$$(6)\quad (p_1(x) \wedge \ldots \wedge p_n(x)) \vee (p_{1_1}(x) \wedge \ldots \wedge p_{1_{n'}}(x)) \vee \ldots \vee (p_{k_1}(x) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge p_{k_{n''}}(x)) \to (q_{1_1}(x) \wedge \ldots \wedge q_{1_s}(x)) \vee \ldots \vee (q_{k_1}(x) \wedge \ldots \wedge q_{k_l}(x)).$$

Можно сказать, что в логических функциях типа (6) собирается вся информация о соответственных понятиях. Эти функции позволяют более точно показать основные элементарные операции, содержащиеся в решении почти каждой математической задачи. Действительно, при решении задач, когда хотим доказать, что какой-то объект x_k обладает, например, свойством q_j, то достаточно доказать, что он принадлежит множеству истинности функции $(p_1(x) \wedge \ldots \wedge p_n(x)) \vee (p_{1_1}(x) \wedge \ldots \wedge p_{1_{n'}}(x)) \vee \ldots \vee (p_{k_1}(x) \wedge \ldots) \wedge p_{k_{n''}}(x))$. Это есть основное звено, которое по нашему мнению содержит самые элементарные операции, выполнимые в процессе решения задач. Каждое решение представляет в конце концов, цепочку из таких звеньев. На этих операциях мы обучаем учащихся с самого начала систематического курса математики, когда обучаем их применению отдельных определений и правил вывода.

Аналогичное описание дается применению определений и теорем, связанным с понятиями двухчленных отношений.

Выявленная логическая структура решений математических задач и сделанное описание применений определений и теорем позволило нам дать новое решение некоторым вопросам методики математики, учитывая более явно и точно логический элемент в решениям математических задач. Вместе с тем указано, с одной стороны, что и как из этой логической структуры целесообразно использовать в работе учителя, авторов учебников и задчников и вообще методистов, имея в виду некоторые выводы психологов по отношению формирования умений выполнять разные типы деятельности, а с другой, что и как можно более или менее явно из этой структуры довести до сознания ученика. Все это сделано во второй, третьей

и четвертой главах диссертации. Остановимся дальше более подробно на этих вопросах.

В § 4 (глава вторая) рассмотрен смысл терминов анализ и синтез при решении математических задач с точки зрения разработанного их описания. Конкретно уточнен смысл их употребления в вопросах, связанных с решениями задач и обоснованно, почему они могут быть осуществлены по известным схемам, которые связаны с именами Евклида и Паппа. Здесь мы используем, что решение каждой задачи, которую можно представить в форме импликации $p \to q$, состоит из различных импликаций $p \to p_1, p_1 \to p_2, \ldots, p_k \to q$, каждая из которых получена из аксиом, определений или решенной перед тем задачи. Каждый человек, решая новую задачу, открывает именно соответственные импликации. При этом он мог бы открывать их беспорядочно, стихийно, или используя определенную схему. Ясно, что для открытия необходимых импликаций, лучше было бы начать с первой или последней из них. Это фактически заметили еще древние греки, и, как мы уже отметили, Евклид и Папп дают соответственные описания аналитического метода. На основании этих описаний и созданы следующие две схемы хода рассуждений для открытия, говоря современным языком, импликаций

$$p \to p_1,\ p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \ldots, p_{k-1} \to p_k,\ p_k \to q.$$

Схема Паппа

Чтобы было верным q, достаточно, чтобы было верным p_k,
чтобы было вреным p_k, , достаточно, чтобы было верным p_{k-1},
. . . .
чтобы было верным p_2, достаточно, чтобы было верным p_1,
чтобы было верным p_1, достаточно, чтобы было верным p.

Схема Эвклида

Если верно q, то верно и p_k,
если верно p_k, то верно и p_{k-1},
. . . .
если верно p_2, то верно и p_1,
если верно p_1, то верно и p.

В схеме Паппа в каждой строке записана фактически одна из импликаций $p \to p_1$, $p_1 \to p_2$, ..., $p_k \to q$, начиная с последней. Причем используется более естественное, в этом случае, выражение последней импликации на разговорном языке, начиная с высказывания q, истинность которого в конце концов нас интересует. Причиной этого есть то, что решающего задачу интересует фактически истинность высказывания q. Поэтому он выбирает между известными ему верными импликациями, ту в которой q является следствием и о которой предварительно известно, что она верна, т. е. которая базируется на аксиоме, определении или решенной задаче. После того как выбрана подходящая импликация $p_k \to q$, чтобы обеспечить истинность высказывания q, надо доказать, что $v(p_k) = 1$.

Если $p_k \equiv p$, то тем самым доказана верность q, так как $v(p) = 1$; если $p_k \not\equiv p$, с высказыванием p_k поступают как и с q, и так продолжается до тех пор, пока не будет достигнута импликация, основание которой совпадает с высказыванием p. Таким образом фактически на основании правил

$$\frac{p \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \ldots, p_k \to q}{p \to q} \quad \text{и} \quad \frac{p \to q,\ p}{q}$$

устанавливается истинность высказывания q.

Аналогичным образом обосновывается и схема Евклида и схема синтеза в таком виде, как они до сих пор рассматривались в методике математики. Эти схемы, однако относятся только к линейным последовательностям импликаций, и поэтому после их обоснования, в диссертации мы рассматриваем анализ и синтез решений, которые являются разветвленными последовательностями импликации, про которые можно сказать, что методика их почти не затрагивала. Показано, например, что когда только одно p_j есть конъюнкция $p_i' \wedge p_s'' \wedge p_m'''$, схема Паппа получает следующий вид:

Чтобы было верным q, достаточно, чтобы было верным p_k,
чтобы было верным p_k, достаточно чтобы было верным p_{k-1},
. . . .
чтобы было верным p_{j+1}, достаточно, чтобы было верным p_i' и p_s'' и p_r''',
чтобы было верным p_i', достаточно, чтобы было верным p'_{i-1},
. . . .
чтобы было верным p_1', достаточно, чтобы было верным p',

p' верно.

чтобы было верным p_s'', достаточно, чтобы было верным p_{s-1}'',
чтобы было верным p_{s-1}'', достаточно, чтобы было верным p_{s-2}'',
. . . .
чтобы было верным p_1'', достаточно, чтобы было верным p'',

p'' верно.

