

**Софийски университет „Св. Климент Охридски”
Факултет по математика и информатика**



Павлин Иванов Цонев

**МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИ ОТ
СТАНДАРТИЗИРАНИ ОЦЕНЯВАНИЯ НА УЧЕНИЦИ ПО
МАТЕМАТИКА**

Дисертационен труд

**за придобиване на образователната и научна степен „доктор“
в област на висше образование 1. Педагогически науки,
професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по...**

Докторска програма

„Методика на обучението по математика и информатика“

Методика на обучението по математика

**Научен ръководител
проф. Кирил Банков**

София, 2025

Съдържание

Увод	3
ПЪРВА ГЛАВА. Анализ на НВО по математика след VII клас чрез класическата теория на тестовите.....	13
1. Класическа теория на тестовите – основни положения.....	13
2. Анализ на задачи от НВО VII клас, проведено през 2020 г.	20
3. Анализ на задачи от НВО VII клас, проведено през 2021 г.	40
4. Анализ на задачи от НВО VII клас, проведено през 2022 г.	51
5. Анализ на задачи от НВО VII клас, проведено през 2023 г.	59
6. Обобщения	68
7. Изводи от Първа Глава	77
ВТОРА ГЛАВА. Анализ на НВО по математика след VII клас чрез IRT	79
1. Основни принципи и модели.	79
2. Избор на подходящ модел за изследване на задачите с избираем отговор.....	86
2.1. Приложение на IRT при изследване на резултатите от НВО по математика в края на VII клас от 2020 г.....	87
2.2. Приложение на IRT при изследване на резултатите от НВО по математика в края на VII клас от 2021 г.....	97
2.3. Приложение на IRT при изследване на резултатите от НВО по математика в края на VII клас от 2022 г.....	105
2.4. Приложение на IRT при изследване на резултатите от НВО по математика в края на VII клас от 2023 г.....	113
3. Сравняване на резултатите на задачите с ИО за периода 2020-2023 г.	121
3.1. Методика на сравняването.....	124
3.2. Процедура по пресмятане на резултатите от 2020 върху тези от 2021 г.....	125
3.3. Процедура по пресмятане на резултатите от 2022 върху тези от 2021 г.....	129
3.4. Обобщение на направеното сравняване.	133
4. Точкуване на задачите със СО и примерен вариант за оценяване на НВО по математика след VII клас.	134
5. Изводи от Втора Глава.....	144
ТРЕТА ГЛАВА. Експеримент за апробация на тест за НВО по математика след VII клас	146
1. Постановка на задачата.....	146
2. Анализ на получените резултати след провеждане на експеримента.....	150
2.1. Общ анализ на задачите с ИО чрез КТТ.....	152
2.2. Общ анализ на всички задачи от пробното НВО чрез IRT.....	155
2.3. Анализ на някои задачи с ИО от пробното НВО	159

3. Сравняване по различни показатели на традиционния и експерименталния начин на точкуване.....	166
4. Изводи от Трета Глава.	168
Заклучение	170
Приноси на дисертационния труд	173
Литература	174
Публикации на автора, свързани с темата на дисертацията	178
Декларация за оригиналност	179
Приложение 1	180
Приложение 2	192
Приложение 3	193
Приложение 4	196
Приложение 5	199
Приложение 6	202
Приложение 7	205
Приложение 8	213

Увод

Актуалност на темата

Оценяването на учениците е основен елемент в процеса на тяхното образование. В България оценяването е текущо или заключително, като последното може да е срочно, годишно и при завършване на даден етап на образование. Национални заключителни оценявания по математика с използване на съвременни методи и технологии се провеждат у нас от преди повече от 25 години. Например, през 1997 г. в националния Институт по образование към МОН се проведе експериментално изследване на постиженията на учениците по математика в края на 4 и 8 клас чрез тестове. До този момент още не са въведени външните оценявания. Обемът на извадката е 4000 ученика от цялата страна и резултатите са публикувани в (Георгиева и Банков, 1997). Други резултати от дейността на този институт са публикувани в (Георгиева, 1998) и (Георгиева и др., 1998).

През 2007 година Министерството на образованието и науката (МОН) въведе Национално външно оценяване (НВО) за учениците, завършващи IV, VII и X клас, и Държавен зрелостен изпит (ДЗИ) за завършващите XII клас. Предметът Български език и литература (БЕЛ) е задължителен за всички НВО и ДЗИ. Математиката е задължителна за НВО, докато за ДЗИ е по желание. За периода от 2007 до 2024 година НВО по математика след VII клас е съдържало различен брой задачи от три типа – с избираем отговор (ИО), с кратък свободен отговор (СО) и разширен СО. В таблица 1 е даден броят на задачите по вид за всяка година. Както се вижда, само първите три години задачите са били единствено с ИО. В следващите години те са разделени в два модула, като в първи модул основно са задачите с ИО, а във втори – тези със СО.

Години	Общо задачи	I-ви модул		II-ри модул	
		ИО	Кратък СО	Кратък СО	Разширен СО
2007-2009	50	50	Няма модули		
2010-2011	30	25	-	3	2
2012-2018	24	16	4	2	2
2019	25	17	3	2	3
2020-2023	23	18	2	-	3
2024	23	20	-	-	3

Таблица 1. Брой задачи по вид и години в НВО по математика след VII клас

Всяка година, след приключването на външните оценявания се правят класирания и анализи на постигнатите резултати. Често тези анализи са основани на средните стойности на получените балове. Най-често се сравняват тези балове между основните предмети БЕЛ и Математика. Също така, на базата на тези балове, се правят изводи за нивото на успеваемост в различните административни области на страната, между населените места в тях, между различните училища в тези населени места. Резултатите от НВО след VII клас служат за класиране в профилирани и професионални паралелки в гимназиите. Доколко това е целесъобразно може да се проследи в (Банков, 2024). Този въпрос не е основна тема на настоящия дисертационен труд, макар че отчасти той ще бъде дискутиран.

В някои случаи анализирането на резултатите от външните оценявания се прави чрез използване на научни теории за изследване на тестовете. Най-често за тази цел се прилага добре известната Класическа теория на тестовете (КТТ) – например (Данчев и др., 2015), (Джалев, 2013), (Джалев, 2014) и пр. В световен план за начало на КТТ се счита книгата на Торндайк от 1904 г. (Thorndike, 1904). В България тази теория е представена от няколко автори – (Бижков, 1996), (Стойнова, 1996), (Банков, 2012).

Използването на КТТ, въпреки нейните отлични качества, има известни ограничения. В края на XX век в научната литература се появява нова теория, която се базира на вероятностните методи. Тя е известна като Item Response Theory (IRT), като през 1960 г. Г. Раш (Rasch, 1980) я описва за пръв път. В България това се случва през 1996 г. от Ф. Стойнова като част от книгата (Бижков, 1996). Вероятностното моделиране се наблюдава и при широкомащабни международни изследвания, като TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) и PISA (Programme for International Student Assessment). Повече за предимствата на IRT, за нейните принципи и развитие във времето, както и за някои от слабостите на КТТ ще стане дума във втора глава на дисертационния труд.

От самото начало на въвеждането на НВО в края на VII клас възникнаха редица въпроси, като:

- Как да се тълкуват резултатите на учениците?
- Покриват ли учениците в VII клас държавните образователни изисквания според тези резултати?

- Задачите, които се дават на НВО дали отговарят на някакви предварителни изисквания към тях?
- Използват ли се получените данни от НВО за да се направят изводи за подобряване на обучението по математика?
- Добре ли е тези резултати да се използват за вход в гимназиите?

В търсенето на отговори по част от тези въпроси, в настоящия дисертационен труд се анализират резултатите на учениците от НВО след VII клас, проведени в периода 2020-2023 година в четири административни области на България – София-град, Пловдив, Плевен и Разград. Направена е съпоставка между изводите, получени според двете теории на тестовете. Разгледани са техните предимства и недостатъци. Направените изводи са използвани за провеждане на педагогически експеримент с ученици, завършващи VII клас през 2024 г., който е описан в трета глава. В него се изследва хипотезата, че вероятностното моделиране може да се използва за по-прецизно изследване на качествата на тестовите задачи и чрез него могат да се въведе по-опростено и по-обективно оценяване на учениците. В разработката на този труд е използвана методологията, описана в (Иванов, 2006).

Поставените по-горе въпроси, както и други проблеми, свързани с НВО редовно се дискутират на Пролетните конференции на Съюза на математиците в България, на които авторът на дисертационния труд редовно взема участие. Една от първите дискусии, след започването на мащабните национални външни оценявания, се проведе през 2010 г. (Банков и Витанов, 2010). Самите теми се възлагат от МОН на Центъра за оценяване в предучилищното и училищното образование (ЦОПУО, 2024), като за подготовката им се привличат учители от различни училища от цялата страна. От 2010 г. авторът на този труд редовно участва като член на експертните комисии за съставяне на тестовите задачи по математика в ЦОПУО (тогава с абревиатурата ЦКОКО). Също така, от самото начало на провеждането на НВО, той е член и на регионалните комисии за проверката и оценяването им.

Цел и задачи на изследването

Основна цел в дисертационния труд е да се приложат различни методи за анализ на резултати от стандартизирани оценявания на ученици по математика (НВО), да се

анализират положителните и отрицателните страни на всеки от тях и да се дадат препоръки за тяхното използване.

За постигането на тази цел в дисертационния труд се решават следните *основни задачи*:

- 1) Да се направи анализ на научно-теоретичните въпроси по темата на дисертационния труд, които очертават проблемната област на разглежданата тема;
- 2) Да се направи анализ на учебната документация, свързана с обучението по математика в прогимназиалния етап за придобиване на основно образование;
- 3) Да се направи анализ на тестовите задачи от НВО за периода 2020-2023 г. чрез КТТ;
- 4) Да се направи анализ на тестовите задачи от НВО за периода 2020-2023 г. чрез ИРТ;
- 5) Да се сравнят получените резултати по различните методи;
- 6) Да се извърши педагогически експеримент с ученици, които им предстои да завършат VII клас през 2024 г., който да провери направените теоретични изводи от проведените изследвания;
- 7) Да се предложат варианти за подобро балообразуване.

Обект на изследването са тестовете за НВО и методите за анализиране на резултатите от тях.

Предмет на изследването: Изпитни тестове за НВО в периода 2020-2023 г. и експериментална група с ученици в VII клас от различни училища в няколко населени места в България от периода април-юни 2024.

Методи на изследването

Методите, които се прилагат са: проучване на документи (включително тестови задачи и тяхната класификация); методи за анализи на резултати от тестове чрез КТТ и ИРТ; изводи от тези анализи и сравняването им; статистическа обработка на данните от проведените НВО; графично представяне на резултатите.

Хипотеза на изследването

Правилното използване на КТТ съчетано със съвременни методи за анализ на тестови резултати (IRT) дава по-обективна, по-точна и надеждна картина за постиженията по математика на изследваната популация.

Структура на дисертационния труд

Дисертационния труд съдържа увод, три глави, заключение, списък с използваната литература и приложения.

Основната част на дисертационния труд е от 170 страници, а литературата съдържа 35 заглавия.

Фигурите в дисертационния труд са отбелязани в средата под самата фигура, като е използвано означението **Фиг. Г.№.**, където с Г е означен номера на главата, в която е дадената фигура, а № е номерът на самата фигура в тази глава. Таблиците са отбелязани под самата таблица с означението **Таблица Г.№.**, където Г е номерът на главата, а № е номерът на съответната таблица в главата. Цитирането на литературата е в стил АРА.

Първа глава е озаглавена „Анализ на НВО по математика след VII клас чрез КТТ“. В началото на тази глава се дават кратки сведения за КТТ, някои исторически бележки и се разясняват понятията, използвани в тази теория. След това се представя тестовата спецификация на НВО по математика след VII клас. Тя съдържа две основни направления – съдържателно и познавателно, описани подробно там.

След това са разгледани НВО през периода 2020-2023 година, като за всяка от тези четири години:

- се дават основните статистически характеристики на задачите с ИО, получени според КТТ;
- изобразява се графично разпределението на учениците според суровите им балове, като са представени няколко варианта за трансформацията на тези балове в оценки по общоприетата в България шестобална система;
- чрез критерия χ^2 на Пирсън е проверена хипотезата за нормалност на тези балове, като хипотезата H_0 е отхвърлена, т. е. не може да се твърди, че генералната съвкупност от баловете на учениците е нормално разпределена;
- задачите с ИО са подредени според коефициентите на трудност и на разграничителна сила и са представени таблици, характеризиращи дистракторите на всяка задача;

- на тази база са разгледани някои конкретни задачи от всяко от изследваните НВО, които са показали някои недотам добри характеристики по горните показатели. Обърнато е внимание на съдържателната област на всяка задача; на познавателното равнище, което тя покрива; потърсени са причините за по-лошите показатели, които са се проявили; дадени са варианти за подобряване на тези показатели; анализирано е представянето на учениците от различните административни области;
- коментирани са надеждността и валидността на тестовете;
- направен е извод, че задачите със СО не допринасят съществено за увеличаване на баловете на учениците, получени от задачите с ИО. Това важи за почти всички области, с изключение на София-град. Една от причините за това е, че в по-малките населени места конкуренцията при кандидатстване в гимназиите е сведена до минимум, което за София-град не е валидно.

По-нататък са направени някои обобщения върху задачите от изследваните 4 години. Според оценяването по шестобалната система на учениците върху задачите с ИО е установено, че учениците, които завършиха през 2022 г. и бяха обучавани в последните си две години от разстояние в електронна среда (ОРЕС) поради COVID епидемията 2020-2022 година, са постигнали резултати, които са съпоставими с останалите учениците през останалите години, но само по отношение на слабите оценки. При оценките Среден, Добър и Много добър техните резултати са по-ниски, а при оценка Отличен – най-високи. Този феномен може да се обясни с това, че при онлайн обучението самоподготовката на учениците е на преден план, което за по-добрите от тях създава възможности за по-голям индивидуален напредък. За по-слабо подготвените ученици такава самостоятелната работа създава повече трудности. Това слабо представяне на учениците от 2022 г. се потвърждава и от високия процент (68%) на тези, които са получили между 0 и 5 точки на задачите със СО. Този процент е още по-висок (82%) за по-малките области, като Плевен и Разград.

Направена сравнителна таблица на задачите с ИО от всичките четири години по съдържателна и познавателна област. Трябва да се отбележи, че разпределението на тези задачи по двете области е направено от автора на дисертационния труд, а не от комисията, която ги е съставила, т. к. това не е общодостъпно. Прави впечатление, че 11 от всички 27 теми от съдържателните области или не са представени в задачите с ИО, или има само 1 задача за четирите години. От друга страна, голяма част от тях присъстват

в задачите със СО и може да се приеме, че Националните външни оценявания покриват цялото съдържание, което е описано в спецификациите им. Според тази таблица, почти всички задачи с ИО са от познавателно равнище Знание или Разбиране, по изключение има задача от ниво Приложение. Това е очаквано за задачи с избираем отговор.

В края на главата, според коефициента на надеждност на задачите с ИО от четирите НВО е направен извод, че такъв тест е подходящ:

- за изследване на резултатите по математика на учениците от VII като цяло. Изводите, които са направени с висока степен на надеждност важат за цялата съвкупност;
- за сравняване на тези резултати по различни големи групи като: пол, регион, училища.

Втората глава е озаглавена „Анализ на НВО по математика след VII клас чрез IRT“.

В началото са описани основните принципи на теорията на тестовете, базирана на вероятностното моделиране – Item Response Theory. Изтъкнати са някои от предимствата ѝ пред КТТ. Посочени са публикации на български автори по тази теория. Въпреки, че в международната практика тя се използва за анализ на резултати от различни оценявания (TIMSS, PISA, PIRLS и др.), в България все още не е особено популярна. За да се приложи IRT при изследването на даден тест, се предполага, че са изпълнени три основни изисквания:

- 1) съществуват скрити параметри на личността, които са недостъпни за непосредствено наблюдение;
- 2) съществуват достъпни за наблюдение параметри, които са свързани с латентните параметри;
- 3) оценяването на латентния параметър трябва да бъде едномерно.

За разглежданите НВО се очаква, че първите две изисквания са изпълнени. Третото условие за едномерност е показано за проведеното през 2020 г. НВО по математика, като е използван факторен анализ на приложението SPSS. Установено е, че тестът е предимно едномерен, като има три задачи, които измерват нещо по-различно. Причината за това се търси в същността на тези задачи. Те са разгледани подробно в този дисертационен труд и е установено, че имат някои недостатъци или в условията, или в избираемите отговори, или в придружаващите ги чертежи.

По-нататък са описани няколко от моделите в IRT. Въведено е абстрактното понятие *способност* на ученика, което се измерва с числовата величина θ . При основния модел, наречен *Раш-модел* (*Rash model*), за всяка задача, която се оценява като „вярна-невярна“, т. е. с 1 точка за верен отговор и с 0 точки в останалите случаи, се дефинира *характеристична* функция на тази величина от вида:

$$P(\theta) = \frac{e^{\theta-b}}{1 + e^{\theta-b}},$$

където b е параметър, който се нарича *трудност* на задачата. Разгледани са подобни функции и за задачите, които се оценяват с повече точки. Освен Раш-модела, наречен още *еднопараметричен* модел, в дисертационния труд са представени модели с 2 и 3 параметъра. В случая на 3 параметъра характеристичната функция има вида:

$$P(\theta) = c + (1 - c) \frac{e^{1,7a(\theta-b)}}{1 + e^{1,7a(\theta-b)}},$$

където a и c са съответно коефициенти на *дискриминация* и на *налучкване*. Описани са свойствата на графиките на разгледаните характеристични функции. Те се наричат *характеристични криви*.

За всяка задача с ИО и за всяко НВО от изследваните четири години чрез приложението jMetrik (Meyer, 2024) са анализирани получените характеристичните функции според трите модела на IRT, като от съответните графики са направени изводи:

- относно хомогенността на задачите във всеки тест;
- за това, коя от трите параметризации е най-подходяща за всяка задача. На този етап е приложено сравняване на характеристичните криви с емпиричните данни, като това е демонстрирано върху някои задачи, които са показали различни особености при изследването им;
- при тези данни двупараметричният модел е за предпочитане;
- по отношение на коефициентите на трудност и дискриминация на задачите според КТТ и двупараметричния модел на IRT, като е установена висока степен на съгласуваност на двете теории;
- чрез т. нар. *item-person-map* диаграма е показано, че трудността на задачите добре се съгласува със способностите на учениците.

След това в тази глава са сравнени резултатите на всички задачи с ИО от изследвания период 2020-2023 година. Това сравнение се базира на методика, в която се

използват няколко общи задачи (*anchor*-задачи), давани в два различни теста на две различни групи ученици и приравняване на резултатите от едната група към тези от другата. Поради липсата на общи задачи в годините, за такива са потърсени и намерени двойки задачи с подобни характеристики по отношение на трудност и дискриминация. Като извод в тази част на главата е установена тенденцията за понижаване на постиженията на учениците през целия изследван период 2020-2023 г. Факт, който се разминава донякъде със официалната статистика. Причина за това е, че при нея се сравняват само средните стойности на резултатите от НВО по математика.

В края на тази глава са разгледани задачите със СО. Обосновано е точкуване, в което се използват точки, изразени с цели числа 0, 1, 2, 3, максимум 4. При това точкуване се използва идеята за оценяване чрез определяне на няколко „важни“ стъпки в решаването на задача със СО и всяка такава стъпка се оценява с 1 точка. При така приетите точкувания и стандартните точкувания с 0 или 1 точки на задачите с ИО е приложен Раш-моделът на всички задачи от 2023 г. Установено е известно разминаване между трудността на задачите и тяхното оценяване според ръководството, предложено от МОН. Някои задачи, които са се оказали трудни, са оценени с по-малко точки, отколкото други, които са лесни. На базата на получената трудност на всяка задача е дадено примерно ръководство за оценяване на задачите от НВО, проведено през 2023 г., като тази идея може да се използва за балообразуване при бъдещи НВО.

Трета глава е озаглавена „Експеримент за апробация на тест за НВО по математика след VII клас“.

В началото се представя концептуалния модел на **педагогическия експеримент**, който се проведе с 487 ученици в различни видове училища от 9 областни града на страната, на които предстоеше са завършат VII клас през 2024 г. Във връзка с възникналите въпроси в предните две глави е формулирана следната **цел**: да се приложат и сравнят методите на КТТ и ИРТ за анализ на тестови задачи за формиране на тестовия бал на учениците при НВО по математика след VII клас. За постигането на тази цел са поставени **изследователски задачи**, описани в тази глава. Формулирана е **хипотеза** на експеримента:

Използването на вероятностното моделиране предлага по-прецизно изследване на качествата на тестовите задачи и спомага за въвеждане на по-опростено и по-обективно оценяване на учениците при НВО по математика след VII клас.

Представени са трите етапа на експеримента – предварителен, основен и заключителен. Обърнато е внимание на критериите по които са избирани тестовите задачи за теста на експерименталното НВО, както и на характеристиките на тези задачи, които са търсени при този избор. Описани са два варианта на оценяване на задачите със СО – *традиционен* (както е приет в настоящите НВО) и *експериментален* (при който се оценяват няколко „важни“ стъпки в решаването на съответната задача).

В следствие е направен анализ на получените резултати. Първо са анализирани задачите с ИО посредством КТТ. Установено е, че задачите от пробното НВО съответстват по основните характеристики на тези от проведените в изследваните четири години НВО. След това е приложен Раш-модела върху всички задачи, като всяка подточка на задачите с разширен СО се разглежда като самостоятелна единица. Отбелязано е, че характеристичните криви на тези задачи покриват равномерно широк интервал на трудност. Това, заедно с получената *item-person-map* диаграма показва добре балансиран тест. По-нататък са анализирани някои от задачите, които са поставени в този тест за да се установят причините за проблеми в подобни на тези задачи в миналите НВО. Направени са редица изводи, като един от тях е свързан с причините и начините за решаването им на проблема с лесното налущване на някои от отговорите на задача с ИО.

След това в главата са сравнени баловете на учениците, получени според традиционния и експерименталния начин на оценяване. Приложена е линейна трансформация на тези балове от експерименталния към традиционния начин и е установено, че коефициентът на корелация е близко до 1. Това означава, че двете оценявания са идентични. Описани са случаи, в които има по-големи разлики в баловете на някои ученици, като са потърсени причините за това.

В края на трета глава са направени изводи от проведения експеримент, които са групирани по три показателя:

- задачи с ИО;
- задачи с разширен СО;
- образуването на баловете на учениците.

Направени са препоръки на авторите на бъдещи НВО по математика да апробират задачите за тези оценявания, като използват идеите на представения педагогически експеримент.

ПЪРВА ГЛАВА. Анализ на НВО по математика след VII клас чрез класическата теория на тестовете

1. Класическа теория на тестовете – основни положения

Оценяването в процеса на обучение е текущо, срочно и годишно. Оценяване в училище се осъществява още в края на всеки образователен етап и при завършване на степен на образование (МОН, 2024). Измерването на постиженията на учениците е една от основните дейности в това оценяване. Тези постижения не са реални физически обекти и не могат да се измерят с някакъв физически уред. Един възможен начин да бъдат измерени постиженията е чрез изработване на подходящ тест, който да служи за инструмент, на базата на който на постиженията на всеки ученик да се съпостави число. Този инструмент и това число е необходимо да отговарят на множество критерии. С термините на математиката: тестът може да се приеме, че е функция f , която има аргумент постиженията на даден ученик и стойността ѝ е число, което в общоприетите случаи е положително. В България тази стойност най-често е в интервала $[2; 6]$, при така наречената шестобалната система за оценяване (Петров, 2024) или в интервала $[0; 100]$, при национални външни оценявания (МОН, 2024).

Първата теория, която определя методите за съставяне на тестове и за изследване на техните характеристики се развива в края на XIX и първата половина на XX век и се нарича *Класическа теория на тестовете* (КТТ). Нейните основи се полагат от Чарлз Спирман в периода 1904-1913 г., а най-пълно се описва от Ф. Лорд и М. Новик (Novick & Lord, 1968). Тестовете могат да се класифицират по различни показатели, но основно биват **психологически** и **дидактически (педагогически)** (Бижков, 1996). Ще бъде обърнато внимание на дидактическите тестове. Според целта, за която се създава един тест, той може да е (Банков, 2012):

- **критериален** – служи да се провери каква част е научил даден ученик от заложеното според учебната документация;
- **нормативен** – каква част от другите ученици имат по-добри или по-слаби резултати от даден ученик.

Националното външно оценяване след VII клас трябва да изпълни и двете цели, което води до редица проблемни ситуации, някои от които се анализират в дисертационния труд.

Анализът на тестовите задачи се прави **преди** и **след** провеждането на тестовото изпитване с ученици. Първият тип анализ се нарича **априорен**, а вторият – **апостериорен** анализ. Априорният анализ се извършва от комисия, която съставя тестовите задачи и оформя теста като цяло. Апостериорният анализ, който е тема на дисертационния труд, изследва следните характеристики на задачите: **трудност**, **дискриминативна сила** и **анализ на дистракторите**.

Коефициент на трудност на задача

Коефициентът на трудност на задачата е отношението на броя на учениците, решили тази задача към общия брой на решавалите задачата. Колкото е по-голям коефициентът, толкова повече ученици са я решили. В този смисъл, по-високият коефициент на трудност означава по-лесна задача. Според (Стоименова, 2000), коефициентът на трудност при задачи с 4 възможни отговора трябва да надхвърля 1/4, за да се счита, че задачата е добра. В таблица 1.1 е дадено тълкуването на коефициента на трудност при 4 възможни отговора. Очаква се в един тест да има повече задачи с оптимална трудност, но без да липсват лесни и трудни задачи.

Описание	Коефициент на трудност
Много лесна	0,86 – 1
Лесна	0,71 – 0,85
Оптимална	0,41 – 0,70
Трудна	0,26 – 0,40
Много трудна (недопустимо)	0 – 0,25

Таблица 1.1. Тълкуване на коефициента на трудност

Разграничителна сила на задача

Разграничителната сила (дискриминацията) показва степента, в която дадена задача разграничава учениците с високи постижение от тези с по-ниски. Както е обяснено в (Банков, 2012), тя може да се изчисли:

- или чрез формулата $D = r_A - r_B$, където r_A е частта на правилните отговори на учениците от силната група, а r_B е частта на правилните отговори на тези от слабата група.
- или чрез точкова бисериална корелация (rpbis) $\rho_i = \frac{\mu_i - \mu}{\sigma} \sqrt{\frac{p_i}{q_i}}$, където

- μ_i - средния бал на решените i -та задача
- μ - средния бал на решаваните задачи
- σ – стандартното отклонение на решаваните задачи
- p_i - трудността на задачата, $q_i = 1 - p_i$

Тълкуването на стойностите на коефициента на разграничителна сила според (Стоименова, 2000) е дадено в таблица 1.2.

Описание	Стойност	Препоръка
Много добра	0,41 – 1	Отлична разделителна способност
Добра	0,31 – 0,40	Задачата може да се използва
Средна	0,21 – 0,30	Задачата трябва да се разгледа и подобри
Ниска	0,11 – 0,20	Няма добра разделителна способност
Много ниска	0 – 0,10	Задачата не бива да се използва в този вид

Таблица 1.2. Тълкуване на коефициента на разграничителна сила

Както е известно, тестовите балове на учениците, които се явяват на НВО по математика след VII клас, се получават като на всяка вярно решена задача с ИО се дават 2 или 3 точки. За да се приложи КТТ тези задачи се преоценяват, като се присъжда 1 точка за правилен отговор и 0 точки в противен случай. Така се получава т. нар. *суров бал*, с който се правят пресмятанията.

Анализ на дистракторите

Докато верните отговори имат положителни коефициенти на разграничителна сила, то тези на дистракторите трябва да са отрицателни. Колкото този коефициент е по-близо до -1 , толкова по-подходящ е дистракторът.

Математическият модел, върху който се изгражда КТТ се изразява с равенството

$$X = T + E,$$

където

X – полученият числов резултат (бал) от измерването

T – действителната числена стойност (бал) на измерването

E – стойността на грешката в измерването

Стойността на X може да бъде директно наблюдавана и измерена. Другите две са случайни величини. Основните предположения, на които се изгражда математическия модел на КТТ са:

- 1) математическото очакване на грешката е нула, т. е. $\mu_E = 0$;
- 2) корелацията между действителния бал на теста и случайната грешка на всеки ученик е нула, т. е. $\rho_{TE} = 0$;
- 3) корелацията между случайните грешки E_1 и E_2 при провеждане на един и същ тест два пъти е нула, т. е. $\rho_{E_1E_2} = 0$.

За да се прецени доколко близки са стойностите на X и T , се пресмята т. нар. **коефициент на надеждност**, който се дефинира като отношение на дисперсиите на действителните балове а всички ученици, правили даден тест и техните наблюдавани балове:

$$R = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}.$$

Стойностите на $R \in (0; 1)$, при това, колкото R е по-близо до 1, толкова е по-висока надеждността. Друга формула, която дава долната граница на надеждността на един тест се нарича **алфа на Кронбах** и ще бъде използвана в дисертационния труд, се пресмята по формулата:

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\sigma^2} \right),$$

където n е броят на задачите в теста, σ_i^2 е дисперсията на i -тата задача и σ^2 е дисперсията на целия тест.

Според (Банков, 2012) минималните стойности на коефициента α могат да се използват:

- за изследователски цели, при $\alpha \geq 0,7$;
- за сравняване на групи от популацията, при $\alpha \geq 0,8$;
- за решения, касаещи отделни ученици, при $\alpha \geq 0,9$;
- за решения с голямо значение за отделния ученик, при $\alpha \geq 0,95$.

Валидност на теста

Според Кронбах (Cronbach, 1971) валидността е процес за натрупване на доказателства за смисъла и ползата от изводите, които се правят от тестовите балове. Според (Бижков и Краевски, 2002) валидността показва степента, в която тестът измерва това, което трябва да измерва. Различават се няколко вида валидност – съдържателна, критериална, конструктна и външна. В (Банков, 2012) авторът описва същността на тези четири вида валидност. Съдържателната валидност се определя от група специалисти в дадената предметна област, които оценяват тестовите задачи по предварително определена скала (например петобална скала). Тези оценки служат за количествена оценка на съдържателната валидност, която се изразява в пресмятане на коефициент на валидност по различни методи – коефициент на Лоуш, метод на Хамблетън и пр. В (Бижков, 1996) се дават още няколко метода за анализ на съдържателната валидност.

В дисертационния труд авторът, на базата на своя опит като дългогодишен съставител и оценител на тестовите от НВО по математика след VII клас, обръща внимание на валидността на изследваните тестове.

Проверката на знанията и уменията на учениците по математика се извършва в две направления – съдържателно и познавателно. Съдържателното направление се описва с различните теми от учебното съдържание, а познавателното – с мисловните дейности, които са необходими за решаването на задачите. Авторите на тестовите задачи трябва да ги съставят така, че те да са от различни съдържателни и познавателни области.

Измерваните елементи от **съдържателните области** са определени въз основа на учебното съдържание, включено в учебните програми за пети, шести и седми клас. В таблица 1.3 са дадени съдържателните области, които се оценяват в НВО след VII клас по математика.

Освен съдържателната област всяка тестова задача се класифицира и по друг параметър – познавателна (когнитивна) област (Банков, 2012). Познавателните области описват видовете мисловна дейност, които са необходими за решаване на задачите от теста. Според известната таксономия на Блум (Bloom, 1956) тези познавателни равнища са шест: познаване (знание), разбиране, приложение, анализ, синтез и преценяване.

№	Наименование на елемента от съдържателната област
	ЧИСЛА. АЛГЕБРА
1	Естествени числа. Кратни и делители на число. Прости и съставни числа. Признаци за делимост;
2	Рационални числа. Действия с рационални числа (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване). Свойства на числови равенства и неравенства. Процент - основни задачи;
3	Цели изрази. Тъждествени изрази. Формули за съкратено умножение;
4	Разлагане на многочлени на множители;
5	Линейни уравнения с едно неизвестно $ax+b=0$ и уравнения, свеждащи се до линейно чрез еквивалентни преобразувания;
6	Модулно линейно уравнение от вида $ ax+b =c$;
7	Линейни неравенства с едно неизвестно $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b\geq 0$ и неравенства, свеждащи се към тях чрез еквивалентни преобразувания.
	ФИГУРИ И ТЕЛА. ИЗМЕРВАНЕ
8	Лице и периметър на равнинни фигури;
9	Многоъгълник. Правилен многоъгълник;
10	Правоъгълна координатна система. Разстояние от точка до права;
11	Елементи и свойства на ръбести тела (куб, правоъгълен паралелепипед, права призма, правилна пирамида);
12	Елементи и свойства на валчести тела (прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, сфера и кълбо)
13	Съседни и противоположни ъгли. Перпендикулярни прави;
14	Успоредни прави - признаци и свойства;
15	Триъгълник. Сбор от ъглите в триъгълник. Външен ъгъл на триъгълник;
16	Еднакви триъгълници. Питагорова теорема;
17	Симетрала на отсечка и ъглополовяща на ъгъл;
18	Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник;
19	Правоъгълен триъгълник. Медиана към хипотенуза в правоъгълен триъгълник. Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30° ;
20	Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Неравенство на триъгълника;
21	Успоредник. Видове успоредници - правоъгълник, ромб, квадрат;
	ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА
22	Представяне, разчитане и интерпретиране на данни, представени чрез диаграми и графики;
23	Множества и операции с тях;
24	Случайно събитие. Вероятност на случайно събитие.
	ЛОГИЧЕСКИ ЗНАНИЯ. МОДЕЛИРАНЕ
25	Отношения и пропорции. Права и обратна пропорционалност;
26	Средноаритметично на две и повече числа;
27	Моделиране с изрази, линейни уравнения и неравенства .

Таблица 1.3. Измервани елементи на учебното съдържание по математика

Знание – на най-ниското ниво се очаква учениците да познават конкретни математически факти, процедури, понятия, алгоритми. В тази познавателна област се включват следните мисловни дейности:

- Припомняне – припомняне на дефиниции, терминология, означения, свойства на числа или фигури, математически правила, твърдения.
- Познаване – разпознаване на математически обекти, форми, фигури, числа, изрази. Разпознаване на еквивалентни математически обекти.
- Пресмятане – използване на алгоритми.
- Класифициране – класифициране (групиране) на математически обекти, форми, фигури, числа, изрази по определено свойство; вземане на решение за причисляване (или не) на обект към дадена група обекти.

Разбиране – възможността знанието да бъде използвано на практика, използване на алгоритми и модели за решаване на стандартни задачи:

- Сравняване и разбиране – правене на изводи чрез съпоставяне на данни, методи или стратегии.
- Представяне – представяне на даден математически обект по еквивалентен начин.
- Решаване на рутинни задачи – решаване на задачи по познат алгоритъм.

Приложение – решаване на нова задача чрез използване на известни принципи и обобщения:

- Моделиране – съставяне на модел (например уравнение, неравенство, чертеж, графика, диаграма) за решаване на стандартна задача.
- Прилагане – алгебричните действия с рационални числа; използване на свойствата на алгебричните операции за рационално пресмятане.

Анализ – изследване на дадена информация и избиране на математически факти, необходими да се реши определена задача; правене на валидни заключения от дадена информация.

Синтез – комбиниране на различни математически процедури за получаване на резултати и комбиниране на резултати за получаване на нови резултати.

Преценяване – включват се задачи, за решаването на които ученикът трябва да владее добре учебното съдържание и изучаваните математически методи. Задачите може да са чисто математически или свързани с моделиране на реални ситуации. И двата вида, обаче, са свързани с трансфер на знания и умения в нови ситуации. Тези задачи изискват аргументация или поради своя нов за учениците контекст, или поради това, че решението е многостъпково, или защото изискват комбиниране на знания от различни области на математиката.

В приложение 1 може да се види текстовата спецификация, с която трябва да се съобразяват авторите на задачите за НВО по математика след VII клас през учебната 2018/2019 г. За следващите години тази спецификация не се различава съществено.

Първата публикация на автора по тази тематика е в сп. „Математика и информатика“ (Цонев, 2022).

2. Анализ на задачи от НВО VII клас, проведено през 2020 г.

Условията на задачите и техните верни отговори са дадени в сайта на МОН (МОН-2020, 2024). В дисертационния труд се анализират данните на 18 836 ученици от 4 административни области на България, а именно София-град, Пловдив, Плевен и Разград.

Първо трябва да се обърне внимание на задачите с ИО като цяло. Те са 18 на брой и са „прекодирани“ с 1 – верен или 0 – неверен отговор. Основните статистически характеристики според КТТ, получени чрез jMetrik са:

- минимален бал – 0 точки
- максимален бал – 18 точки
- среден бал – 10 точки
- медиана – 10 точки
- мода – 6 точки
- средноквадратично отклонение 4,68.

Верните отговори са разпределение равномерно:

- А) – 4 пъти в задачи 4, 6, 11, 15

- Б) – 5 пъти в задачи 1, 10, 16, 17, 18
- В) – 5 пъти в задачи 5, 9, 12, 13, 14
- Г) – 4 пъти в задачи 1, 3, 7, 8

Процентното разпределение по балове е дадено в таблица 1.4 и е изобразено на фигура 1.1.

Точки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
%	0%	1%	2%	4%	6%	7%	8%	7%	6%	6%	6%	5%	6%	6%	6%	6%	6%	5%	5%

Таблица 1.4. Процентно разпределение по балове на НВО-2020 г.



Фиг. 1.1. Процентно разпределение по балове на НВО-2020 г.

За да бъде по-лесно възприет този резултат, може да се трансформира в шестобална система според *линейния метод*, описан от (Банков, 2012) на стр. 95. Определя се долната граница от суровия тестов бал за получаване на оценка Среден (3,00), като се вземе 25% от максималния бал, т. е. 25% от 18 = 4,5. Този бал се завишава с едно средноквадратично отклонение, в случая $4,5 + 4,68 = 9,18$. Така, минималният бал, при който може да се получи Среден (3,00) се приема 9 точки. Пресмята се 95% от 18 = 17,1. Така може да приеме, че учениците получили 17 и 18 точки ще получат Отличен (6,00). Намира се линейна функция $y = ax + b$, която приема стойности $y = 3$ при $x = 9$ и $y = 6$ при $x = 17$. Така чрез линейната трансформация $y = \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}$ суровият тестов бал се превръща в оценки според таблица 1.5.

Тестов бал	Оценка	
	С думи	
до 9	Слаб	2.00
9	Среден	3.00
10		3.38
11	Добър	3.75
12		4.13
13	Много добър	4.50
14		4.88
15		5.25
16	Отличен	5.63
17		6.00
18		6.00

Таблица 1.5. Трансформация на суровия бал на задачите с ИО от 2020 г. в шестобална система вариант 1

На фигура 1.2 е се вижда, че според тази трансформация слаби оценки ще получат 42% от учениците.



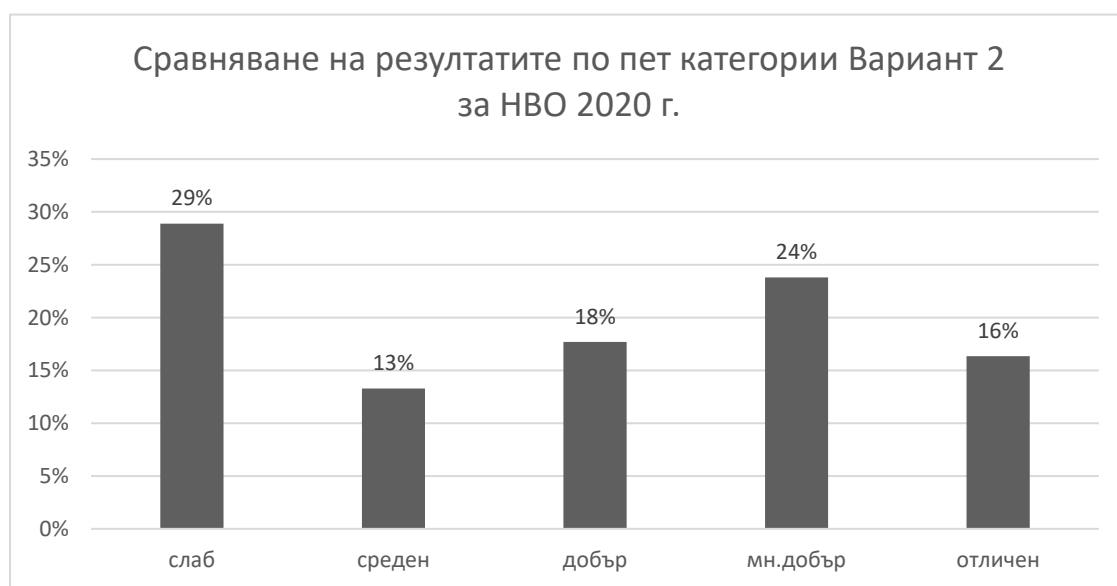
Фиг. 1.2. Диаграма на оценките според линейната трансформация – вариант 1

Този метод се налага да бъде модифициран, поради високата стойност на средноквадратичното отклонение, от което се получава оценка Среден при решени 9 задачи, т. е. при 50% верни отговори. Ако се завиши границата на налучкване 4,5 точки с половината на средноквадратичното отклонение $4,5 + 2,34 = 6,84$, тогава може да се приеме, че оценка Среден ще се получи при минимум 7 точки. Като се запази условието да се постави оценка Отличен (6,00) при поне 17 верни отговора, се получава следната линейна трансформация за точките от 7 до 17: $y = 0,3x + 0,9$. Трансформацията от точки

в оценка е дадена в таблица 1.6, а резултатите от тази трансформация са изобразени на фигура 1.3.

Тестов бал	Оценка	
	С думи	
до 6	Слаб	2.00
7	Среден	3.00
8		3.30
9	Добър	3.60
10		3.90
11		4.20
12	Много добър	4.50
13		4.80
14		5.10
15		5.40
16	Отличен	5.70
17		6.00
18		6.00

Таблица 1.6. Трансформация на суровия бал на задачите с ИО от 2020 г. в шестобална система - вариант 2



Фиг. 1.3. Диаграма на оценките според линейната трансформация – вариант 2

Използването на линейния метод за трансформация има предимство, че е съобразен със статистическите характеристики на получените балове. Той е подходящ за балове, чието разпределение е близко до нормалното (Банков, 2012), 97 стр.