Чтобы было верным p_m''', достаточно, чтобы было верным p'''_{m-1},

чтобы было верным p_{m-1}''', достаточно, чтобы было верным p_{m-2}''',
. . . .
чтобы было верным p_1''', достаточно, чтобы было верным p''',

p''' верно.

В начале § 5 рассмотрены некоторые вопросы, связанные с созданием умений для выполнения некоторой деятельности. Конкретно указано, что по мнению психологов, самые важные условия создания умений для выполнения данной деятельности можно свести к следующим:

а) познавание сущности деятельности, как со стороны обучающего, так и со стороны обучаемого;

б) участие обучаемого как в выполнении деятельности, так и в ее построении (организации) на основании знаний об объектах, с которыми она связана;

в) помощь в ориентировочной деятельности обучаемого;

г) обеспечение целенаправленности в деятельности обучаемого.

Нарушение этих условий ведет к явлению, которое называют «вести учащихся с завязанными глазами при решении задач».

Далее показано конкретно, как познавание структуры решений задач, о которых уже говорили, и различение решения задачи от самого процесса решения позволяют более последовательно соблюдать необходимые условия формирования умений в решении задач.

Действительно выше мы отметили, что решение A_n, каждой задачи состоит из конечного числа последовательных решений других задач, каждое из которых содержит решения, раньше решенных задач, аксиомы или определения понятий. С другой стороны процесс решения задачи отдельным человеком является деятельностью, при помощи которой между всеми известными до данного момента решениями задач аксиомами и определениями, выбираются те, решения которых составляют решение A_n. Следовательно, если излагать только решение задачи, таким образом, как это делается в учебниках и очень часто на уроках, то основное в деятельности решения задачи — психический процесс, результатом которого является решение, не развивается полностью в сознании тех учеников, которые перед этим не могли самостоятельно решить задачу. В таких случаях обыкновенно посредственные ученики смотрят с недоумением и безразличием на полученные результаты, т. к. их сознание не было включено в активную работу, а более трудолюбивые задают себе вопрос, который задавал себе известный математик Д. Пойя будучи учеником и студентом: «Да, это решение видимо достигает цели и кажется правильным, но как можно додуматься до такого решения? ... Каким способом я могу это сделать?»

Этот вопрос задает себе каждый ученик, когда каждый раз ему все дается наготове и не обеспечивается возможность самому или эвентуально с чужой помощью найти решение соответствующих задач-составок. А известно, как это мы указали, что умение выполнять каждую деятельность постигается практикой. Следовательно, процесс решения задачи необходимо практиковать как только возможно в полном виде. Но для этой цели необходимо, чтобы задачи, предлагаемые для решения, задавались бы в такой форме, чтобы были по силам ученикам. Так мы доходим к вопросу о трудности решения задач.

Опознание структуры решения задачи и условий создания умений решений дает возможность характеризовать лучшим образом сложность решения задачи и трудность решения последней.

Имея в виду, что решение A_n одной задачи содержит решение других задач, аксиомы и определения $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ целесообразно называть число n степенью сложности решения A_n.

Так как решение задачи состоит из выбора и порядка $A_1, A_2, A_3, ..., A_k, ..., A_{n-1}$, то процесс решения задачи, решением которой есть A_n, для отдельного человека был бы тем легче, чем больше A_k $[k=1, 2, 3, ..., (n-1)]$ ему были бы известны и чем меньше времени прошло от момента, когда он с ними ознакомился, так как в этом случае он быстрее дойдет до соответствующей задачи-составки, аксиомы или определения. Следовательно, трудность решения A_n каждой задачи можно уменьшить, увеличивая число предварительно решенных задач-составок. При обучении очень полезно использовать эту возможность для уменьшения трудности решений различных задач.

Дальше в диссертации показаны примеры уменьшения трудности решений некоторых конкретных задач. Таким образом показано, что познание структуры решений задач позволяет определить более осознанно, более последовательно и точно целесообразный характер и порядок решаемых задач, необходимые для результативного формирования отдельных компонентов мыслительных процессов в процессе решения задач. Это означает, что выявленная структура решений математических задач позволяет не только объяснить возможность поoперационного формирования соответствующих мыслительных процессов, но и дать надежный метод для выбора и упорядочения необходимых для этой цели решаемых задач. Однако

этот вопрос (для выбора и упорядочения задач) является объектом более последовательного рассмотрения специально в § 6. Наконец, в § 5 обосновано, почему процесс решения задач посредством схем Евклида и Паппа, анализа их решений, оказывается более естественным и легким для учащихся.

Познание изложенных до сих пор особенностей процесса решения задач дает возможность лучшим образом осуществить на практике принцип индивидуального подхода, как в отношении отдельного ученика, так и в отношении различных классов. При более высоком уровне умений учеников класса, учитель должен подбирать задачи для решения таким образом, чтобы в решении A_n каждой задачи было бы меньше решений $A_k[k=1, 2, 3, ..., (n-1)]$ последовательности $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ предварительно известных, и обратно, при низком уровне умения, известные решения в этой последовательности были бы гуще.

Как уже было отмечено, в § 6 рассматривается вопрос о выборе и порядке решаемых задач в процессе обучения математике.

Здесь рассмотрены как некоторые принципиальные вопросы, так и некоторые конкретные примеры, которые использованы в проведенных нами экспериментах. Кроме того, здесь изложен вывод, к которому мы пришли в наших исследованиях, связанных с основными целями, которые целесообразно ставить на упражнениях по математике, а именно:

I. Узко математические цели:

а) Упражнение учащихся в применении данного определения, теоремы, аксиомы, правила или метода с целью запомнить и привыкнуть к его приложениям вместе с ранее усвоенными понятиями, теоремами, аксиомами, правилами или методами.

б) Упражнение учащихся в решении задач, которые являются составками некоторых теорем обязательного курса по математике, или других задач с более сложными решениями, которые тоже будут решены впоследствии.

в) Упражнение учащихся в решении задач, подготовляющих усвоение определения данного понятия.

II. Узко логические цели:

а) Упражнение учащихся в применении определенной логической операции или правила вывода, чтобы превратить его в убедительное средство установления истинности различных высказываний.

б) Упражнеие учащихся в выполнении более сложных логических операций типа операции «подведение под понятие».