Един начин да се провери хипотезата за нормалност е критерия χ^2 на Пирсън, който е описан в онлайн материала „Упражнения по вероятности и статистика“ (Янкова, 2024). При него се проверяват хипотезите:

- H_0 : няма съществена разлика между емпиричното и теоретичното нормално разпределение $N(m, \sigma)$
- H_1 : разликата е съществена

За целта се използват следните параметри: средна стойност $m = 10$ и средно квадратичното отклонение $\sigma = 4.68$ на баловите на учениците. Тези балове се групират в интервали с еднаква дължина.

Интер- вали	X_i	X_{i+1}	Чес- тота	Абсолютна честота	$\frac{X_i - m}{\sigma}$	$\frac{X_{i+1} - m}{\sigma}$	$P(\eta_1 < \eta \leq \eta_2)$	Теоретична честота	$\frac{(n_i - 100 \cdot p_i)^2}{100 \cdot p_i}$
				n_i	η_1	η_2	p_i	$100 \cdot p_i$	
(0,2]	0	2	543	3	-2.14	-1.71	0.03	3	0.01
(2,4]	2	4	2021	11	-1.71	-1.28	0.06	6	4.69
(4,6]	4	6	2836	15	-1.28	-0.86	0.10	10	3.07
(6,8]	6	8	2502	13	-0.86	-0.43	0.14	14	0.02
(8,10]	8	10	2315	12	-0.43	0.00	0.17	17	1.08
(10,12]	10	12	2156	11	0.00	0.43	0.17	17	1.56
(12,14]	12	14	2226	12	0.43	0.86	0.14	14	0.28
(14,16]	14	16	2234	12	0.86	1.28	0.10	10	0.52
(16,18]	16	18	1962	10	1.28	1.71	0.06	6	4.14
сума			18795	100				97	$\chi^2_{\text{емп}} = 15.38$

Таблица 1.7. Пресмятане на $\chi^2_{\text{емп}}$ на баловите от задачите с ИО от НВО 2020 г.

В таблица 1.7 е дадено пресмятането на величината

$$\chi^2_{\text{емп}} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \text{ където:}$$

- $k = 9$ е броя на интервалите от вида $(X_i; X_{i+1}]$, $i = 1..9$;

- n_i е наблюдаваната честота в i -тия интервал, която в случая е процентното отношение на честотата на баловете в съответния интервал към общия брой (18 795) ученици, изразен в цяло число;
- p_i е вероятността $P\left(\frac{X_i-m}{\sigma} < \eta < \frac{X_{i+1}-m}{\sigma}\right)$, като $\eta \in N(0,1)$
- np_i е теоретична честота за i -тия интервал, като $n = 100$.

Според приложение 2 определяме $\alpha = 0,05$ – ниво на значимост, $k = 9$ – брой интервали, $r = 2$ – двата параметъра на $N(m, \sigma)$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-r-1) = \chi^2_{1-0,05}(9-2-1) = \chi^2_{0,95}(6) = 12,5916$$

Тъй като $\chi^2_{\text{емп}} > \chi^2_{1-\alpha}(6)$, то хипотезата H_0 се **отхвърля**, т. е. не може да твърдим, че генералната съвкупност от баловете на учениците **е нормално разпределена**.

Друг начин за трансформиране на точките в оценка е *кумулятивния метод* (Банков, 2012), в който се използва формулата

$$P = 2 + 4 \cdot \frac{R}{18},$$

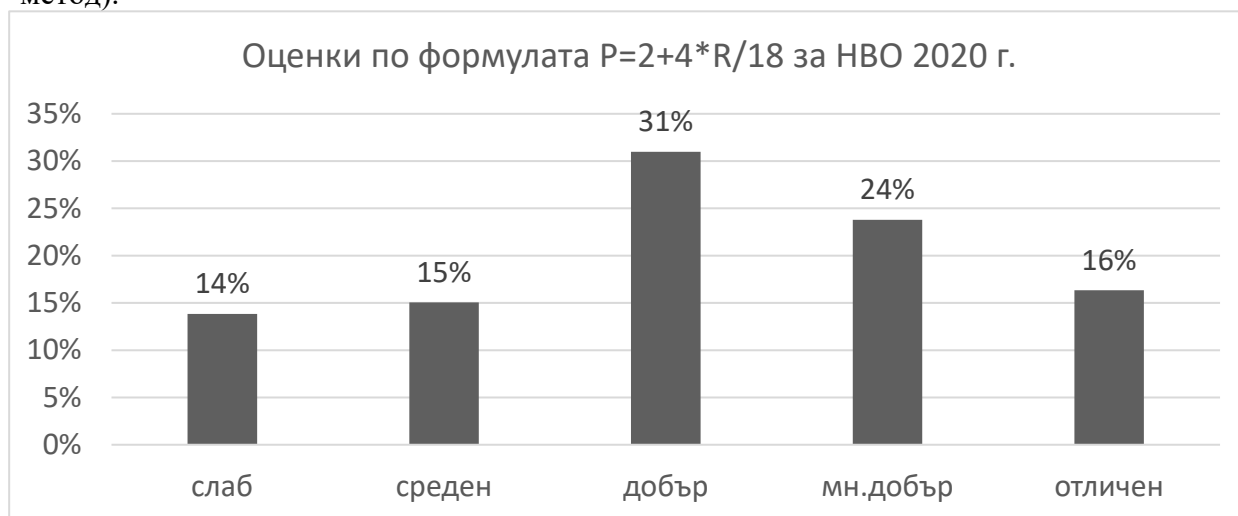
като P е оценката на ученик, получил R точки. Таблица 1.8 представя това съответствие.

Тестов бал	Оценка	
	С думи	
до 4	Слаб	2.00
5	Среден	3.11
6		3.33
7	Добър	3.56
8		3.78
9		4.00
10		4.22
11		4.44
12	Много добър	4.67
13		4.89
14		5.11
15		5.33
16	Отличен	5.56
17		5.78
18		6.00

Таблица 1.8. Трансформация на суровия бал на задачите с ИО от 2020 г. в шестобална система – вариант 3

Съответното процентно разпределение на оценките за НВО 2020 г. е изобразено на фигура 1.4.

Разглеждайки задачите с ИО като критериален тест, може да се каже, че 42% от учениците (според вариант 1), 29% от тях (според вариант 2) или 14% от тях (според вариант 3) не успяват да покрият минималните изисквания за усвоени знания по математика. За сравнение на резултатите от НВО от изследваните четири години, ще използваме трансформациите от вариант 2 (линейния метод) и вариант 3 (кумулятивния метод).



Фиг. 1.4. Процентно разпределение на оценките – вариант 3

№	Трудност	Дискриминативна	Тълкуване
6	0.74	0.47	лесна
5	0.73	0.52	лесна
17	0.69	0.40	оптимална
10	0.68	0.53	оптимална
14	0.65	0.53	оптимална
1	0.62	0.61	оптимална
3	0.62	0.55	оптимална
11	0.59	0.53	оптимална
9	0.59	0.48	оптимална
12	0.58	0.57	оптимална
13	0.57	0.54	оптимална
8	0.56	0.43	оптимална
16	0.53	0.53	оптимална
15	0.52	0.31	оптимална
2	0.43	0.45	оптимална
4	0.42	0.41	оптимална
18	0.34	0.22	трудна
7	0.17	0.33	мн. трудна

Таблица 1.9. Наредба на задачите с ИО от 2020 г. според трудността им

Следва да бъдат разгледани задачите според техните характеристики получени по методите на КТТ. В таблица 1.9 задачите са подредени според коефициентите им на трудност. Посочено е тълкуването им според (Стоименова, 2000). Очевидно повечето задачи имат оптимална трудност, две са лесни и две са трудни. Особено впечатление прави задача №7, която е с много ниска стойност 0,17 на коефициента на трудност, което я класифицира като недопустимо трудна.

Трудност		Брой	Честота	Тълкуване
от	до			
0.91	1.00			Лесна
0.81	0.90			
0.71	0.80	2	##	
0.61	0.70	5	#####	Оптимална
0.51	0.60	7	#####	
0.41	0.50	2	##	
0.31	0.40	1	#	Трудна
0.21	0.30			
0.11	0.20	1	#	Много трудна
0.00	0.10			

Таблица 1.10. Честотно разпределение на задачите според тяхната трудност от 2020 г.

№	Трудност	Дискриминативна сила	Тълкуване
1	0.62	0.61	мн. добра
12	0.58	0.57	мн. добра
3	0.62	0.55	мн. добра
13	0.57	0.54	мн. добра
11	0.59	0.53	мн. добра
16	0.53	0.53	мн. добра
10	0.68	0.53	мн. добра
14	0.65	0.53	мн. добра
5	0.73	0.52	мн. добра
9	0.59	0.48	мн. добра
6	0.74	0.47	мн. добра
2	0.43	0.45	мн. добра
8	0.56	0.43	мн. добра
4	0.42	0.41	мн. добра
17	0.69	0.40	добра
7	0.17	0.33	добра
15	0.52	0.31	добра
18	0.34	0.22	средна

Таблица 1.11. Наредба на задачите с ИО от 2020 г. според дискриминативната им сила

Ако коефициентите на трудност се разделят на 10 равномерни интервала, се получава честотното разпределение на задачите в таблица 1.10. Тази диаграма показва,

че задачите са добре балансирани според коефициента на трудност. Само една от тях (с №7) е изключение.

Дискриминативната сила на всяка от задачите, подредени според коефициента $gpbis$ е дадена в таблица 1.11. Тези данни сочат, че почти всички задачи имат много добра или добра разграничителна сила. Само задача 18 има по-ниски показатели в това отношение. Ще отбележим, че тази задача се тълкува като трудна. Отново прави впечатление задача 7 и сравнително ниската стойност 0,33 на разграничителната ѝ сила.

№	А	Б	В	Г
1	-0.34	-0.42	-0.38	0.61
2	-0.30	0.45	-0.14	-0.41
3	-0.38	-0.42	-0.26	0.55
4	0.41	-0.33	-0.27	-0.24
5	-0.39	-0.28	0.52	-0.37
6	0.47	-0.30	-0.35	-0.34
7	-0.25	-0.26	-0.16	0.33
8	-0.26	-0.28	-0.36	0.43
9	-0.36	-0.34	0.48	-0.27
10	-0.44	0.53	-0.31	-0.29
11	0.53	-0.42	-0.27	-0.34
12	-0.31	-0.35	0.57	-0.42
13	-0.32	-0.35	0.54	-0.36
14	-0.40	-0.38	0.53	-0.27
15	0.31	-0.23	-0.30	-0.21
16	-0.25	0.53	-0.37	-0.39
17	-0.25	0.40	-0.32	-0.30
18	-0.22	0.22	-0.18	-0.20

Таблица 1.12. Стойности на $gpbis$ на дистракторите на задачите с ИО от 2020 г.

В таблица 1.12 са представени коефициентите $gpbis$ на възможностите за отговор на задачите с ИО. Маркирани са коефициентите на правилните отговори на задачите. Очевидно всички дистрактори имат отрицателни стойности на разграничителна сила. Това показва, че те са предпочитани повече от по-слабите ученици и това ги определя като добри дистрактори.

Разглеждайки, обаче таблица 1.13, в която е дадено процентното съотношение на отговорите на всяка задача, се откроява отговор В на задача 7. Той е избран от 65% от всички ученици, докато верният отговор Г е избран едва от 17% от тях.

№	А	Б	В	Г
1	11%	13%	13%	62%
2	23%	43%	10%	23%
3	12%	16%	10%	62%
4	42%	21%	23%	14%
5	10%	6%	73%	11%
6	74%	9%	9%	8%
7	7%	10%	65%	17%
8	10%	10%	23%	56%
9	16%	17%	59%	7%
10	18%	68%	8%	7%
11	59%	22%	8%	10%
12	7%	17%	58%	17%
13	10%	16%	57%	16%
14	19%	9%	65%	6%
15	52%	17%	18%	11%
16	14%	53%	19%	13%
17	6%	69%	14%	10%
18	28%	34%	29%	7%

Таблица 1.13. Процентно съотношение на отговорите на задачите от 2020 г.

Някои от задачите с ИО от теста за НВО през 2020 г., които нямат много добри характеристики, са следните.

7. През ноември цената на лаптоп била 1049 лв. За Коледа цената му била намалена с 10% от нея, а през януари била увеличена с 20% от новата цена. Цената на лаптопа (в лв.) след двете промени се изчислява с помощта на израза:

А) $1049 - 0,10$

Б) $1049 + 0,20 \cdot 1049$

В) $1049 + (0,20 - 0,10) \cdot 1049$

Г) $1,20 \cdot (0,90 \cdot 1049)$

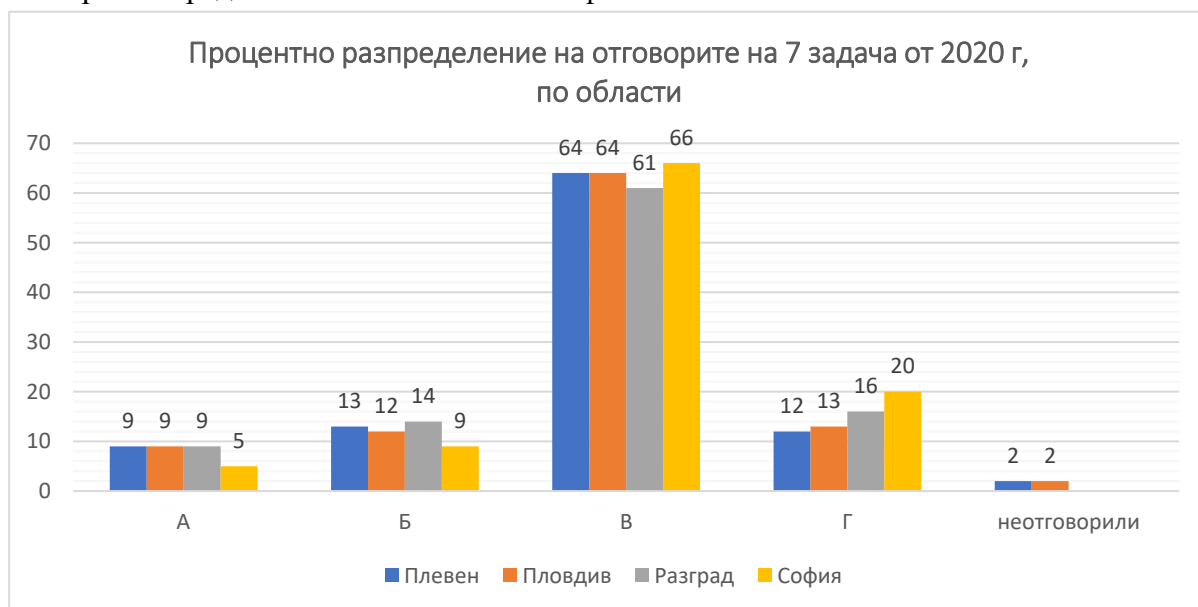
Фиг. 1.5. Условие на задача 7 от 2020 г.

Задача №7	Правилен отговор: Г	Процент не отговорили: 0,08%
Трудност: 0,17	Разграничителна сила: 0,33	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	7%	- 0,25
Б	10%	- 0,26
В	65%	- 0,16
Г*	17%	0,33

Таблица 1.14. Резултати на тестова задача 7 от 2020 г.

Условието на задача 7 е на фигура 1.5, а получените резултати са поместени в таблица 1.14. Задачата е от раздел „Процент“. Темата се изучава в 5 клас. След това смятането с проценти е като част от други видове задачи в 6 и VII клас. Обичайно се използва или само увеличение, или само намаление на някакви величини с определен процент. В условието на задача 7 участват и двете действия, което я прави много трудна. Познавателната област, към която може да се причисли тази задача е от равнище *приложение*. За решаването ѝ се изисква да се състави модел, като рационално се използва операцията умножение, за да се изчисли търсения процент. Обичайно в часовете по математика процент се смята чрез събиране или изваждане, съответно на увеличена или намалена величина. Разграничителната ѝ сила е добра, но не е много висока, т. е. голяма част от учениците с по-високи резултати също не успяват да посочат верния отговор. Забелязва се, че отговор В е много атрактивен. Цели 65% от учениците са го посочили и разграничителната му сила е близо до 0 (по-точно е -0,16). Този отговор показва разбиране за начина на пресмятане на процент от число, но не отчита, че при 2 последователни промени в цената, второто пресмятане се прави върху получената цена след първата промяна.

На фигура 1.6 е изобразено разпределението на отговорите на 7 задача във всяка от четирите административни области. Разликите в грешните отговори А, Б и В не са особено големи. По отношение на верния отговор Г се забелязва, че учениците от най-голямата и на-малката област (София и Разград) показват по-добри резултати от тези в другите две области. Интересно е да се отбележи, че атрактивния дистрактор В и верния отговор Г са предпочитани най-много в София.



Фиг. 1.6. Процентно разпределение на отговорите на 7 задача по области

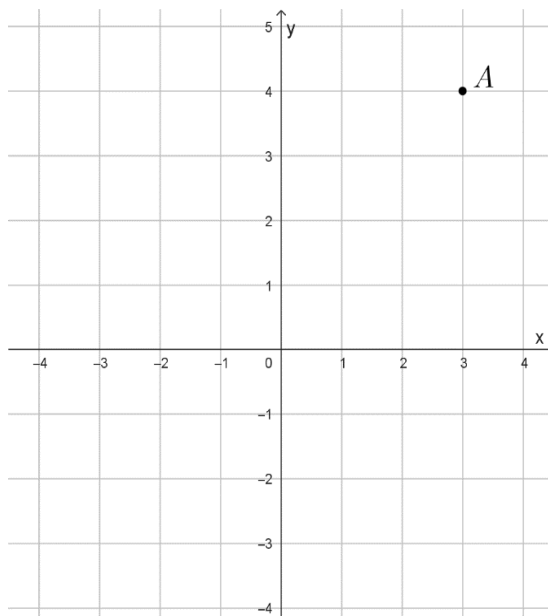
18. В правоъгълна координатна система е дадена точката A . По данните от чертежа намерете координатите на точка B , която е симетрична на точката A относно абсцисната ос.

А) $B(-3; -4)$

Б) $B(3; -4)$

В) $B(-3; 4)$

Г) $B(3; 0)$



Фиг. 1.7. Условие на задача 18 от 2020 г.

Задача №18	Правилен отговор: Б	Процент не отговорили: 0,10%
Трудност: 0,17	Разграничителна сила: 0,33	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	28%	- 0,22
Б*	34%	0,22
В	29%	- 0,18
Г	7%	- 0,20

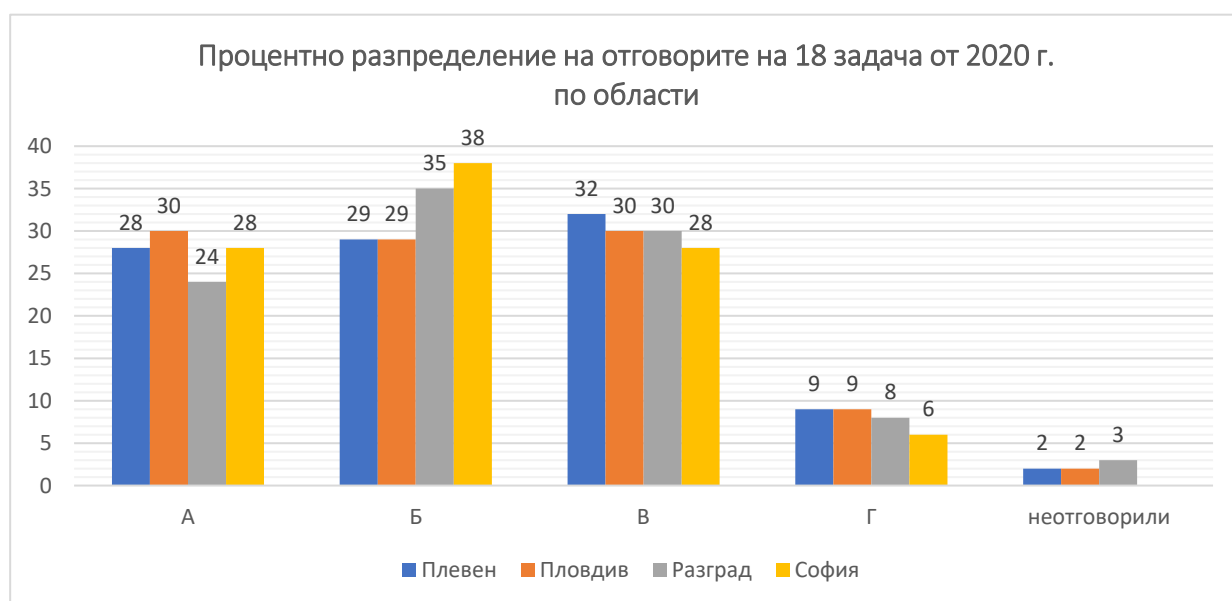
Таблица 1.15. Резултати на тестова задача 18 от 2020 г.

Друга задача, която прави впечатление е задача №18 от фигура 1.7. Нейните характеристики са дадени в таблица 1.15. Задачата се класифицира като трудна, със средна разделителна способност. Според (Стоименова, 2000) такава задача е добре да се преразгледа и да се подобри. Тя е от съдържателна област „Правоъгълна координатна система. Координати на точка“. В условието се търсят координатите на симетрична на дадена точка спрямо абсцисната ос. Дистракторите А и В са избирани от еднакъв брой ученици. Стойността на разграничителната сила е близко до нулата и показва, че те са избирани и от по-силните ученици. Вероятно защото те познават понятието симетрия, но грешат вида ѝ. Отговор В е с по-лоша разграничителна способност, което може да означава, че част от учениците грешат абсцисната с ординатната ос. Отговор Г, макар и сравнително малко избран, има смисъл на проекция на точка А. Това предполага, че такива ученици грешат понятието симетрия с проекция. Един вариант, който би могъл да подобри разграничителната сила на верния отговор, е да се добави в края на условието

„Ох“. Ето как би изглеждало то: „По данните от чертежа намерете координатите на точка В, която е симетрична на точката А относно абсцисната ос Ох.“

Тази задача може да се квалифицира според познавателните равнища на ниво *разбиране*. Учениците трябва да използват знанията си за симетрия спрямо права върху точка в координатна система, т. е. представяне на математически обект по познат алгоритъм.

Разглеждайки диаграмата на фигура 1.8 може да се отбележи, че както при задача 7 правилният отговор е избран по по-голяма част от учениците в най-малката и най-голямата административна област, отколкото от другите две области.



Фиг. 1.8. Процентно разпределение на отговорите на 18 задача по области

Първо да се обърне внимание на една от лесните задачи. На фигура 1.9 е дадено условието на задача 6. Нейните характеристики са дадени в таблица 1.16. Задачата е от тема „Вероятност на събитие“ и очевидно $\frac{3}{4}$ от учениците отговарят вярно на зададения въпрос. Това показва, че този тип основни задачи от вероятност са добре усвоени от голяма част от учениците. Тези отлични резултати може биха били по-различни, ако между дистракторите е сложен отговор $\frac{3}{4}$. Това е една типична грешка при смятане на вероятност, в която се намира отношението на броя на благоприятните към броя на неблагоприятните възможности. Интересно е, че отговор Г е посочен почти толкова често, колкото и другите два дистрактора. Това навежда на мисълта, че тези отговори са посочвани най-често на случаен принцип.

Според познавателната област тя е на ниво *знание*. За решаването ѝ се използва основно правилото за пресмятане на класическа вероятност. Разбира се, ученикът тук трябва да приложи и знания по българския език за понятието гласна буква.

6. На всяко едно от седем еднакви картончета е записана по една от седемте букви на думата **УЧЕБНИК**. Картончетата са поставени в урна. По случаен начин е изтеглено едно от тях. Каква е вероятността върху него да е записана буква, означаваща **гласен** звук?

А) $\frac{3}{7}$

Б) $\frac{4}{7}$

В) $\frac{6}{7}$

Г) 1

Фиг. 1.9. Условие на задача 6 от 2020 г.

Задача №6	Правилен отговор: А	Процент не отговорили: 0,11%
Трудност: 0,73	Разграничителна сила: 0,47	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А*	74%	0,47
Б	9%	- 0,30
В	9%	- 0,35
Г	8%	- 0,34

Таблица 1.16. Резултати на тестова задача 6 от 2020 г.

Следват три задачи, които се използват по-нататък в дисертационния труд за сравняване на постиженията на учениците от НВО 2020 и 2021 години. Това са 4, 13 и 14 задачи. И трите задачи са с добри характеристики по отношение на коефициентите на трудност и разграничителна сила.

4. Изразът $(-a - 2b)^2 - a - 2b$ е тъждествено равен на израза:

А) $(a + 2b)(a + 2b - 1)$

Б) $(a + 2b)(a + 2b + 1)$

В) $(-a - 2b)(a + 2b + 1)$

Г) $(-a - 2b)(a + 2b - 1)$

Фиг. 1.10. Условие на задача 4 от 2020 г.

Задача №4	Правилен отговор: А	Процент не отговорили: 0,18%
Трудност: 0,42	Разграничителна сила: 0,41	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А*	42%	0,41
Б	21%	- 0,33
В	23%	- 0,27
Г	13%	- 0,24

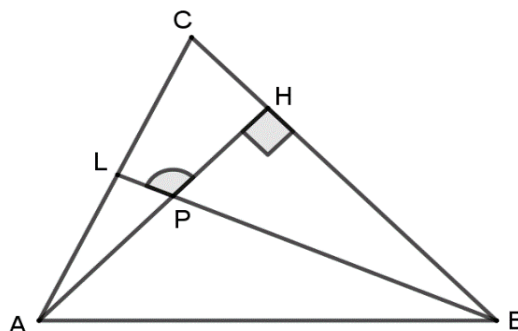
Таблица 1.17. Резултати на тестова задача 4 от 2020 г.

На фигура 1.10 е дадено условието на задача 4. Нейните характеристики са дадени в таблица 1.17. Задачата е от тема „Разлагане на многочлен на множители“. Нейната трудност е на границата между оптимална и трудна. Разграничителната ѝ сила също е в гранични стойности между добра и много добра. Нисък е процентът на верните отговори (42%). Всичко това дава основание да се приеме, че задачата може да се подобри. Ученикът трябва да направи разлагане на изразът, като изнесе знак минус пред скоби във втората част на израза, но трябва да знае и формулата $(-a - b)^2 = (a + b)^2$. Тази формула често не се прилага правилно. Типичните грешки са показани в дистракторите Б и В. Те общо са посочени от почти същия процент ученици, посочили и верния отговор.

Задача 4 може да се причисли към познавателно ниво *разбиране*, понеже се използва еквивалентни преобразувания с позната стратегия.

13. На чертежа AH и BL са съответно височина и ъглополовяща в $\triangle ABC$, като $AH \cap BL = P$ и $\angle ABL = 15^\circ$. Мярката на $\angle LPH$ е:

- А) 135°
- Б) 115°
- В) 105°
- Г) 75°



Фиг. 1.11. Условие на задача 13 от 2020 г.

Задача №13	Правилен отговор: В	Процент не отговорили: 0,08%
Трудност: 0,57	Разграничителна сила: 0,54	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	10%	- 0,32
Б	16%	- 0,35
В*	57%	0,54
Г	16%	- 0,36

Таблица 1.18. Резултати на тестова задача 13 от 2020 г.

На фигура 1.11 е дадено условието на задача 13. Нейните характеристики са дадени в таблица 1.18. Задачата е от тема „Зависимости между външни и вътрешни ъгли в триъгълник“. За да я реши, ученикът трябва да познава понятията ъглополовяща и височина, както и да намира външен ъгъл в триъгълник. Тези рутинни знания позволяват тази задача да се причисли към познавателно ниво *разбиране*. Данните показват, че голяма част (57%) от учениците се справят с тази задача. Високата стойност на разграничителна сила на правилния отговор и ниските стойности на дистракторите означават, че задачата добре разграничава по-добрите от по-слабите ученици.

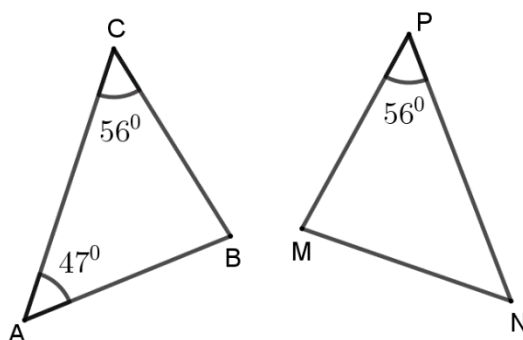
14. Дадени са $\triangle ABC$ и $\triangle NMP$, за които $AC = NP$, $BC = MP$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle NPM = 56^\circ$. Ако $\sphericalangle CAB = 47^\circ$, то градусната мярка на $\sphericalangle NMP$ е:

А) 47°

Б) 56°

В) 77°

Г) 97°



Фиг. 1.12. Условие на задача 14 от 2020 г.

Задача №14	Правилен отговор: В	Процент не отговорили: 0,06%
Трудност: 0,65	Разграничителна сила: 0,53	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	19%	- 0,40
Б	9%	- 0,38
В*	65%	0,53
Г	6%	- 0,27

Таблица 1.19. Резултати на тестова задача 14 от 2020 г.

На фигура 1.12 е дадено условието на задача 14. Нейните характеристики са дадени в таблица 1.19. Задачата е от тема „Свойства на еднаквите триъгълници“. Високата стойност на коефициента на трудност и високият процент посочили верния отговор показва, че задачата не е затруднила голяма част от учениците. Може да се предположи, че това се дължи на добре изученото свойство на сбора на ъглите в триъгълник. Задачата може да се причисли към познавателно ниво *знание*, т. к. използва добре усвоен алгоритъм за пресмятане на третия ъгъл в триъгълник и класифицирането на два триъгълника като еднакви. Тук еднаквостта на триъгълниците се вижда дори само

от чертежа. Може би тази задача би била по-трудна, ако не е придружена от чертеж. Но и в този вид тя има много добри характеристики. Нещо повече, тази задача е давана на НВО през следващата година. Сравненията между двете е направена по-нататък в дисертационния труд, като са използвани методите на IRT, които позволяват да се сравнят резултатите от различни тестове.

Надеждност на теста от НВО 2020 г.

Данните, получени от jMetrik върху тестовите задачи с ИО от 2020 г. са поместени в таблица 1.20.

Най-често използваният коефициент – алфа на Кронбах има стойност 0,8604. Тази стойност според (Банков, 2012) означава, че тази част от НВО може да послужи за сравняване на групи от популацията. Тези групи могат да бъдат разделени по различни признаци, като: пол, регион, училище... В същата таблица 1.20 се вижда, че стандартната грешка на измерването (SEM) е 1,75. Следователно 95 процентния доверителен интервал, изразен в брой точки, е с дължина 6 точки. Това означава, че при тази надеждност на теста, разлика в баловите 5-6 точки на ученици може да е резултат от грешката на измерването, а не от техните действителни знания. Следователно, тест с така получената надеждност не е подходящ за вземане на решения, свързани с отделни ученици, като например класиране в гимназия.

Method	Estimate	95% Conf. Int.	SEM
Guttman's L2	0,8633	(0,8605, 0,8661)	1,7294
Coefficient Alpha	0,8604	(0,8575, 0,8633)	1,7476
Feldt-Gilmer	0,8632	(0,8603, 0,8660)	1,7303
Feldt-Brennan	0,8623	(0,8594, 0,8652)	1,7358
Raju's Beta	0,8604	(0,8575, 0,8633)	1,7476

Таблица 1.20. Коефициент на надеждност на тестовите задачи с ИО от 2020 г.

Точки	0	(0;5]	(5;10]	(10;20]	(20;30]	(30;40]
Процент	24,79%	23,09%	17,22%	21,06%	9,36%	4,48%

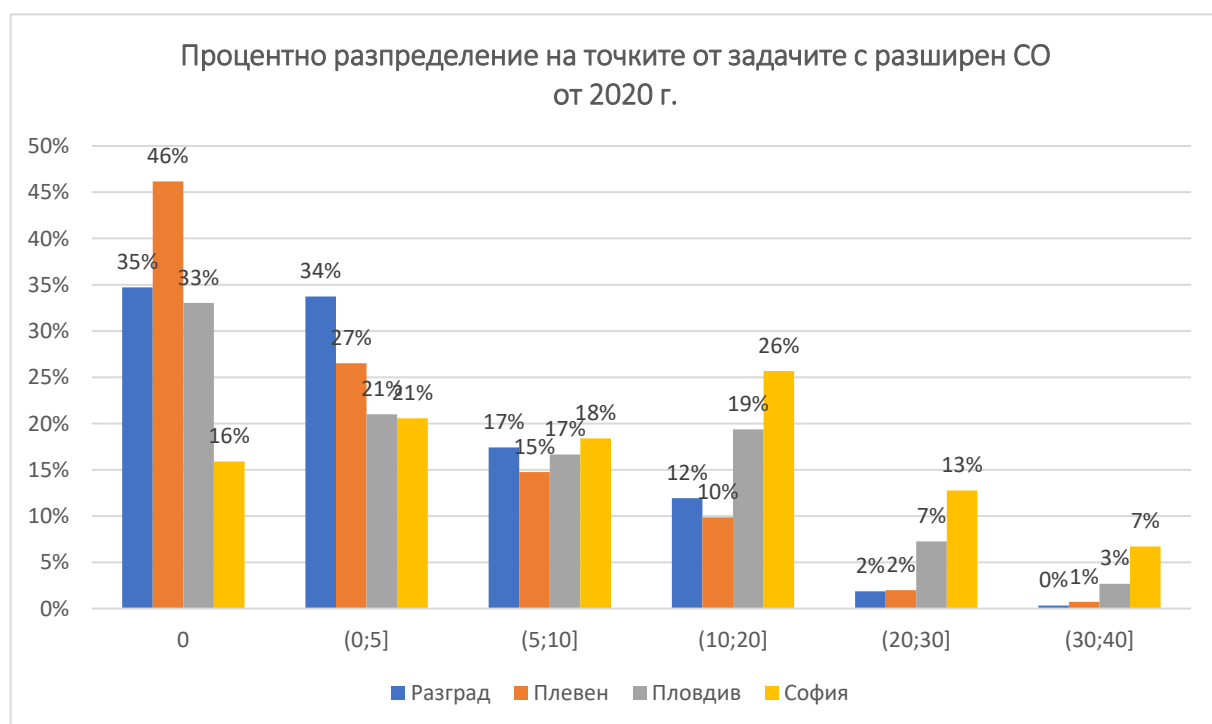
Таблица 1.21. Процентно разпределение на точките от задачи от Втори модул – 2020 г.

Както е известно, НВО след VII клас служи както за диагностика на наученото, така и за класиране на учениците в гимназиите. Данните за надеждността на теста показват, че той има добри показатели, разглеждан като критериален тест за диагностика. По отношение на класирането, обаче, надеждността на тази част от теста с

ИО не е достатъчно на високо ниво. В НВО има задачи и със свободен отговор, но практиката показва, че на тази част се явяват по-добрите ученици.

В таблица 1.21 е дадено процентното разпределение на точките, получени от 21-23 задачи с разширен СО, на всички ученици явили се на НВО през 2020 г. В графата 0 точки са включени всички ученици, които или не са се явили на Втори модул, или такива, които не са решили нито един пример от него. Това показва, че 1/4 от тях не се справят или нямат желание да работят върху задачи с разширен СО. Друго, което прави впечатление е, че 47,88% (почти половината) едва събират до 5 точки, които са равностойни на една задача с кратък СО.

Следователно за почти половината от учениците задачите с разширен СО не носят допълнително точки и за тях тази форма на НВО не е полезна при класирането им в гимназиалния етап.



Фиг. 1.13. Процентно разпределение по области на точките от задачи от 21 до 23 с разширен СО – 2020 г.

Ако се разгледат данните по административните области, се получава фигура 1.13. В нея точките от 0 до 40 са разделени на няколко подинтервала. Особен интерес представляват първите стълбове над 0 т. и над интервала 0-5 т. Очевидно, над 1/3 от учениците от трите по-малки области имат 0 точки на Втория модул. Като за област Плевен този резултат е близо половината. Освен това, до 5 точки са получили близо 70%

от учениците в Плевен и Разград и над 50% от тези в Пловдив. Следователно, за тях задачите с разширен СО в много малка степен допринасят за разслояването им.

Според тези данни, въпросът дали задачите с кратък СО допринасят НВО да се използва за критериален тест за по-малките от София-град е доста спорен.

Единствената област, за която горните данни имат по-различно тълкуване е София-град. За нея, според фигура 1.13, разслоението е почти равномерно и може да се предположи, че задачите със свободен отговор допринасят за нормативното оценяване на учениците. Тези задачи ще бъдат по-обстойно проучени във втора глава на дисертационния труд.

Валидност на теста от НВО 2020 г.

От 2019 година авторът на дисертационния труд е член на екипа, подготвящ задачи за НВО след VII и X клас. При подготовката на задачите всеки от екипа трябва да се съобразява с целите на НВО в VII клас съгласно чл. 44, ал. 1 от Наредба № 11 за оценяване на резултатите от обучението на учениците (МОН, 2024).

Един от основните моменти е спецификацията на задачите според съдържателната област. В таблица 1.22 са нанесени номерата на задачите от НВО-2020 г. според съдържателната област, като са поставени в една от трите колони, които представят три от познавателните равнища – знание (З), разбиране(Р) и приложение(П). Както се вижда, тези задачи са разпределени равномерно по цялото съдържание и отразяват коректно зададената предварително класификация.

Броят на задачите според основните теми е:

- Числа. Алгебра – 5 задачи
- Фигури и тела. Измерване – 9 задачи
- Елементи от вероятности и статистика – 1 задача
- Логически знания. Моделиране – 3 задачи

№	Наименование на елемента от съдържателната област	2020 г.		
	ЧИСЛА. АЛГЕБРА	З	Р	П
1	Естествени числа. Кратни и делители на число. Прости и съставни числа. Признаци за делимост;			
2	Рационални числа. Действия с рационални числа (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване). Свойства на числови равенства и неравенства. Процент - основни задачи;	1, 2		7
3	Цели изрази. Тъждествени изрази. Формули за съкратено умножение;	3		
4	Разлагане на многочлени на множители;		4	
5	Линейни уравнения с едно неизвестно $ax+b=0$ и уравнения, свеждащи се до линейно чрез еквивалентни преобразувания;			
6	Модулно линейно уравнение от вида $ ax+b =c$;			
7	Линейни неравенства с едно неизвестно $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b\geq 0$ и неравенства, свеждащи се към тях чрез еквивалентни преобразувания.			
	ФИГУРИ И ТЕЛА. ИЗМЕРВАНЕ			
8	Лице и периметър на равнинни фигури;			
9	Многоъгълник. Правилен многоъгълник;			
10	Правоъгълна координатна система. Разстояние от точка до права;		18	
11	Елементи и свойства на ръбести тела (куб, правоъгълен паралелепипед, права призма, правилна пирамида);	9		
12	Елементи и свойства на валчести тела (прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, сфера и кълбо)			
13	Съседни и противоположни ъгли. Перпендикулярни прави;		10	
14	Успоредни прави - признаци и свойства;	12		
15	Триъгълник. Сбор от ъглите в триъгълник. Външен ъгъл на триъгълник;	13	16	
16	Еднакви триъгълници. Питагорова теорема;	14		
17	Симетрала на отсечка и ъглополовяща на ъгъл;		15	
18	Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник;			
19	Правоъгълен триъгълник. Медиана към хипотенуза в правоъгълен триъгълник. Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30° ;		17	
20	Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Неравенство на триъгълника;			
21	Успоредник. Видове успоредници - правоъгълник, ромб, квадрат;			
	ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА			
22	Представяне, разчитане и интерпретиране на данни, представени чрез диаграми и графики;			
23	Множества и операции с тях;			
24	Случайно събитие. Вероятност на случайно събитие.	6		
	ЛОГИЧЕСКИ ЗНАНИЯ. МОДЕЛИРАНЕ			
25	Отношения и пропорции. Проста и обратна пропорционалност;			
26	Средноаритметично на две и повече числа;			
27	Моделиране с изрази, линейни уравнения и неравенства .	5, 11	8	

Таблица 1.22. Разпределение на задачите по съдържателни области от НВО 2020 г.

3. Анализ на задачи от НВО VII клас, проведено през 2021 г.

Условията на задачите и техните верни отговори са дадени в (МОН-2021, 2024). Разглеждат се резултатите от задачите с ИО на 19 303 ученици от изследваните четири административни области на България. Всяка задача се кодира с 1 точка за верен отговор и 0 точки за грешен или непосочен отговор. Основните статистически характеристики според КТТ, получени чрез jMetrik са:

- минимален бал – 0 точки
- максимален бал – 18 точки
- **среден бал – 10,52 точки**
- медиана – 10 точки
- мода – 18 точки (6 точки за 2020 г.)
- **средноквадратично отклонение – 4,80 (по-голямо от 4,68 от 2020 г.)**

Верните отговори са разпределение неравномерно, като отговор В) е предложен доминиращо:

- А) – 5 пъти в задачи 7, 8, 9, 12, 17
- Б) – 3 пъти в задачи 4, 10, 13
- В) – 7 пъти в задачи 1, 5, 11, 14, 15, 16, 18
- Г) – 3 пъти в задачи 2, 3, 6

Процентното разпределение по балове е изобразено на фигура 1.14.



Фиг. 1.14. Процентно разпределение по балове на НВО-2021 г.