III. Практически приложимые цели:

Упражнение учащихся в применении усвоенных математических понятий и теорем в решении задач из ежедневной жизни или из других наук.

В установившейся методике обучения математике в выборе задач для упражнений обычно имеют в виду явно только первый тип цели и более конкретно первую из них, и вообще игнорируют второй тип цели. А так как осуществление первого типа цели невозможно независимо от второго, то до сих пор все попытки решить проблему подбора, порядка и систематизации задач для упражнений были заранее обречены на сравнительно небольшой успех. В нашей экспериментальной работе мы имели в виду прежде всего первые два типа цели. На их основе мы формулировали основные принципы для подбора решаемых в упражнениях задач:

Задачи должны быть такие, чтобы:

1. В их решениях имели приложение определения или теоремы, изучаемые на соответствующем уроке для получения новых знаний.

2. В решениях первых из них использовать по возможности немного старые знания, а новые теоремы использовать по одной или не более двух.

3. Быть составками других отдельных задач или групп из таких с более сложными решениями или теорем из обязательного курса.

4. Чтобы позволяли после решения нескольких из них открыть общий метод для решения не только решенных, а и всего класса других задач.

5. Подготовлять усвоение данного понятия.

Наши исследования показали, что в современной практике недостаточное внимание обращается на второй из указанных принципов, еще меньше — на третий и почти никакого внимания не уделяется четвертому и пятому принципам. В подтверждении этого высказывания указаны примеры нецелесообразных подборов и порядков задач по различным темам в некоторых из существующих задачников и учебников по математике для средних школ. Вместе с тем даны и примерные группы задач, которые мы использовали в экспериментах в VIII и IX классах при ознакомлении учащихся с некоторыми методами решения задач на построение как по новой, так и по старой программе по математике для болгарских средних школ. Специально в диссертации обосновано, что при новой программе от 1964 г. закрепление различных геометрических преобразований и усвоение соответствующих методов для решения задач на построение является самым

результативным, если сначала решаются последовательно задачи следующих типов:

1. Даны точка M и преобразование φ. Построить $M_1=(M)\varphi$.

2. Даны прямая l и преобразование φ. Построить $l_1=(l)\varphi$.

3. Даны окружность k и преобразование φ. Построить $k_1=(k)\varphi$.

4. Даны точка M, прямая (окружность) l, и о преобразовании φ известно одно из определяемых его условий. Построить $M_1 \geq l$ и $M_1=(M)\varphi$.

5. Даны прямые (прямая и окружность или окружности) l_1 и l_2 и преобразование φ:

а) Построить $M_1 \geq l_2$, такую, что она была бы образом при φ точки $M \geq l_1$;

б) Построить $M=(M_1)\varphi^{-1}$.

6. Даны прямые (прямая и окружность или окружности) l_1 и l_2 и преобразование φ. Построить точку $M \geq l_1$ так, чтобы $(M)_\varphi \geq l_2$.

Непозиционные задачи, у которых указанные задачи являются составками надо решать после того, как рассмотрены и осмыслены решения этих задач. Только при таком порядке решаемых задач учащиеся могут увидеть целесообразность применения соответствующих геометрических преобразований при решении непозиционных задач. Кроме того, эти решения не кажутся им искуссственными и странными, как это получается в сложившейся практике.

Наконец, в § 6 описано конкретное проведение отдельных экспериментов для решения различных групп задач и для усвоения соответствующих методов. Вместе с тем дана и оценка эффективности используемых групп задач. Учащиеся экспериментальных классов усвоили умения решать в определенное время в десятки раз большее число задач, чем учащиеся других классов. Это было достигнуто прежде всего путем открытия общности в структуре решений различных задач. Таким образом у учащихся развивались два из самых важных, по мнению У. У. Сойера, качества математика, а именно интерес к открытиям закономерностей и интерес к выполнениям обобщений. Эти качества очень высоко ценил и Анри Пуанкаре. Это видно из следующих его мыслей. «Математика, это искусство называть различные вещи одними и теми именами» или в другом месте «Предположим, я занялся сложным вычислением и с большим трудом, наконец, получил результат, но все мои усилия окажутся напрасными, если они не помогут предвидеть результат в других аналогичных вычислениях, если они мне не дадут возможность проводить их с уверенностью, избегая тех ошибок и заблуждений, с которыми я должен был мириться в первый раз».

Вот некоторые из групп задач, которые даны в диссертации в связи с усвоением метода гомотетии:

1. Даны точка O, коэффициент $k=\frac{2}{3}$ и отрезок AB. Построить образ $A'B'$ отрезка AB при гомотетии с центром O и коэффициентом k.

2. Даны точки O и отрезок АВ. Построить отрезок $A'B'$, равный данному отрезку A, который был бы образом AB при гомотетии с центром O и положительным коэффициентом.

3. Дан треугольник AOB. Построить треугольник $A'OB'$ гомотетичный AOB, с центром гомотетии точкой O, сторона которого $A'B'$, сходственная AB, была бы равна данному отрезку d.

4. Если ABC и $A'B'C$ произвольная пара центрально подобных треугольников при центральном подобии с центром C и положительным коэффициентом, а CD и CD' их сходственные высоты, доказать, что если на луче с началом точкой B, не содержащим точки A, построим отрезок $BM=CD$ и на луче с началом точкой B', не содержащим точки A', построим отрезок $B'M'=CD'$, то точки M, M' и C лежат на одной прямой.

Обобщить задачу для произвольной пары сходственных линейных элементов или их сумм или разностей.

5. Дан треугольник $A'CB'$. Построить треугольник ACB, гомотетичный $A'CB'$, по данным:

а) сумме стороны AB и соответствующей ей высоте;
б) сумме стороны AB и соответствующей ей медиане;
в) сумме стороны AB и трех высот;
г) сумме трех высот.

Построить треугольник по данным:

6. α, β, $c\pm h_c(c\pm m_c,\ c\pm l_c,\ c\pm a,\ c\pm h_a,\ c\pm m_a,\ c\pm l_a,$
$c\pm r,\ c\pm R,\ c+h_a+h_b,\ c+m_a+m_b,\ c+l_a+l_b,$
$h_a+h_b,\ m_a+m_b,\ l_a+l_b,\ h_a+h_b+h_c\ m_a+$
$+m_b+m_c,$
$l_a+l_b+l_c,\ h_a+m_a+l_a,\ h_a+m_c+l_c,\ h_a+l_a-r,$
$a+r+R,\ a+b+c, h_a+b_b,\ h_a+m_b,\ R\pm r,$
$l_c\pm r,\ h_c\pm R,\ h_a,\ l_a,\ m_a,\ r,\ R,\ \ldots)$

7. $a{:}b$, γ, $c\pm h_c$ (————————„————————)

8. $a{:}b$, α, $c\pm h_c$ (————————,,————————)

9. $h_b{:}h_a$, γ, $c\pm h_c$ (————————,,————————)

10. $h_b{:}h_a$, α, $c\pm h_c$ (————————,,————————)

11. $a:b:c$, $c\pm h_c$(————————,,————————)

12. $c{:}h_c$, γ, $c\pm h_c$ (————————,,————————)

13. $c:m_c$, γ, $c\pm h_c$ (————————,,————————)

14. $h_a{:}m_c$, γ, $c\pm h_c$ (————————,,————————)

15. $h_c{:}m_c{:}l_c$, $c\pm h_c$ (————————,,————————)

15. $h_c{:}m_c{:}l_c$, $c\pm h_c$ (————————,,————————)

16. $c{:}r{:}R$, $c\pm h_c$ (————————,,————————)

17. $m_a{:}m_b{:}m_c\, c\pm h_c$ (————————,,————————)

8. $h_a{:}h_b{:}h_c$, $c\pm h_c$ (————————,,————————).

Здесь мы не будем рассказывать как практически используется в классе эта упорядоченность задач. Отметим только, что легкость и быстрота в усвоении решений этих задач обеспечивается от выделения и последовательного рассмотрения с самого начала всех основных задач-составок, а вместе с тем и от устранения всех повторений, так как то, что является общим в решениях предыдущих задачах ученики сразу замечают и в решениях следующих, хотя оно не повторяется явно.

В § 7 обоснованы необходимость и возможность формирования некоторых основных логических операций и правил вывода у учащихся и приводятся примеры, которые дают представление о международном опыте изучения в школе некоторых понятий современной логики. Специально раскрыты некоторые недостатки фактически оформившейся гипотезы усвоения правил вывода и вообще получения навыков в применении дедуктивного метода. Вместе с тем, для этой цели сформулирована новая гипотеза, базирующаяся на принципе Декарта о раздельном преодолении трудностей. В этой гипотезе предусматривается более явное ознакомление учащихся с некоторыми основными логическими понятиями. В сущности на основании этой гипотезы можно объяснить некоторые современные тенденции модернизации обучения математике, вводя в программы некоторые понятия математической логики. Конкретная реализация и проверка некоторых выводов этой гипотезы рассмотрены в остальных семи параграфах диссертации.

По нашему мнению, на нынешнем этапе, ознакомление учащихся с некоторыми основными логическими понятиями целесообразно провести в двух концентрах. Руководствуясь этой идеей, мы так и организовали нашу экспериментальную работу. Это видно из ее описания в третьей и четвертой главах. **В § 8, 9, 10, и 11 (глава третья)** рассмотрена экспериментальная работа, проведенная в VII и VIII классах шестой и двенадцатой школы в Софии для проверки возможностей более явного изучения некоторых логических понятий и операций и его эффективности в обучении математике.

В § 8 дана общая характеристика эксперимента и сделаны количественные оценки некоторых показателей.

В § 9 рассматривается первый этап обучения учащихся в применении определений и теорем, на котором они обучаются применять отдельные определения и теоремы и вместе с тем знакомятся со смыслом слова «следует» в математике. На этом этапе, при применении теорем вида* $q(x, y) \to p(x, y)$, учащиеся приучаются подставлять переменные x и y с произвольными, но фиксированными объектами x_1 и y_1, и таким образом получать истинные высказывания $q(x_1, y_1) \to p(x_1, y_1)$, а потом в применении правила вывода

$$\frac{q(x_1, y_1) \to p(x_1, y_1),\ q(x_1, y_1)}{p(x_1, y_1)}.$$

Этот этап совпадает с началом изучения систематического курса математики, т. е. с усвоением первых определений и теорем и проводится на примере этих определений и теорем.

В § 10 рассматривается второй этап обучения учащихся в применении определений и теорем, на котором они обучаются использовать определение данного понятия и несколько теорем, связанных с этим понятием. Здесь показано, каким образом необходимо и возможно сделать объектом специального изучения со стороны учащихся организации и логической структуры изучаемого материала в подходящих для них форме и объеме, а потом на этой базе осознанно, организованно и последовательно передать им способы действий с этим материалом при участии самих учащихся. Именно на этом этапе учащиеся учатся строить расширенные определения вида

$$((p_1(x, y) \wedge \dots \wedge p_n(x, y)) \vee (p_{1_1}(x, y) \wedge \dots \wedge p_{1_{n'}}(x, y)) \vee \dots$$
$$\dots \vee (p_{k_1}(x, y) \wedge \dots \wedge p_{k_{n''}}(x, y)) \to p(x, y)$$

* Здесь как и дальше мы рассматриваем теоремы, связанные с понятиями-отношениями, но тоже самое относится к теоремам, связанным с понятиями — объектами.

подставлять вместо x и y произвольные, но фиксированные объекты x_1 и y_1 и таким образом получать сложные высказывания, а потом применять одновременно правила вывода

$$\frac{p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_s}{p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_s},\quad \frac{r_i}{r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_i \vee \dots \vee r_k} \text{ и } \frac{s_1 \to s_2,\ s_1}{s_2}.$$

Все это делалось, как уже было подчеркнуто, в подходящих для учащихся форме и объеме, а не посредством применения символики математической логики. Последняя только дает возможность обучающему точно описать операции, которым он приучает обучаемых, чтобы и здесь применять принцип Декарта для «раздельного преодоления трудностей», т. е. и в этом случае лучше управлять формированием соответствующих умений.