Интер-вали	X_i	X_{i+1}	Чес-тота	Абсолютна честота	$\frac{X_i - m}{\sigma}$	$\frac{X_{i+1} - m}{\sigma}$	$P(\eta_1 < \eta \leq \eta_2)$	Теоретична честота	$\frac{(n_i - 100 \cdot p_i)^2}{100 \cdot p_i}$
				n_i	η_1	η_2	p_i	$100 \cdot p_i$	
(0,2]	0	2	404	2	-2.19	-1.77	0.02	2	0.03
(2,4]	2	4	1682	9	-1.77	-1.36	0.05	5	2.94
(4,6]	4	6	2730	14	-1.36	-0.94	0.09	9	3.61
(6,8]	6	8	2811	15	-0.94	-0.52	0.13	13	0.30
(8,10]	8	10	2417	13	-0.52	-0.11	0.16	16	0.63
(10,12]	10	12	1975	10	-0.11	0.31	0.16	16	2.31
(12,14]	12	14	1972	10	0.31	0.73	0.14	14	1.23
(14,16]	14	16	2214	12	0.73	1.14	0.11	11	0.05
(16,18]	16	18	3047	16	1.14	1.56	0.07	7	12.34
сума			19252	100				97	$\chi^2_{\text{емп}} = 23.45$

Таблица 1.23. Пресмятане на $\chi^2_{\text{емп}}$ на баловите от задачите с ИО от НВО 2021 г.

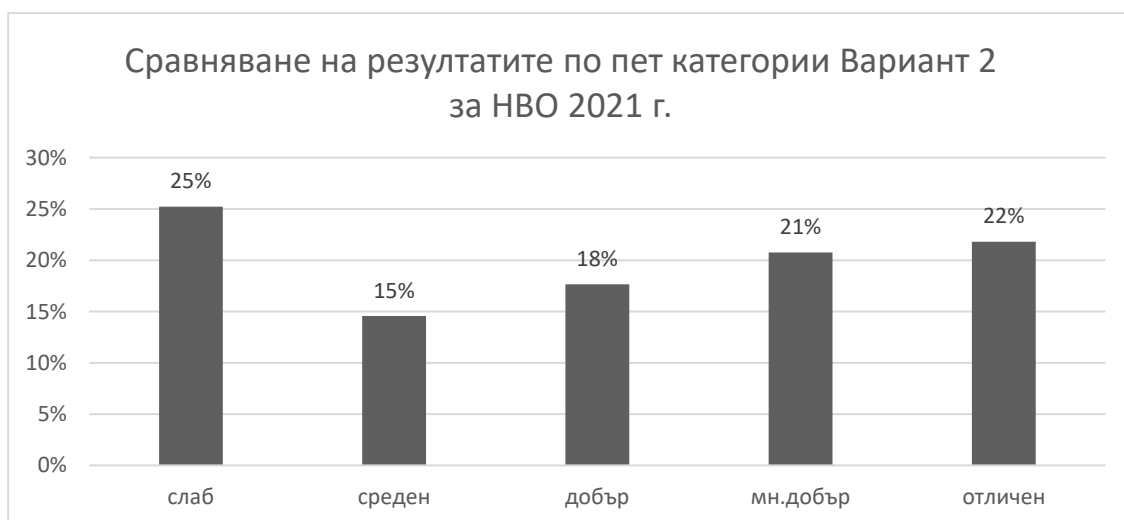
Тестът за нормалност на баловите от НВО 2021 г. се получава според таблица 1.23 и е по аналогия на таблица 1.7 от 2020 г. Стойността на $\chi^2_{1-\alpha}(6) = 23,45$ се определя както и при 2020 г.

Тъй като $\chi^2_{\text{емп}} > \chi^2_{1-\alpha}(6)$, то хипотезата H_0 се **отхвърля**, т. е. както и при изследването от 2020 г. не може да твърдим, че генералната съвкупност от баловите на учениците е **нормално разпределена**.

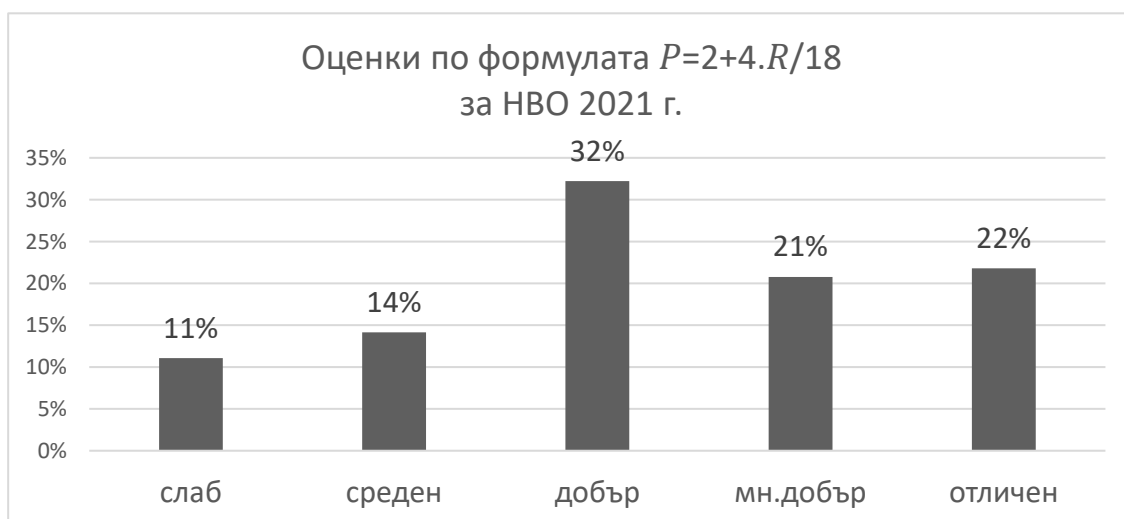
Както при НВО 2020 г. тези резултати могат да се представят в шестобална система. Отново, поради високата стойност на средноквадратичното отклонение, нека завишим границата на налучкване 4,5 точки с половината на средноквадратичното отклонение $4,5+2,4=6,9$. Тогава се получава същата както при 2020 година линейна трансформация за точките от 7 до 17: $y = 0,3x + 0,9$.

На фигура 1.15 се вижда, че според тази трансформация слаби оценки ще получат 25% от учениците, което е малко по-ниско от НВО-2020 (29%).

На фигура 1.16 е показано процентното разпределение на оценките, като се използва таблица 1.8 за трансформацията на точките в оценки по формулата $P = 2 + 4 \cdot \frac{R}{18}$, в която P е оценката на ученик, получил R точки. Тук слабите оценки са 11%, което също е по-ниско от тези през 2020 г. (14%).



Фиг. 1.15. Диаграма на оценките според линейната трансформация – вариант 2



Фиг. 1.16. Диаграма на оценките според вариант 3

Изследването на тестове с Класическата теория на тестовете дава ограничени възможности да се сравняват два различни теста с две различни популации. По тази причина в трета точка на втора глава ще бъде показан метод за сравняване (чрез IRT и така наречените “anchor” задачи) на постиженията на учениците от НВО, проведено през 2020 и 2021 година. Този метод ще бъде приложен и за сравняване на тези постижения и за 2022 и 2023 година.

Първо да се разгледат характеристиките на теста с методите на КТТ. В таблица 1.24 са дадени задачите, подредени според коефициента им на трудност и е посочено тълкува-нето на тези коефициенти. Очевидно повечето задачи имат оптимална трудност, три са лесни и една е трудни.

№	Трудност	Дискриминация	Тълкуване
12	0.79	0.48	лесна
18	0.75	0.43	лесна
10	0.72	0.49	лесна
2	0.68	0.41	оптимална
9	0.66	0.56	оптимална
16	0.64	0.47	оптимална
15	0.62	0.43	оптимална
4	0.61	0.59	оптимална
11	0.57	0.46	оптимална
5	0.57	0.49	оптимална
13	0.56	0.48	оптимална
14	0.55	0.54	оптимална
17	0.53	0.30	оптимална
8	0.53	0.46	оптимална
7	0.49	0.52	оптимална
1	0.47	0.66	оптимална
3	0.42	0.42	оптимална
6	0.37	0.45	трудна

Таблица 1.24. Наредба на задачите с ИО според трудността им от 2021 г.

Ако коефициентите на трудност се разделят на 10 равномерни интервала, се получава честотното разпределение на задачите е таблица 1.25. Според тази диаграма задачите са добре балансирани според коефициента им на трудност.

Трудност		Брой	Честота	Тълкуване
от	до			
0.91	1.00			Лесна
0.81	0.90			
0.71	0.80	3	###	
0.61	0.70	5	#####	Оптимална
0.51	0.60	6	#####	
0.41	0.50	3	###	
0.31	0.40	1	#	Трудна
0.21	0.30			
0.11	0.20			Много трудна
0.00	0.10			

Таблица 1.25. Честотно разпределение на задачите според тяхната трудност от 2021 г.

Дискриминативната сила на всяка от задачите, подредени според коефициента g_{rbis} е дадена в таблица 1.26. Тези данни показват, че почти всички задачи имат много добра разграничителна сила. Само задача 17 има по-ниски показатели в това отношение.

№	Трудност	Дискриминация	Тълкуване
1	0.47	0.66	мн. добра
4	0.61	0.59	мн. добра
9	0.66	0.56	мн. добра
14	0.55	0.54	мн. добра
7	0.49	0.52	мн. добра
10	0.72	0.49	мн. добра
5	0.57	0.49	мн. добра
12	0.79	0.48	мн. добра
13	0.56	0.48	мн. добра
16	0.64	0.47	мн. добра
11	0.57	0.46	мн. добра
8	0.53	0.46	мн. добра
6	0.37	0.45	мн. добра
15	0.62	0.43	мн. добра
18	0.75	0.43	мн. добра
3	0.42	0.42	мн. добра
2	0.68	0.41	мн. добра
17	0.53	0.30	средна

Таблица 1.26. Наредба на задачите с ИО според дискриминативната им сила от 2021 г.

В таблица 1.27 са представени коефициентите grb_{is} на възможностите за отговор на задачите с ИО. Маркирани са коефициентите на правилните отговори на задачите.

№	А	Б	В	Г
1	-0.47	-0.46	0.66	-0.13
2	-0.23	-0.28	-0.38	0.41
3	-0.26	-0.21	-0.38	0.42
4	-0.43	0.59	-0.28	-0.38
5	-0.34	-0.35	0.49	-0.28
6	-0.17	-0.33	-0.34	0.45
7	0.52	-0.40	-0.32	-0.26
8	0.46	-0.34	-0.35	-0.28
9	0.56	-0.29	-0.41	-0.38
10	-0.34	0.49	-0.36	-0.31
11	-0.38	-0.31	0.46	-0.23
12	0.48	-0.38	-0.31	-0.28
13	-0.34	0.48	-0.33	-0.29
14	-0.30	-0.37	0.54	-0.36
15	-0.31	-0.29	0.43	-0.34
16	-0.29	-0.32	0.47	-0.34
17	0.30	-0.23	-0.22	-0.27
18	-0.29	-0.34	0.43	-0.28

Таблица 1.27. Стойности на grb_{is} на дистракторите на задачите с ИО от 2021 г.

№	А	Б	В	Г
1	24%	24%	47%	4%
2	5%	15%	12%	68%
3	12%	26%	19%	42%
4	18%	61%	6%	15%
5	18%	12%	57%	12%
6	12%	38%	13%	37%
7	49%	19%	23%	8%
8	52%	8%	31%	8%
9	66%	6%	15%	13%
10	8%	72%	8%	12%
11	14%	14%	57%	13%
12	79%	9%	7%	5%
13	22%	56%	13%	8%
14	9%	25%	55%	11%
15	8%	19%	62%	9%
16	14%	7%	64%	13%
17	53%	11%	19%	16%
18	7%	10%	75%	7%

Таблица 1.28. Процентно съотношение на отговорите на задачите

Очевидно всички дистрактори имат отрицателни стойности на разграничителна сила. Това показва, че те са предпочитани повече от по-слабите ученици и това ги определя като добри дистрактори.

Разглеждайки таблица 1.28, в която е дадено процентното съотношение на отговорите на всяка задача, се откроява отговор Б на задача 6. Той е избран от почти същия процент ученици, колкото и верният отговор Г. Правят впечатление още задачи 1 и 3, в които верният отговор е посочван от по-малко от половината ученици. За разлика от тях, задачите с номера 12 и 18 за посочени от над 3/4 от учениците. Тези задачи ще бъдат разгледани по-подробно в дисертационния труд.

6. Изразът $(y - x)^2 - y + x$ е тъждествено равен на:

А) $(x - y)(x - y - 1)$

Б) $(y - x)(y - x + 1)$

В) $(y - x)(x - y)$

Г) $(x - y)(x - y + 1)$

Фиг. 1.17. Условие на задача 6 от 2021 г.

Задача №6	Правилен отговор: Г	Процент не отговорили: 0,11%
Трудност: 0,37	Разграничителна сила: 0,45	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	12%	- 0,17
Б	38%	- 0,33
В	13%	- 0,34
Г*	37%	0,45

Таблица 1.29. Резултати на тестова задача 6 от 2021 г.

Трябва да се обърне внимание на някои конкретни задачи от НВО 2021 година. На фигура 1.17 е дадено условието на най-трудната в този тест задача 6. Нейните характеристики са дадени в таблица 1.29. На пръв поглед задачата е същата като задача 4 от 2020 г. (фигура 1.10), но тя е затруднила повече ученици – коефициентът ѝ на трудност е 0,37 (за сравнение 0,42 за 2020 г.). Една възможна причина е повечето стъпки, които трябва да се направят, за да се получи верния отговор. Ето едно примерно решение:

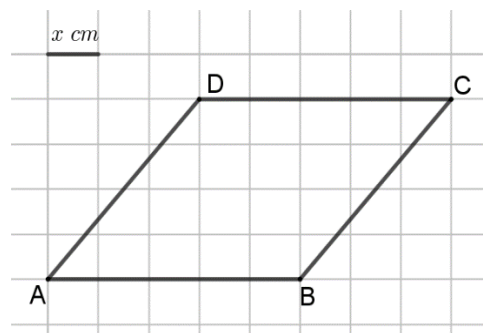
$$(y - x)^2 - y + x = (y - x)^2 - (y - x) = (y - x)(y - x - 1)$$

В разлагането до тук се получава почти същия отговор като дистрактора Б) и това обуславя защо посочилите го са колкото тези, които посочват верния отговор Г), съответно 38% и 37%. За да се получи, обаче отговорът Г) трябва да се изнесе знакът минус от двете скоби. Това действие не е от най-лесните за учениците. Познавателното ниво на тази задача също може да се приеме, че е *разбиране*.

На фигура 1.18 е дадено условието на задача 17. Нейните характеристики са дадени в таблица 1.30. Задачата е от тема „Лице на ромб“. Верният отговор е посочен от над половината от учениците. В същото време задачата е със средно ниво на разграничителна сила. Това показва, че голяма част от учениците с по-ниски способности също са посочвали верния отговор. Едно обяснение на това е, че след като се получи $x = 2 \text{ cm}$, отговорът 80 може да се получи и чрез умножаването $2 \cdot 40$. Често се среща сред по-слабите ученици, когато имат 2 числа да търсят тяхното умножение или събиране. Вярното пресмятане на лицето, обаче се получава: $S = 5x \cdot 4x = 20x^2 = 80$. Един вариант да се провери дали задачата ще подобри разграничителната сила е да се промени ромба, така че височината ми да е $3x$ и съответно лицето се получава $S = 5x \cdot 3x = 15x^2 = 60$. Проверка на това предположение е направено в изследването в трета глава.

17. В квадратна мрежа с единична отсечка x cm е начертан ромб ABCD. Ако обиколката на ромба е 40 cm, то лицето му е:

- А) 80 cm^2
- Б) 50 cm^2
- В) 40 cm^2
- Г) 20 cm^2



Фиг. 1.18. Условие на задача 17 от 2021 г.

Задача №17	Правилен отговор: А	Процент не отговорили: 0,12%
Трудност: 0,53	Разграничителна сила: 0,30	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А*	53%	0,30
Б	11%	- 0,23
В	19%	- 0,22
Г	16%	- 0,27

Таблица 1.30. Резултати на тестова задача 17 от 2021 г.

Друга задача, която прави впечатление е задача 1. Условието ѝ е на фигура 1.19. Нейните характеристики са в таблица 1.31.

1. Стойността на израза $2021 - 2020 \cdot (-0,1)$ е:

- А) $-0,1$
- Б) 1
- В) 2223
- Г) 2219

Фиг. 1.19. Условие на задача 1 от 2021 г.

Задача №1	Правилен отговор: В	Процент не отговорили: 0,13%
Трудност: 0,47	Разграничителна сила: 0,66	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	24%	- 0,47
Б	24%	- 0,46
В*	47%	0,66
Г	4%	- 0,13

Таблица 1.31. Резултати на тестова задача 1 от 2021 г.

Задачата е от раздел „Числени стойности на рационални изрази“. Такива задачи има във всички НВО след VII клас. Обикновено се позиционират в началото на теста

като се очаква да са от най-лесните. Коефициентът на трудност на тази задача е 0,47, което означава, че по-малко от половината от учениците са посочили верния отговор, т. е. за тях тя не е лесна задача. Според класификацията на (Стоименова, 2000) трудността ѝ е оптимална. Освен това, коефициентът на разграничителна сила 0,66 е най-високият от всички задачи в този тест. За да се реши, ученикът трябва да знае редът на действие. Това се проверява с отговорите А) и Б). Те са посочени общо от 48% от учениците, повече отколкото са тези, посочили верния отговор. Такъв тип задачи показват нивото на математическата грамотност, подобно на поставянето на пълния член в българската граматика. Очевидно, има над какво да се работи още по този въпрос. Отговор Г) се получава при следното пресмятане $2219 = 2021 - 202$, т. е. при грешно умножаване на двете отрицателни числа. Този отговор е посочен едва от 4% от учениците и може да се приеме, че това правило е отлично усвоено.

Надеждност на тестовите задачи с ИО от НВО 2021 г.

Според таблица 1.32 коефициентът алфа на Кронбах е 0,8677 и е сравним с този от получения за НВО 2020 г. коефициент 0,8604. По тази причина могат да се направят същите изводи като в „Надеждност на тестовите задачи с ИО от НВО 2020 г.“.

Method	Estimate	95% Conf. Int.	SEM
Guttman's L2	0,8693	(0,8667, 0,8720)	1,7357
Coefficient Alpha	0,8677	(0,8650, 0,8704)	1,7466
Feldt-Gilmer	0,8693	(0,8666, 0,8720)	1,7359
Feldt-Brennan	0,8688	(0,8661, 0,8715)	1,7395
Raju's Beta	0,8677	(0,8650, 0,8704)	1,7466

Таблица 1.32. Коефициент на надеждност на тестовите задачи с ИО от 2021 г.

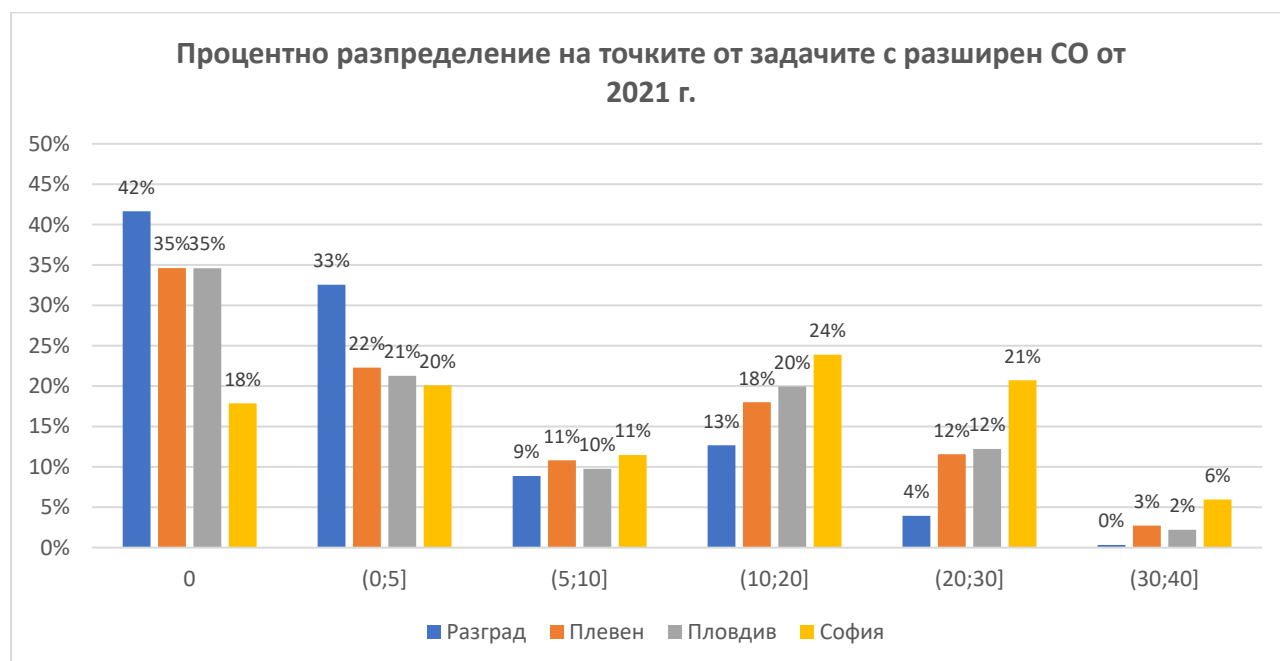
В таблица 1.33 се вижда, че както и през 2020 г. около 1/4 от учениците не са получили точки по 2-рия модул на НВО. Освен това за 48,24% от тях задачите с разширен СО не допринасят за повишаване на състезателния им бал. За сравнение през 2020 г. този процент е 47,88%.

Точки	0	(0;5]	(5;10]	(10;20]	(20;30]	(30;40]
Процент	26.83%	21.41%	10.73%	21.17%	15.83%	4.03%

Таблица 1.33. Процентно разпределение на точките от задачи от Втори модул – 2021 г.

Ако се разгледат данните по административните области, се получава фигура 1.20. Отново да се обърне внимание на първите стълбове над 0 т. и над интервала 0-5 т. Забелязва се увеличение на процента ученици, получили 0 точки в Разград (от 35% през

2020 на 42% през 2021) и намаление на тези в Плевен (от 46% на 35%). Ако се погледнат резултатите до 5 точки, тенденцията се запазва. Около 70% от учениците в малките области и 55% от тези в Пловдив получават точки основно на задачите от 1-вия модул на НВО. Единствено област София е изключение от тази тенденция.



Фиг. 1.20. Процентно разпределение по области на точките от задачи от 21 до 23 с разширен СО – 2021 г.

Валидност на теста от НВО 2021 г.

В таблица 1.34 са нанесени номерата на задачите от НВО-2021 г. според съдържателната област, като са поставени в една от трите колони, които представят три от познавателните равнища – знание (З), разбиране(Р) и приложение(П). Както се вижда, тези задачи са разпределени равномерно по цялото съдържание и отразяват коректно зададената предварително класификация.

Броят на задачите според основните теми е:

- Числа. Алгебра – 7 задачи
- Фигури и тела. Измерване – 8 задачи
- Елементи от вероятности и статистика – 1 задача

Логически знания. Моделиране – 2 задачи

№	Наименование на елемента от съдържателната област	2021 г.		
	ЧИСЛА. АЛГЕБРА	З	Р	П
1	Естествени числа. Кратни и делители на число. Прости и съставни числа. Признаци за делимост;			
2	Рационални числа. Действия с рационални числа (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване). Свойства на числови равенства и неравенства. Процент - основни задачи;	1, 3		
3	Цели изрази. Тъждествени изрази. Формули за съкратено умножение;	2		
4	Разлагане на многочлени на множители;		6	
5	Линейни уравнения с едно неизвестно $ax+b=0$ и уравнения, свеждащи се до линейно чрез еквивалентни преобразувания;	4		
6	Модулно линейно уравнение от вида $ ax+b =c$;	8		
7	Линейни неравенства с едно неизвестно $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b\geq 0$ и неравенства, свеждащи се към тях чрез еквивалентни преобразувания.	5		
	ФИГУРИ И ТЕЛА. ИЗМЕРВАНЕ			
8	Лице и периметър на равнинни фигури;	17		
9	Многоъгълник. Правилен многоъгълник;			
10	Правоъгълна координатна система. Разстояние от точка до права;			
11	Елементи и свойства на ръбести тела (куб, правоъгълен паралелепипед, права призма, правилна пирамида);	11		
12	Елементи и свойства на валчести тела (прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, сфера и кълбо)			
13	Съседни и противоположни ъгли. Перпендикулярни прави;	12		
14	Успоредни прави - признаци и свойства;		13	
15	Триъгълник. Сбор от ъглите в триъгълник. Външен ъгъл на триъгълник;		14	
16	Еднакви триъгълници. Питагорова теорема;	10		
17	Симетрала на отсечка и ъглополовяща на ъгъл;		15	
18	Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник;			
19	Правоъгълен триъгълник. Медиана към хипотенуза в правоъгълен триъгълник. Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30° ;		16	
20	Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Неравенство на триъгълника;			
21	Успоредник. Видове успоредници - правоъгълник, ромб, квадрат;			
	ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА			
22	Представяне, разчитане и интерпретиране на данни, представени чрез диаграми и графики;			
23	Множества и операции с тях;			
24	Случайно събитие. Вероятност на случайно събитие.	9		
	ЛОГИЧЕСКИ ЗНАНИЯ. МОДЕЛИРАНЕ			
25	Отношения и пропорции. Проста и обратна пропорционалност;	18		
26	Средноаритметично на две и повече числа;			
27	Моделиране с изрази, линейни уравнения и неравенства .	7		

Таблица 1.34. Разпределение на задачите по съдържателни области от НВО 2021 г.

4. Анализ на задачи от НВО VII клас, проведено през 2022 г.

Условията на задачите и техните верни отговори са дадени в (МОН-2022, 2024).

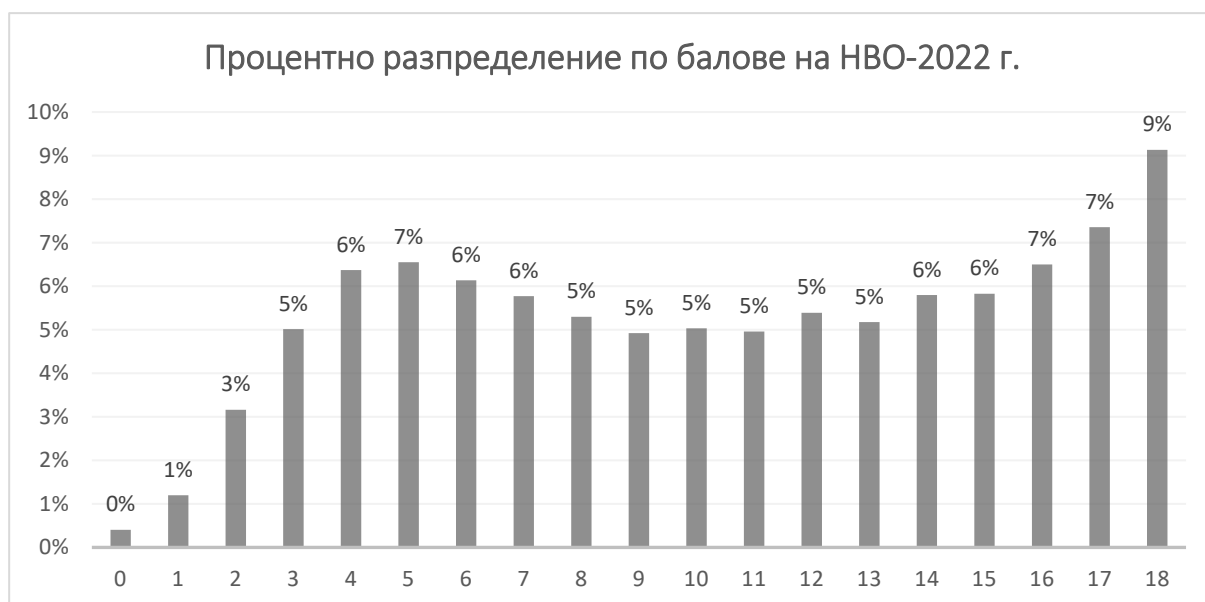
Разглеждат се резултатите от задачите с ИО на 20 027 ученици от изследваните четири административни области на България. Всяка задача се кодира с 1 точка за верен отговор и 0 точки за грешен или непосочен отговор. Основните статистически характеристики според КТТ, получени чрез jMetrik са:

- минимален бал – 0 точки
 - максимален бал – 18 точки
 - среден бал – 10,44 точки (10,52 и 10 съответно за 2021 и 2020 г.)
 - медиана – 11 точки (10 за 2021 и 2020 г.)
 - мода – 18 точки (18 и 6 съответно за 2021 и 2020 г.)
 - средноквадратично отклонение – 5,12 (4,80 и 4,68 съответно за 2021 и 2020 г.).
- Както се вижда, има известно увеличение на тази стойност, което означава, че резултатите стават все по-пръснати по отношение на средната стойност (т.е. има все по-голяма разлика в знанията на учениците).

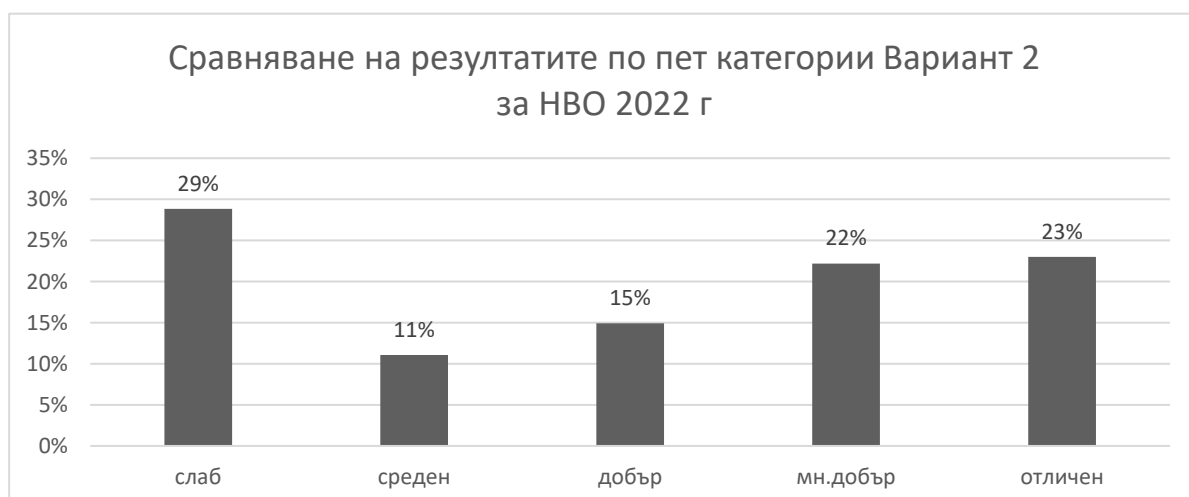
Верните отговори са разпределение неравномерно, като отговор Б) е предложен доминиращо:

- А) – 3 пъти в задачи 1, 8, 17
- Б) – 8 пъти в задачи 2, 4, 6, 11, 13, 14, 16, 18
- В) – 4 пъти в задачи 3, 7, 9, 15
- Г) – 3 пъти в задачи 5, 10, 12

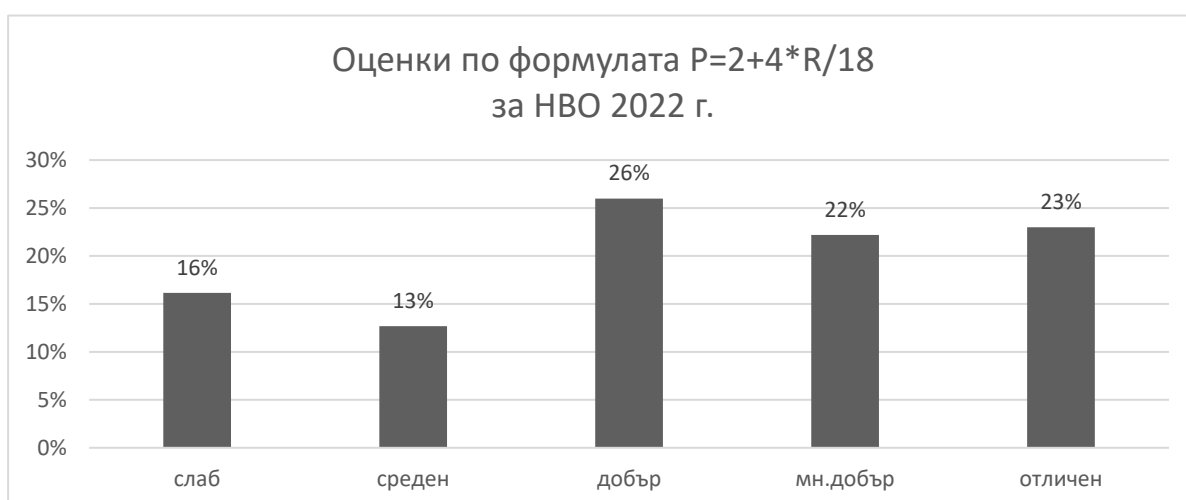
Процентното разпределение по балове е изобразено на фигура 1.21. Тази графика е идентична с графиката от 2021 (фигура 1.14). Трансформацията на тези балове в шестобална система също не води до сериозни разлики с предните 2 години. Диаграмите според двата избрани метода за тази трансформация са изобразени на фигури 1.22 и 1.23.



Фиг. 1.21. Процентно разпределение по балове на НВО-2022 г.



Фиг. 1.22. Диаграма на оценките според линейната трансформация – вариант 2



Фиг. 1.23. Диаграма на оценките според вариант 3

От таблица 1.35 е видно, че според КТТ има една трудна и една лесна задача, а останалите са с оптимална трудност. Според таблица 1.36 може да се каже, че задачите са добре балансирани според коефициента на трудността им.

№	Трудност	Дискриминация	Тълкуване
16	0.71	0.46	лесна
9	0.70	0.54	оптимална
3	0.67	0.50	оптимална
5	0.66	0.57	оптимална
12	0.64	0.66	оптимална
4	0.63	0.51	оптимална
14	0.62	0.64	оптимална
10	0.62	0.53	оптимална
13	0.60	0.58	оптимална
2	0.58	0.49	оптимална
8	0.57	0.56	оптимална
1	0.55	0.43	оптимална
18	0.55	0.41	оптимална
17	0.54	0.60	оптимална
6	0.54	0.55	оптимална
7	0.45	0.48	оптимална
11	0.41	0.41	оптимална
15	0.40	0.40	трудна

Таблица 1.35. Наредба на задачите с ИО според трудността им – НВО 2022 г.

Трудност		Брой	Честота	Тълкуване
от	до			
0.91	1.00			Лесна
0.81	0.90			
0.71	0.80	1	#	
0.61	0.70	7	#####	Оптимална
0.51	0.60	7	#####	
0.41	0.50	2	###	
0.31	0.40	1	#	Трудна
0.21	0.30			
0.11	0.20			Много трудна
0.00	0.10			

Таблица 1.36. Честотно разпределение на задачите според тяхната трудност – НВО 2022г.

Таблица 1.37 показва, че почти всички задачи имат много добра дискриминативна сила. Изключение е задача 15, която е на границата между добра и много добра дискриминация.

№	Трудност	Дискриминация	Тълкуване
12	0.64	0.66	мн. добра
14	0.62	0.64	мн. добра
17	0.54	0.60	мн. добра
13	0.60	0.58	мн. добра
5	0.66	0.57	мн. добра
8	0.57	0.56	мн. добра
6	0.54	0.55	мн. добра
9	0.70	0.54	мн. добра
10	0.62	0.53	мн. добра
4	0.63	0.51	мн. добра
3	0.67	0.50	мн. добра
2	0.58	0.49	мн. добра
7	0.45	0.48	мн. добра
16	0.71	0.46	мн. добра
1	0.55	0.43	мн. добра
18	0.55	0.41	мн. добра
11	0.41	0.41	мн. добра
15	0.40	0.40	добра

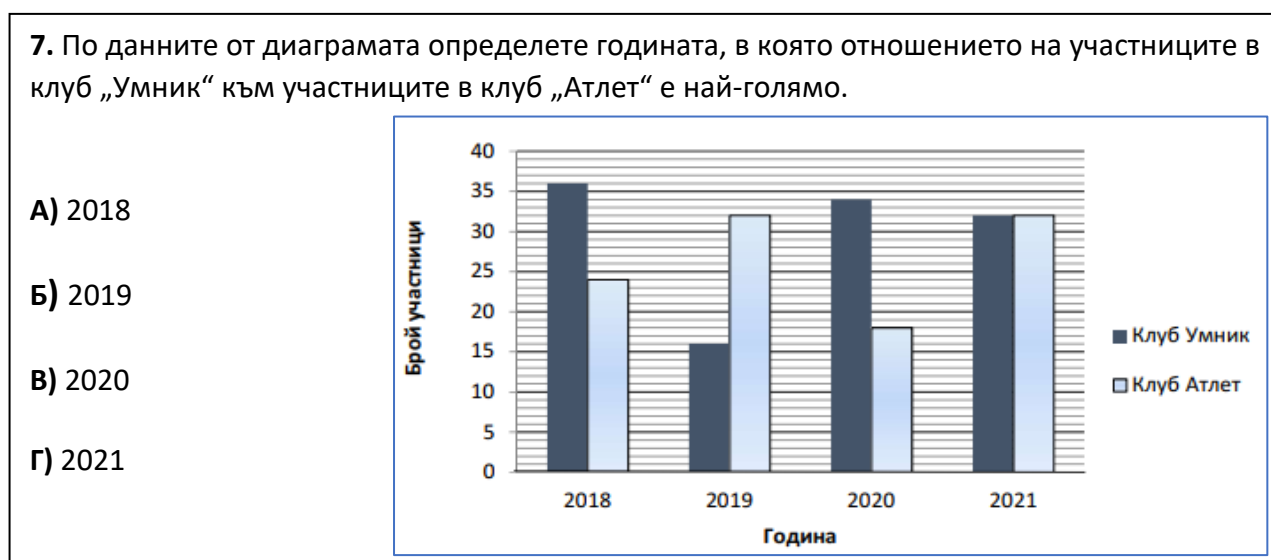
Таблица 1.37. Наредба на задачите с ИО според дискриминативната им сила – НВО 2022 г.

№	А	Б	В	Г
1	55%	23%	12%	9%
2	8%	58%	22%	11%
3	11%	15%	67%	7%
4	9%	63%	14%	13%
5	8%	15%	10%	66%
6	9%	54%	13%	23%
7	31%	8%	45%	16%
8	57%	21%	13%	9%
9	8%	16%	70%	5%
10	21%	5%	12%	62%
11	18%	41%	25%	14%
12	8%	16%	11%	64%
13	7%	60%	20%	13%
14	15%	62%	11%	11%
15	11%	15%	40%	32%
16	14%	71%	9%	5%
17	54%	9%	23%	12%
18	6%	55%	18%	20%

№	А	Б	В	Г
1	0.43	-0.38	-0.30	-0.19
2	-0.27	0.49	-0.45	-0.22
3	-0.35	-0.37	0.50	-0.29
4	-0.35	0.51	-0.35	-0.31
5	-0.34	-0.39	-0.35	0.57
6	-0.17	0.55	-0.25	-0.54
7	-0.45	-0.12	0.48	-0.27
8	0.56	-0.37	-0.40	-0.28
9	-0.37	-0.43	0.54	-0.25
10	-0.41	-0.24	-0.36	0.53
11	-0.18	0.41	-0.34	-0.28
12	-0.36	-0.45	-0.39	0.66
13	-0.30	0.58	-0.35	-0.44
14	-0.40	0.64	-0.33	-0.43
15	-0.34	-0.34	0.40	-0.17
16	-0.40	0.46	-0.30	-0.21
17	0.60	-0.28	-0.37	-0.43
18	-0.23	0.41	-0.37	-0.25

Таблица 1.38. Процентно съотношение и дискриминативна сила на дистракторите на задачите с ИО – НВО 2022 г.

Според таблица 1.38 задачите от 2022 г. имат много добри характеристики по отношение на дистракторите. Техните коефициенти на дискриминативна сила r_{pbis} са отрицателни. Избрани са от по-малък процент ученици, отколкото верните отговори, които в тази таблица са оцветени в жълто.



Фиг. 1.24. Условие на задача 7 от 2022 г.

Във връзка с изследването в трета глава, ще бъде обърнато внимание на задачи 7 от фигура 1.24 и 15 от фигура 1.25.

Задача №7	Правилен отговор: В	Процент не отговорили: 0,71%
Трудност: 0,45	Разграничителна сила: 0,48	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	31%	- 0,45
Б	8%	- 0,12
В*	45%	0,48
Г	16%	- 0,27

Таблица 1.39. Резултати на тестова задача 7 от 2022 г.

Характеристиките на задача 7 са дадени в таблица 1.39. В задачата няма изчисляване, а само наблюдение върху диаграмата. Въпреки това, коефициентът на трудност в сравнително нисък (0,45) и това нарежда задачата към по-трудните в този тест. Високият процент (31%) на отговор А) може да се дължи на неправилно разчитане на разликите в дължините на стълбовете на броя на участниците в двата клуба. Ниската му разграничителна сила (- 0,45), показва, че този отговор е посочван основно от по-слабите ученици. Отговор Б) представлява най-голямото отношение, но на клуб „Атлет“ към клуб „Умник“. Близкият до нула (- 0,12) коефициент на разграничителна сила дава основание да се счита, че този отговор е налучкван случайно.

За решаването на задача 15 трябва да се приложи Питагорова теорема за $\triangle AHC$ и да се използва отношение на двата катета, като единият е известен. Задачата е решена едва от 40%, поради което се класифицира като трудна. Самото отношение на отсечките най-вероятно не е затруднило учениците, защото AH има стойност, равна на коефициента в отношението. Може да се предположи, че тук проблемът е в прилагането на Питагоровата теорема, която се учи в 6 клас, но не се упражнява много в VII клас. От таблица 1.40 може да се каже, че поради високия процент (32%) на отговор Г) и високата стойност (- 0,17) на разграничителната му сила, той е посочван основно от по-слабите ученици. Следователно по-добре подготвените ученици познават Питагоровата теорема и могат да я ползват в изчислителни задачи.

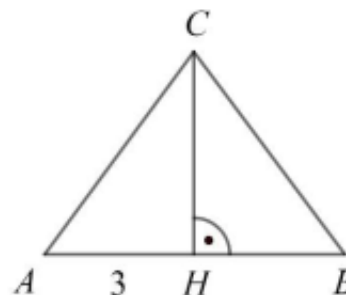
15. На чертежа $\triangle ABC$ е равнобедрен ($AC = BC$), CH е височина, $AH = 3$ cm и $AH:HC = 3:4$. Дължината на бедрото BC е:

А) 3 cm

Б) 4 cm

В) 5 cm

Г) 6 cm



Фиг. 1.25. Условие на задача 15 от 2022 г.

Задача №15	Правилен отговор: В	Процент не отговорили: 1,18%
Трудност: 0,40	Разграничителна сила: 0,40	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	11%	- 0,34
Б	15%	- 0,34
В*	40%	0,40
Г	32%	- 0,17

Таблица 1.40. Резултати на тестова задача 15 от 2022 г.

Надеждност на тестовите задачи с ИО от НВО 2022 г.

Данните, получени от jMetrik върху тестовите задачи с ИО от 2022 г. са поместени в таблица 1.50. Коефициентът алфа има малко по-висока стойност спрямо този от 2020 г. (0,8604) и 2021 г. (0,8677), но изводът е същия - *тест с така получената надеждност не е подходящ* за вземане на решения, свързани с отделни ученици, като например класиране в гимназия.

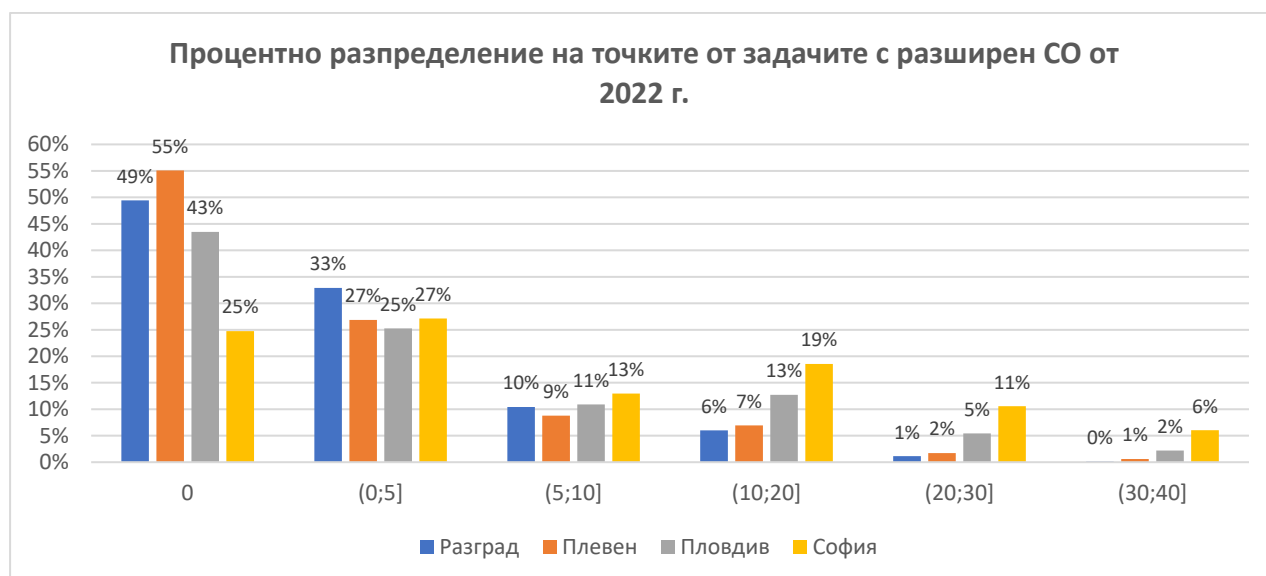
Method	Estimate	95% Conf. Int.	SEM
Guttman's L2	0,8887	(0,8864, 0,8909)	1,7097
Coefficient Alpha	0,8876	(0,8853, 0,8898)	1,7184
Feldt-Gilmer	0,8887	(0,8864, 0,8909)	1,7101
Feldt-Brennan	0,8883	(0,8860, 0,8905)	1,7131
Raju's Beta	0,88876	(0,8853, 0,8898)	1,7184

Таблица 1.50. Коефициент на надеждност на тестовите задачи с ИО от 2022 г.

Както се вижда от таблица 1.51, задачите с разширен СО от втори модул не носят допълнителни точки към състезателния бал на над 35% от учениците. За сравнение през 2020 и 2021 години тези проценти са съответно 25% и 27%. Забелязва се чувствително увеличение на тези ученици. Увеличава се и процента на учениците, които имат под 5 точки на втория модул – 63% (за предните две години този дял е около 48%). Причините биха могли да бъдат в по-високата трудност на задачите със СО от 2022 г. или в по-лошата подготовка на учениците (тези ученици учиха онлайн последните почти 2 години). Това ще бъде разисквано във втора глава.

Точки	0	(0;5]	(5;10]	(10;20]	(20;30]	(30;40]
Процент	35.40%	27.85%	12.30%	15.76%	8.13%	4.31%

Таблица 1.51. Процентно разпределение на точките от задачи от Втори модул – 2022 г.



Фиг. 1.26. Процентно разпределение по области на точките от задачи от 21 до 23 с разширен СО – 2022 г.

Разглеждайки диаграмата от фигура 1.26 отново се установява големия процент (около 80%) на учениците с под 5 точки в малките области Плевен и Разград (за миналите две години той е около 70%), за област Пловдив се увеличава от 55% на 68%, за София – от 38% на 52%. Очевидно е, че има голям скок при всички области.

№	Наименование на елемента от съдържателната област	2022 г.		
	ЧИСЛА. АЛГЕБРА	З	Р	П
1	Естествени числа. Кратни и делители на число. Прости и съставни числа. Признаци за делимост;			
2	Рационални числа. Действия с рационални числа (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване). Свойства на числови равенства и неравенства. Процент - основни задачи;	1, 6		
3	Цели изрази. Тъждествени изрази. Формули за съкратено умножение;		2, 3	
4	Разлагане на многочлени на множители;			
5	Линейни уравнения с едно неизвестно $ax+b=0$ и уравнения, свеждащи се до линейно чрез еквивалентни преобразувания;	4		
6	Модулно линейно уравнение от вида $ ax+b =c$;	8		
7	Линейни неравенства с едно неизвестно $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b\geq 0$ и неравенства, свеждащи се към тях чрез еквивалентни преобразувания.	5		
	ФИГУРИ И ТЕЛА. ИЗМЕРВАНЕ			
8	Лице и периметър на равнинни фигури;			
9	Многоъгълник. Правилен многоъгълник;			
10	Правоъгълна координатна система. Разстояние от точка до права;			
11	Елементи и свойства на ръбести тела (куб, правоъгълен паралелепипед, права призма, правилна пирамида);	18		
12	Елементи и свойства на валчести тела (прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, сфера и кълбо)			
13	Съседни и противоположни ъгли. Перпендикулярни прави;	12	11, 13	
14	Успоредни прави - признаци и свойства;		17	
15	Триъгълник. Сбор от ъглите в триъгълник. Външен ъгъл на триъгълник;	14		
16	Еднакви триъгълници. Питагорова теорема;		15	
17	Симетрала на отсечка и ъглополовяща на ъгъл;			
18	Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник;			
19	Правоъгълен триъгълник. Медиана към хипотенуза в правоъгълен триъгълник. Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30° ;		16	
20	Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Неравенство на триъгълника;			
21	Успоредник. Видове успоредници - правоъгълник, ромб, квадрат;			
	ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА			
22	Представяне, разчитане и интерпретиране на данни, представени чрез диаграми и графики;	7		
23	Множества и операции с тях;			
24	Случайно събитие. Вероятност на случайно събитие.	9		
	ЛОГИЧЕСКИ ЗНАНИЯ. МОДЕЛИРАНЕ			
25	Отношения и пропорции. Проста и обратна пропорционалност;			
26	Средноаритметично на две и повече числа;			
27	Моделиране с изрази, линейни уравнения и неравенства .		10	

Таблица 1.52. Разпределение на задачите по съдържателни области от НВО 2022 г.

Все пак, характеристиките на задачите с ИО не са много по-различни от тези в предните 2 години. Това навежда на мисълта, че учениците не са усвоили достатъчно добре подробното описване на решенията на задачите. Обучението от разстояние в електронна среда (ОРЕС) не дава добри възможности за обратна връзка между учениците и учителите. Описването на решенията и предаването им за проверка, самата проверка и връщането при ученика стават много трудно.

Валидност на теста от НВО 2022 г.

В таблица 1.52 са нанесени номерата на задачите от НВО-2022 г. според съдържателната област, като са поставени в една от трите колони, които представят три от познавателните равнища – знание (З), разбиране(Р) и приложение(П). Както се вижда, тези задачи са разпределени равномерно по цялото съдържание и отразяват коректно зададената предварително класификация.

Броят на задачите според основните теми е почти същото както и през 2021 г.:

- Числа. Алгебра – 7 задачи
- Фигури и тела. Измерване – 8 задачи
- Елементи от вероятности и статистика – 2 задача

Логически знания. Моделиране – 1 задачи

5. Анализ на задачи от НВО VII клас, проведено през 2023 г.

Условията на задачите и техните верни отговори са дадени в (МОН-2023, 2024).

Разглеждат се резултатите от задачите с ИО на 21 060 ученици от изследваните четири административни области на България. Всяка задача се кодира с 1 точка за верен отговор и 0 точки за грешен или непосочен отговор. Основните статистически характеристики според КТТ, получени чрез jMetrik са:

- минимален бал – 0 точки
- максимален бал – 18 точки
- среден бал – 10,15 точки (10,44, 10,52 и 10 съответно за 2022, 2021 и 2020 г.)
- медиана – 10 точки (11 за 2022 г. и 10 за 2021 и 2020 г.)
- мода – 6 точки (18 за 2022 и 2021 г. и 6 за 2020 г.)

- средноквадратично отклонение – 4,56 (5,12, 4,80 и 4,68 съответно за 2022, 2021 и 2020 г.)

Верните отговори са разпределение сравнително равномерно, като отговор Б) е предложен доминиращо:

- А) – 3 пъти в задачи
- Б) – 6 пъти в задачи
- В) – 5 пъти в задачи
- Г) – 4 пъти в задачи



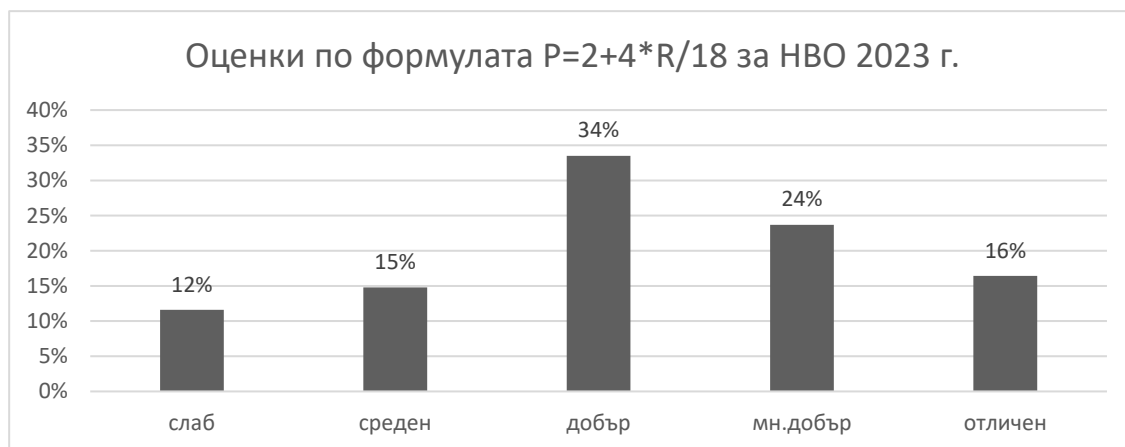
Фиг. 1.27. Процентно разпределение по балове на НВО-2023 г.



Фиг. 1.28. Диаграма на оценките според линейната трансформация – вариант 2

Процентното разпределение по балове е изобразено на фигура 1.27. Интересно е, че тази графика е идентична с графиката от 2020 (фигура 1.1) и се различава от графиките от 2021 (фигура 1.14) и 2022 г. (фигура 1.21).

Трансформацията на тези балове в шестобална система не се различава с предните 3 години. Диаграмите според двата избрани метода за тази трансформация са изобразени на фигури 1.28 и 1.29.



Фиг. 1.29. Диаграма на оценките според вариант 3

От таблица 1.53 е видно, че според КТТ има две трудни и две лесни задачи, а останалите са с оптимална трудност. Според таблица 1.54 може да се каже, че задачите са добре балансирани според коефициента на трудността им.

№	Трудност	Дискриминация	Тълкуване
9	0.83	0.41	лесна
13	0.79	0.42	лесна
15	0.70	0.49	оптимална
17	0.64	0.45	оптимална
5	0.63	0.53	оптимална
8	0.63	0.55	оптимална
1	0.62	0.51	оптимална
16	0.59	0.51	оптимална
14	0.59	0.55	оптимална
3	0.56	0.45	оптимална
7	0.52	0.44	оптимална
10	0.48	0.45	оптимална
11	0.47	0.35	оптимална
4	0.47	0.51	оптимална
18	0.45	0.50	оптимална
12	0.43	0.54	оптимална
2	0.37	0.14	трудна
6	0.37	0.26	трудна

Таблица 1.53. Наредба на задачите с ИО според трудността им – НВО 2023 г.

Трудност		Брой	Честота	Тълкуване
от	до			
0.91	1.00			Лесна
0.81	0.90	1	#	
0.71	0.80	2	##	
0.61	0.70	4	####	Оптимална
0.51	0.60	4	####	
0.41	0.50	5	#####	
0.31	0.40	2	##	Трудна
0.21	0.30			
0.11	0.20			Много трудна
0.00	0.10			

Таблица 1.54. Честотно разпределение на задачите според тяхната трудност – НВО 2023г.

Таблица 1.55 показва, че 15 задачи имат много добра дискриминативна сила. Три от задачите, обаче имат по-лоши разграничителни свойства и ще бъдат разгледани допълнително.

№	Трудност	Дискриминация	Тълкуване
8	0.63	0.55	мн. добра
14	0.59	0.55	мн. добра
12	0.43	0.54	мн. добра
5	0.63	0.53	мн. добра
16	0.59	0.51	мн. добра
1	0.62	0.51	мн. добра
4	0.47	0.51	мн. добра
18	0.45	0.50	мн. добра
15	0.70	0.49	мн. добра
10	0.48	0.45	мн. добра
3	0.56	0.45	мн. добра
17	0.64	0.45	мн. добра
7	0.52	0.44	мн. добра
13	0.79	0.42	мн. добра
9	0.83	0.41	мн. добра
11	0.47	0.35	добра
6	0.37	0.26	средна
2	0.37	0.14	ниска

Таблица 1.55. Наредба на задачите с ИО според дискриминативната им сила – НВО 2023г.

Верните отговори в таблица 1.56 са оцветени в жълто. Всички коефициенти на дискриминативна сила r_{pbis} на дистракторите са отрицателни, а на верните отговори са

положителни. Отново правят впечатление задачи №2 и №6. Някои задачи имат дистрактори, които не са избирани от много ученици – 3 Г), 8 Г), 9 В) и Г), 13 Г).

№	А	Б	В	Г	№	А	Б	В	Г
1	7%	10%	20%	62%	1	-0.26	-0.34	-0.42	0.51
2	16%	37%	38%	9%	2	-0.36	0.14	-0.02	-0.22
3	7%	56%	33%	4%	3	-0.25	0.45	-0.44	-0.23
4	47%	7%	21%	24%	4	0.51	-0.22	-0.32	-0.42
5	8%	18%	11%	63%	5	-0.34	-0.38	-0.35	0.53
6	27%	26%	37%	10%	6	-0.18	-0.34	0.26	-0.11
7	8%	52%	18%	20%	7	-0.25	0.44	-0.37	-0.29
8	63%	13%	18%	6%	8	0.55	-0.37	-0.42	-0.29
9	9%	83%	4%	3%	9	-0.36	0.41	-0.27	-0.26
10	17%	23%	11%	48%	10	-0.35	-0.31	-0.25	0.45
11	24%	18%	47%	10%	11	-0.26	-0.34	0.35	-0.20
12	27%	20%	43%	9%	12	-0.43	-0.24	0.54	-0.34
13	9%	8%	79%	3%	13	-0.34	-0.34	0.42	-0.23
14	10%	18%	12%	59%	14	-0.16	-0.51	-0.34	0.55
15	12%	10%	70%	7%	15	-0.39	-0.36	0.49	-0.25
16	14%	59%	14%	13%	16	-0.37	0.51	-0.29	-0.36
17	64%	15%	13%	7%	17	0.45	-0.33	-0.32	-0.30
18	23%	45%	23%	8%	18	-0.21	0.50	-0.45	-0.32

Таблица 1.56. Процентно съотношение и дискриминативна сила на дистракторите на задачите с ИО – НВО 2023 г.

Нека се разгледат някои конкретни задачи. На фигура 1.30 е дадено условието на задача 2. Характеристиките ѝ са дадени в таблица 1.57.

2. Колко от числата 1, 3, 9, 11, 15, 18, 21, 23, 27, 29, 31 са прости?
А) 4
Б) 5
В) 6
Г) 7

Фиг. 1.30. Условие на задача 2 от 2023 г.

Задача №2	Правилен отговор: Б	Процент не отговорили: 0,62%
Трудност: 0,37	Разграничителна сила: 0,14	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	16%	- 0,36
Б*	37%	0,14
В	38%	- 0,02
Г	9%	- 0,22

Таблица 1.57. Резултати на тестова задача 2 от 2023 г.

Тя се оказва трудна и с най-ниска разграничителна сила измежду всичките 18 задачи в този тест. Ниската стойност 0,14 на коефициента g_{rbis} за верния отговор Б) показва, че и добре подготвените ученици грешат понятието просто число. Почти нулевата стойност на този коефициент за дистрактора В) и почти еднаквите проценти на отговорите Б) и В) показват, че учениците са разделени основно от въпроса дали да считат числото 1 за просто или не. Интересно би било ако има отговор 9, колко от учениците биха сгресли понятията просто и нечетно число. Отговор на този въпрос ще бъде потърсен в експеримента в трета глава.

6. Действителното разстояние между два града е 40 километра. Ако на географската карта разстоянието между тези градове е 8 см, то мащабът на картата е:

А) 1 : 5

Б) 1 : 5000

В) 1 : 500 000

Г) 1 : 5 000 000

Фиг. 1.31. Условие на задача 6 от 2023 г.

Задача №6	Правилен отговор: В	Процент не отговорили: 0,85%
Трудност: 0,37	Разграничителна сила: 0,26	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	27%	- 0,18
Б	26%	- 0,34
В*	37%	0,26
Г	10%	- 0,11

Таблица 1.58. Резултати на тестова задача 6 от 2023 г.

Другата задача, която е по-казала по-ниска разграничителна сила е №6 на фигура 1.31, а характеристиките ѝ са дадени в таблица 1.58. Тази задача също е от най-трудните в теста и е решена от 37% от учениците. Учениците, които са посочили грешни отговори посочват основно дистракторите А) и Б). Явно те не са преценили правилно различните мерни единици, които са дадени в условието. Високата стойност на g_{rbis} (-0,18) на отговор А) показва, че добрите ученици също са го посочвали. А това е просто деление 40 на 8, без да се прави опит за преценяване на мерните единици. Може да се предположи, че такива задачи не би трябвало да затрудняват учениците, т. к. те изучават География и там също се изучава мащаб. Задача с това понятие е имало и през 2021 г. (задача № 18). Тогава тя се е оказала една от най-лесните в този тест. Би могло да се предположи отново, че учениците, които са се явявали на НВО през 2023 г., не са имали

достатъчно възможност за практическа работа с географска карта, поради двугодишното обучение от разстояние в електронна среда (ОРЕС) от март 2020 г. до март 2022 г. В този период те са били в 6 клас, когато се изучава понятието отношение. Това предположение ще бъде изследвано отново в експеримента в трета глава.

Надеждност на тестовите задачи с ИО от НВО 2023 г.

Данните, получени от jMetrik върху тестовите задачи с ИО от 2023 г. са поместени в таблица 1.59.

Method	Estimate	95% Conf. Int.	SEM
Guttman's L2	0,8517	(0,8488, 0,8546)	1,7574
Coefficient Alpha	0,8485	(0,8455, 0,8515)	1,7762
Feldt-Gilmer	0,8517	(0,8488, 0,8546)	1,7574
Feldt-Brennan	0,8506	(0,8477, 0,8535)	1,7637
Raju's Beta	0,8485	(0,8455, 0,8515)	1,7762

Таблица 1.59. Коефициент на надеждност на тестовите задачи с ИО от 2023 г.

Коефициентът алфа има най-ниска стойност спрямо разглежданите години. За сравнение: 2020 г. (0,8604), 2021 г. (0,8677) и 2022 г. (0,8876). Това потвърждава извода, че *тест с така получената надеждност не е подходящ* за вземане на решения, касаещи отделните ученици.

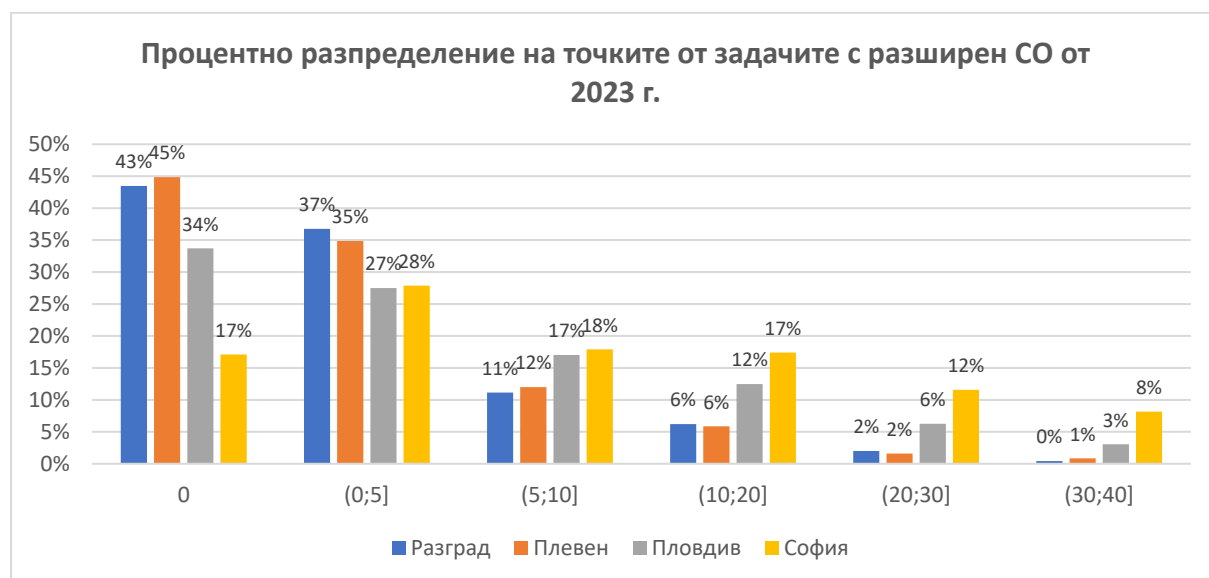
Задачите с разширен СО от втория модул не са допринесли към бала на почти 28% от учениците през 2023 г., което е видно от таблица 1.60. За сравнение през 2020, 2021 и 2022 г. този процент е бил съответно 25%, 27% и 35%. Това показва, че се връща към нивата отпреди ОРЕС. В същото време учениците, получили под 5 точки са около 59%, което е по-ниско от 2022 г. (63%), но по-високо от 2020 и 2021 г. (около 48%). Следователно, присъственото обучение може да се каже, че е помогнало да се повиши отчасти уменията на учениците да описват (донякъде) решенията на задачите.

Точки	0	(0;5]	(5;10]	(10;20]	(20;30]	(30;40]
Процент	27.77%	31.42%	18.35%	15.78%	9.54%	6.24%

Таблица 1.60. Процентно разпределение на точките от задачи от Втори модул – 2023 г.

Диаграмата от фигура 1.32 показва, че малките области Разград и Плевен запазват големия процент на учениците с под 5 точки (80% за 2022 и 2023 г.), за Пловдив намалява от 68% през 2022 г. на 61%, за София също намалява от 52% на 45%. Въпреки това, тези стойности са с около 10% над тези през 2020 и 2021 г.

Трябва да се обърне внимание, че тези разсъждения се правят върху получените минимален брой точки от втори модул. Те показват, че за голям процент ученици от по-малките области или не са мотивирани да описват решението на дадена задача, или за тях това няма съществено значение, или срещат големи затруднения с тази дейност. За по-големите области, особено за София – наличието на по-голяма конкуренция изисква и повече усилия при описването на решенията на задачите със СО.



Фиг. 1.32. Процентно разпределение по области на точките от задачи от 21 до 23 с разширен СО – 2023 г.

Валидност на теста от НВО 2023 г.

В таблица 1.61 са нанесени номерата на задачите от НВО-2023 г. според съдържателната област, по подобие на НВО от предните години. Както се вижда, тези задачи са разпределени равномерно по цялото съдържание и отразяват коректно зададената предварително класификация.

Броят на задачите според основните теми е почти същото както и през 2021 и 2022 г., като малко са увеличени задачите от четвъртия дял, за сметка на първия:

- Числа. Алгебра – 6 задачи
- Фигури и тела. Измерване – 8 задачи
- Елементи от вероятности и статистика – 1 задача
- Логически знания. Моделиране – 3 задачи

№	Наименование на елемента от съдържателната област	2023 г.		
	ЧИСЛА. АЛГЕБРА	З	Р	П
1	Естествени числа. Кратни и делители на число. Прости и съставни числа. Признаци за делимост;	2		
2	Рационални числа. Действия с рационални числа (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване). Свойства на числови равенства и неравенства. Процент - основни задачи;	1		
3	Цели изрази. Тъждествени изрази. Формули за съкратено умножение;		3	
4	Разлагане на многочлени на множители;		8	
5	Линейни уравнения с едно неизвестно $ax+b=0$ и уравнения, свеждащи се до линейно чрез еквивалентни преобразувания;			
6	Модулно линейно уравнение от вида $ ax+b =c$;	4		
7	Линейни неравенства с едно неизвестно $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b\geq 0$ и неравенства, свеждащи се към тях чрез еквивалентни преобразувания.		5	
	ФИГУРИ И ТЕЛА. ИЗМЕРВАНЕ			
8	Лице и периметър на равнинни фигури;			
9	Многоъгълник. Правилен многоъгълник;			
10	Правоъгълна координатна система. Разстояние от точка до права;			
11	Елементи и свойства на ръбести тела (куб, правоъгълен паралелепипед, права призма, правилна пирамида);			
12	Елементи и свойства на валчести тела (прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, сфера и кълбо)		18	
13	Съседни и противоположни ъгли. Перпендикулярни прави;	11		
14	Успоредни прави - признаци и свойства;		12	
15	Триъгълник. Сбор от ъглите в триъгълник. Външен ъгъл на триъгълник;	13		
16	Еднакви триъгълници. Питагорова теорема;	16	14	
17	Симетрала на отсечка и ъглополовяща на ъгъл;		15	
18	Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник;			
19	Правоъгълен триъгълник. Медиана към хипотенуза в правоъгълен триъгълник. Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30° ;			
20	Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Неравенство на триъгълника;			
21	Успоредник. Видове успоредници - правоъгълник, ромб, квадрат;		17	
	ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА			
22	Представяне, разчитане и интерпретиране на данни, представени чрез диаграми и графики;			
23	Множества и операции с тях;			
24	Случайно събитие. Вероятност на случайно събитие.	9		
	ЛОГИЧЕСКИ ЗНАНИЯ. МОДЕЛИРАНЕ			
25	Отношения и пропорции. Проста и обратна пропорционалност;	6	7	
26	Средноаритметично на две и повече числа;		10	
27	Моделиране с изрази, линейни уравнения и неравенства .			

Таблица 1.61. Разпределение на задачите по съдържателни области от НВО 2023 г.

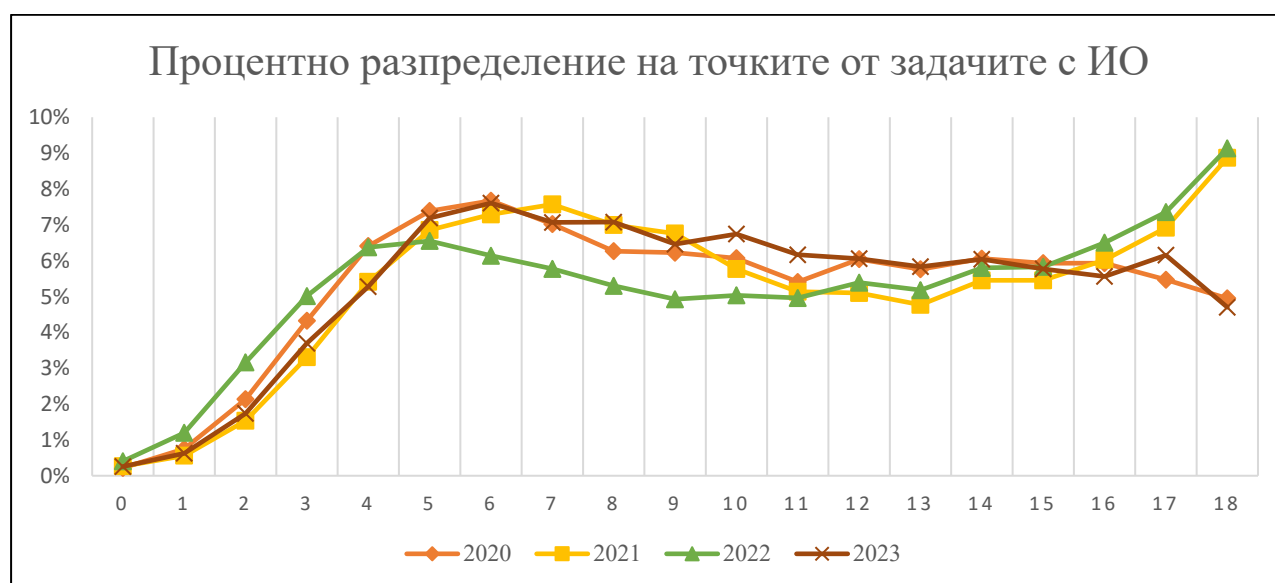
6. Обобщения

Задачите с ИО през четирите изследвани години показват някои сходни статистически характеристики, както и някои разлики в тях – таблица 1.62. Минималният и максималният бал са съответно 0 и 18. Средния бал и медианата през годините не се променят съществено и са разположени в средата на интервала [0;18]. Модата за първата и четвъртата година е в първата трета на този интервал, а за втората и третата година е в края му. Средноквадратичното отклонение се повишава през първите три години, а в четвъртата се връща на нивото от първата.

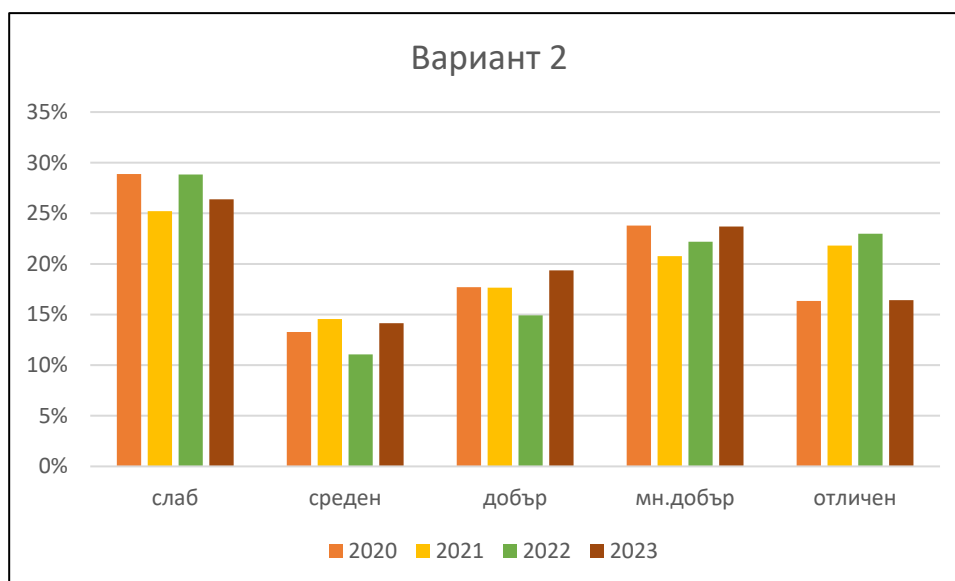
	2020 г.	2021 г.	2022 г.	2023 г.
Среден бал	10	10,52	10,44	10,15
Медиана	10	10	11	10
Мода	6	18	18	6
Средноквадратично отклонение	4,68	4,80	5,12	4,56

Таблица 1.62. Основни статистически характеристики на задачите с ИО

От фигура 1.33 се вижда, че процента учениците, получили точки в интервала [0;5] се изменя по един и същи начин през четирите години – той нараства с почти еднакви темпове при увеличаване на точките. След това, в интервала [6;16] има постоянни стойности, а в края на интервала там, където са най-големите балове има различна характеристика за две двойки години. За 2020 и 2023 г. процентът намалява, докато за 2021 и 2022 г. той нараства. Не може да не се отбележи, че 2020 е годината, в която започна обучението от разстояние, а 2023 година учениците вече бяха приключили с това обучение. За средните две години – ОРЕС бе основния начин на обучение.

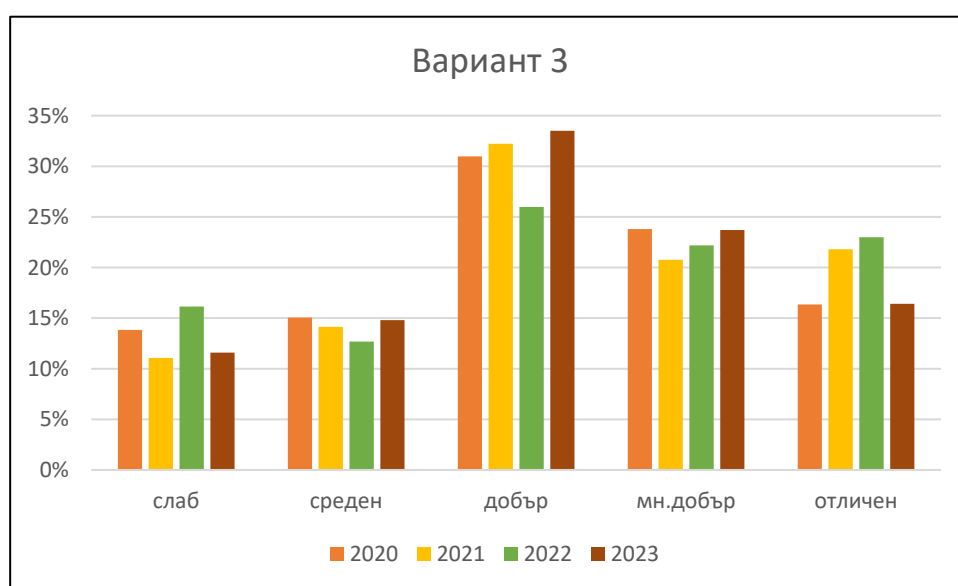


Фиг. 1.33. Процентно разпределение на точките от 2020 до 2023 г. на задачите с ИО



Фиг. 1.34. Линейна трансформация на точките от задачите с ИО

В тази глава са предложени два варианта за трансформация на точките в оценка по шестобалната система – линеен (вариант 2) и кумулативен (вариант 3). Обобщения на получените оценки според тези два варианта са изобразени съответно на фигури 1.34 и 1.35. Въпреки, че линейната трансформация отчита статистическите характеристики на тестовите задачи, се оказва, че формулата е една и съща за четирите изследвани години: $y = 0,3x + 0,9$. Тук x са получените точки, а y е оценката на всеки ученик. При тази трансформация оценка „среден“ се получава при поне 7 точки. Ако се приеме, че това е балът, който трябва да има ученик, покрил минимума на знанията по математика за VII клас, то от фигура 1.34 следва, че над 1/4 от учениците не са усвоили този минимум.



Фиг. 1.35. Кумулативна трансформация на точките от задачите с ИО

Кумулативния вариант 3, изобразен на фигура 1.35, се прилага често в оценяването в училище. Използва се формулата $P = 2 + 4 \cdot \frac{R}{18}$, в която P е оценката на ученик, получил R точки. Според него оценка „среден“ се получава при поне 5 точки. Това е много близо до границата 25% за налучкване на верния отговор. При 18 точки максимален бал, тази граница е 4,5 точки. По тази скала около 15% от учениците биха получили слаби оценки.

И по двата варианта се наблюдават по-високи стойности на слабите оценки за 2022 г., което важи и за отличните оценки. Една от причините за това би могло да е двугодишното обучение в електронна среда, в което се оказаха учениците от този випуск. За по-слабо подготвените ученици това обучение създава проблеми, докато за отличните ученици създава възможност за по-добра подготовка. Това се потвърждава както от модата за 2021 и 2022 години – 18 точки, така и от фигура 1.33.

Трудност		Честота по години				Тълкуване
от	до	2020	2021	2022	2023	
0.91	1.00					мн. лесна
0.81	0.90				9	лесна
0.71	0.80	5, 6	10, 18, 12	9, 16	13, 15	
0.61	0.70	3, 1, 14, 10, 17	4, 15, 16, 9, 2	13, 10, 14, 4, 12, 5, 3	1, 8, 5, 17	
0.51	0.60	15, 16, 8, 13, 12, 9, 11	8, 17, 14, 13, 5, 11	6, 17, 18, 1, 8, 2	7, 3, 14, 16	оптимална
0.41	0.50	2, 4	3, 1, 7	15, 11, 7	12, 18, 4, 11, 10	
0.31	0.40	18	6		6, 2	трудна
0.21	0.30					
0.11	0.20	7				мн. трудна
0.00	0.10					

Таблица 1.63. Честотно разпределение на задачите с ИО според тяхната трудност

В таблица 1.63 е направено сравнение на броя задачите за всяка от изследваните години според коефициента им на трудност, получен по методите на КТТ. Вижда се, че задачите основно са с оптимална трудност и липсват много лесни. Само една е много трудна – задача 7 от 2020 г., в която цената на дадена стока се променя на два пъти с даден процент и тази промяна се иска да се представи с числов израз. В две от годините има по една трудна задача, едната година липсва такава, а в едната година са две такива задачи. Лесните задачи са 2 или 3. Всичко това дава основание да се счита, че задачите с ИО са добре балансирани по трудност. Тук също може да се потърси зависимост между

2020 и 2023 година от една страна и 2021 и 2022 година от друга страна. В първите две има 2 по-трудни задачи, а в другите две техният брой е 0 или 1 такива задачи.

Според данните от таблица 1.64 дискриминативната сила на повечето задачи с ИО през четирите години е достатъчно добра. Най-ниска такава сила е показала задача 2 от 2023 г., в която се търси броя на простите числа от няколко дадени числа.

	Брой по години			
Дискриминативна сила	2020	2021	2022	2023
много добра	14	17	17	15
добра	3		1	1
средна	1	1		1
ниска				1
много ниска				

Таблица 1.64. Разпределение на броя задачи с ИО според тяхната дискриминативна сила

Разпределението на задачите с ИО според съдържателната и познавателната област в четирите изследвани години е дадено в таблица 1.65. Тук трябва да се отбележи, че това разпределение е направено от автора на дисертационния труд, а не от комисията, която е съставяла тези теми, т. к. те не са публично достояние. Забелязва се, че някои съдържателни области не са представени изобщо или най-много с 1 задача за този период:

- Естествени числа. Кратни и делители на число. Прости и съставни числа. Признаци за делимост;
- Лице и периметър на равнинни фигури;
- Многоъгълник. Правилен многоъгълник;
- Правоъгълна координатна система. Разстояние от точка до права;
- Елементи и свойства на валчести тела (прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, сфера и кълбо);
- Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник;
- Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Неравенство на триъгълника;
- Успоредник. Видове успоредници - правоъгълник, ромб, квадрат;

- Представяне, разчитане и интерпретиране на данни, представени чрез диаграми и графики;
- Множества и операции с тях;
- Средноаритметично на две и повече числа.

Разбира се, някои от тези области отчасти са застъпени в някои задачи с ИО, в които основната идея е от друга област. От друга страна, те присъстват в задачите с кратък и разширен СО. Така, че може да се приеме, че няма пропуснати видове задачи в НВО.

Други елементи от тестовата спецификация участват във всички изследвани години поне с по 1 задача:

- Рационални числа. Действия с рационални числа (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване). Свойства на числови равенства и неравенства. Процент - основни задачи;
- Цели изрази. Тъждествени изрази. Формули за съкратено умножение;
- Съседни и противоположни ъгли. Перпендикулярни прави;
- Успоредни прави - признаци и свойства;
- Триъгълник. Сбор от ъглите в триъгълник. Външен ъгъл на триъгълник;
- Еднакви триъгълници. Питагорова теорема;
- Случайно събитие. Вероятност на случайно събитие.

Това обикновено са задачите, които учениците решават успешно и допринасят съществено към образуването на състезателния им бал.

От гледна точка на познавателната област почти всички задачи са от равнище Знание или Разбиране. Може би само задача 7 от 2020 г. е от ниво Приложение, защото операциите с проценти трябва да се приложат рационално, за да се състави искания числов израз.