Кроме того, знание логики позволяет и определить те логические понятия, с которыми целесообразно познакомить учащихся в более явном виде, чтобы осуществить только что указанный принцип Декарта. Здесь, например, из расширенного определения и указанных правил вывода видно, что необходимо предварительно уточнить у учащихся смысл слов «и» и «или». Поэтому в наших экспериментах обучение учащихся в применении определений и теорем предварялось усвоением фактически понятий конъюнкции и дизъюнкции на содержательной основе, используя примеры как из обыденной жизни, так и из математики, которые уже хорошо известны учащимся. Конкретно в экспериментах мы сделали следующее: После изучения темы «Зависимость между сторонами треугольника» были выделены два урока. На первом из них были повторены выученные определения, введены понятия признак понятия «конъюнкция» и «дизъюнкция» признаков и ученики привыкли пользоваться признаками понятий, когда они образуют конъюнкцию или дизъюнкцию. Как видно из экспериментального текста, данного в приложении 1-б, для этой цели были использованы, кроме выученных до этого момента определений геометрических понятий также и известные определения грамматики или обиходные. Знакомство учеников со структурой признаков понятия проводилось в следующем порядке: Сначала учитель, после необходимого объяснения, записывал определение понятия угла следующим образом:

Углом называется геометрическая фигура, которая:

а) образована двумя лучами;

б) оба луча имеют общее начало.

После этого, при участии различных учеников класса были записаны аналогичным способом и другие определения, между которыми были и следующие *.

«Два угла называются смежными, если:

а) имеют общую вершину
и
б) имеют общую сторону
и
в) две другие их стороны лежат на одной прямой».

«Простым сказуемым называется слово, которое:

а) означает действие предмета
или
б) означает состояние предмета».

«Нарушением в футболе называются поступок игрока, состоящей в следующем:

а) коснуться рукой мяча в пределах поля игры
или
б) подставить ногу игроку противника
или
в) толкнуть игрока противника
или
г) поднять высоко ногу
или
д) перейти в засаду».

В конце, сравнивая различные определения, устанавливали, что в одних из них признаки были связаны союзом «и», а в других — союзом «или». Таким образом были получены следующие определения:

1. Говорится, что признаки одной фигуры** или объекта образуют конъюнкцию, когда связаны между собой союзом «и».

2. Говорится, что признаки одной фигуры или объекта образуют дизъюнкцию, когда связаны союзом «или».

Третий этап работы над признаками понятий состоял в самостоятельной вставке пропущенных союзов между различными, явно отделенными признаками некоторых понятий. Четвертый этап — как в самостоятельном определении признаков, так и в их соединении соответствующими союзами. Такие упражнения были заданы ученикам и на домашнюю работу.

Затем мы познакомили учеников с назначением признаков понятий. В сущности еще при выяснении понятия признака одной фигуры или объекта, объяснялось коротко и для чего служат признаки различных конкретных объектов, но это было недостаточным. Для окончательного выяснения этого вопроса снова было использовано определение

* Все примеры помещены в приложении.

** Признаками одной фигуры или объекта мы назвали признаки в соответственных определениях.

«Два угла называются смежными, если

а) имеют общую вершину,
и
б) имеют общую сторону
и
в) другие их стороны лежат на одной прямой.

Было подчеркнуто, что, используя это определение, мы распознаем, какие из предварительно начерченных пар углов являются смежными и какие нет. Указано было, что чтобы сказать, какие из этих углов смежные и какие — несмежные, в каждом отдельном случае мы проверяем последовательно наличие каждого из трех признаков. Если отсутствует один из этих признаков, мы делаем вывод, что соответствующая пара углов не являются смежными, а если налицо все признаки, мы делаем вывод, что соответствующая пара углов являются смежными. После того как были указаны и другие конкретные примеры использования определений, в которых признаки образуют конъюнкцию, был сделан вывод, что «вообще, когда признаки одного определения образуют конъюнкцию, проверяется наличие каждого признака и только после того, как бывает установлено, что все они налицо, делается вывод, что рассматриваемая фигура или объект будет соответствующего вида».

Аналогичным способом, припоминая приложение определения «Простым сказуемым называется слово, которое

а) означает действие предмета
или
б) означает состояние предмета» доходим к выводу, что когда признаки одного определения образуют дизъюнкцию, также проверяем последовательно наличие каждого из них, но делаем вывод, что рассматриваемый предмет или фигура будет соответствующего вида только после того, когда мы убедимся, что хотя один из признаков будет налицо.

Чтобы разграничить лучше оба типа определений и их применения, до конца урока были рассмотрены еще несколько примеров, при которых выводы делались только учениками. В начале второго урока было проверено выполнение домашнего задания и проведен фронтальный опрос по материалу предыдущего урока и по теоремам о параллельных прямых. После этого внимание учеников сосредоточилось на теоремах:

1. «Если при пересечении двух прямых третьей, два внутренние накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны».

2. «Если пересечем две параллельные прямые третьей, то каждые два внутренние накрест лежащие углы равны».

При их сопоставлении было установлено следующее: В то время как во второй теореме говорится, что если известно, что две прямые параллельны и пересечены третьей, то получаются пары равных накрест лежащих углов, тогда как в первой говорится, что если при пересечении двух прямых третьей, два внутренние накрест лежащие углы равны, то две прямые параллельные. Следовательно, для того, чтобы мы были убеждены, что две прямые параллельны, согласно первой теореме, достаточно только знать, что при пересечении их третьей, два внутренние накрест лежащие углы равны. Отсюда был сделан вывод, что условие первой теоремы можем также рассматривать как признак параллельности двух прямых и было высказано первое расширенное определения параллельности двух прямых. Впоследствии после рассмотрения и других теорем, обеспечивающих достаточные условия для параллельности двух прямых, это определение было расширено еще больше и было записано учениками на последних страницах тетрадок для работы в классе. Знакомство со значением логических связей «и» и «или» позволило ученикам участвовать активно и с пониманием в составлении расширенного определения и самим получать вывод о том, как его использовать при доказательстве, что две прямые параллельны. Они говорили приблизительно следующее: «Так как признаки в определении и различные теоремы, которые записаны в расширенном определении, образуют дизъюнкцию, то, чтобы доказать, что две прямые параллельны, достаточно установить, что выполнен хотя бы один из них. По этой причине, когда хотим доказать, что две прямые параллельны, мы должны проверить наличие каждого из признаков до установления одного из них». Таким образом ученики фактически доходят до алгоритмического описания деятельности «подведение под понятие параллельные прямые».

Аналогичным способом были построены сначала расширенные определения понятий равенства двух углов и равенства двух отрезков, а после этого путем объяснения, как используются эти определения, были описаны алгоритмически соответствующие две деятельности.

В конце, путем сопоставления сначала только двух указанных теорем о параллельных прямых, а после этого и других теорем, пройденных при теме «Параллельные прямые», пришли к выводу, что эти теоремы могут быть разделены на две группы. «В первую группу входят теоремы, которые служат нам признаками параллельности прямых (эти признаки участвуют в расширенном определении), т. е. каждая из этих теорем дает нам возможность узнавать, что две прямые параллельны и поэтому их будем называть теоремами-признаками.

Вторая группа состоит из теорем, в которых указывается, что если две прямые параллельны, то они имеют и еще некоторые другие свойства и поэтому теоремы этой группы будем называть коротко теоремы-свойства». Подчеркивалось также, что для использования какой-либо теоремы-свойства, необходимо, чтобы перед этим было дано, что соответствующие прямые параллельны, а если это не дано, то необходимо это доказать, прилагая определение или какую-нибудь теорему-признак. Таким образом мы последовательно обучали учащихся в выполнении указанных выше самых элементарных операций, входящих в основное звено при решении почти всех задач.

Как видно, этим способом возможность выполнения основных логических операций и приложений различных правил, вывода в рассуждениях «вкладывалась в сознание учащихся» последовательно и сознательно и ожидалось, что впоследствии учащиеся смогут использовать эти операции и правила. В данном случае учитель был похож на конструктора ЭВМ, который перед тем, как требовать от машины выполнения известной операции, вкладывает в нее возможность для исполнения таковой.

Существует однако принципиальное различие между способами заложения этих возможностей у ученика и машины. В то время как в машине это обыкновенно происходит путем вложения новых элементов в память, то у человека оказывается, что это выполняется в общем по пути обучения.

Чтобы лучше оценить то, что постигается построением расширенных определений, припомним, что делается согласно традиционной методики при изучении нового понятия *. Фактически сейчас дается определение

$$p_1(x)\wedge p_2(x)\wedge\ldots\wedge p_n(x)\longleftrightarrow p(x),$$

а затем рассматриваются эвентуально некоторые теоремы вида

$$p_{i_1}(x)\wedge p_{i_2}(x)\wedge\cdots\wedge p_{i_n}(x)\to p(x)$$

и обыкновенно этим и заканчивается целенаправленная работа.

Дальше при решении задач, прилагая определение или теоремы, в самом лучшем случае отдельные ученики замечают некоторые связи между ними и хотя бы и стихийно, у них формируются соответственные способы действия. Это именно

* Для краткости рассматриваем только понятия-объекты, но все это относится и к понятиям-отношениям.

те ученики, которые впоследствии после знакомства с новыми понятиями и теоремами все с большей легкостью их применяют при решении новых задач (включая и теоремы обязательного курса математики). Однако, как это известно, число этих учеников в школах сравнительно небольшое. Интересно почти для каждого из них и то, что степень осознания связи между определениями и теоремами для отдельных понятий, не находится на такой высоте, чтобы они были в состоянии выразить ее в соответствующей форме и на этой основе объяснить другому человеку (например, своему другу) способы рассуждения, на основании которых решают соответствующие задачи. Более того, это относится и к большей части учителей. У таких учителей работа по обучению решения задач исчерпывается изложением готовых решений и повторением их несколько раз или требованием, чтобы ученики сами открывали решения новых задач, что обыкновенно дает неудовлетворительные результаты.

С построением расширенного определения уже сознательно устанавливается связь между знаниями о понятии, полученными посредством определения и теорем, обеспечивающие достаточные условия для его существования. Таким образом, вся известная ученикам информация, на основании которой они после этого смогут узнавать, принадлежит ли данный конкретный объект объему соответственного понятия, связывается между собой в их сознании. Здесь содержанием целенаправленного обучения становятся и логические связи, при помощи которых связаны признаки понятия в определении и в соответствующих теоремах. После этого на основании этой целой информации о конкретном понятии, ученики обучаются доказывать, что различные конкретные объекты принадлежат объему этого понятия. Наконец, используя умения действовать с несколькими конкретными понятиями, под руководством учителя, эта деятельность обобщается для всех аналогичных случаев.

Необходимо отметить, что характерной особенностью в работе учителей, которые и теперь действительно хорошо обучают своих учеников, является та, что все же они успевают в более явном виде показать связь между знаниями об отдельном понятии и соответствующими их структуре способами рассуждений. Это они постигают, составляя вместе с учениками нечто вроде «списков» (но обыкновенно не написанных) способов, посредством которых до определенного момента могут доказывать принадлежность конкретных объектов к объемам некоторых понятий. Эти «списки» для отдельных понятий постепенно разрастаются, но все же состоят из конечного числа способов. Необходимо однако отметить, что эти «списки» ос-

таются изолированными один от другого и имеют как будто случайный характер, так как они составлены не совсем осознанно и последовательно. Причиной последнего есть именно недостаток необходимых логических знаний. По той же причине вероятно этот вопрос до сих пор не рассматривался и в методике математики. О верности последнего говорит даже и тот факт, что не существует работ по методике, в которых рассматривается вопрос о тех логических связях между определениями и теоремами, которые дают достаточные условия для существования соответственных понятий и на основании которых человек выполняет операцию «подведение под понятие». Более того даже и там, где фактически и до настоящего времени теоремы, обеспечивающие достаточные условия для существования некоторых понятий, выделены в группы (признаки параллельности прямых, признаки равенства треугольников и признаки подобия треугольников), эти логические связи не показаны.

Интересно отметить, что разработанная нами методика в этом отношении быстро и легко воспринимается именно учителями, которых мы указали выше, потому что она организует и оформляет в общий метод все то, что до сих пор в их работе носило стихийный характер. Новое просто является необходимым продолжением их прошлой работы.