№	Наименование на елемента от съдържателната област	2020 г.			2021 г.			2022 г.			2023 г.		
	ЧИСЛА. АЛГЕБРА	З	Р	П	З	Р	П	З	Р	П	З	Р	П
1	Естествени числа. Кратни и делители на число. Прости и съставни числа. Признаци за делимост;										2		
2	Рационални числа. Действия с рационални числа (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване). Свойства на числови равенства и неравенства. Процент - основни задачи;	1, 2		7	1, 3			1, 6			1		
3	Цели изрази. Тъждествени изрази. Формули за съкратено умножение;	3			2				2, 3			3	
4	Разлагане на многочлени на множители;		4			6						8	
5	Линейни уравнения с едно неизвестно $ax+b=0$ и уравнения, свеждащи се до линейно чрез еквивалентни преобразувания;				4			4					
6	Модулно линейно уравнение от вида $ ax+b =c$;				8			8			4		
7	Линейни неравенства с едно неизвестно $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b\geq 0$ и неравенства, свеждащи се към тях чрез еквивалентни преобразувания.				5			5				5	
	ФИГУРИ И ТЕЛА. ИЗМЕРВАНЕ												
8	Лице и периметър на равнинни фигури;				17								
9	Многоъгълник. Правилен многоъгълник;												
10	Правоъгълна координатна система. Разстояние от точка до права;		18										

11	Елементи и свойства на ръбести тела (куб, правоъгълен паралелепипед, права призма, правилна пирамида);	9			11		18					
12	Елементи и свойства на валчести тела (прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, сфера и кълбо)									18		
13	Съседни и противоположни ъгли. Перпендикулярни прави;		10		12		12	11, 13		11		
14	Успоредни прави - признаци и свойства;	12				13		17			12	
15	Триъгълник. Сбор от ъглите в триъгълник. Външен ъгъл на триъгълник;	13	16			14	14			13		
16	Еднакви триъгълници. Питагорова теорема;	14			10			15		16	14	
17	Симетрала на отсечка и ъглополовяща на ъгъл;		15			15					15	
18	Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник;											
19	Правоъгълен триъгълник. Медиана към хипотенуза в правоъгълен триъгълник. Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30° ;		17			16		16				
20	Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Неравенство на триъгълника;											
21	Успоредник. Видове успоредници - правоъгълник, ромб, квадрат;										17	
	ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА											
22	Представяне, разчитане и интерпретиране на данни, представени чрез диаграми и графики;						7					
23	Множества и операции с тях;											

24	Случайно събитие. Вероятност на случайно събитие.	6			9			9			9		
	ЛОГИЧЕСКИ ЗНАНИЯ. МОДЕЛИРАНЕ												
25	Отношения и пропорции. Права и обратна пропорционалност;				18						6	7	
26	Средноаритметично на две и повече числа;											10	
27	Моделиране с изрази, линейни уравнения и неравенства .	5, 11	8		7				10				

Таблица 1.65. Разпределение на задачите с ИО според съдържателна и познавателна област

В таблица 1.66 са дадени стойностите на коефициента на надеждност α на Кронбах, както и стандартната грешка на измерването (SEM) за изследваните години.

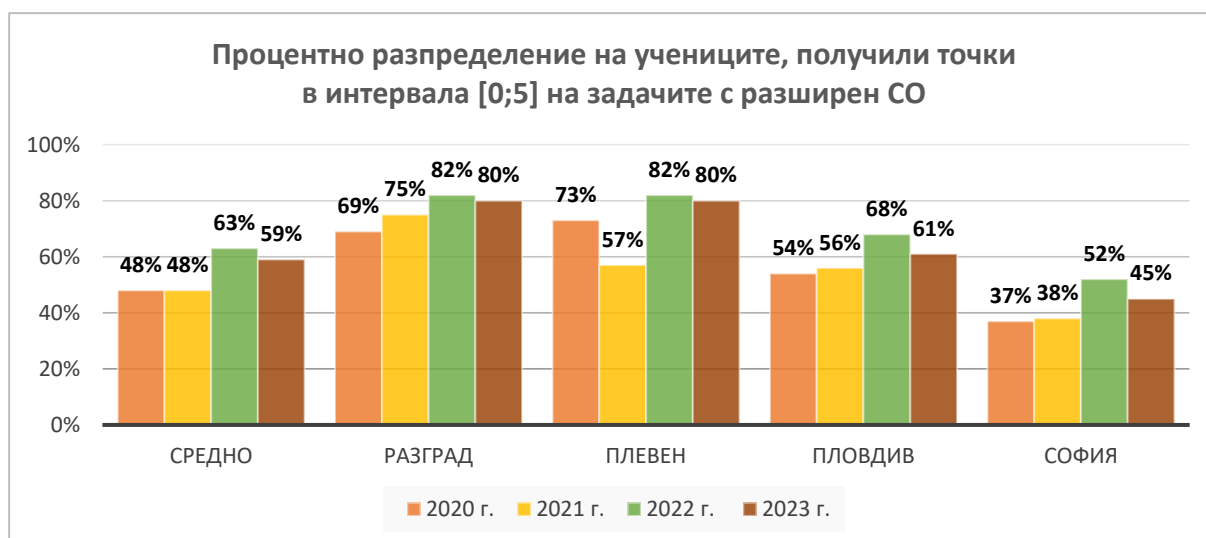
	α на Кронбах	SEM
2020 г.	0,8604	1,7476
2021 г.	0,8677	1,7466
2022 г.	0,8867	1,7184
2023 г.	0,8485	1,7762

Таблица 1.66. Коефициент на надеждност на тестовите задачи с ИО

Тези коефициенти на надеждност са по-големи от 0,75 и това е добра оценка за задачите с ИО. В зависимост от това за какво би могъл да се използва такъв тест може да се каже, че той е подходящ:

- за изследване на резултатите по математика на учениците от VII като цяло. Изводите, които са направени с висока степен на надеждност важат за цялата съвкупност;
- за сравняване на тези резултати по различни големи групи като: пол, регион, училища.

За всички години $\alpha < 0,95$ и стандартната грешка е такава, че 95 процентния доверителен интервал е с дължина 5-6 точки. Това дава основание да се каже, че задачите с ИО не са подходящи, ако трябва да се вземат решения, свързани с класиране на учениците за прием след VII клас. За тази цел, задачите със СО би трябвало да повишат тази надеждност. Да разгледаме дали това е така за учениците като цяло и в отделните области в страната?



Фиг. 1.36. Процентно разпределение по области на учениците, получили точки в интервала [0;5] на задачите с разширен СО

На фигура 1.36 е даден процентът на учениците, които са получили точки в интервала [0;5]. Средно за страната около 50% от учениците от първите две години и около 60% от следващите две години или не са получили точки, или те са минимален брой от задачите с разширен СО. Ако се разгледат тези данни по области, се вижда, че за по-малките области Разград и Плевен тези проценти са по-големи с още 20%. За област Пловдив са около средните за страната, а за област София-град са по-ниски от средните. Причина за разликата в представянето е, че за по-малките области конкуренцията за прием след VII клас е или много слаба, или изобщо я няма. Докато за по-големите градове, особено за София, тази конкуренция е много висока. Следователно за голям процент от учениците в страната задачите с разширен СО не носят добавена стойност към задачите с ИО.

Друго наблюдение, което може да се направи от фигура 1.36, е рязкото покачване на процента на учениците с ниски резултати по втори модул на НВО за 2022 г. (от 48% на 63% средно). Като се вземе предвид от таблица 1.63, че разпределението според коефициента на трудност на задачите с ИО през четирите години не е много различно, то проблемът с показването на тези проценти може да се потърси в обучението в електронна среда или в някакви големи разлики в естеството на задачите със СО. Ясно е, че обучението от разстояние в електронна среда не е подходящо в комуникацията между учител и ученик. Това е особено важно, когато ученикът трябва да опише решение на задача, а учителят да коментира това решение, да посочи слабостите в него, да даде подпомагащи въпроси и пр. Намалването на този процент през 2023 г., когато

учениците отново бяха в класните стаи потвърждава този извод. Интересно е да се проследи тази тенденция и през следващите години.

Задачите с разширен СО през изследваните години нямат съществени разлики. Те са от основните три типа:

- алгебрична задача, в която иска да се реши линейно уравнение и линейно неравенство, като се направят няколко тъждествени преобразувания.
- задача за моделиране, като през 2020 и 2022 г. е била от типа „движение“, през 2023 г. е от тип „работа“, а през 2021 г. при дадена диаграма трябва да се моделира уравнение и да се правят различни изводи от нея.
- геометрична задача, в която освен основни геометрични знания, трябва да се прилагат и допълнителни аналитични разсъждения.

7. Изводи от Първа Глава

Направеният анализ чрез методите на КТТ на резултатите от НВО, проведени в периода 2020 – 2023 година дава възможност да се направят следните изводи:

1. Задачите с ИО са добре балансирани по отношение на коефициентите на трудност и разграничителна сила. Няколко от тях са показали по-ниска разграничителна сила. Само една е категоризирана като много трудна, а много лесни няма.
2. Дистракторите на тези задачи имат отрицателни стойности на разграничителната сила. Намерени са задачи, в които някой от дистракторите е предпочитан от повече ученици, отколкото верният отговор, както и дистрактори, които са избирани от малка част от учениците.
3. Задачите с ИО покриват почти всички теми от съдържателната рамка, като някои теми са застъпени с повече задачи, а други – с една-две. Според познавателната област тези задачи са от равнище Знание и Разбиране.
4. Коефициентът на надеждност на тази част от НВО показва, че задачите с ИО не са подходящи за класиране за прием след VII клас. За тази цел би трябвало да съдействат задачите със СО, особено тези с разширен СО. Средните резултати в изследваните 4 административни области сочат, че над половината ученици не получават точки от тези задачи. За някои области това важи за повече от 3/4 от учениците.

5. Процентът на слабите резултати е по-висок при учениците, завършили 2022 г. спрямо 2020, 2021 и 2023 г. Тези ученици се обучаваха в VI и VII клас основно в електронна среда. Интересно е да се отбележи, че процентът на учениците получили най-високите резултати е по-голям при завършилите 2021 и 2022 г., отколкото в предната 2020 и следващата 2023 година. Може да се каже, че за тези ученици дистанционното обучение не е било сериозен проблем. Възможно е дори да е стимулирало самостоятелната работа при тях.

ВТОРА ГЛАВА. Анализ на НВО по математика след VII клас чрез IRT

1. Основни принципи и модели.

Класическата теория на тестовете е широко използвана в България поради нейната прозрачност и достъпност, но има известни ограничения. Ето две от тях:

- тестовите балове зависят от подобрите задачи в теста (тяхната трудност);
- определянето на трудността на задачите зависи от конкретните изпитвани;

В научната литература от десетилетия се развива нова теория, базирана на вероятностното моделиране. Тя е известна като *Item Response Theory (IRT)*. В теорията на вероятностното моделиране има разработени различни модели. Един от най-широко използваните модели е описан от Г. Раш. Неговият труд (Rasch, 1980) излиза за пръв път през 1960 г. Този модел се нарича още *еднопараметричен логистичен модел* или *Rash model* и може да се разглежда като частен случай на модела на А. Бирнбаум описан през 1968 г. в (Birnbbaum, 1968) и в последствие развит от Hambleton и Swaminathan в книгата (Hambleton et. al, 1991). В българската литература е описан от няколко автори, например от Ф. Стоянова в (Бижков, 1996), (Банков, 2002), (Джалев, 2014) и (Джалев, 2013). Използването на вероятностни модели е популярно в национални изследвания на някои държави и особено в международни такива (TIMSS, PISA, PIRLS и др.). В последните години има публикации и в България – (Банков, 2024), (Алашка, 2016) и (Алашка, 2017), (Цонев, 2023-а), (Tsonev, 2024), (Цонев, 2024-а) и (Цонев, 2024-б).

Някои от предимствата на IRT са:

- мярката на измерването на параметрите (особено в модела на Раш) дава възможност за анализиране на качествените данни с помощта на количествени методи;
- оценката на трудността на задачите не зависи от избора на изпитваните, от които тя е получена;
- оценката на нивото на способностите на изпитваните не зависи от използвания набор задачи, с които те са изпитани;
- наличието на непълнота на данните не е критичен недостатък при изследването на тестовете.

Три от основните предположения в IRT са (Ким, 2007):

- 1) съществуват скрити (наречени още *латентни*) параметри на личността, които са недостъпни за непосредствено наблюдение;
- 2) съществуват достъпни (наречени *индикатори*) за наблюдение параметри, които са свързани с латентните параметри. По значението на тези индикатори може да се съди за значението на латентните параметри;
- 3) оценяването на латентния параметър трябва да бъде едномерно. В частност, това означава, че тестът трябва да измерва знанията само в една ясно зададена предметна област. Ако условието за едномерност не е изпълнено, то е необходимо тестът да се преработи, като се отделят задачите, които нарушават неговата
- 4) хомогенност.

Компонент	Първоначални собствени стойности			Извлечени сборове		
	Общо	% от дисперсията	Натрупан %	Общо	% от дисперсията	Натрупан %
1	5,505	30,583	30,583	5,505	30,583	30,583
2	1,240	6,890	37,473	1,240	6,890	37,473
3	0,894	4,964	42,438			
4	0,866	4,810	47,247			
5	0,826	4,588	51,835			
6	0,795	4,419	56,254			
7	0,760	4,225	60,479			
8	0,751	4,171	64,650			
9	0,730	4,054	68,704			
10	0,715	3,970	72,673			
11	0,679	3,775	76,448			
12	0,670	3,720	80,168			
13	0,656	3,642	83,811			
14	0,614	3,412	87,223			
15	0,596	3,309	90,532			
16	0,593	3,292	93,823			
17	0,580	3,220	97,043			
18	0,532	2,957	100,000			

Таблица 2.1. Анализ на главните компоненти

Въпросът за едномерността на 18-те тестови задачи с ИО от Националните външни оценявания, които се разглеждат в настоящия дисертационен труд, е

демонстриран върху проведеното през 2020 г. НВО по математика. Използван е факторен анализ и софтуерът SPSS (Ганева, 2016). Таблица 2.1 показва, че има два компонента в теста, от които първият е съществен „силен“, т.е. тестът е предимно едномерен (оценява един конструкт), но има и задачи, които оценяват нещо по-странично от този конструкт, който може да се нарече „втори конструкт“ (втора размерност).

Приносът на всяка от задачите към тези конструкти са описани в таблица 2.2. Вижда се, че задачи 7, 15 и 18 имат най-голям „принос“ за втория конструкт, т.е. този втори конструкт може да се опише, като се вникне какво точно оценяват тези три задачи. Те са разгледани по-подробно в дисертационния труд, като условията им са дадени съответно на фигури 1.5, 2.11 и 1.7.

Матрица на компонентите

	Компонент	
	1	2
1	0,695	-0,110
2	0,516	0,263
3	0,636	-0,081
4	0,479	0,343
5	0,607	-0,296
6	0,558	-0,295
7	0,377	0,530
8	0,502	0,039
9	0,550	0,090
10	0,619	-0,171
11	0,612	-0,007
12	0,656	-0,134
13	0,616	0,019
14	0,616	-0,186
15	0,358	0,447
16	0,611	0,027
17	0,479	-0,210
18	0,262	0,493

Таблица 2.2. Анализ на основните компоненти

За разлика от приетото в България точкуване на тестовите задачи, за да бъдат те изследвани с IRT, трябва да се точкуват според вида на задачите по следния начин:

- при задачите с ИО – с 1 точка за вярно посочен отговор или с 0 точки при грешен, непосочен отговор или при посочени повече от един отговор;

- при задачите със СО – с цяло число точки в интервала $[0, n]$. Това число n е равно на броя *важни стъпки* в решението на задачата. Стойността на n се определя от авторите на задачата и показва колко са тези важни стъпки в нейното решаване. Тази идея е описана от (Банков, 2023). При това, ако задачата е тип Вярно-Невярно, то $n = 1$. Най-често $n = 2$ или $n = 3$.

За краткост, по-надолу задача, при която $n = 1$ ще се нарича *0-1 задача*, ако $n = 2$ ще се нарича *0-1-2 задача* и така нататък.

За обяснение на модела на Раш, могат да бъдат разгледани задачи от вида 0-1. Основната идея е, че възможността един ученик да реши дадена задача може да се измери чрез абстрактна величина, наречена *способност*, която се означава с θ . От друга страна на всяка задача може да се съпостави така наречената *характеристична функция*, чиято графика се нарича *характеристична крива*. Тази функция описва вероятността задачата да бъде правилно решена в зависимост от същата абстрактна величина θ , т.е. тази функция изразява вероятността ученик с дадена способност да реши правилно задачата. Стойността на θ , при която вероятността задачата да бъде правилно решена е $1/2$ се нарича *трудност* на задачата и се означава с b .

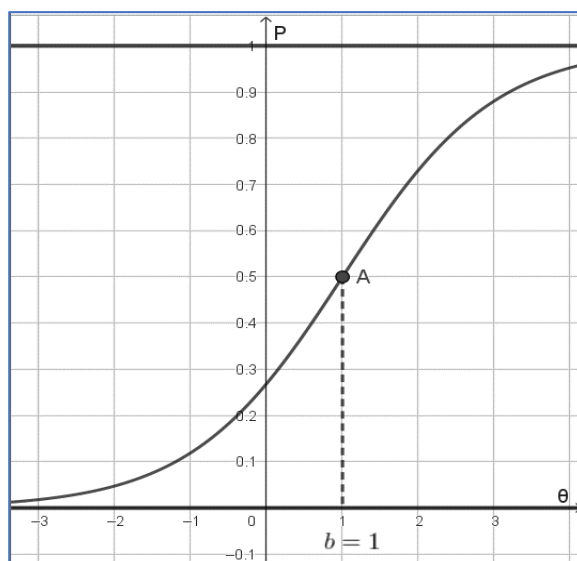
Предположението, което се прави в Раш-модела е, че способността θ на ученика да реши задачата и трудността b на тази задача могат да се разположат на една и съща скала и да се измерват с едни и същи единици, наречени *логити*. Тази скала се нарича още *скала на способностите (Ability scale)*. Успехът на ученика е функция на разликата $\theta - b$. Ако тази разлика е положителна и голяма, това означава, че има голяма вероятност ученикът да реши съответната задача вярно. Ако тази разлика е отрицателна и голяма по модул, то има голяма вероятност ученикът да не реши вярно дадената задача.

Ако задачата е 0-1, характеристичната ѝ функция има вида

$$P(\theta) = \frac{e^{\theta-b}}{1 + e^{\theta-b}},$$

където b е параметър, който се нарича *трудност* на задачата. Графиката на такава крива при $b = 1$ е изобразена на фигура 2.1. Координатите на точката от характеристичната крива с ордината $P = 0,5$ (в случая точка А) показват, че ученик със съответната способност (в случая $\theta = 1$) има вероятност 50% да получи верен отговор на тази задача. Тази стойност на θ (в случая $b = 1$) е трудността на задачата. Обикновено трудността на

задачите е в интервала $(-2; 2)$. Ако b е близо до -2 , значи задачата е лесна, а ако е близо до 2 , значи задачата е трудна.



Фиг. 2.1. Характеристична крива на Rasch model на задача 0-1

Ако задачата е 0-1-2, се чертаят три характеристични криви, които се описват чрез следните три функции:

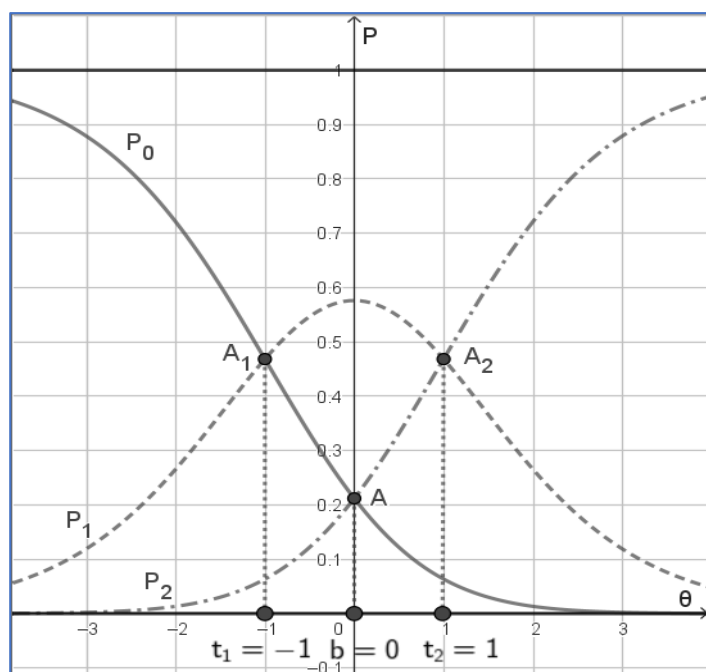
$$P(X = 0|\theta) = \frac{1}{1 + e^{\theta-b-t_1} + e^{2\theta-2b-t_1-t_2}}$$

$$P(X = 1|\theta) = \frac{e^{\theta-b-t_1}}{1 + e^{\theta-b-t_1} + e^{2\theta-2b-t_1-t_2}}$$

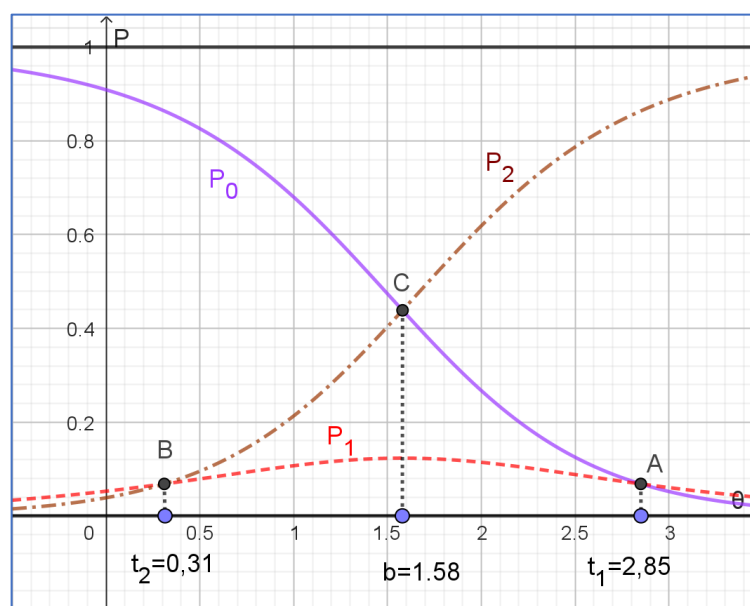
$$P(X = 2|\theta) = \frac{e^{2\theta-2b-t_1-t_2}}{1 + e^{\theta-b-t_1} + e^{2\theta-2b-t_1-t_2}}$$

Първата от тях показва вероятността за получаване на грешен отговор ($X = 0$), втората показва вероятността за получаване на частично верен отговор ($X = 1$), а третата – вероятността за получаване на правилен отговор ($X = 2$).

На фигура 2.2 е даден пример, в който графиките P_0 , P_1 и P_2 съответстват на вероятността за получаване на 0, 1 и 2 точки. Трудността на такава задача се получава от абсцисата на пресечената точка A на P_0 и P_2 (в случая $b = 0$). Интерес представляват абсцисите t_1 и t_2 на пресечните точки A_1 и A_2 съответно на P_0 , P_1 и на P_1 , P_2 (в случая $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$). Изводът, който може да се направи при такава задача е, че учениците със способности по-малки от $t_1 = -1$ е най-вероятно да получат 0 точки, тези със способности между $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$ е най-вероятно да получат 1 точка, а тези със способности над $t_2 = 1$ е най-вероятно да получат 2 точки.



Фиг. 2.2. Характеристични криви на Rash model на задача 0-1-2



Фиг. 2.3. Характеристични криви на Rash model на задача 0-1-2 при $t_1 > t_2$

Проблемни задачи са такива, при които $t_1 > t_2$. Такъв пример е даден на фигура 2.3. Както се вижда графиката P_1 се намира „под“ графиките на P_0 и P_2 . Това означава, че няма интервал от способностите, в който вероятността ученикът да получи 1 точка да е най-голяма. Така, че такава задача е по-подходящо да е от вида 0-1.

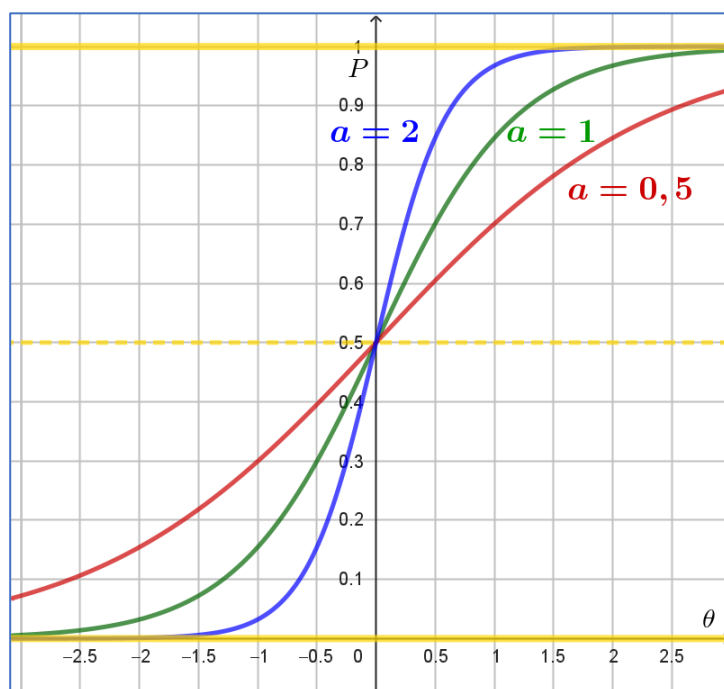
По подобен начин се описват и задачи с повече междинни точки, като функциите от тип „камбана“ са повече.

Моделът, предложен от Раш, в последствие е развит и през 1968 г. Бирнбаум (Birnbbaum, 1968) въвежда *двупараметричен* и *трипараметричен* модел. При първия модел, освен параметъра b , се въвежда нов параметър a . Характеристичната функция на всяка задача има вида:

$$P(\theta) = \frac{e^{1,7a(\theta-b)}}{1 + e^{1,7a(\theta-b)'}}$$

където параметърът a има смисъл на *дискриминация* на задачата. Той задава наклона на съответната характеристична крива в точката на трудност b на задачата. Колкото тази крива е „по-стръмна“, толкова съответната задача по-добре разграничава силните от слабите ученици, които имат способности близки до b . Най-често интервалът, в който приема стойности a е $(0;2)$. Този модел ще бъде означен като *2PL-модел*. В известен смисъл той е обобщение на еднопараметричния Раш-модел, който ще бъде наричан още *1PL-модел*.

На фигура 2.4 са изобразени характеристичните криви на задачи с трудност $b = 0$, които имат дискриминация $a = 0,5$, $a = 1$ и $a = 2$.



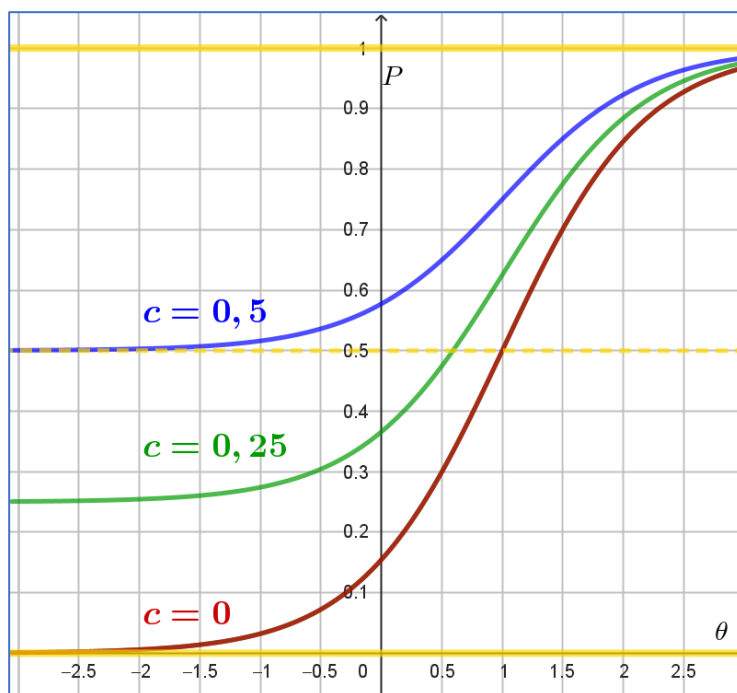
Фиг. 2.4. Примери за 2PL модел с три варианта на параметъра a

При трипараметричния модел (*3PL-модел*) се въвежда и параметър c , който се счита за коефициент на налучкване. Характеристичната функция на този модел е:

$$P(\theta) = c + (1 - c) \frac{e^{1,7a(\theta-b)}}{1 + e^{1,7a(\theta-b)'}}$$

Графично стойността на параметъра c изобразява хоризонтална асимптота $P = c$ на характеристичната крива при $\theta \rightarrow -\infty$.

На фигура 2.5 са изобразени графиките на характеристични криви на три задачи с трудност $b = 1$, дискриминация $a = 1$ и различни параметри на налучкване $c = 0, c = 0,25$ и $c = 0,5$.



Фиг. 2.5. Примери за 3PL модел с три варианта на параметъра c

2. Избор на подходящ модел за изследване на задачите с избираем отговор

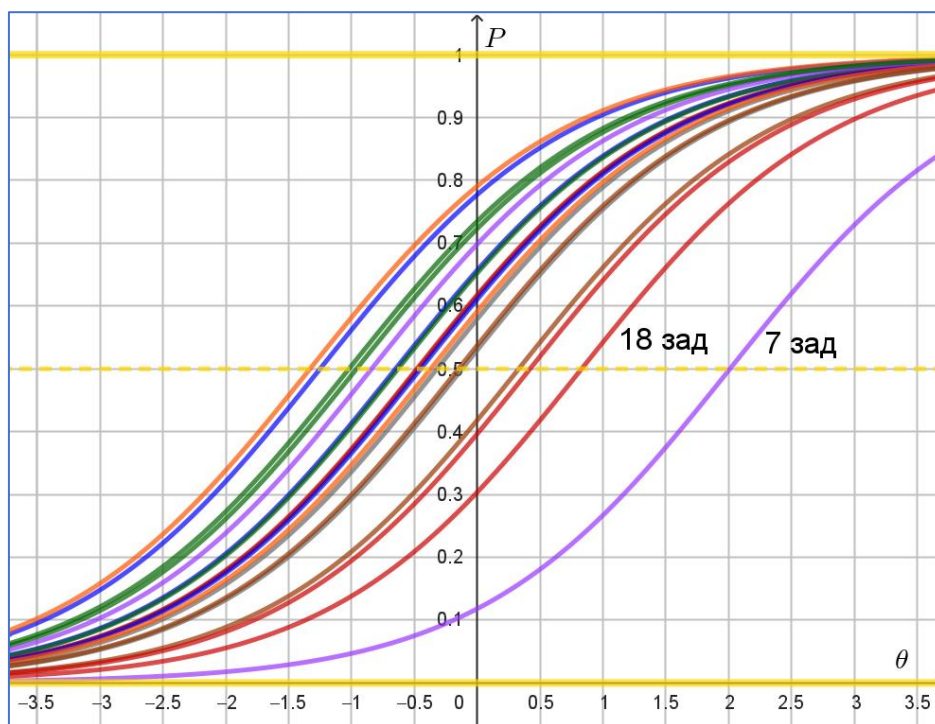
Използването на Раш-модела за изследване на даден тест предполага, че задачите, включени в него, са с еднаква дискриминация и вероятността за налучкване на верния отговор е минимална. Чрез този модел може да се установи кои задачи не се съгласуват достатъчно добре с емпиричните данни, които се получават след като се проведе теста. При него постановката е, че не моделът трябва да съответства на емпиричните данни, а данните трябва да съответстват на модела (Ким, 2007). Обикновено се препоръчва проблемните задачи да не се включват в следващи тестове, преди да се преработят.

При моделите с 2 и 3 параметъра подходът е друг. Чрез тях се търси модел, който най-добре да съответства на изследвания тест.

2.1. Приложение на IRT при изследване на резултатите от НВО по математика в края на VII клас от 2020 г.

2.1.1. Сравнение на характеристичните криви според трите модела на параметризация.

За настоящото изследване са използвани резултатите от проведеното НВО в края на VII клас по математика с 18 836 ученици от изследваните четири административни области на България, които са се явили на изпит през 2020 година. Областите са София-град, Пловдив, Плевен и Разград. Обработени са данните за задачите с избираем отговор, които са първите 18 в този тест. Използваният софтуер jMetrik оразмерява скалата на способностите (Ability scale) така, че разпределението на способностите на всички ученици е със средна стойност 0 и стандартно отклонение 1. Графиките са начертани с приложението GeoGebra (GeoGebra, 2024).



Фиг. 2.6. Характеристични криви на задачите от 2020 г. – 1PL

На фигура 2.6 са дадени характеристичните криви на всичките 18 задачи с ИО според еднопараметричния Раш-модел (1PL). От нея се вижда, че тези задачи покриват диапазона $(-3,5; 3,5)$ на нивото на способностите θ . Кривите на някои задачи се припокриват, например 1 и 3; 9, 11 и 12; 15 и 16. В тази връзка някои от тях, например 3, 11, 12 и 16, могат да бъдат премахнати от теста, без да се нарушат съществено измерителните му качества. В същото време се наблюдават липсващи задачи в някои интервали на трудност (гледаме нивото $P = 0,5$). Чрез допълнителна преработка би

могло да се потърсят задачи с трудност в интервалите $(-0,12; 0,33)$, $(0,42; 0,83)$ и $(0,83; 2,01)$. Очевидно най-трудни са задачи 7 и 18, което се потвърждава и от Класическата теория на тестовете. Тези задачи са разгледани подробно в първа глава на дисертационния труд.

	1PL	2PL		3PL		
№	b-param	a-param	b-param	a-param	b-param	c-param
1	-0.65	2.66	-0.44	2.96	-0.23	0.10
2	0.33	1.24	0.25	2.38	0.68	0.19
3	-0.63	2.01	-0.45	2.58	-0.13	0.16
4	0.42	1.12	0.35	2.72	0.81	0.22
5	-1.25	2.29	-0.80	2.25	-0.72	0.04
6	-1.33	1.89	-0.89	2.03	-0.68	0.14
7	2.01	1.12	1.74	2.94	1.51	0.07
8	-0.32	1.21	-0.29	1.98	0.33	0.26
9	-0.47	1.44	-0.39	2.73	0.25	0.29
10	-0.96	2.10	-0.64	2.93	-0.22	0.24
11	-0.48	1.80	-0.36	2.98	0.12	0.24
12	-0.45	2.07	-0.34	2.41	-0.12	0.10
13	-0.37	1.77	-0.29	2.93	0.15	0.22
14	-0.84	1.97	-0.58	2.21	-0.35	0.12
15	-0.12	0.80	-0.13	2.97	0.85	0.37
16	-0.15	1.70	-0.15	2.66	0.24	0.18
17	-1.02	1.27	-0.84	1.60	-0.29	0.26
18	0.83	0.57	1.22	2.57	1.48	0.25

Таблица 2.3. Стойности на параметрите според трите модела на задачите от 2020 г.

В таблица 2.3 са дадени стойностите на параметрите според трите модела на параметризиране. Впечатление правят две задачи с номера 15 и 9, които имат високи стойности на налучкване, съответно $c = 0,37$ и $c = 0,29$. Тези задачи не се отличават по никой от показателите на Класическата теория на тестовете. Те ще бъдат разгледани малко по-нататък.

В следващият етап на анализа на теста се проверява доколко трите модела на параметризация (1PL, 2PL и 3PL) съответстват на емпиричните данни. Ще приложим графичен метод, който е описан на стр. 66-67 в книгата (Hambelton et. al, 1991). За всеки от трите модела всеки от учениците получава стойност на параметъра θ (ability), който е число в интервала $(-3;3)$. Този интервал се разделя на 12 равни части. Ако средата на всеки подинтервал означим с θ_i ($i = 1, 2, \dots, 12$), то на всички ученици със способност θ в този подинтервал приемаме, че имат средната стойност θ_i . След това за всяка задача и

за всеки подинтервал се намира отношението на броя на учениците r_i , които са отговорили вярно на задачата към броя на всички ученици m_i в този подинтервал. Така се получава величината

$$p(\theta_i) = \frac{r_i}{m_i},$$

която се явява експерименталната стойност на вероятността да се даде верен отговор на тази задача на ученик със способност θ_i .

Чрез следващите задачи ще демонстрираме идеята с която се изследва съответствието на теоретичните криви и емпиричните данни. На фигура 2.7 е дадено условието на задача 1. Под надписите 1PL, 2PL и 3PL на фигура 2.8 са разположени характеристичните криви на тази задача според трите модела. Емпиричните данни за всеки модел са представени с точките А, В, С, ..., които имат координати съответно $A(\theta_1, p(\theta_1))$, $B(\theta_2, p(\theta_2))$, $C(\theta_3, p(\theta_3))$, ... Тези графики се наричат още *графики с остатъците*. Даден модел има добро съвпадение с данните, ако графиките с остатъци са близки до съответните характеристични криви на задачите.

1. Стойността на израза $200 - 20 \cdot \left(-2 \frac{1}{2}\right)$ е:

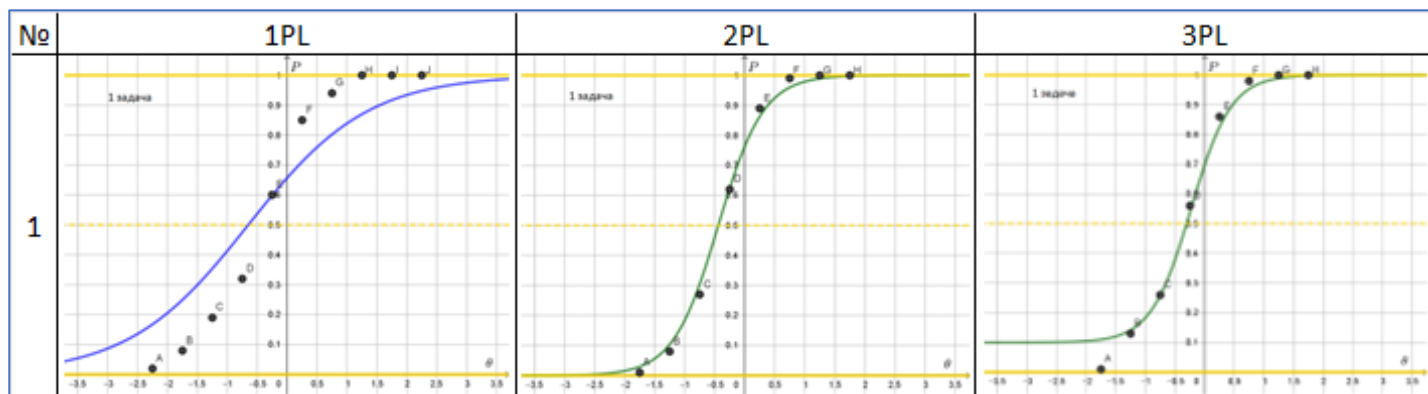
А) -450

Б) -72

В) 208

+Г) 250

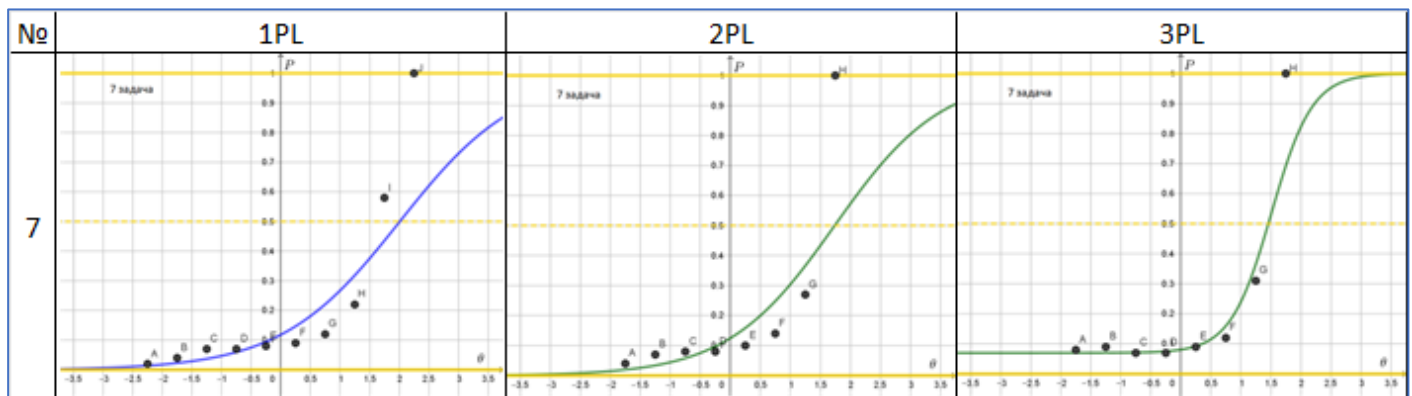
Фиг. 2.7. Условие на задача 1 от 2020 г.



Фиг. 2.8. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 1 от 2020 г.

За тази задача може да се каже, че:

- тя е с оптимална трудност – графиките пресичат хоризонталната права $P = 0,5$ в точка с абсциса около $-0,5$;
- графиките на дву- и три-параметричния модел са по-изправени, т. е. тя има по-добра разграничителна сила. За двата модела стойността на параметъра на дискриминация е $a = 2,66$ (за 2PL) и $a = 2,96$ (за 3PL);
- липсват точки, съответстващи на ученици със способности по-малки от $-2,5$ и по-големи от $2,5$ за 1PL модела, а за другите два модела интервалът на способностите е още по-стеснен $(-2; 2)$;
- 1PL моделът има големи разлики между теоретичните и емпиричните резултати;
- 3PL моделът дава висок коефициент на налучкване, което не се съгласува добре при учениците с ниски способности (точка А е далеч от кривата);
- 2PL моделът се съгласува в най-голяма степен с емпиричните данни.
- задачата е от съдържателна област „Действия с рационални числа“ и такива задачи присъстват във всички НВО след VII клас. Подобна на тази задача е задача 1 от 2021 г. на фигура 1.19, като анализа на двете задачи от гледна точка на КТТ е идентичен.

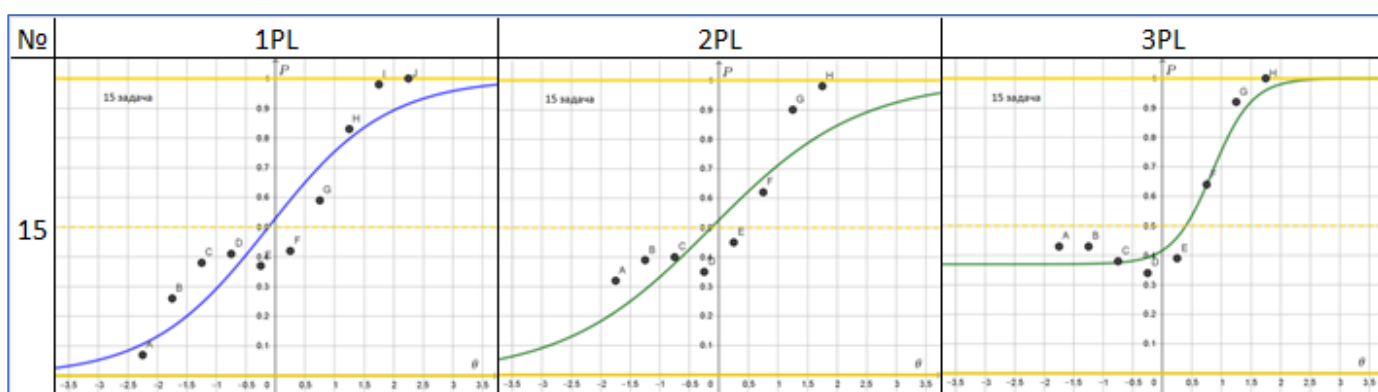


Фиг. 2.9. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 7 от 2020 г.

На фигура 2.9 са изобразени графиките на задача 7. Условието ѝ е дадено на фигура 1.5 в първа глава, като там е анализирана подробно според КТТ. Могат да се направят следните изводи:

- задачата е с висока трудност и със слаба дискриминация, което се потвърждава и от КТТ;

- и при трите графика с остатъците, емпиричните данни имат сериозни отклонения при учениците с по-високи способности;
- 3PL моделът е най-близък до емпиричните данни. Този модел, обаче няма добра разграничителна способност за почти всички ученици – точките от А до F са разположени хоризонтално;
- коефициентът на налучкване е сравнително нисък и това добре се съгласува с учениците с ниски способности;
- задачата в този ѝ вид е неподходяща за НВО и трябва да се промени.

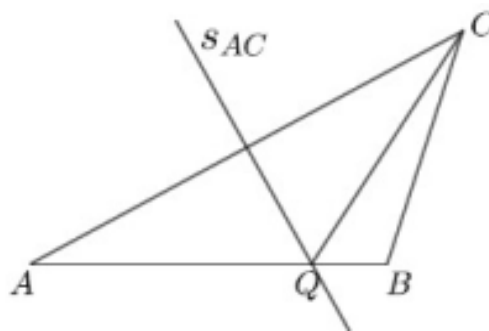


Фиг. 2.10. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 15 от 2020 г.

15. На чертежа симетралата s_{AC} на страната AC на $\triangle ABC$ пресича отсечката AB в точка Q .

Ако $AB = 14$ cm и $BC = 4$ cm, то периметърът на $\triangle QBC$ е равен на:

- +А) 18 cm
- Б) 14 cm
- В) 10 cm
- Г) 9 cm



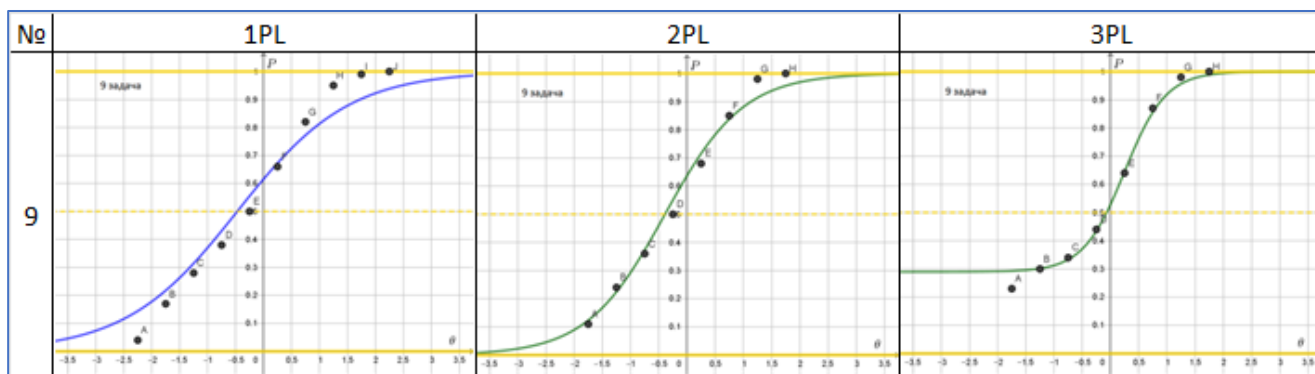
Фиг. 2.11. Условие на задача 15 от 2020 г.

Графиките с остатъците и условието на задача 15 са изобразени на фигура 2.10. Тази задача не се отличава от другите според КТТ. Според вероятностното моделиране, обаче тя се открие, като:

- и трите модела показват големи различия между теоретичните и емпиричните данни – точките са далеч от кривите;

- задачата има оптимална трудност, като при 1PL и 2PL моделите показват по-ниска разграничителна сила;
- 3PL моделът има най-добро съответствие с емпиричните данни;
- поради високият коефициент на налучкване ($c = 0,37$ от таблица 2.3), може да се заключи, че верният отговор е получен случайно. Тази ситуация се среща много често и в други задачи от различни НВО, при които от дадените в условието числа само чрез някое просто аритметично действие може да се получи верният отговор. Конкретно в тази задача имаме, че $18 = 14 + 4$. Това налага подобни задачи да бъдат преразгледани.
- точките А и В от 3PL модела, съответстващи на учениците с по-ниски способности са разположени над кривата, което показва, че тези ученици са налучквали верния отговор с по-голяма вероятност от теоретичната.

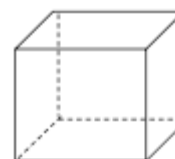
Друга задача, която има подобно поведение, и което не се забеляза от КТТ е задача 9, чиито графики и условие са дадени на фигура 2.12. Тази задача също има висок коефициент на налучкване ($c = 0,29$ от таблица 2.3), което се обуславя от сравнително лесният начин, по който се получава верният отговор: $1000=10.10.10$. Задачата също би трябвало да се преразгледа.



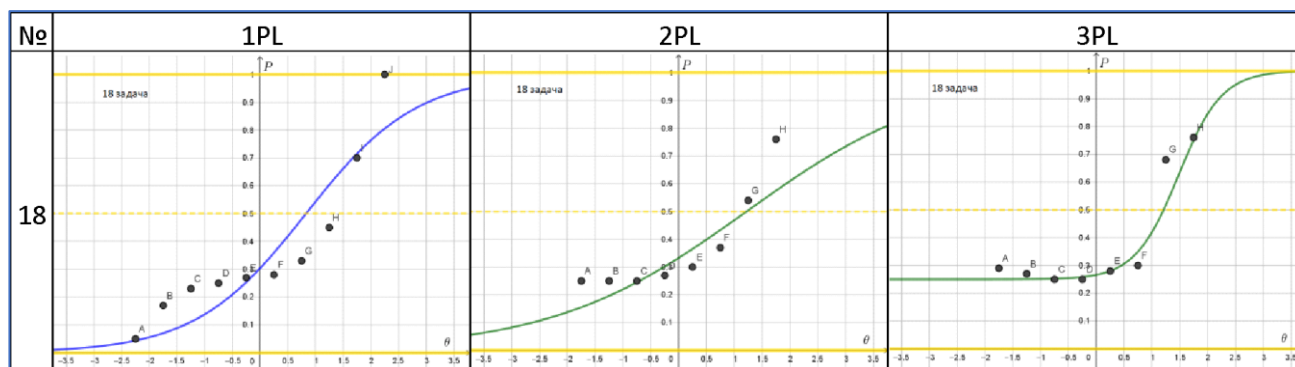
Фиг. 2.12. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 9 от 2020 г.

9. Кутия за сладки има форма на куб с обем 1000 cm^3 . Ръбът на кутията е с дължина:

- А) 20 cm
- Б) 15 cm
- +В) 10 cm
- Г) 5 cm



Фиг. 2.13. Условие на задача 9 от 2020 г.



Фиг. 2.14. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 18 от 2020 г.

За последната задача 18, на която бе обърнато внимание в първа глава (фигура 1.7), двата модела 1PL и 2PL от фигура 2.14 показват сериозни разлики между теоретичните криви и точките върху съответните графики. Трипараметричният модел се доближава най-добре, но при него, както и при задачи 7 и 15 при по-голямата част от учениците дискриминацията е много слаба.

В приложение 3 са дадени графиките с остатъците на всички задачи от 2020 г. Ето някои общи изводи, които могат да се направят от тях:

- при 1PL моделът способностите на учениците според емпиричните данни са представени с 10 точки, а при другите два модела – с 8 точки. Това е така, защото липсват ученици със способности в подинтервалите близки до -3 и до 3 ;
- 1PL моделът има по-съществени разлики с емпиричните данни, в сравнение с другите два модела, защото при него не се отчита трудността на задачата;
- 2PL моделът има най-големи прилики с емпиричните данни при 6 задачи с номера 1, 3, 5, 6, 10 и 17;
- 3PL моделът има най-големи прилики при 4 задачи с номера 2, 4, 13 и 18
- 2PL и 3PL моделът сравнително еднакво покриват емпиричните данни при 6 задачи с номера 8, 9, 11, 12, 14 и 16;
- и трите модела имат съществени разлики при 2 задачи с номера 7 и 15.

В заключение може да се каже, че и трите модела дават добра съгласуваност с емпиричните данни при повечето задачи. Моделът 1PL не отчита разграничителната сила на задачите, поради което има по-големи разлики между теоретичните и емпиричните данни. 3PL моделът е подходящ при някои задачи – 7, 15, 18. Това са

задачи, които са показали по-сериозни дефекти и трябва да бъдат коригирани. Следователно, 2PL моделът е за предпочитане за моделиране на данните с IRT.

2.1.2. Сравнение на резултатите от КТТ и 2PL на IRT върху данните от НВО-2020.

Нека съпоставим резултатите, получени според двете теории на коефициентите на трудност и разграничителна сила. В таблици 2.4 и 2.5 са представени обобщените резултати на осемнадесетте задачи според КТТ и двупараметричния IRT модел.

№	КТТ	IRT-2PL	№	КТТ	IRT-2PL
6	0.74	-0.89	6	0.74	-0.89
5	0.73	-0.80	17	0.69	-0.84
17	0.69	-0.84	5	0.73	-0.80
10	0.68	-0.64	10	0.68	-0.64
14	0.65	-0.58	14	0.65	-0.58
1	0.62	-0.44	3	0.62	-0.45
3	0.62	-0.45	1	0.62	-0.44
11	0.59	-0.36	9	0.59	-0.39
9	0.59	-0.39	11	0.59	-0.36
12	0.58	-0.34	12	0.58	-0.34
13	0.57	-0.29	13	0.57	-0.29
8	0.56	-0.29	8	0.56	-0.29
16	0.53	-0.15	16	0.53	-0.15
15	0.52	-0.13	15	0.52	-0.13
2	0.43	0.25	2	0.43	0.25
4	0.42	0.35	4	0.42	0.35
18	0.34	1.22	18	0.34	1.22
7	0.17	1.74	7	0.17	1.74

А)

Б)

Таблица 2.4. Наредби на задачите от 2020 г. според трудността им

В таблица 2.4.А) номерата на задачите са подредени от лесни към трудни според коефициента на трудност от КТТ, а в таблица 2.4.Б) – според b -параметъра от 2PL-модела на IRT. Коефициентът на корелация на тези данни е $-0,97981$. Той е отрицателно число, защото най-лесните задачи според КТТ имат най-високи стойности, а според IRT тези задачи имат най-ниски стойности. Абсолютната стойност на този коефициент е практически равен на 1. Следователно и двете теории класифицират по еднакъв начин трудността на задачите.

№	КТТ	IRT-2PL	№	КТТ	IRT-2PL
18	0.22	0.57	18	0.22	0.57
15	0.31	0.80	15	0.31	0.80
7	0.33	1.12	7	0.33	1.12
17	0.40	1.27	4	0.41	1.12
4	0.41	1.12	8	0.43	1.21
8	0.43	1.21	2	0.45	1.24
2	0.45	1.24	17	0.40	1.27
6	0.47	1.89	9	0.48	1.44
9	0.48	1.44	16	0.53	1.70
5	0.52	2.29	13	0.54	1.77
14	0.53	1.97	11	0.53	1.80
10	0.53	2.10	6	0.47	1.89
16	0.53	1.70	14	0.53	1.97
11	0.53	1.80	3	0.55	2.01
13	0.54	1.77	12	0.57	2.07
3	0.55	2.01	10	0.53	2.10
12	0.57	2.07	5	0.52	2.29
1	0.61	2.66	1	0.61	2.66

А)

Б)

Таблица 2.5. Наредби на задачите от 2020 г. според дискриминацията им

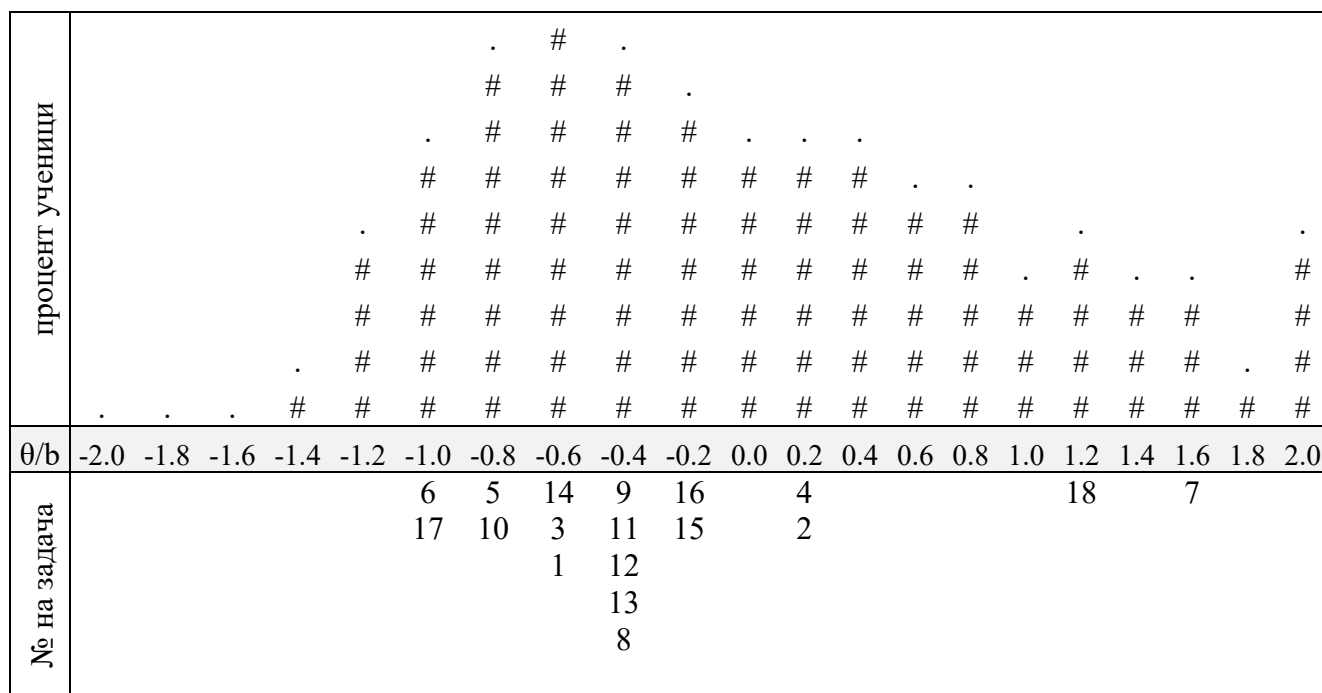
В таблица 2.5.А) номерата на задачите са подредени възходящо според коефициента $g_{\text{brp}}^{\text{is}}$ на КТТ, а в таблица 2.5.Б) – според α -параметъра от 2PL-модела на IRT. Корелация също е висока и е равна на 0,919809. По-големи разминавания в наредбата има при няколко задачи. Ако се погледнат най-големите разлики, които са при задачи №5 и №13, ще се види, че техните коефициенти според КТТ са толкова близки, че практически позицията им не е от съществено значение. Задачите с най-ниска разграничителна сила са №18 и №15, а с най-висока №1 и по двете теории.

2.1.3. Диаграма на задачите и респондентите (item-person-map) от НВО-2020.

За построяването на така наречената *item-person-map* диаграма се използва, че трудността на задачите (b -параметър) и способностите на учениците (θ) могат да се разположат върху една и съща скала, наречена *Ability scale*. Отново използваме резултатите от 2PL-модела. На фигура 2.15 маркираният ред, означен с θ/b , е интервалът $(-2; 2)$ от скалата на способностите. Интервалът е разделен на подинтервали с дължина 0,2. Под този ред са написани номерата на 18-те задачи, като всяка задача е поставена на мястото, където попада нейният параметър на трудност b . Над маркирания ред е

представен процентът ученици със способност θ в съответния интервал с дължина 0,2, като:

- на всеки символ “#” отговаря 1% ученици
- на всеки символ “.” отговаря под 1% ученици



Фиг. 2.15. Диаграма на задачите и респондентите от НВО – 2020 г.

Така, под маркирания ред е графиката на разпределението на трудността на задачите върху скалата на способностите, а над него е разпределението на способностите на учениците върху същата скала. Може да считаме, че тестът, съставен от представените задачи, е добре балансиран за съответните ученици, ако двете разпределения имат връх в близки стойности на маркирания ред и покриват почти едни и същ интервал от него. Графики като фигура 2.15 дават възможност да се прецени до колко тестът, съставен само от 18-те задачи с избираем отговор, е „подходящ“ за изследваните ученици от четирите области.

Разглеждайки фигура 2.15 може да се направят следните наблюдения:

- учениците се разпределят по целия интервал от $(-2; 2)$;
- задачите са съсредоточени в средната третина на интервала. Това означава, че липсват задачи за много слабите и много силните ученици;
- и задачите, и учениците имат сравнително добро „нормално“ разпределение;

- най-много задачи имат коефициент на трудност около $-0,4$, докато най-големият брой ученици са с малко по-ниски способности, т.е. пиковите стойности са близки;
- както се показва от еднопараметричния модел и от КТТ по-леките задачи са с номера 5, 6 и 17,
- най-трудните са с номера 18 и 7 и те са разположени сравнително далеч от основната група задачи. Това се потвърждава и от графиката, получена от 1PL модела, на фигура 2.6.

В заключение:

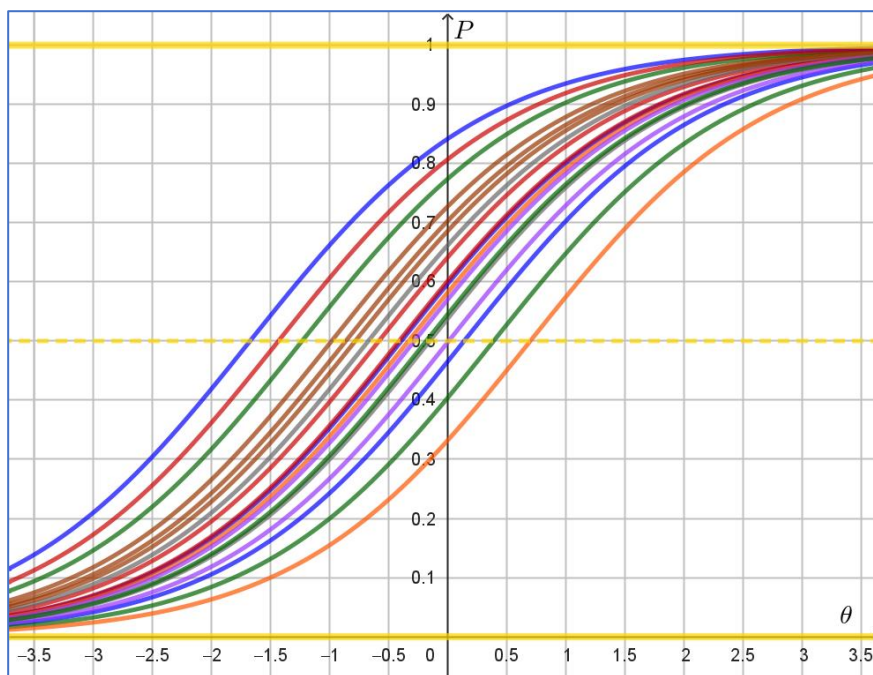
- трите модела на параметризация според IRT добре представят характеристиките на задачите;
- моделът с два параметъра най-добре се съгласува както с емпиричните данни, така и с изводите от КТТ;
- трудността на задачите се съгласува добре със способностите на учениците.

2.2. Приложение на IRT при изследване на резултатите от НВО по математика в края на VII клас от 2021 г.

2.2.1. Сравнение на характеристичните криви според трите модела на параметризация.

В тази част от дисертационния труд са използвани резултатите от проведеното през 2021 г. НВО по математика на 19 303 ученици от VII клас от четирите разглеждани области на България. Както в предната част 2.1. с помощта на приложението jMetric са обработени данните на първите 18 задачи с ИО. Графиките на техните характеристични линии, получени според еднопараметричния Раш-модел (1PL) са изобразени на фигура 2.16. Те покриват сравнително равномерно диапазона $(-3,5; 3,5)$ на нивото на способностите θ . Има две двойки графики, които се припокриват: на 5 и 11 задачи, както и на 8 и 17 задачи. Това може да се установи и от колоната 1PL на таблица 2.6. Стойностите на b -параметъра на първите две задачи са съответно $-0,39$ и $-0,41$, а вторите две задачи са съответно $-0,15$ и $-0,18$. Поради тази причина, може да се каже, че ако се махне една

задача от всяка от тези двойки, то измерителните качества на теста няма да се променят съществено.



Фиг. 2.16. Характеристични криви на задачите от 2021 г.

Друго, което прави впечатление е, че кривите сравнително плътно и равномерно покриват интервала на трудност $(-1,67; 0,70)$, като липсват задачи с много ниска и много висока трудност. Това показва добра хомогенност на задачите. Този извод може да се направи и от характеристиките, получени чрез КТТ и изобразени в таблица 1.25.

В таблица 2.6 са дадени стойностите на трите параметъра a , b и c според трите модела на параметризиране. Впечатление правят задачите с номера 2 и 17, които имат висок коефициент на налучкване $c = 0,39$, както и задача 16 с коефициент $c = 0,32$. Задача 17 бе разгледана подробно в първа глава, а условието ѝ е дадено на фигура 1.18. Другите две задачи не се открояват от гледна точка на КТТ и затова ще им обърнато внимание малко по-нататък в дисертационния труд.

Използвайки метода, приложен в точка 2.1. на дисертационния труд, се получават графиките с остатъците за всеки от трите модела. Те могат да се видят в приложение 4. Ето някои общи наблюдения върху тях:

- при 1PL броят на точките е 10, при 2PL – 9, а при 3PL – 8. Това означава, че когато се увеличават параметрите, интервалът, в който се разполагат способностите на учениците се стеснява. За всеки от трите модела тези интервали са съответно: $(-2,53; 1,92)$, $(-2,19; 1,70)$ и $(-1,70; 1,70)$;

- при 1PL моделът се наблюдават по-съществени разлики с емпиричните данни, особено за точките в краищата на интервалите. Най-големи са тези разлики:
 - при задачите с №1, 4, 9, 10, 12 – това са задачите, които параметърът a имат високи стойности, при тях дискриминацията е по-силна;
 - при задачите с №2, 16, 17 и 18 – те показват висока вероятност да се налучка верния отговор, поради по-големи стойности на параметъра c ;
- 2PL и 3PL моделите се доближават еднакво добре до емпиричните данни;

известно преимущество в това отношение има 2PL моделът при задачи с №10 и 11, а 3PL моделът – при задачи с №8 и 17;

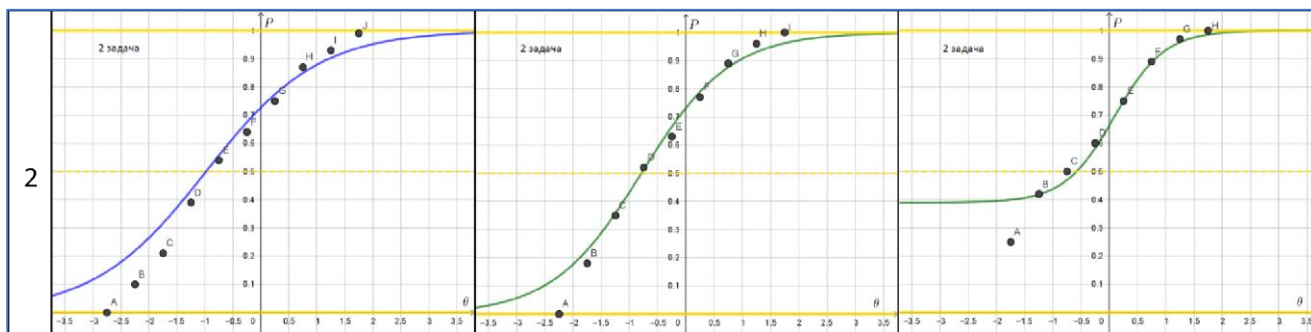
	1PL	2PL		3PL		
№	b-param	a-param	b-param	a-param	b-param	c-param
1	0.14	2.68	0.01	2.98	0.18	0.05
2	-0.98	1.27	-0.79	2.25	0.09	0.39
3	0.39	1.17	0.31	2.89	0.77	0.22
4	-0.58	2.33	-0.41	2.74	-0.18	0.10
5	-0.39	1.50	-0.31	2.29	0.17	0.22
6	0.70	1.27	0.54	2.49	0.81	0.15
7	0.01	1.60	-0.03	2.79	0.37	0.18
8	-0.15	1.32	-0.14	2.93	0.47	0.27
9	-0.86	2.28	-0.57	2.97	-0.22	0.19
10	-1.23	1.99	-0.81	1.95	-0.76	0.02
11	-0.41	1.35	-0.34	1.54	-0.08	0.11
12	-1.67	2.46	-1.00	2.71	-0.81	0.15
13	-0.33	1.41	-0.27	2.91	0.35	0.28
14	-0.28	1.73	-0.23	3.91	0.28	0.25
15	-0.67	1.26	-0.55	1.71	-0.01	0.24
16	-0.78	1.46	-0.60	2.51	0.08	0.32
17	-0.18	0.74	-0.20	2.46	0.93	0.39
18	-1.43	1.60	-1.01	1.94	-0.52	0.29

Таблица 2.6. Стойности на параметрите според трите модела на задачите от 2021 г.

Следва да се разгледат задачите с номера 2, 12, 16 и 17.

2. Стойността на израза $a^2 - b^2$ при $a = 10,5$ и $b = 9,5$ е:			
А) 18,5	Б) 19	В) 19,5	Г) 20

Фиг. 2.17. Условие на задача 2 от 2021 г.



Фиг. 2.18. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 2 от 2021 г.

Задача 2 от фигура 2.17 е приложение на добре известната формула „сбор по разлика“. Нейният коефициент на трудност според 3PL е $b = 0,09$ я определя като сравнително лесна. Дискриминацията ѝ също е добра ($a = 2,25$, 3PL). Коефициентът на налучкване много висок $c = 0,39$. Наистина, верният отговор може да се получи просто чрез събиране на 10,5 и 9,5. Причината е, че тяхната разлика е 1 и при прилагане на формулата „сбор по разлика“ този множител не променя изчислението. Такава задача би било по-добре да се промени, така че верният отговор да не се получава толкова очевидно. Например, ако се промени в условието, че $a = 10,5$ и $b = 8,5$. От графиките с остатъците на фигура 2.18 се вижда, че емпиричните данни и по трите параметризации на учениците с по-ниски способности са по-надолу от теоретичната крива. Най-добро покритие за другите ученици има 3PL моделът.

12. Правите a, b и c се пресичат в точка O .

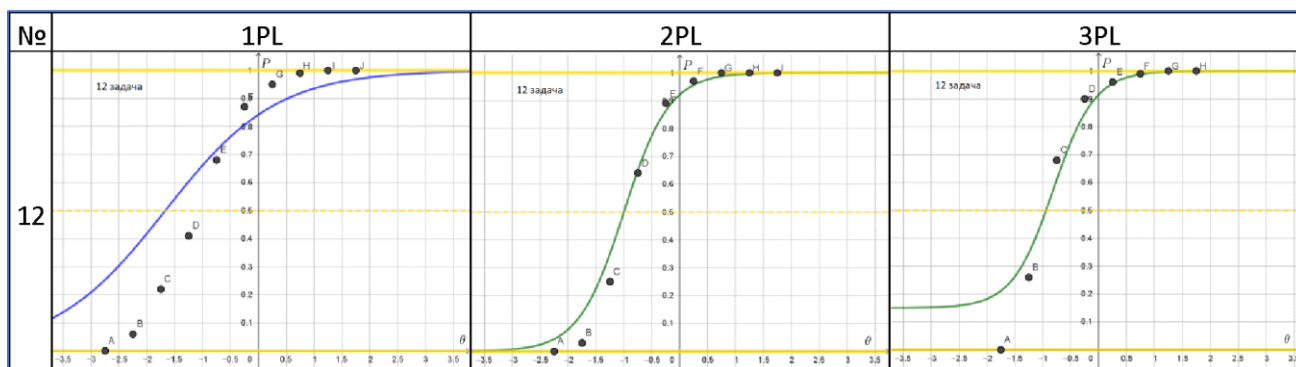
По данните от чертежа мярката на ъгъл α е:

- +А) 100°
- Б) 125°
- В) 135°
- Г) 145°

Фиг. 2.19. Условие на задача 12 от 2021 г.

На фигура 2.19 е дадено условието на задача 12. Задачата е от съдържателна област „Съседни и противоположни ъгли“, познавателно ниво – „Знание“. Задачата е от най-лесните в теста, което се потвърждава и от КТТ, като в таблица 1.24 задачата е на първо място. Прави впечатление от графиките с остатъците на фигура 2.20, че при 1PL моделът има големи разминавания между емпиричните и теоретичните данни. Задачата има много добри показатели за дискриминативна сила ($a = 2,46$, 2PL). При 3PL модела

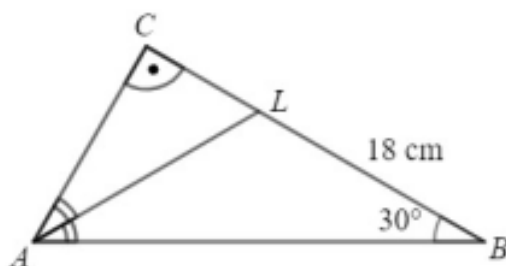
учениците с най-ниски способности (точка А) са много под теоретичната крива, което показва, че вероятността те да са налучквали верният отговор е по-малка от предполагаемата. При тази задача 2PL моделът е най-близо до емпиричните данни.



Фиг. 2.20. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 12 от 2021 г.

16. На чертежа $\triangle ABC$ е правоъгълен, $\angle ABC = 30^\circ$ и отсечката AL е ъглополовяща на $\angle BAC$. Ако $BL = 18$ cm, то дължината на BC е:

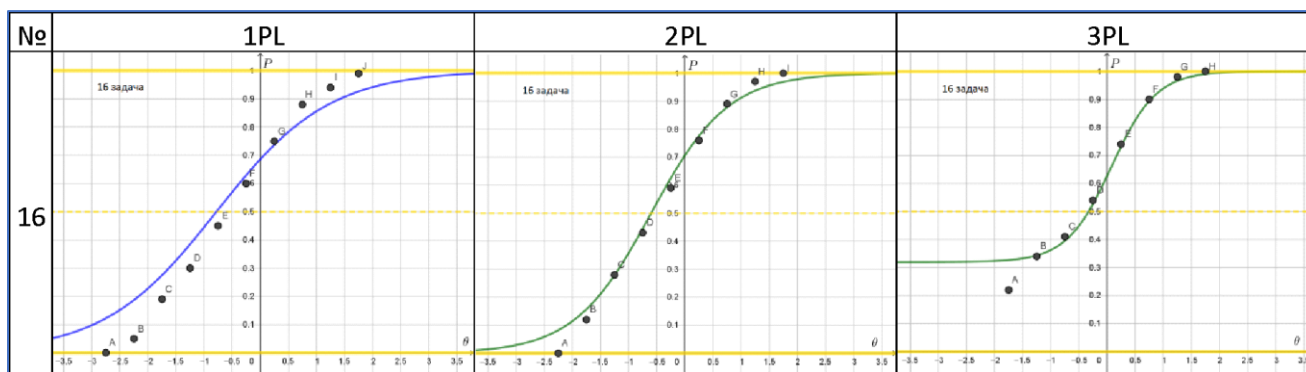
- A) 9 cm
- B) 18 cm
- +B) 27 cm
- Г) 36 cm



Фиг. 2.21. Условие на задача 16 от 2021 г.

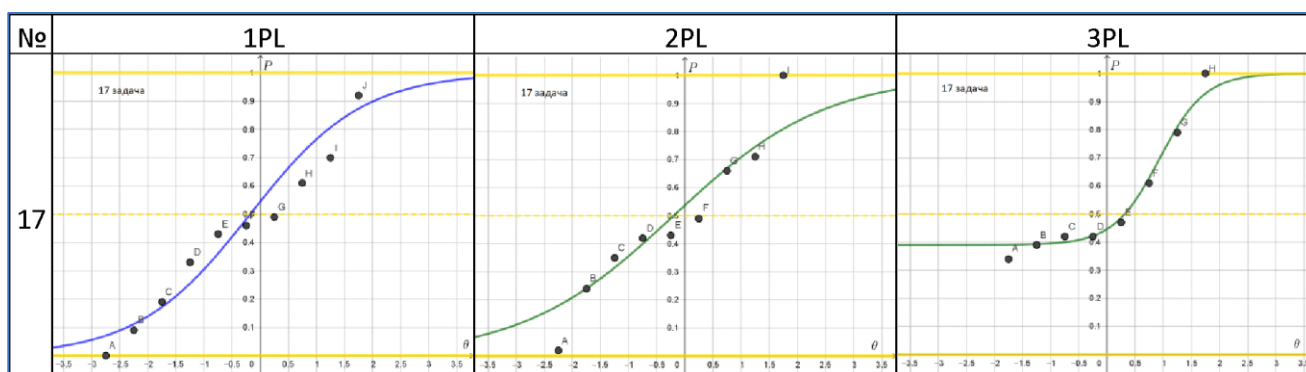
Задача 16 с условие на фигура 2.21 не се отличава според КТТ, но от 3PL модела се вижда, че коефициентът на налучкване е много висок $c = 0,32$. Задачата е от раздел „Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30° “, като се прилагат знания от ъглополовяща и равнобедрен триъгълник. Тя би трябвало да е от по-трудните, но това не се потвърждава от получените коефициенти на трудност и по двете теории на тестовете. Причината е, че от изброените отговори верният е най-правдоподобен и може да се уцели без да се използват всички разсъждения за неговото пресмятане.

От графиките с остатъците на фигура 2.22 може да се каже, че 2PL и 3PL моделите по-добре съответстват на емпиричните данни.



Фиг. 2.22. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 16 от 2021 г.

Задача 17 е разгледана подробно в първа глава, като условието ѝ е представено на Фиг. 1.18. Графиките с остатъците на фигура 2.23 показват някои разминавания между точките и линиите. Това е видно при 1PL и 2PL, а при 3PL учениците с по-ниски способности, представени с точки А, В, С и D имат почти еднаква вероятност да посочат верният отговор. Тази вероятност е много голяма, което се потвърждава и от коефициента $c = 0,39$. Едно решение, с което може да се реши този проблем е дадено в първа глава на дисертационния труд след таблица 1.30.



Фиг. 2.23. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 17 от 2021 г.

Сравнението на трите модела с емпиричните данни показва, че както за 2020, така и за 2021 г. двупараметричния модел има известно предимство. Това предимство би се засилило, ако в задачите с високи стойности на налущкване се направят промените, които са предложени в дисертационния труд.

2.2.2. Сравнение на резултатите от КТТ и 2PL на IRT върху данните от НВО-2021 г.

В таблица 2.7 са дадени номерата на задачите от 2021 г., подредени по два показателя:

- таблица 2.7 А) – низходящо според коефициента на трудност;

- таблица 2.7 Б) – възходящо според b -параметъра на двупараметричния модел.

Очевидно е, че няма големи разлики в двете наредби. Коефициентът на корелация отново както при 2020 г. е отрицателното число -0.99163 . Абсолютната му стойност е почти равна на 1 и това показва отлична съгласуваност на коефициентите на трудност по двете теории на тестове.

№	КТТ	IRT-2PL	№	КТТ	IRT-2PL
12	0.79	-1.00	18	0.75	-1.01
18	0.75	-1.01	12	0.79	-1.00
10	0.72	-0.81	10	0.72	-0.81
2	0.68	-0.79	2	0.68	-0.79
9	0.66	-0.57	16	0.64	-0.60
16	0.64	-0.60	9	0.66	-0.57
15	0.62	-0.55	15	0.62	-0.55
4	0.61	-0.41	4	0.61	-0.41
11	0.57	-0.34	11	0.57	-0.34
5	0.57	-0.31	5	0.57	-0.31
13	0.56	-0.27	13	0.56	-0.27
14	0.55	-0.23	14	0.55	-0.23
17	0.53	-0.20	17	0.53	-0.20
8	0.53	-0.14	8	0.53	-0.14
7	0.49	-0.03	7	0.49	-0.03
1	0.47	0.01	1	0.47	0.01
3	0.42	0.31	3	0.42	0.31
6	0.37	0.54	6	0.37	0.54

А)

Б)

Таблица 2.7. Наредби на задачите от 2021 г. според трудността им

В таблица 2.8 номерата на задачите са подредени според коефициентите на дискриминация:

- таблица 2.8 А) – възходящо според коефициента g_{pbis} ;
- таблица 2.8 Б) – възходящо според a -параметъра на двупараметричния модел.

Коефициентът на корелация 0.85213 има висока стойност. Задачите, които имат по-слаба дискриминация и по двата метода са с номера 17, 2 и 3, както и тези, които имат най-висока дискриминация са 9, 4 и 1. Правят впечатление 2 задачи, които според КТТ имат по-слаба дискриминация, а според IRT тя е по-силна. При задача 18 това не е много съществено, т.к. разликата между нейните и другите задачи около нея според КТТ са

малки – в рамките на 0,05, като тя се тълкува като задача с отлична разделителна способност (Стоименова 2000). Според двупараметричния модел коефициентът γ 1,60 също има малки разлики със съседните задачи $\pm 0,3$. При задача 12, анализа на нейните графики с остатъците, направен по-горе показва, че тя действително много добре успява да разграничи по-слабите от по-силните ученици.

№	KTT	IRT-2PL	№	KTT	IRT-2PL
17	0.30	0.74	17	0.30	0.74
2	0.41	1.27	3	0.42	1.17
3	0.42	1.17	15	0.43	1.26
18	0.43	1.60	2	0.41	1.27
15	0.43	1.26	6	0.45	1.27
6	0.45	1.27	8	0.46	1.32
8	0.46	1.32	11	0.46	1.35
11	0.46	1.35	13	0.48	1.41
16	0.47	1.46	16	0.47	1.46
13	0.48	1.41	5	0.49	1.50
12	0.48	2.46	7	0.52	1.60
5	0.49	1.50	18	0.43	1.60
10	0.49	1.99	14	0.54	1.73
7	0.52	1.60	10	0.49	1.99
14	0.54	1.73	9	0.56	2.28
9	0.56	2.28	4	0.59	2.33
4	0.59	2.33	12	0.48	2.46
1	0.66	2.68	1	0.66	2.68

А)

Б)

Таблица 2.8. Наредби на задачите от 2021 г. според дискриминацията им

2.2.3. Диаграма на задачите и респондентите (item-person-map) от НВО-2021.

Използвайки описания в 2.1.2 метод, е построена item-person-map диаграма на задачите от 2021 г., която е на фигура 2.24. Ето някои наблюдения върху нея:

- учениците се разпределят по цялата скала в интервала $(-2; 1,8)$;
- има два пика при учениците – при $\theta = -0,6$, $\theta = -0,4$ и при $\theta = 1,8$;
- ако се изключат учениците с най-високи постижения, останалите се разпределят сравнително „нормално“;
- най-много задачи са с трудност около $-0,2$, което близко до една от високите стойности при учениците;

- по-голяма част от задачите са разположени вляво от средата $\theta = 0$, което показва, че има малко задачите с по-висока трудност, които да съответстват на учениците с по-високи постижения. Това е добър показател, ако разглеждаме тестовите задачи с ИО като критериален тест, но за нормативен тест не би могъл да бъде достатъчен, за да разслои силните ученици;

Като общо, заключенията върху задачите от 2021 г. не се различават много от тези за 2020 г. в края на 2.1.3.

процент ученици																						
θ/b	-2.0	-1.8	-1.6	-1.4	-1.2	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	
№ задача																						

Фиг. 2.24. Диаграма на задачите и респондентите от НВО – 2021 г.