Явным разделением теорем для некоторых понятий на две группы, в зависимости от их использования, было достигнуто также очень полезное систематизирование знаний учащихся об этих понятиях. Несмотря на то, что здесь умышленно не выражались одним высказыванием вида $p(x) \to q_{i_1}(x) \wedge q_{i_2}(x) \wedge \cdots \wedge q_{i_n}(x)$ все теоремы, обеспечивающие необходимые условия существования соответственного понятия, все-таки выделяя их в отдельную группу для каждого понятия позволяло получить полезную информацию об их использовании. Последняя вместе с информацией, полученной от расширенного определения, очень помогла организовать деятельность учеников, как при решении задач вообще, так и при их знакомстве с новыми понятиями. После введения, например, нового понятия, они уже всегда ожидают, что будут рассмотрены теоремы, которые будут давать возможность, как и определения, распознавать объекты, принадлежащие объему этого понятия, а также, что будут рассмотрены другие теоремы, которые могут быть приложены, если будем знать, что данное понятие налицо.

Таким образом, теоремы не являлись для учеников как нечто случайное и искусственно придуманное учителями, а воспринимались, как ответ на поставленный ими вопрос, т. е. как нечто вполне естественное. По той же причине, изученные определения и теоремы уже казались ученикам как нечто связаное, единое, а не как случайно собранные в один урок утверждения.

Такое разграничение теорем до сих пор делалось сравнительно более осознанно, но недостаточно выявлено в вузах и в редких случаях в старших классах средней школы путем разграничения теорем, обеспечивающие необходимые и достаточные условия. Но это уже поздно, так как на этой ступени учащиеся уже должны были бы приобрести известные умения по приложению теорем. Однако оказывается, что знания, которые даются в этом случае ученикам старших классов, тоже совершенно недостаточны, вследствие чего большая часть заканчивающих школу беспомощны при решении задач. Поэтому указанная методика оказывается очень полезной и при повторении учебного материала в конце обучения средней школы.

Дальше в § 10 рассматривается конкретное применение указанной логической подготовки при изучении темы «Равенство треугольников и сделана качественная оценка результатов проведенных контрольных работ в экспериментальных и контрольных классах. Оказывается, что учащиеся экспериментальных классов справились намного лучше с контрольными работами, чем учащиеся контрольных классов; почти всегда они обосновывали точно, на каком основании делают свои выводы, разграничивая ясно теоремы, обеспечивающие достаточные условия существования соответствующих понятий от теорем, обеспечивающих необходимые условия.

В § 11 рассмотрен применяемый до сих пор способ ознакомления учащихся с косвенным методом доказывания теорем в начале систематического курса математики и указаны недостатки этого способа. Вместе с тем, на основании его логического анализа, дан и способ для более осознанного его усвоения. Этот способ базируется также на принципе Декарта о раздельном преодолении трудностей. И здесь, используя конкретные примеры из обыденной жизни и из математики, сначала ознакомили учащихся с понятием отрицания утверждения *, а потом формировали у них законы исключенного третьего и исключенного противоречия. После этой предварительной подготовки, мы перешли к применению косвенного метода для доказывания первой теоремы по планиметрии в

* Мы использовали термин «утверждение», так как в традиционном обучении в Болгарии используется этот термин, а не термин «высказывание».

VII классе, где неприменим прямой метод, а именно теоремы: «Во всяком треугольнике, против большого угла лежит большая сторона».

Логическая подготовка, которую мы предлагаем дать учащимся восьмилетней школы, недостаточна как для повышения эффективности обучения математике, так и для потребностей, связанных с новыми тенденциями развития и применения некоторых других наук. Поэтому в **§ 12, 13 и 14 (глава четвертая)** мы рассматриваем логическую подготовку, которую целесообразно дать учащимся старших классов средней школы. Вместе с тем предложены и конкретные экспериментальные материалы, часть из которых испытаны во внеклассных формах работы в 18 школе Софии и во Второй гимназии города Видина.

Специально в § 12 дана общая характеристика проведенных в IX классе экспериментов, а в § 13 рассмотрено более подробно изучение «Элементов математической логики» в IX классе и использование логических познаний в обучении по геометрии и алгебре в IX и X классе. Оказалось, что минимум тем по математической логике, которые мы наметили рассмотреть в классе, усваивается в большинстве случаев даже легче, чем учебный материал по алгебре и геометрии. Кроме того, это вызывает интерес у учащихся и, наконец очень помогает усвоению некоторых трудных тем курса алгебры и геометрии.

После двухгодичных экспериментов с учащимися в IX классе мы пришли к выводу, что целесообразно включить в начале программы по алгебре в IX классе следующие вопросы:

1. Краткие сведения о роли символики в математике. Высказывание. Значение истинности высказываний . . 1 ч.
2. Простые и составные высказывания. Конъюнкция и дизъюнкция . . . . 1 ч.
3. Отрицание. Многократное применение логических связей . . . . 1 ч.
4 Импликация. . . . . 1 ч.
5. Равнозначность . . . . 1 ч.
6. Обзор рассмотренных способов составления сложных высказываний . . . . 1 ч.
7. Выражение (формула) исчисления высказывания. Виды выражений . . . . 1 ч.
8. Эквивалентные выражения исчисления высказываний . . . . 1 ч.
9. Некоторые основные эквивалентности . . . . 1 ч.
10. Логическое следование. Правила вывода . . . 2 ч.

11. Гипотетический силлогизм. Конъюнктивное извлечение и конъюнктивное упрощение . . . . . . 1 ч.
12. Специальные эквивалентности, на которых базируется косвенный метод доказывания теорем. Виды теорем . . . . 3 ч.
13. Множество. Основные операции над множествами . . . . 3 ч.
14. Логические (высказывательные) функции . . 1 ч.
15. Уравнения и неравенства с одним неизвестным, как логические функции одной переменной . . . . 1 ч.
16. Логические операции с логическими функциями 1 ч.
17. Некоторые основные логические функции в алгебре . . . . 1 ч.
18. Логические функции с двумя переменными и операции с ними. Системы уравнений и неравенства как логические функции . . . . 2 ч.

Укажем только два из приложений знаний, обеспечиваю-щих этой программой:

1. Знание эквивалентностей

$$p \to q \approx \neg q \to \neg p,$$

$$p \to q \approx \neg q \wedge p \to \neg p,$$

$$p \to q \approx \neg q \wedge p \to q$$

и

$$p \to q \approx \neg q \wedge p \to r \wedge \neg r$$

позволяет проводить косвенные доказательства теорем столь естественно и убедительно для учащихся, какими им кажется решение уравнений с применением соответствующих теорем эквивалентностей, изучаемых в алгебре.