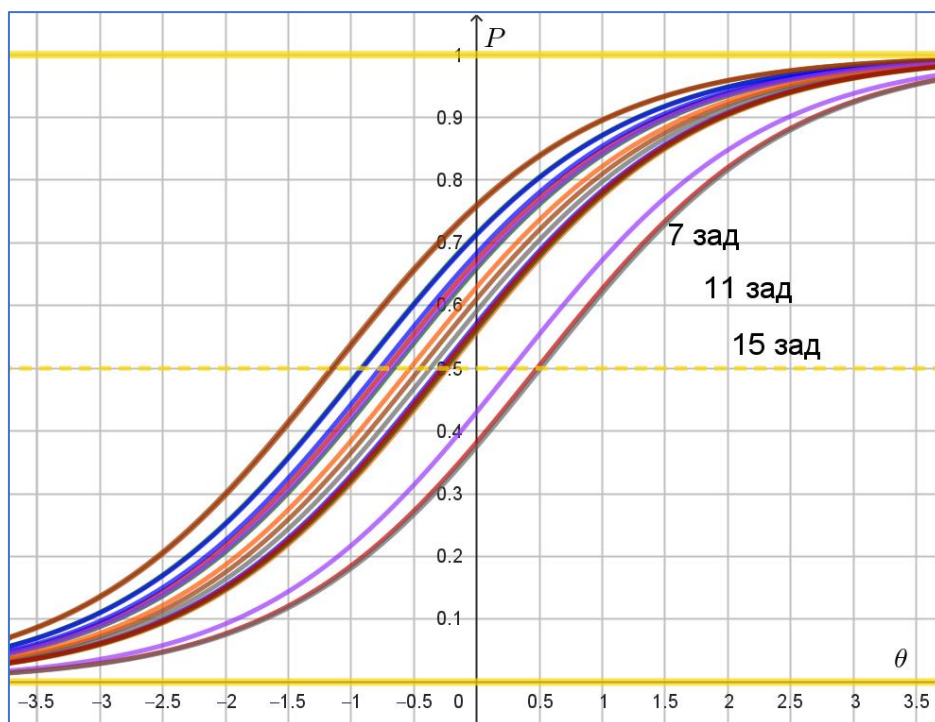
2.3. Приложение на IRT при изследване на резултатите от НВО по математика в края на VII клас от 2022 г.

2.3.1. Сравнение на характеристичните криви според трите модела на параметризация.

На фигура 2.25 са изобразени характеристичните криви на задачите с ИО от 2022 г., получени чрез еднопараметричния Раш-модел.

Както се вижда, повечето задачи са се оказали сравнително лесни и са съсредоточени наляво от средата, в тесен интервал на трудност от $-1,16$ до $-0,23$. Три задачи са с по-висока трудност. Това са 7, 11 и 15 задачи. Те се оказват най-трудни и според КТТ. Характеристичните криви на някои от задачите се припокриват – 9 и 16; 3

и 5; 10 и 14; 1 и 18; 6 и 17; 11 и 15. Поради това, ако се премахне по една задача от всяка такава двойка, може да се каже, че измерителните качества на теста няма да се променят съществено. В същото време, липсват задачи с трудност в интервала $(-0,23; 0,28)$, както и задачи с трудност по-ниска от $-1,16$ и по-висока $0,51$. Ако се сравнят тези резултати и обобщените резултати, получени според КТТ в таблица 1.36, се забелязва известно разминаване. Според КТТ задачите са добре балансирани по показателя трудност, а според Раш-модела не е точно така.



Фиг. 2.25. Характеристични криви на задачите от 2022 г.

Данните от таблица 2.9, получени за 2PL-модела също показват, че задачите са в много тесен интервал на трудност и посочените двойки задачи са с близки стойности на b -параметъра. Три от задачите са с високи стойности на параметъра на налучкване – с номера 1, 3 и 16. Както при изследванията от предните две години, задачите с по-високи стойности на този параметър не се открояват според КТТ и ще бъдат разгледани по-нататък.

В приложение 5 са представени графиките с остатъците на трите IRT-модела за 2022 г. За тези графики се наблюдава:

- при 1PL и 2PL броят на точките е 9, а при 3PL е 8;

- при 1PL емпиричните данни имат по-големи разминавания с кривите, в сравнение с другите два модела. Това се вижда най-вече при задачи с номера 1, 3, 11, 13 и 15;
- при 9 задачи 2PL моделът е най-близък до емпиричните данни – задачи с номера 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 17;
- при 4 задачи 3PL моделът показва по-близки криви до емпиричните данни – задачи с номера 1, 9, 11 и 15;
- при останалите 5 задачи 2PL и 3PL са с приблизително еднакво добри покрития.

	1PL	2PL		3PL		
№	b-param	a-param	b-param	a-param	b-param	c-param
1	-0.29	1.18	-0.26	2.93	0.47	0.31
2	-0.45	1.44	-0.36	2.56	0.21	0.26
3	-0.92	1.66	-0.66	2.68	-0.07	0.30
4	-0.72	1.65	-0.53	2.70	0.00	0.26
5	-0.91	2.13	-0.60	2.68	-0.29	0.17
6	-0.23	1.74	-0.20	2.25	0.08	0.13
7	0.28	1.32	0.19	1.36	0.25	0.01
8	-0.37	1.83	-0.29	2.85	0.09	0.18
9	-1.14	2.10	-0.74	2.28	-0.54	0.11
10	-0.66	1.70	-0.48	1.80	-0.33	0.06
11	0.48	1.13	0.39	2.94	0.81	0.21
12	-0.77	2.97	-0.49	2.99	-0.36	0.05
13	-0.53	2.03	-0.38	2.92	-0.03	0.17
14	-0.68	2.69	-0.45	2.93	-0.29	0.06
15	0.51	1.08	0.42	2.62	0.84	0.21
16	-1.16	1.53	-0.84	2.22	-0.23	0.31
17	-0.25	2.05	-0.21	2.38	-0.02	0.07
18	-0.27	1.10	-0.25	1.82	0.37	0.25

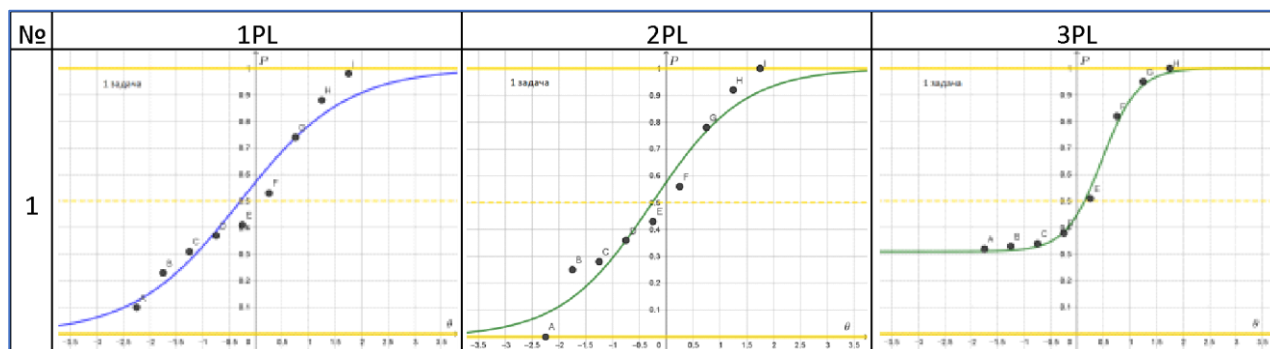
Таблица 2.9. Стойности на параметрите според трите модела на задачите от 2022 г.

1. Стойността на израза $-20,5 + 0,5 \left(-\frac{1}{5}\right)$ е:
 +А) $-20,6$ Б) $-20,4$ В) -4 Г) 4

Фиг. 2.26. условие на задача 1 от 2022 г.

Следват някои от задачите, които са се отличили. На фигура 2.26 е дадено условието на задача 1, а на фигура 2.27 – съответните ѝ графики с остатъците. Задачата е подобна на задача 1 от 2020 г. на фигура 2.8. Интересно е, че те са почти еднакви на

външен вид, от една и съща съдържателна област са, използват се едни и същи аритметични операции, но характеристиките им се различават съществено. Задачата от 2022 г. има много висок коефициент на налучкване ($c = 0,31$ от таблица 2.9) и това обяснява защо 3PL моделът е по-близък до емпиричните данни. Разграничителната сила е по-слаба при 2PL, отколкото при 3PL и съответните коефициенти са $a = 1,18$ и $a = 2,93$. Подобна на тези задачи е и 1 задача от 2021 г. на фигура 1.19, като анализа на трите задачи от гледна точка на КТТ е идентичен.



Фиг. 2.27. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 1 от 2022 г.

3. Стойността на израза $a^2 - 2ab + 3a - 6b$ е тъждествено равен на израза:

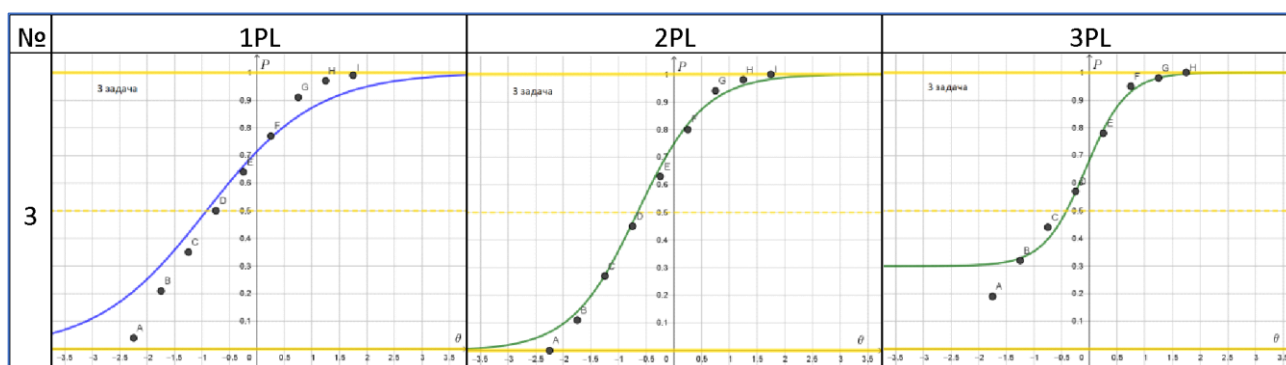
А) $(a + 2b)(a - 3)$

Б) $(a - 2b)(a - 3)$

+В) $(a - 2b)(a + 3)$

Г) $(a + 2b)(a + 3)$

Фиг. 2.28. Условие на задача 3 от 2022 г.



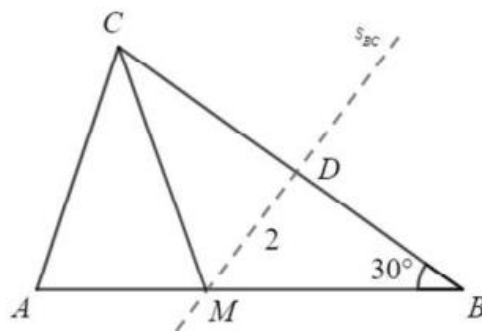
Фиг. 2.29. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 3 от 2022 г.

Условието на задача 3 е дадено на фигура 2.28, а на фигура 2.29 са изобразени нейните графики с остатъците. Интересно е да се забележи, че тази задача, за решаването

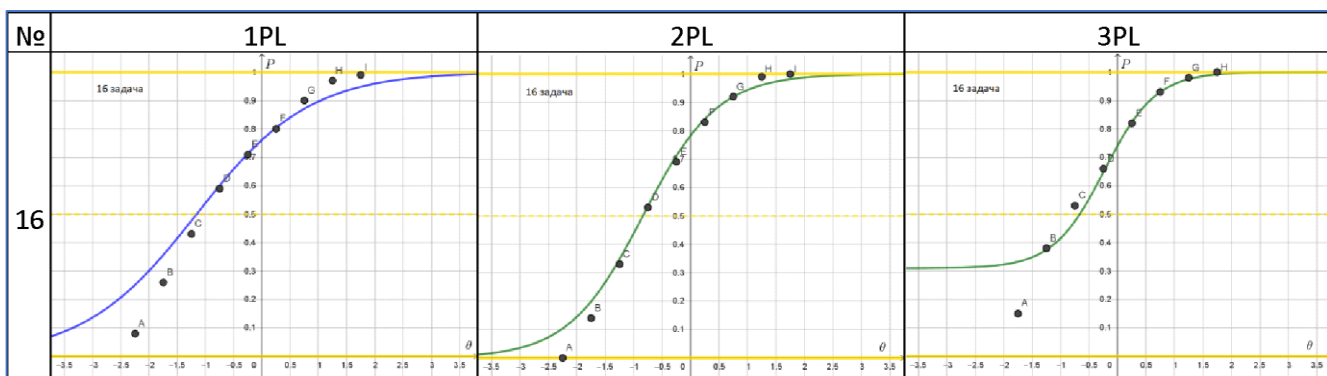
на която се използва разлагане на многочлен на множители и обикновено се счита за трудна, в случая се оказва по-лесна от задача 1 – графиките на задача 3 са разположени по-наляво от тези на задача 1. Разграничителната сила според 3PL модела е почти еднаква, докато при 2PL модела задача 3 показва по-добри характеристики. Високата стойност на коефициента на налучкване при 3PL модела не се съгласува добре при учениците с по-ниски способности, т. к. точка А е далеч от теоретичната крива. При тази задача 2PL моделът се съгласува най-добре с емпиричните данни. Подобни задачи на тази са давани през 2020 г. – задача 4 на фигура 1.10 и през 2021 г. – задача 6 на фигура 1.17, които са разгледани подробно в първа глава. Може да се забележи, че разлагането на множители, което се прави в задачата от 2022 г. е с по-малко действия от другите две години, а дискриминативната сила е достатъчно добра.

16. На чертежа в $\triangle ABC$ $\angle ABC = 30^\circ$ и симетралата на страната BC пресича страните AB и BC съответно в точките M и D . Ако $MD = 2$ cm, дължината на отсечката CM е:

- А) 6 cm
+Б) 4 cm
В) 3 cm
Г) 2 cm



Фиг. 2.30. Условие на задача 16 от 2022 г.



Фиг. 2.31. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 16 от 2022 г.

Задача 16 на фигура 2.30 има чертеж, който е почти същия като задача 15 от 2020 г. на фигура 2.11. За решаването на тази задача трябва да се използват знания за свойство на симетралата и правоъгълен триъгълник с 30° . Задачата има висок коефициент на налучкване ($c = 0,31$ от таблица 2.9), но графиката на 3PL моделът на фигура 2.29 не показва добра съгласуваност с учениците с ниски резултати (точка А отново е далеч от

кривата). Задачата е най-лесната в този тест (решена е от 71% от учениците). Следователно може да се каже, че 2PL моделът има известно предимство при съгласуването на данните с теоретичната крива.

Задачи като тази би трябвало да се обмислят по-добре, защото използват разсъждения от няколко съдържателни области, а показват такива резултати, с които не могат да се проверят добре уменията на учениците. Верният отговор може да се уцели с достатъчно висока вероятност, само ако се гледа чертежа. Може би такава задача ще има по-добри характеристики, ако не се предлага чертеж към нея. Това би затруднило тези ученици, които не познават добре терминологията. Друг вариант е отговорите да не могат да се налущкват лесно. Този вариант ще бъде разгледан в трета глава на този труд.

2.3.2. Сравнение на резултатите от КТТ и 2PL на IRT върху данните от НВО-2022 г.

№	КТТ	IRT-2PL	№	КТТ	IRT-2PL
16	0.71	-0.84	16	0.71	-0.84
9	0.70	-0.74	9	0.70	-0.74
3	0.67	-0.66	3	0.67	-0.66
5	0.66	-0.60	5	0.66	-0.60
12	0.64	-0.49	4	0.63	-0.53
4	0.63	-0.53	12	0.64	-0.49
14	0.62	-0.45	10	0.62	-0.48
10	0.62	-0.48	14	0.62	-0.45
13	0.60	-0.38	13	0.60	-0.38
2	0.58	-0.36	2	0.58	-0.36
8	0.57	-0.29	8	0.57	-0.29
1	0.55	-0.26	1	0.55	-0.26
18	0.55	-0.25	18	0.55	-0.25
17	0.54	-0.21	17	0.54	-0.21
6	0.54	-0.20	6	0.54	-0.20
7	0.45	0.19	7	0.45	0.19
11	0.41	0.39	11	0.41	0.39
15	0.40	0.42	15	0.40	0.42

А)

Б)

Таблица 2.10. Наредби на задачите от 2022 г. според трудността им

В таблица 2.10 са дадени номерата на задачите от 2022 г., подредени по два показателя:

- таблица 2.10 А) – низходящо според коефициента на трудност;

- таблица 2.10 Б) – възходящо според b -параметъра на двупараметричния модел.

Очевидно е, че няма големи разлики в двете наредби. Коефициентът на корелация отново както при 2020 г. е отрицателното число -0.99410 . Абсолютната му стойност е почти равна на 1 и това показва отлична съгласуваност на коефициентите на трудност по двете теории на тестове.

№	КТТ	IRT-2PL	№	КТТ	IRT-2PL
15	0.40	1.08	15	0.40	1.08
11	0.41	1.13	18	0.41	1.10
18	0.41	1.10	11	0.41	1.13
1	0.43	1.18	1	0.43	1.18
16	0.46	1.53	7	0.48	1.32
7	0.48	1.32	2	0.49	1.44
2	0.49	1.44	16	0.46	1.53
3	0.50	1.66	4	0.51	1.65
4	0.51	1.65	3	0.50	1.66
10	0.53	1.70	10	0.53	1.70
9	0.54	2.10	6	0.55	1.74
6	0.55	1.74	8	0.56	1.83
8	0.56	1.83	13	0.58	2.03
5	0.57	2.13	17	0.60	2.05
13	0.58	2.03	9	0.54	2.10
17	0.60	2.05	5	0.57	2.13
14	0.64	2.69	14	0.64	2.69
12	0.66	2.97	12	0.66	2.97

А)

Б)

Таблица 2.11. Наредби на задачите от 2022 г. според дискриминацията им

В таблица 2.11 номерата на задачите са подредени според коефициентите на дискриминация:

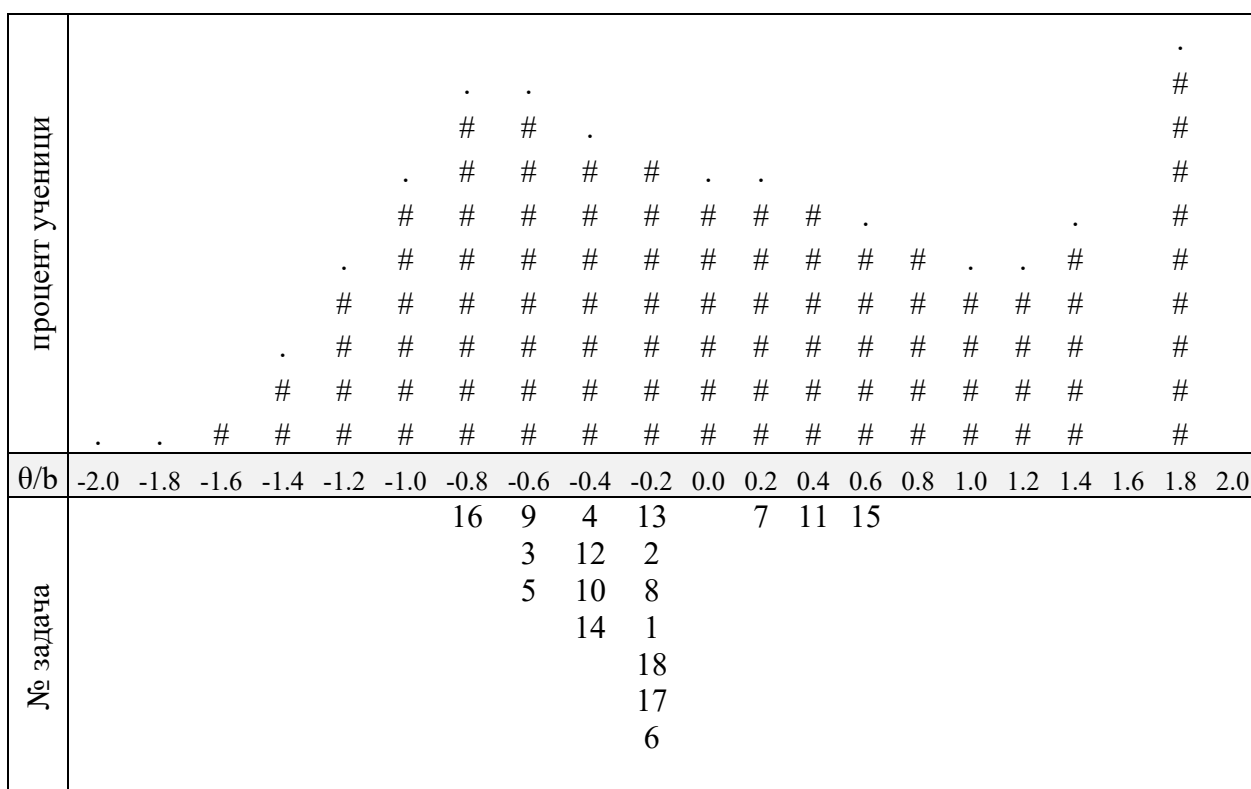
- таблица 2.11 А) – възходящо според коефициента $gpbis$;
- таблица 2.11 Б) – възходящо според a -параметъра на двупараметричния модел.

Коефициентът на корелация 0.95345 е почти равен на 1. Задачите с най-нисък и най-висок коефициент са еднакво подредени и в двете таблици. Задача 9, при която има по-голяма разлика в позицията при двете наредби, е от съдържателната област „Вероятност на случайно събитие“ на елементарно ниво. Този тип задачи, се оказва, че не са от трудните и имат много добра разграничителна сила, която според КТТ не се

различава съществено от задачите, които я следват в тази наредба. Разликите са от порядъка на $\pm 0,02$.

2.3.3. Диаграма на задачите и респондентите (item-person-map) от НВО-2022.

Използвайки описания в 2.1.2 метод, е построена item-person-map диаграма на задачите от 2022 г., която е на фигура 2.32.



Фиг. 2.32. Диаграма на задачите и респондентите от НВО – 2022 г.

Ето някои наблюдения върху нея:

- учениците се разпределят по цялата скала в интервала $(-2; 1,8)$;
- има два пика при учениците – при $\theta = -0,8$, $\theta = -0,6$ и при $\theta = 1,8$;
- ако се изключат учениците с най-високи постижения, останалите се разпределят сравнително „нормално“;
- ученици със способност около $\theta = 1,6$ практически липсват, а тези с най-високи способности $\theta = 1,8$ са с най-голям дял – почти 10%. Подобна тенденция се забеляза и в диаграмата от 2021 г. на фигура 2.24.
- най-много задачи са с трудност около $-0,2$, което близко до една от високите стойности при учениците;

- по-голяма част от задачите са разположени вляво от средата $\theta = 0$, което показва, че има малко задачи с по-висока трудност, които да съответстват на учениците с по-високи постижения;
- многото по-лесни задачи обуславят високият процент ученици с най-високи постижения и големия скок между тях и тези с малко по-ниски постижения.

Общите заключения от 2020 г. в края на 2.1.3 могат да бъдат повторени и тук. Има все пак известна разлика, която се вижда при учениците с най-високи постижения и точно скокът, който се наблюдава от способност 1,4 до 1,8. Една от причините за това може да се търси в обучението от разстояние, в което бяха принудени да се учат учениците през 2020/2021 и 2021/2022 години. Подобен, но не толкова ясно изразен скок се наблюдава и на диаграмата от 2021 г. (Диаграма на задачите и респондентите от НВО – 2021 г.). Явно по-добрите ученици са успели да се пригоят към тази среда. Тя предполага повече самостоятелна работа, отколкото е обичайната училищна обстановка.

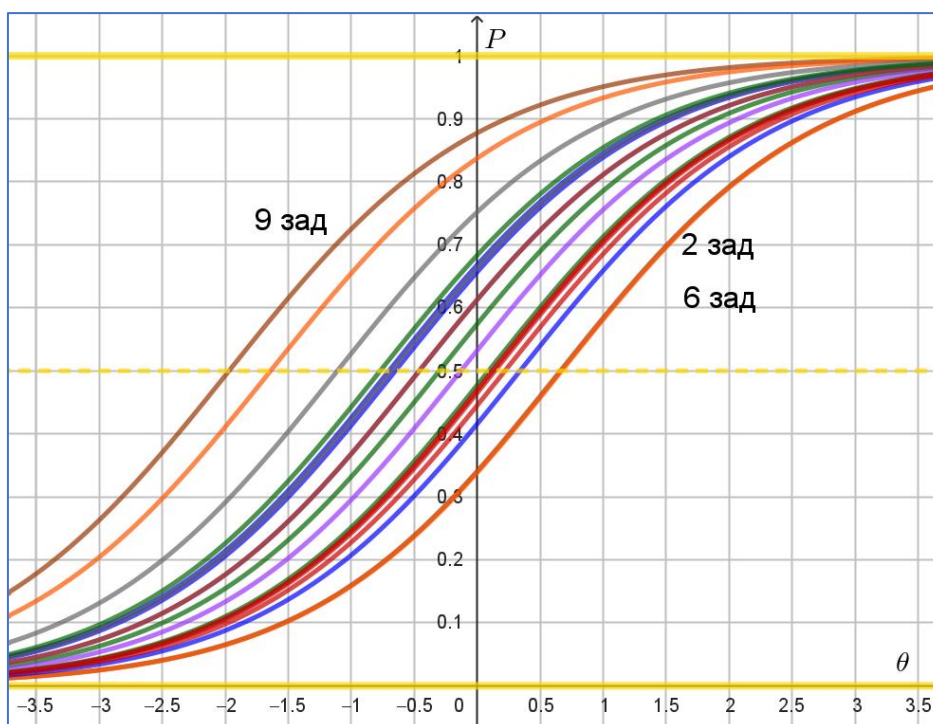
2.4. Приложение на IRT при изследване на резултатите от НВО по математика в края на VII клас от 2023 г.

2.4.1. Сравнение на характеристикните криви според трите модела на параметризация.

На фигура 2.33 са изобразени характеристикните криви на задачите с ИО от 2023 г., получени чрез еднопараметричния Раш-модел. Те покриват широк диапазон на нивото на способностите θ . Разположението на тези графики наподобява това от 2021 г. на фигура 2.16.

Най-лесна се е оказала задача 9, а най-трудни – задачи 2 и 6. Както и в предните години и тук има задачи с припокриващи се характеристикни криви: 5, 8 и 1; 14 и 16; 11 и 4; 2 и 6. В същото време, има сравнително малко задачи с трудност в диапазона $(-1,97; -0,70)$, както и при по-трудните задачи с $b > 0,34$. Това се потвърждава и от анализа на тези задачи според КТТ, представен в таблица 1.54.

В таблица 2.12 са дадени стойностите на трите параметъра a , b и c според трите модела на параметризиране. Както и при изследванията на резултатите от предните години се открояват задачи с висок коефициент на налучкване – 11, 2 и 13, при които тези коефициенти са съответно $c = 0,30$, $c = 0,32$ и $c = 0,40$. Задача 2 бе разгледана по-подробно в първа глава, а другите две ще бъдат разгледани малко по-нататък.



Фиг. 2.33. Характеристични криви на задачите от 2023 г.

	1PL	2PL		3PL		
№	b-param	a-param	b-param	a-param	b-param	c-param
1	-0.65	1.76	-0.48	2.75	-0.01	0.24
2	0.66	0.34	1.58	2.58	1.75	0.32
3	-0.30	1.30	-0.26	2.40	0.34	0.27
4	0.14	1.53	0.07	2.41	0.41	0.16
5	-0.70	1.93	-0.50	2.03	-0.35	0.06
6	0.67	0.66	0.88	2.08	1.34	0.25
7	-0.13	1.24	-0.13	2.31	0.43	0.25
8	-0.68	2.07	-0.48	2.49	-0.22	0.13
9	-1.97	2.01	-1.26	2.07	-1.10	0.15
10	0.09	1.28	0.05	2.95	0.57	0.24
11	0.12	0.92	0.12	2.97	0.82	0.30
12	0.34	1.73	0.20	2.95	0.46	0.13
13	-1.64	1.72	-1.14	2.61	-0.45	0.40
14	-0.46	1.90	-0.35	1.94	-0.25	0.03
15	-1.11	1.88	-0.76	2.53	-0.34	0.24
16	-0.46	1.68	-0.36	2.05	-0.09	0.13
17	-0.77	1.40	-0.61	1.99	-0.07	0.26
18	0.22	1.48	0.14	1.97	0.38	0.11

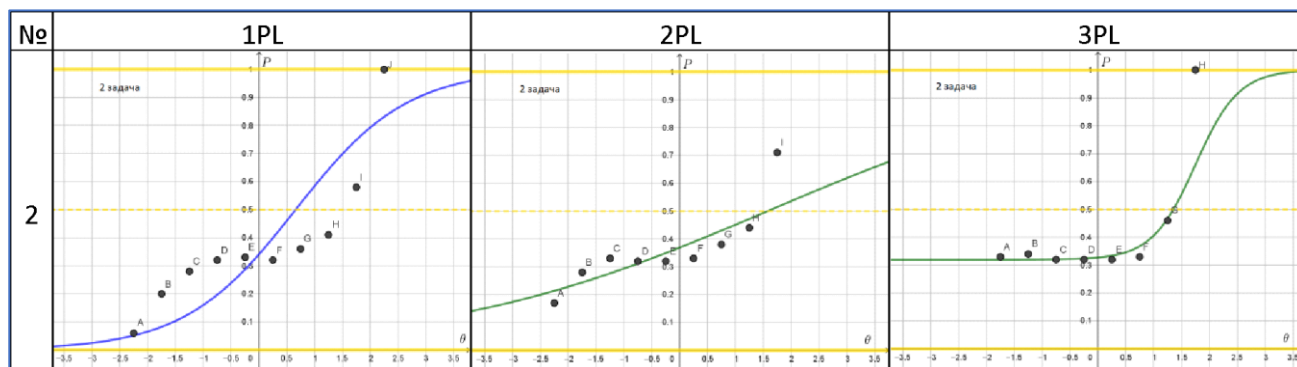
Таблица 2.12. Стойности на параметрите според трите модела на задачите от 2023 г.

В приложение 6 са представени графиките с остатъците на трите IRT модела, получени по метода в точка 2.1 на дисертационния труд. Някои общи изводи, които могат да се направят са:

- както при 2021 г., така и при 2023 г. броят на точките при 1PL, 2PL и 3PL е съответно 10, 9 и 8. Интервалите, в които се разполагат способностите на учениците, са съответно $(-2,49; 2,01)$, $(-2,19; 1,78)$ и $(-1,72; 1,89)$;
- 1PL моделът показва по-големи разлики с емпиричните данни при повечето от задачите, като:
 - при повечето задачи разликите са в основно в двата края на графиките. Това се дължи на факта, че 1PL моделът не отчита трудността на задачите, поради което теоретичните криви имат един и същи наклон, докато точките са разположени по крива, която прилича на теоретичната, но с различен наклон;
 - изключение от горния извод са задачи с номера 2, 6, 9, 11, 13. При тях, освен наклона, има сериозна разлика и в поведението на точките спрямо кривите. Пример за това може да се види на фигура 2.34. Това са задачи, които са показали различни дефекти, например ниска разграничителна сила (№2 и №6), висок коефициент на налучкване (№2, №11 и №13), много лесна задача (№9);
- 2PL моделът има по-добри прилики с емпиричните данни при 5 задачи с номера 3, 5, 8, 14 и 16;
- 3PL моделът е по-близък до емпиричните данни при 5 задачи: 6, 7, 10, 12 и 17;
- 2PL и 3PL моделите се представят сравнително еднакво при 4 задачи: 1, 4, 15 и 18;
- при останалите 4 задачи нито един от моделите не покрива добре емпиричните данни. Това са задачи с номера 2, 9, 11 и 13;

Трябва да се обърне внимание на някои от проблемните задачи. На фигура 2.34 са представени графиките с остатъците на задача 2, чието условие е на фигура 1.30. Както се вижда, само 3PL моделът дава сравнително добро приближение до емпиричните данни. Въпреки това, за повечето ученици (точки от А до F) моделът има много лоша

разграничителна сила. Най-дясната точка Н, която представя учениците с на-високи постижения е далеч от кривата. Следователно, моделът предвижда по-ниска вероятност за получаване на верния отговор, отколкото е в действителност. В тази задача, както бе коментирано в първа глава, основният проблем е понятието просто число, което сравнително рядко се използва в часовете по математика в VII клас. При това, немалка част от по-добрите ученици са давали отговор, от който става ясно, че те са броили числото 1 за просто.



Фиг. 2.34. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 2 от 2023 г.

Друга задача, при която има голямо разминаване между емпиричните данни и теоретичните криви е №11 с условие на фигура 2.35 и графики на фигура 2.36. Тя е от раздел „Съседни и противоположни ъгли“. Има оптимална трудност (47% от учениците са посочили верния отговор), но има и висок коефициент на налучкване ($c = 0,30$ от таблица 2.12). Ако се погледнат графиките на 1PL и 2PL, ще се види, че точките, съответстващи на по-силните и по-слабите ученици са над кривата (B, C, D, H, I, J), което може да значи, че вероятно едните могат да намират верния отговор, а другите – да го налучкват. В същото време, на учениците със средни способности точките са разположени под теоретичната крива (E, F, G). 3PL моделът сравнително по-добре се съгласува с емпиричните данни, но не разграничава добре учениците с по-ниски способности (точки от А до Е). Една причина за тези разминавания може да се дължи сравнително лесното пресмятане на числата, които са избрани в условието 80% от 100^0 са 80^0 и верният отговор е 100^0 . Един възможен начин за да се подобрят характеристиките на тази задача, ако искаме тя да набляга на знанията за съседни ъгли, е да дадем в условието следния вариант: „Един от ъглите, получени при пресичането на

две прави е с 20^0 по-малък от другия...“. Още по-добър вариант би бил да не се получават цели числа.

11. Един от ъглите, получени при пресичането на две прави, е 80% от другия. Мярквата на съседния му ъгъл е:

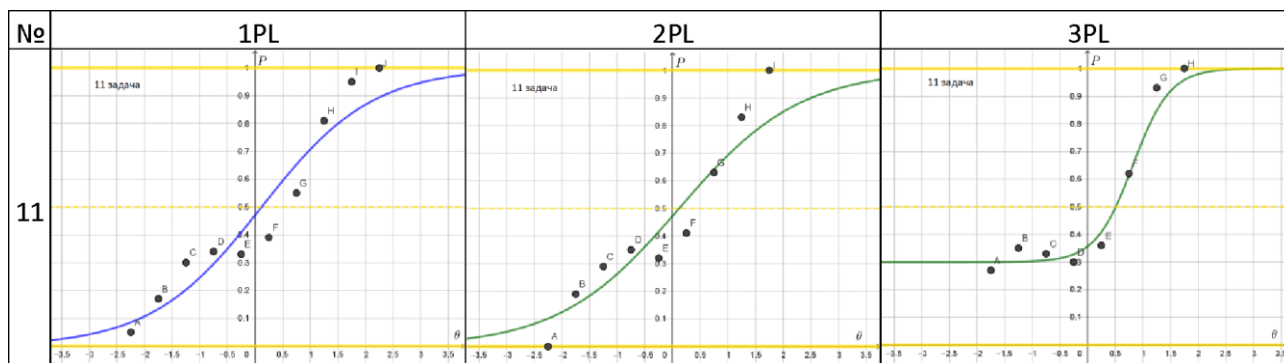
А) 36^0

Б) 80^0

+В) 100^0

Г) 144^0

Фиг. 2.35. Условие на задача 11 от 2023 г.



Фиг. 2.36. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 11 от 2023 г.

Задача №13, която има най-висок коефициент на налучкване ($c = 0,40$ от таблица 2.12) е дадена на фигура 2.37, а графиките с остатъците са на фигура 2.38. За решаването ѝ учениците трябва да приложат знания за външен ъгъл на триъгълник, срещуположни ъгли и сбор на ъглите в триъгълник. Верният отговор, обаче се вижда от чертежа и това обяснява защо е посочен от 79% от учениците, което е прави една от най-лесните в този тест. Вероятно тези резултати биха се променили, ако числата са такива, че търсеният ъгъл да не е точно число, а например 88^0 , 89^0 , 91^0 , 92^0 ... Въпреки това, разграничителната сила според 2PL и 3PL моделите е добра, т. к. графиките са изправени, но за учениците с по-ниски способности теоретичните криви показват по-висока вероятност да се получи верният отговор.

Като заключение в тази точка може да се каже, че сравнявайки емпиричните и теоретичните данни в трите модела на параметризация, както и в предните три години 2PL модела има известно предимство. Това предимство вероятно би се повишило, ако в

задачите с високи стойности на налучкване се направят някои промени като предложените тук.

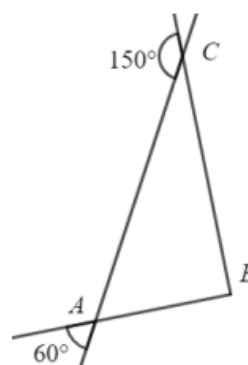
13. По данните от чертежа мярката на $\angle ABC$ е:

А) 30°

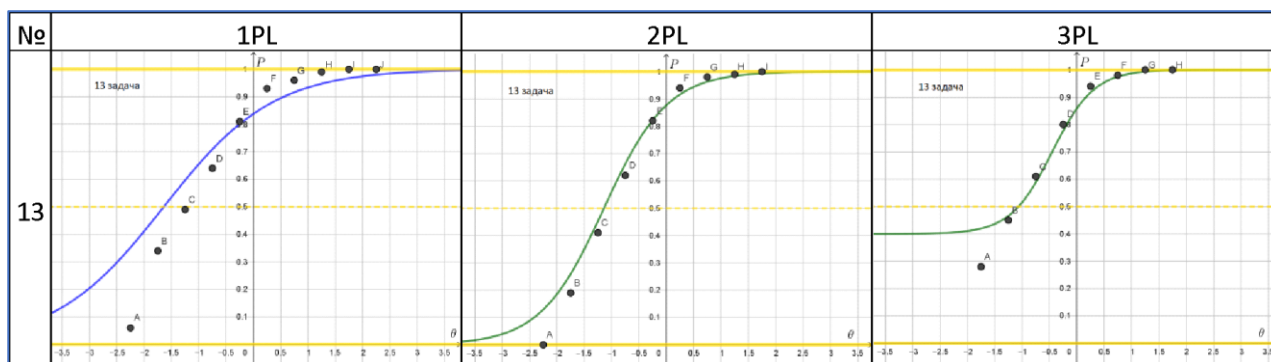
Б) 60°

+В) 90°

Г) 100°



Фиг. 2.37. Условие на задача 13 от 2023 г.



Фиг. 2.38. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 13 от 2023 г.

2.4.2. Сравнение на резултатите от КТТ и 2PL на IRT върху данните от НВО-2023 г.

В таблица 2.13 са дадени номерата на задачите от 2023 г., подредени по два показателя:

- таблица 2.13 А) – низходящо според коефициента на трудност;
- таблица 2.13 Б) – възходящо според b-параметъра на двупараметричния модел.

Очевидно е, че няма големи разлики в двете наредби. Коефициентът на корелация, както в предните години, е отрицателното число -0.93040 . Абсолютната му стойност е близка до 1 и това показва отлична съгласуваност на коефициентите на трудност по двете теории на тестове. По-голяма разлика има при най-трудните задачи с номера 2 и 6. За тях КТТ предлага еднаква трудност 0,37, докато 2PL моделът на IRT дава по-сериозна разлика, съответно 1,58 и 0,88. От таблица 2.12 се вижда, че при 3PL моделът тази разлика е по-малка, съответно 1.75 и 1.34. Анализът на тези две задачи в първа и втора глави предлага варианти за подобряване характеристиките на тези задачи.

№	KTT	IRT-2PL
9	0.83	-1.26
13	0.79	-1.14
15	0.70	-0.76
17	0.64	-0.61
5	0.63	-0.50
8	0.63	-0.48
1	0.62	-0.48
16	0.59	-0.36
14	0.59	-0.35
3	0.56	-0.26
7	0.52	-0.13
10	0.48	0.05
11	0.47	0.12
4	0.47	0.07
18	0.45	0.14
12	0.43	0.20
2	0.37	1.58
6	0.37	0.88

А)

№	KTT	IRT-2PL
9	0.83	-1.26
13	0.79	-1.14
15	0.70	-0.76
17	0.64	-0.61
5	0.63	-0.50
1	0.62	-0.48
8	0.63	-0.48
16	0.59	-0.36
14	0.59	-0.35
3	0.56	-0.26
7	0.52	-0.13
10	0.48	0.05
4	0.47	0.07
11	0.47	0.12
18	0.45	0.14
12	0.43	0.20
6	0.37	0.88
2	0.37	1.58

Б)

Таблица 2.13. Наредби на задачите от 2023 г. според трудността им

№	KTT	IRT-2PL
2	0.14	0.34
6	0.26	0.66
11	0.35	0.92
9	0.41	2.01
13	0.42	1.72
7	0.44	1.24
17	0.45	1.40
3	0.45	1.30
10	0.45	1.28
15	0.49	1.88
18	0.50	1.48
4	0.51	1.53
1	0.51	1.76
16	0.51	1.68
5	0.53	1.93
12	0.54	1.73
14	0.55	1.90
8	0.55	2.07

А)

№	KTT	IRT-2PL
2	0.14	0.34
6	0.26	0.66
11	0.35	0.92
7	0.44	1.24
10	0.45	1.28
3	0.45	1.30
17	0.45	1.40
18	0.50	1.48
4	0.51	1.53
16	0.51	1.68
13	0.42	1.72
12	0.54	1.73
1	0.51	1.76
15	0.49	1.88
14	0.55	1.90
5	0.53	1.93
9	0.41	2.01
8	0.55	2.07

Б)

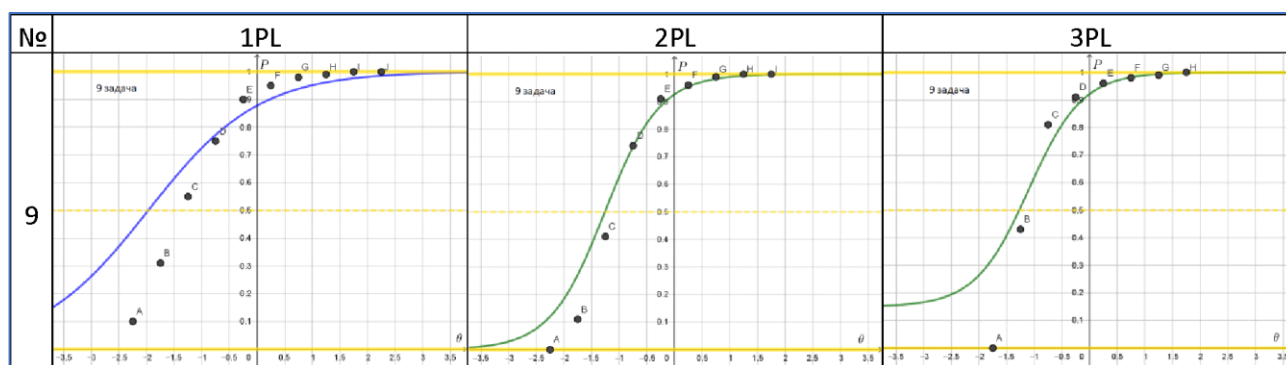
Таблица 2.14. Наредби на задачите от 2023 г. според дискриминацията им

В таблица 2.14 номерата на задачите са подредени според коефициентите на дискриминация:

- таблица 2.14 А) – възходящо според коефициента grbis ;
- таблица 2.14 Б) – възходящо според α -параметъра на двупараметричния модел.