II. Знание эквивалентностей

1) $(x-a)(x-b)=0 \approx (x-a=0) \vee (x-b=0),$

2) $(x-a)(x-b)>0 \approx ((x-a>0) \wedge (x-b>0)) \vee$

$$\vee ((x-a<0) \wedge (x-b<0)),$$

3) $\dfrac{x-a}{x-b}>0 \approx ((x-a>0) \wedge (x-b>0)) \vee$

$$\vee ((x-a<0) \wedge (x-b<0)),$$

4) $(x-a)(x-b)<0 \approx ((x-a<0) \wedge (x-b>0)) \vee$

$$\vee ((x-a>0) \wedge (x-b<0))$$

и

5) $\dfrac{x-a}{x-b}<0 \approx ((x-a<0) \wedge (x-b>0)) \vee ((x-a>0) \wedge (x-b<0))$

позволяет подходить однотипно к решениям уравнений и неравенств второй степени и дробных неравенств вида (3) и (5), так как и знание геометрических преобразований позволяет сделать однотипно рассмотрение многих геометрических вопросов. А пользу этой однотипности для более быстрого развития математического мышления мы уже подчеркивали и выше.

В § 14 показана возможность изучения некоторых математических понятий и идей учащимися, проявляющими повышенный интерес к математике. Для этой цели предлагаются экспериментальные материалы, разработанные по следующей программе:

1. Множества — повторение . . . . 1 ч.
2. Основные свойства операций над множествами . . 2 ч.
3. Алгебра Буля . . . . 2 ч.
4. Релейно-контактные схемы . . . . 2 ч.
5. Обобщение . . . . 1 ч.
6. Эквивалентные выражения. Теоремы об эквивалентных выражениях . . . . 2 ч.
7. Изоморфизм . . . . 1 ч.
8. Правила подстановки . . . . 1 ч.
9. Выражение функторов посредством $\neg$, и $\wedge$ или посредством $\neg$, и $\vee$ . . . . 2 ч.
10. Нормальные формы . . . . 5 ч.
11. Составление выражений по заданным таблицам истинности . . . . 1 ч.
12. Анализ и синтез релейно-контактных схем . . . 2 ч.
13. Решение логических задач . . . . 2 ч.

Здесь как нетрудно догадаться и из самой программы, предусматривается на основании сравнения операций над множествами операций над высказываниями дать учащимся идею об алгебре Буля и ознакомить их с такими понятиями как модель одной науки, изоморфизм и дуальность. Чтобы показать пользу изоморфизма между совокупностями выражений вычисления высказываний и совокупностями релейно-контактных схем, предусматривается изучение нормальных форм в вычислении высказываний (алгебры высказываний) и перенос полученных результатов на анализ и синтез релейно-контактных схем.

В конце диссертации сделаны следующие *выводы:*

1. Аппарат математической логики позволяет по-новому подойти к разработке многих проблем методики обучения математике, относящихся как к приучению учащихся к некоторым основным деятельностям в процессе решения задач, так и к многим другим сторонам обучения математике.

2. Ознакомление учащихся с основными логическими терминами «и», «или», «следует» и «не» позволяет им легче привыкнуть к дедуктивному методу и применять его более результативно.

3. Символика и понятия математической логики дают возможность выражать коротко, ясно и точно связи между различными высказываниями в решениях задач и в определениях понятий, что со своей стороны позволяет вникнуть в сущность изучаемых в школе разделов математики.

4. Знания о высказываниях и множествах дают возможность дать хотя бы лучшим ученикам, идею о некоторых основных понятиях современной математики.

Эти выводы дают возможность сделать следующие конкретные *предложения:*

1. Студенты педагогического профиля Математического факультета Софийского университета, а также и студенты математики Высшего педагогического института в г. Пловдиве должны изучать обязательный курс «Элементы математической логики» приблизительно в таком объеме, какой дается студентам советских педагогических институтов.

2. Осовременить разработку некоторых основных вопросов курса методики обучения математике на базе аппарата современной логики и достижений психологии.

3. Еще в начале систематического курса по алгебре и геометрии в младших классах нужно обязательно изучить логические термины «и», «или», «следует» и «не».

4. В IX классе СПШ нужно предусмотреть изучение «Элементов математической логики», куда надо включить основные вопросы исчисления высказываний, исчисление предикатов и теории множеств. Это должно составлять первый раздел программы по алгебре.

5. В примерной программе для внеклассной работы по математике предусмотреть темы, которые были бы продолжением изученного по математической логике по новой программе по математике для обучения в классе.

ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В БОЛГАРИИ СЛЕДУЮЩИЕ РАБОТЫ АВТОРА:

1. Формиране на умения за решаване на математически задачи. Журнал «Математика и физика», 1965 г., № 2 и № 3.
2. Относно наредбата на някой групи задачи за построение в равнината. Журнал «Математика и физика», 1965 г. № 5.
3. Четириъгълник — обобщителен урок. Журнал «Математика и физика», 1965 г. № 6 — соавторство.
4. Върху един метод за решаване на построителни задачи. Журнал «Математика», 1966 г., № 1.
5. Елементи на математическата логика. Журнал «Мамематика и физика», 1966 г., № 2 и № 3.
6. Косвенният метод за доказване на теоремите в VII клас. Журнал «Математика и физика», 1967 г. № 1.
7. Съждения и логически операции със съждения. Журнал «Математика», 1966 г., № 1 — соавторство.
8. Изрази на съждитялното смятане. Журнал «Математика», 1967 г. № 2 — соавторство.
9. Множество и операции с множества. Журнал «Математика», 1967 г. № 3 — соавторство.
10. Логически функции. Журнал «Математика», 1967 г., № 4 — соавторство.
11. Елементи от теория та на множествата и математическата логика в средного училище. Журнал «Математика и физика», 1967 г., № 3.
12. Начални познания по математиче логика — книга под печати в изд. «Народна просвета» — София.

На базе основных идей о выборе и порядке задач, разработанные в диссертации, построен

13. Сборник от задачи за построение по геометрии, София, 1966 г., которому диссертант один из авторов.

Л 125026 12/Х-67 г. Объем 2,75 п. л. Зак. 1092

Типография Университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы
Москва, ул. Орджоникидзе, 3