Коефициентът на корелация 0.86571 има висока стойност. Задачите с най-нисък коефициент (№2, №6 и №11) са еднакво подредени и в двете таблици.

Задача 9, при която има най-голяма разлика в позицията при двете наредби, е от съдържателната област „Вероятност на случайно събитие“ на елементарно ниво. Тя се оказва, че е най-лесната в този тест и по двете теории. Разглеждайки графиките на фигура 2.39 се вижда, че точките, съответстващи на учениците с по-високи способности се доближават до кривите и на трите модела. При това, за тези ученици дискриминацията е много слаба. От друга страна, за учениците с по-ниски способности задачата има по-добра разграничителна сила. Такава задача е добре да има в тест, който има критериален характер, но за нормативен тест тя не е много подходяща.



Фиг. 2.39. Графика с остатъците и характеристична крива на задача 9 от 2023 г.

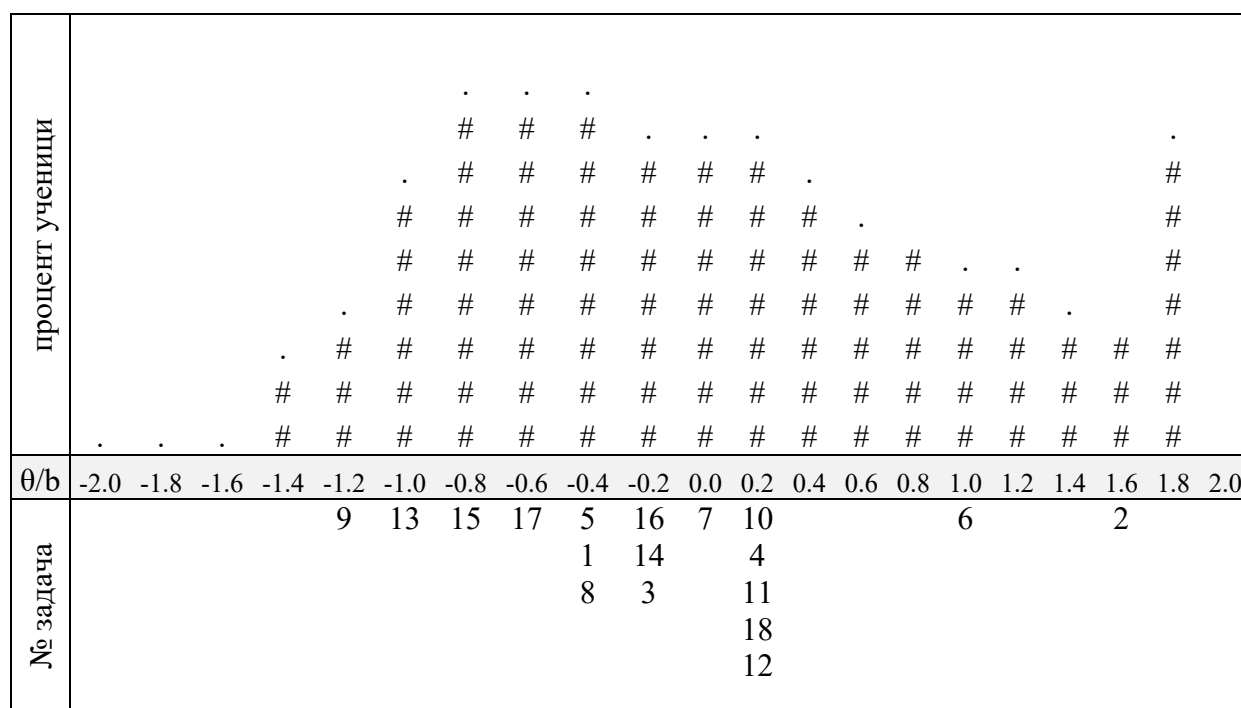
2.4.3. Диаграма на задачите и респондентите (item-person-map) от НВО-2023.

Използвайки описания в 2.1.2 метод, е построена item-person-map диаграма на задачите от 2023 г., която е на фигура 2.40.

Ето някои наблюдения върху нея:

- учениците се разпределят по цялата скала в интервала $(-2; 1,8)$;
- има два пика при учениците – при $\theta = -0,8$, $\theta = -0,6$, $\theta = -0,4$ и при $\theta = 1,8$;
- ако се изключат учениците с най-високи постижения, останалите се разпределят сравнително „нормално“;

- за разлика от диаграмите за 2021 и 2022 г., няма сериозен спад на учениците със способност около 1,6. Въпреки това, остава голям дела на учениците с най-високите постижения;
- най-много задачи са с трудност около 0,2, което не е много близко до пиковите стойности при учениците;
- две от задачите са изолирани вдясно на диаграмата и има голям интервал от 0,2 до 1,8, в който се намират само тези две задачи. Това не кореспондира добре с разпределението на учениците;
- задачите с по-ниска трудност от 0 добре се съгласуват с учениците, които имат по-ниски постижения;
- както тук, така и за 2022 година прави впечатление, че задачите са предимно за ученици със способности под средните и липсват задачи, които са за ученици със способности над средните.



Фиг. 2.40. Диаграма на задачите и респондентите от НВО – 2023 г.

3. Сравняване на резултатите на задачите с ИО за периода 2020-2023 г.

По време на обучението си учениците в България участват в четири външни оценявания – Национални външни оценявания след IV, VII и X клас и Държавни

зрелостни изпити след XII клас. При всяко от тези оценяване има задължително изпитване по Български език и литература. Математиката е задължителна при първите три оценявания, докато при ДЗИ тя е по желание. След всеки изпит се правят сравнения на резултатите, като се използват средните балове на учениците. Тези сравнения се правят по различни показатели:

- между предметите (най-често БЕЛ и Математика);
- между отделните административни области;
- между училищата във всяка област;
- между училищата във всяко населено място;
- между паралелките със всяко училище;
- между учениците в класа, населеното място, страната.

Въпреки, че всяка година се прави съпоставка с резултатите от НВО с предходни години като се сравняват средноаритметичните от получения брой точки на учениците, методът за сравняване не е валиден (Банков, 2023). Има поне две причини, поради които това сравнение не е подходящо при сегашния метод за получаване на точките от НВО:

1. Задачите с избираем отговор се оценяват с 2 или 3 точки, като това се прави предварително от авторите на теста. Предполага се, че задачите са предварително апробирани, но въпреки това, има и разминавания между виждането на авторите за трудна задача и коефициентът на трудност, получен след провеждането на теста. Така например, задача 12 от НВО по математика през 2021 година на фигура 2.19 е оценена на 3 точки (т. е. тя е трудна според авторите), а е решена от 82% от учениците, следователно се тълкува като лесна. Това е най-лесната задача измежду всичките 18 задачи с избираем отговор за тази година.
2. Ако един тест е труден, нормално е да се очаква да се получат по-ниски резултати, което не е гаранция, че учениците знаят по-малко.

В таблица 2.15 са дадени средния брой точки от НВО по математика след VII клас за изследваните 4 години, получени от официалния (Портал за отворени данни на Република България, 2024), поддържан от Министерство на електронното управление.

Както ще се види по-нататък, има известно разминаване между тези данни и анализа, извършен с помощта на IRT. Затова проблемът продължава да стои на дневен ред.

Година	Всички задачи (средно за страната)	Задачи с избираем отговор (средно за четирите изследвани области)
2020	36,33 т.	27,48 т.
2021	37,94 т.	29,18 т.
2022	35,32 т.	28,88 т.
2023	35,29 т.	28,51 т.

Таблица 2.15. Средни резултати от НВО по математика след VII клас за 2020-2023 г.

Сравняването на резултатите на учениците, получени от Националното външно оценяване (НВО) след VII клас в различни години е въпрос, който отдавна се поставя пред обществото (Данчев и др., 2015). Изследвания по този въпрос върху резултатите от 2020, 2021 и 2022 г. са публикувани от автора на дисертационния труд в (Цонев, 2023-б). Подобен анализ е правен и за следващите 2022-2023 г., но тук ще се разгледат подробно само двойките 2020-2021 и 2021-2022 г.

В тази част на дисертационния труд резултатите от задачите с избираем отговор от проведените НВО по математика през 2020, 2021 и 2022 години се сравняват, като се използва методиката на IRT (Item Response Theory), описана в (Hambelton, R., Swaminathan, H., Rogers, H., 1991). Според тази методика сравняването се базира на няколко общи задачи (може да се наричат *anchor*-задачи), давани в два различни теста на две различни групи ученици и приравняване на резултатите от едната група към тези от другата. За съжаление, в България нямаме практика да се дават общи (*anchor*) задачи в тестовете за НВО в две различни години. Има едно единствено изключение на една обща задача, която даде идеята да се проведе това изследване. Потърсени са и са намерени двойки задачи, които имат подобни характеристики и с тяхна помощ са приравнени резултатите от 2020 и 2022 година към тези от 2021 година.

Чрез методите на IRT са анализирани измерителните качества на тестовите задачи с избираем отговор на проведените през 2020, 2021 и 2022 година НВО по математика за VII клас, като са използвани данните от областите София-град, Пловдив, Плевен и Разград. Данните в изследването са обработени с приложението jMetrik, а графиките са начертани с приложението GeoGebra.

3.1. Методика на сравняването.

Разглеждат се два теста X и Y , в които има няколко общи задачи. Налични са данни от решаването на тестовете от две различни групи ученици. За всеки тест, чрез двупараметричния метод на IRT, са получени оценки на коефициентите на трудност (b) и на дискриминативна сила (a) за всяка задача. Всеки ученик получава оценка на коефициент на способност (θ), направена върху съответния тест, който е решавал. За да се преизчислят тези коефициенти от тест X върху тест Y се следва алгоритъма от (Hambelton, R., Swaminathan, H., Rogers, H., 1991):

- За общите задачи по двата теста се пресмята средноаритметичното $\underline{b}_x$ и $\underline{b}_y$ на коефициентите на трудност както и средноквадратичното им отклонение σ_x и σ_y ;
- Пресмятат се коефициентите $\alpha = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ и $\beta = \underline{b}_y - \alpha \cdot \underline{b}_x$;
- За всяка задача от тест X се преизчислява коефициентът на трудност (b) по формулата $b_x^* = \alpha \cdot b_x + \beta$;
- За общите задачи се намира средноаритметичното на получените b_x^* и съответните им стойности b_y ;
- За всяка задача от тест X се преизчислява коефициентът на дискриминативна сила (a) по формулата $a_x^* = \frac{a_x}{\alpha}$;
- За общите задачи се намира средноаритметичното на получените a_x^* и съответните им стойности a_y ;

Коефициентът на способност на всеки ученик, който е работил върху теста X , се преизчислява по формулата

$$\theta_x^* = \alpha \cdot \theta_x + \beta$$

Така новите коефициенти на трудност, дискриминация и способност на тест X са означени съответно с b_x^* , a_x^* и θ_x^* . Тези коефициенти вече са сравними със съответните коефициенти на тест Y . По този начин учениците, правили двата теста може да се счита, че са решили общ тест, съставен от $n_X + n_Y - n_{XY}$ задачи, където n_X , n_Y и n_{XY} са броя на задачите съответно в тест X , тест Y и общите задачи за двата теста. Освен това, преизчислените способности θ_x^* на учениците, правили тест X , и тези на учениците, правили тест Y (означени с θ_y) могат да се сравняват на една обща скала.

Поради липсата на общи задачи между различните години, за такива са потърсени двойки задачи, които изпълняват условията:

- да са от една и съща съдържателна област (проверяват едни и същи знания и умения);
- техните характеристични криви да съвпадат (имат близки стойности на коефициентите на трудност и дискриминация).

С известна условност, приемаме тези задачи за anchor-задачи.

3.2. Процедура по пресмятане на резултатите от 2020 върху тези от 2021 г.

Нека с X и Y са означени тестовете, съставени от първите 18 задачи с избираем отговор от НВО по математика в края на VII клас съответно за 2020 и 2021 година. Като „обща“ (*anchor*) са избрани три двойки задачи от двата теста, представени на фигури 2.41, 2.42 и 2.43. Очевидно условията на третата двойка задачи съвпадат. Характеристичните криви на другите две двойки са дадени на фигура 2.44.

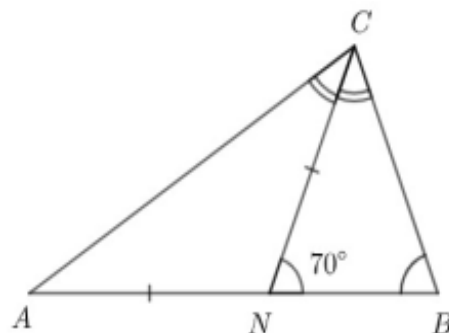
6 (2021). Изразът $(y - x)^2 - y + x$ е тъждествено равен на: А) $(x - y)(x - y - 1)$ Б) $(y - x)(y - x + 1)$ В) $(y - x)(x - y)$ Г) $(x - y)(x - y + 1)$ 4 (2020). Изразът $(-a - 2b)^2 - a - 2b$ е тъждествено равен на израза: А) $(a + 2b)(a + 2b - 1)$ Б) $(a + 2b)(a + 2b + 1)$ В) $(-a - 2b)(a + 2b + 1)$ Г) $(-a - 2b)(a + 2b - 1)$

Фиг. 2.41. Първа двойка anchor-задачи за 2020-2021 г.

14 (2021). В $\triangle ABC$ отсечката CN е ъглополовяща на $\angle ACB$

($N \in AB$), $\angle CNB = 70^\circ$ и $AN = CN$. Мярката на $\angle ABC$ е:

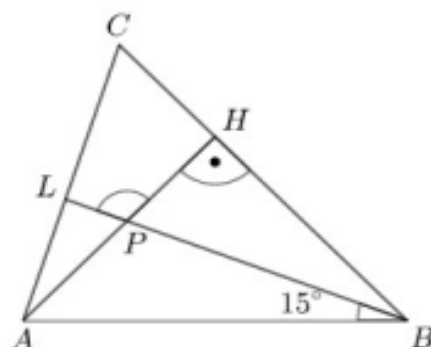
- А) 35°
- Б) 70°
- В) 75°
- Г) 105°



13 (2020). На чертежа AH и BL са съответно височина и ъглополовяща в $\triangle ABC$, като $AH \cap BL = P$ и $\angle ABL = 15^\circ$.

Мярката на $\angle LPH$ е:

- А) 135°
- Б) 115°
- В) 105°
- Г) 75°

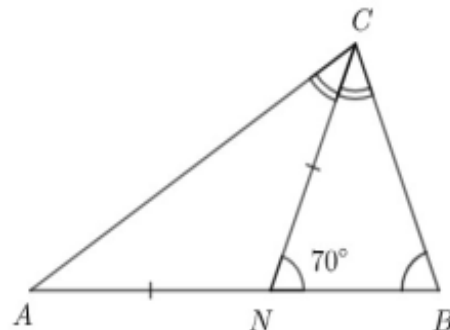


Фиг. 2.42. Втора двойка anchor-задачи за 2020-2021 г.

14 (2021). В $\triangle ABC$ отсечката CN е ъглополовяща на $\angle ACB$

($N \in AB$), $\angle CNB = 70^\circ$ и $AN = CN$. Мярката на $\angle ABC$ е:

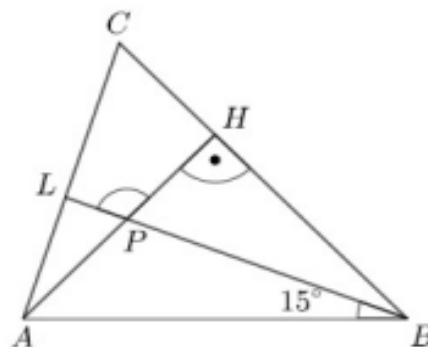
- А) 35°
- Б) 70°
- В) 75°
- Г) 105°



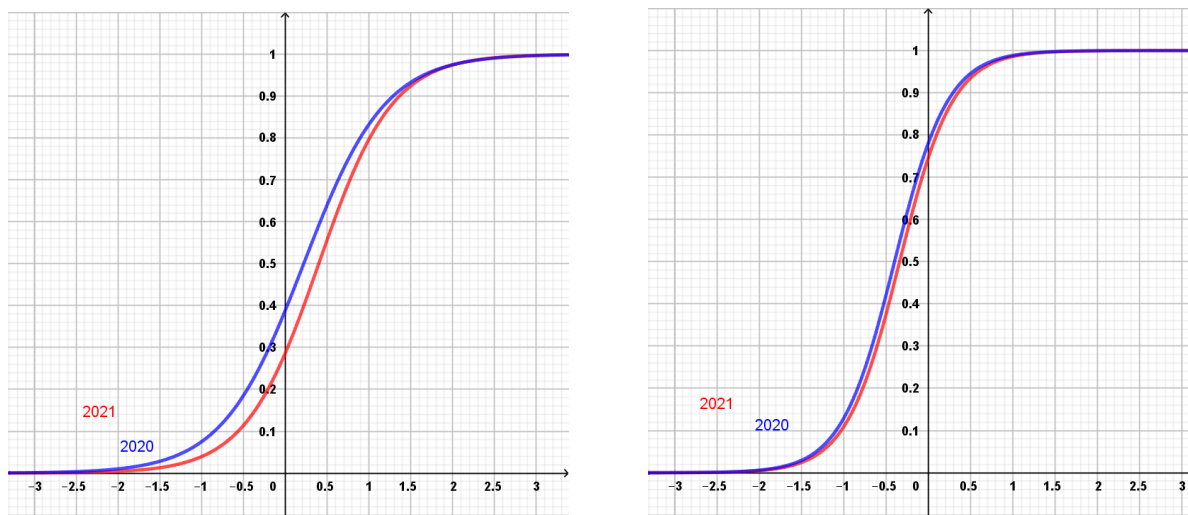
13 (2020). На чертежа AH и BL са съответно височина и ъглополовяща в $\triangle ABC$, като $AH \cap BL = P$ и $\angle ABL = 15^\circ$.

Мярката на $\angle LPH$ е:

- А) 135°
- Б) 115°
- В) 105°
- Г) 75°



Фиг. 2.43. Трета двойка anchor-задачи за 2020-2021 г.



Фиг. 2.44. Характеристични криви на първа и втора двойки anchot-задачи
за 2020-2021 г.

При така приетите предположения е приложена гореописаната методика и резултатите са представени в таблица 2.16.

Стойностите на търсените коефициенти са: $\alpha = 1,42$ и $\beta = 0,08$.

Данните за общите задачи са с удебелен шрифт. Двете оцветени колони със заглавие „X върху Y“ съдържат двата параметъра – на трудност и на разграничителна сила, преизчислени върху теста от 2021 година. Така условно може да се приеме, че учениците са се явили на един общ тест с 33 задачи.

Наблюдава се, че най-трудните задачи в този общ тест са от 2020 г., като особено правят впечатление задачи 18 (условие на задача 18 от 2020 г.) и 7 (условие на задача 7 от 2020 г.), които са разгледани подробно в първа глава. Освен това, задача 18 има и най-нисък коефициент на дискриминация ($b = 0,40$).

Следващата стъпка е да се преизчислят способностите на учениците от 2020 година върху теста от 2021 година, като се приложи формулата:

$$\theta_0^* = \alpha\theta_0 + \beta = 1,42 \cdot \theta_0 + 0,08,$$

където θ_0 е способността на съответния ученик от 2020 година според двупараметричния модел на IRT, а θ_0^* е способността му преизчислена върху теста от 2021 година. Теоретичната средна стойност на способностите на учениците от 2021 година е $\overline{\theta_1} = 0$, а средната стойност за 2020 година е $\overline{\theta_0^*} = \alpha \cdot \overline{\theta_0} + \beta = 0,08$.

Номера на задачите		Сборен тест	Трудност				Сборен тест	Дискриминация			
2021 г.	2020 г.	No	Y= 2021	X= 2020	b*	X върху Y	No	Y= 2021	X= 2020	a*	X върху Y
1		1	0.01			0.01	1	2.68			2.68
2		2	-0.79			-0.79	2	1.27			1.27
3		3	0.31			0.31	3	1.17			1.17
4		4	-0.41			-0.41	4	2.33			2.33
5		5	-0.31			-0.31	5	1.50			1.50
7		6	-0.03			-0.03	7	1.60			1.60
8		7	-0.14			-0.14	8	1.32			1.32
9		8	-0.57			-0.57	9	2.28			2.28
11		9	-0.34			-0.34	11	1.35			1.35
12		10	-1.00			-1.00	12	2.46			2.46
13		11	-0.27			-0.27	13	1.41			1.41
15		12	-0.55			-0.55	15	1.26			1.26
16		13	-0.60			-0.60	16	1.46			1.46
17		14	-0.20			-0.20	17	0.74			0.74
18		15	-1.01			-1.01	18	1.60			1.60
6	4	16	0.54	0.35	0.58	0.56	16	1.27	1.12	0.79	1.03
14	13	17	-0.23	-0.29	-0.33	-0.28	17	1.73	1.77	1.24	1.49
10	14	18	-0.81	-0.58	-0.75	-0.78	18	1.99	1.97	1.38	1.69
	1	19		-0.44	-0.55	-0.55	19		2.66	1.87	1.87
	2	20		0.25	0.44	0.44	20		1.24	0.87	0.87
	3	21		-0.45	-0.56	-0.56	21		2.01	1.41	1.41
	5	22		-0.8	-1.06	-1.06	22		2.29	1.61	1.61
	6	23		-0.89	-1.19	-1.19	23		1.89	1.33	1.33
	7	24		1.74	2.56	2.56	24		1.12	0.79	0.79
	8	25		-0.29	-0.33	-0.33	25		1.21	0.85	0.85
	9	26		-0.39	-0.48	-0.48	26		1.44	1.01	1.01
	10	27		-0.64	-0.83	-0.83	27		2.10	1.48	1.48
	11	28		-0.36	-0.43	-0.43	28		1.80	1.26	1.26
	12	29		-0.34	-0.40	-0.40	29		2.07	1.45	1.45
	15	30		-0.13	-0.10	-0.10	30		0.80	0.56	0.56
	16	31		-0.15	-0.13	-0.13	31		1.70	1.19	1.19
	17	32		-0.84	-1.12	-1.12	32		1.27	0.89	0.89
	18	33		1.22	1.82	1.82	33		0.57	0.40	0.40

Таблица 2.16. Приравняване на теста от 2020 г. към този от 2021 г.

Възниква въпросът дали тази разлика от 0,08 единици е статистически значима. Отговор може да бъде получен чрез t-тест. Софтуерът MS Excel (Harmon, 2011) извежда резултата на фигура 2.45. Поради високата стойност на $t_{Stat} = 6,60$, може да се каже, че

има статистически значима разлика в постиженията учениците от 2020, спрямо тези от 2021 година. Положителната стойност на тази разлика означава, че учениците от 2020 година са показали по-добри резултати от тези през 2021 година. Този извод е в противоречие с официалната статистика, изведена в таблица 2.15. От нея се вижда, че учениците са повишили средния си успех на задачите с ИО от 27,48 т. на 29,18 т., което е увеличение с 1,7 точки.

t-Test: Two-Sample Assuming Unequal Variances		
	2020*	2021
Mean	0.076786404	-0.000474199
Variance	1.738762537	0.860295691
Observations	18836	19303
Hypothesized Mean Difference	0	
df	33739	
t Stat	6.603745706	
P(T<=t) one-tail	2.03421E-11	
t Critical one-tail	1.644898792	
P(T<=t) two-tail	4.06842E-11	
t Critical two-tail	1.960034299	

Фиг. 2.45. t-тест за статическа значимост за 2020-2021 г.

3.3. Процедура по пресмятане на резултатите от 2022 върху тези от 2021 г.

Нека с X и Y са означени тестовете, съставени от първите 18 задачи с избираем отговор от НВО по математика в края на VII клас съответно за 2021 и 2022 година. Като „общи“ (*anchor*) са избрани три двойки задачи от двата теста, представени на фигури 2.46, 2.47 и 2.48.

8 (2021). Цялото число, което е решение на уравнението $ 3x - 1 = 13$ е:			
A) -4	Б) -1	В) 4	Г) 5
8 (2022). Решенията на уравнението $ x - 4 - 5 = -2$ са:			
A) 1 и 7	Б) -1 и 7	В) -7 и 1	Г) -7 и -1

Фиг. 2.46. Първа двойка anchor-задачи за 2021-2022 г.

9 (2021). В кутия има 3 червени молива и два пъти повече зелени.

Вероятността произволно изваден молив да е червен е:

- А) $\frac{1}{3}$ Б) $\frac{2}{5}$ В) $\frac{3}{5}$ Г) $\frac{2}{3}$

9 (2022). В кутия са поставени 3 жълти, 2 зелени и 2 червени топчета. На случаен принцип се изтегля едно топче.

Каква е вероятността изтегленото топче да НЕ е жълто?

- А) $\frac{2}{7}$ Б) $\frac{3}{7}$ В) $\frac{4}{7}$ Г) $\frac{5}{7}$

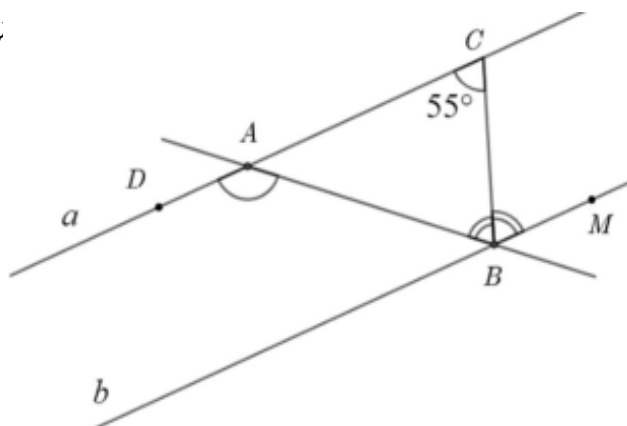
Фиг. 2.47. Втора двойка anchor-задачи за 2021-2022 г.

13 (2021). На чертежа правите a и b са успоре;

BC е ъглополовяща на $\angle BCA = 55^\circ$.

Мярката на $\angle BAD$ е:

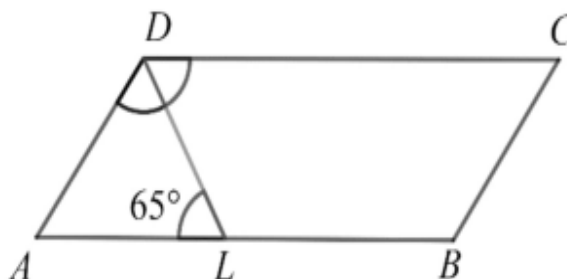
- А) 125°
Б) 110°
В) 70°
Г) 55°



17 (2022). В успоредника $ABCD$ DL е ъглополовяща на ъгъла при върха D и $\angle ALD = 65^\circ$.

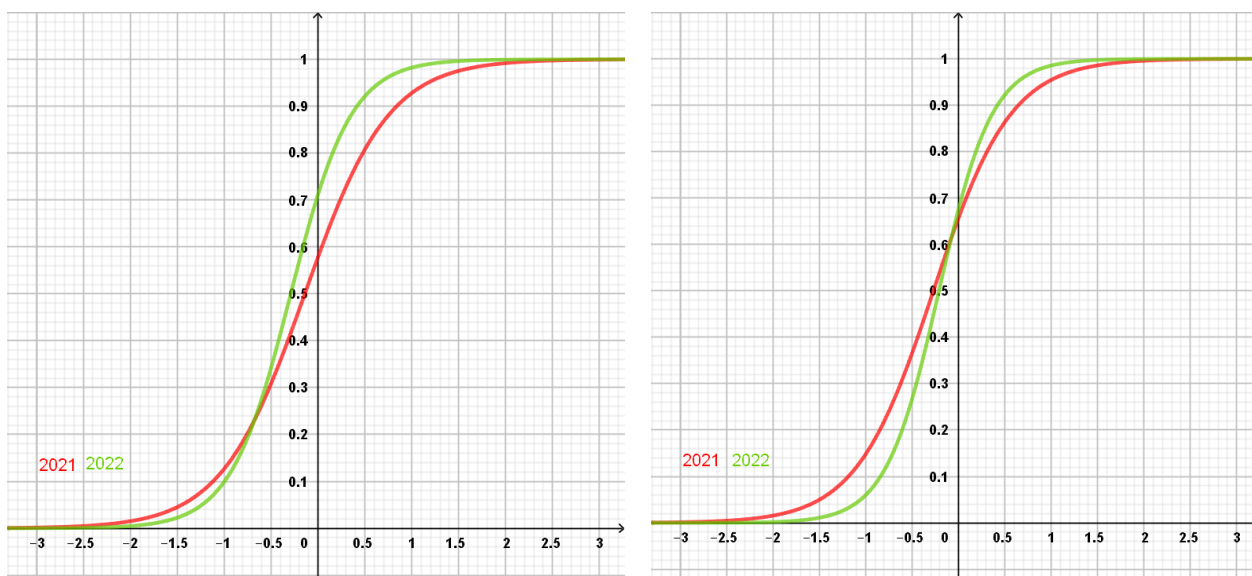
Мярката на $\angle DAB$ е:

- А) 50°
Б) 60°
В) 65°
Г) 130°

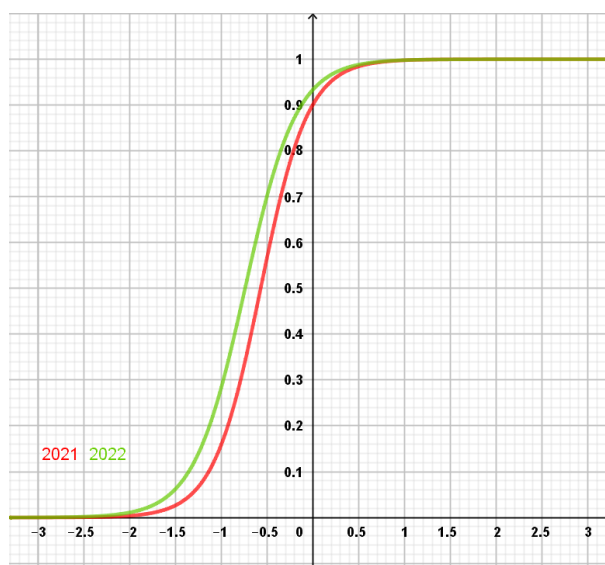


Фиг. 2.48. Трета двойка anchor-задачи за 2021-2022 г.

Характеристичните криви на трите двойки са дадени на фигури 2.49 и 2.50.



Фиг. 2.49. Характеристични криви на първа и втора двойка anchor-задачи за 2021-2022 г.



Фиг. 2.50. Характеристични криви на трета двойка anchor-задачи за 2021-2022 г.

След преизчисляване на резултатите, се получава таблица 2.17.

Стойностите на търсените коефициенти са: $\alpha = 0,77$ и $\beta = -0,01$.

Данните за общите задачи са с удебелен шрифт. Двете оцветени колони съдържат двата параметъра на трудност и разграничителна сила на задачите от 2022 г., преизчислени върху теста от 2021 година.

За тези две години се оказва, че за разлика от предната двойка 2020-2021 година задачите са с близки коефициенти на трудност и приемат стойности в

интервала $(-1,1; 0,54)$. Коефициентът на дискриминативна сила също има добри стойности в интервала $(0,74; 3,85)$. Правят впечатление задачите от 2022 година, които имат много висок коефициент на разделителна способност – задача 12 и задача 14.

Номера на задачите		Сборен тест	Трудност				Сборен тест	Дискриминация			
2021	2022	No	Y= 2021	X= 2022	b*	X върху Y	No	Y= 2021	X= 2022	a*	X върху Y
1		1	0.01			0.01	1	1.27			1.27
2		2	-0.79			-0.79	2	1.17			1.17
3		3	0.31			0.31	3	2.33			2.33
4		4	-0.41			-0.41	4	1.50			1.50
5		5	-0.31			-0.31	5	1.60			1.60
6		6	0.54			0.54	6	1.32			1.32
7		7	-0.03			-0.03	7	2.28			2.28
10		8	-0.81			-0.81	8	1.35			1.35
11		9	-0.34			-0.34	9	2.46			2.46
12		10	-1.00			-1.00	10	1.41			1.41
14		11	-0.23			-0.23	11	1.26			1.26
15		12	-0.55			-0.55	12	1.46			1.46
16		13	-0.60			-0.60	13	0.74			0.74
17		14	-0.20			-0.20	14	1.60			1.60
18		15	-1.01			-1.01	15	2.68			2.68
8	8	16	-0.14	-0.29	-0.23	-0.19	16	1.27	1.83	2.37	1.82
9	9	17	-0.57	-0.74	-0.58	-0.57	17	1.73	2.10	2.72	2.23
13	17	18	-0.27	-0.21	-0.17	-0.22	18	1.99	2.05	2.66	2.32
	1	19		-0.26	-0.21	-0.21	19		1.18	1.53	1.53
	2	20		-0.36	-0.29	-0.29	20		1.44	1.87	1.87
	3	21		-0.66	-0.52	-0.52	21		1.66	2.15	2.15
	4	22		-0.53	-0.42	-0.42	22		1.65	2.14	2.14
	5	23		-0.60	-0.47	-0.47	23		2.13	2.76	2.76
	6	24		-0.20	-0.16	-0.16	24		1.74	2.25	2.25
	7	25		0.19	0.14	0.14	25		1.32	1.71	1.71
	10	26		-0.48	-0.38	-0.38	26		1.70	2.20	2.20
	11	27		0.39	0.29	0.29	27		1.13	1.46	1.46
	12	28		-0.49	-0.39	-0.39	28		2.97	3.85	3.85
	13	29		-0.38	-0.30	-0.30	29		2.03	2.63	2.63
	14	30		-0.45	-0.35	-0.35	30		2.69	3.49	3.49
	15	31		0.42	0.32	0.32	31		1.08	1.40	1.40
	16	32		-0.84	-0.66	-0.66	32		1.53	1.98	1.98
	18	33		-0.25	-0.20	-0.20	33		1.10	1.43	1.43

Таблица 2.17. Приравняване на теста от 2022 г. към този от 2021 г.

След това се преизчисляват способностите на учениците от 2022 година върху теста от 2021 година по формулата:

$$\theta_2^* = \alpha\theta_2 + \beta = 0,77.\theta_2 - 0,01,$$

където θ_2 е способността на съответния ученик от 2022 година според двупараметричния IRT анализ, а θ_2^* е способността му преизчислена върху теста от 2021 година. Теоретичната средна стойност на способностите на учениците от 2021 година е $\overline{\theta_1} = 0$, а средната стойност за 2022 година е $\overline{\theta_2^*} = \alpha.\overline{\theta_2} + \beta = -0,01$.

Отново се поставя въпроса дали тази разлика е статистически значима. Софтуерът MS Excel дава резултата във фигура 2.51. Отново стойността на $t_{Stat} = 4,21$ показва статистически значима разлика. Отрицателната стойност $\overline{\theta_2^*} = -0,01$ означава, че учениците от 2022 година са постигнали малко по-нисък среден резултат в сравнение с тези от 2021 година.

Този извод кореспондира с официалната статистика, изведена в таблица 2.15. От нея се вижда, че учениците са понижили средния си успех на задачите с ИО от 29,18 т. на 28,88 т., което е намаление с 0,3 точки.

t-Test: Two-Sample Assuming Unequal Variances		
	2022*	2021
Mean	-0.009102277	-0.04656989
Variance	0.522646492	1.022997381
Observations	20027	19303
Hypothesized Mean Difference	0	
df	34848	
t Stat	4.212932691	
P(T<=t) one-tail	1.26355E-05	
t Critical one-tail	1.644897354	
P(T<=t) two-tail	2.52709E-05	
t Critical two-tail	1.960032062	

Фиг. 2.51. t-тест за статическа значимост за 2021-2022 г.

3.4. Обобщение на направеното сравняване.

Търсенето на методи за сравняване постиженията на учениците през различните години е с висока актуална значимост. Приложената методика освен за това сравняване, може да бъде използвана и за създаване на банки от задачи с избираем отговор, които са „оразмерени“ върху единна скала и са групирани по коефициент на трудност, който се получава обективно, а не според виждането на авторите на тестовите задачи. Често авторът има една представа за трудността, докато обективната реалност сочи друго.

Използването на anchor-задачи изисква да има еднакви задачи в двата теста, които се сравняват. В това изследване са използвани „подобни“ задачи, което нарушава казаното изискване, но с тази условност може да се каже, че дава добра основа за сравняване на постиженията на учениците. Изводът е, че учениците от 2020, 2021 и 2022 година леко понижават своите постижения с всяка следваща година. Със сигурност влияние върху това има и обучението в онлайн среда, което започна през 2020 година и приключи 2022 година. Учениците, които се явиха на НВО през 2022 година се обучаваха в тази среда през важните за тях 5, 6 и VII клас. Това понижение се вижда добре от следната схема:

$$\overline{\theta_0^*} = 0,08 \Rightarrow \overline{\theta_1} = 0 \Rightarrow \overline{\theta_2^*} = -0,01$$

Сравнение по същата процедура е направена и на резултатите от 2023 върху тези от 2022 г. Отново се получава статистически значима разлика, като средните стойности тук са

$$\overline{\theta_2} = 0 \Rightarrow \overline{\theta_3^*} = -0,11,$$

което показва по-ниски резултати на учениците от 2023 спрямо 2022 г. Така тенденцията за понижаване на постиженията им се наблюдава през изследвания период 2020-2023 г.

4. Точкуване на задачите със СО и примерен вариант за оценяване на НВО по математика след VII клас.

Задачите със свободен отговор, които се използват в НВО по математика след VII клас в изследвания период 2020-2023 г. са два вида:

- с кратък свободен отговор, на които ученикът трябва да напише правилния според него отговор, който е число (брой, процент, големина на ъгъл, дължина на отсечка, лице на фигура, периметър на фигура, вероятност, време за движение), няколко числа (координати на точка, отношения на числа) или дума (вид на дадена фигура);

- с разширен свободен отговор, на които ученикът трябва да напише подробно и логически обосновано решение, спазвайки методите изучени в училище.

Употребата на комбинация от тези два вида задачи повтаря модела, който е наложен и при Национално външно оценяване от IV клас (Чехларова, 2022). През 2024 г. задачите с кратък свободен отговор бяха премахнати от НВО след VII клас.

Точкуването на задачите със свободен отговор често е свързано с определени трудности. Две от тях са:

- Как да се определи максималният брой точки за дадена задача?
- Как да се разпределят тези точки върху решението на задачата?

В стремежа си оценяването да е максимално обективно често се дават точки, които освен цели числа, са и кратни на 0,5, дори и на 0,25.

Дали това е оправдано?

В настоящото изследване се дава една гледна точка на този въпрос, която се основава на методите на вероятностното моделиране. Разгледани са задачите, давани през 2023 г., както и получените резултати на всички 21 060 седмокласници от четирите административни области София-град, Пловдив, Плевен и Разград. Използван е доклада на автора по тази тема на 53-та Пролетна конференция на Съюза на математиците в България (Цонев, 2024-а).

За да се приложи вероятностният метод, точкуването на задачите със свободен отговор от 2023 г., което е използвано от оценителите на НВО, трябва да се промени. Могат да се отделят два типа такива промени.

Първият тип е при задачите с номера 19 А), 19 Б) и 20 В), които са оценявани съответно с 4, 3 и 4 точки за верен отговор и 0 точки за грешен или непосочен отговор, точкуването се променя на 1 точка за верен отговор и 0 в другите случаи. Така те стават така наречените 0-1 задачи.

Вторият тип е при останалите задачи, в които точкуването е много раздробено, както се вижда от таблица 2.18. Такова оценяване не е приложимо за изследване с методите на IRT. По тази причина е необходимо броят на точките в тяхното оценяване да е цяло число и да е сравнително малко. В (Банков, 2023) е анализиран начинът на точкуване на задачите, които оценяват частичния напредък на ученика при решаването им. Въвежда се понятието важна стъпка. Целта на важните стъпки е да се разграничат смислените моменти при решаването на дадена задача. Тези моменти се определят от автора на задачата.

	19 А)	19 Б)	20 А)	20 Б)	20 В)	21 А)	21 Б)	21 В)	22 А)	22 Б)	23 А)	23 Б)	23 В)	23 Г)
ТОЧКИ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	3	0,25	0,25	4	0,25	0,50	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,50	0,25
			0,50	0,50		0,50	1	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	1	0,50
			0,75	0,75		0,75	1,50	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	1,50	0,75
			1	1		1	2	1	1	1	1	1	2	1
			1,25			1,25		1,25	1,25	1,25	1,25	1,25		1,25
			1,50			1,50		1,50	1,50	1,50	1,50	1,50		1,50
			1,75			1,75		1,75	1,75	1,75	1,75	1,75		1,75
			2			2		2	2	2	2	2		2
			2,25			2,25		2,25	2,25	2,25	2,25	2,25		2,25
			2,50			2,50		2,50	2,50	2,50	2,50	2,50		2,50
			2,75			2,75		2,75	2,75	2,75	2,75	2,75		2,75
			3			3		3	3	3	3	3		3
						3,25		3,25	3,25	3,25				3,25
						3,50		3,50	3,50	3,50				3,50
						3,75		3,75	3,75	3,75				3,75
						4		4	4	4				4
						4,25			4,25	4,25				
						4,50			4,50	4,50				
						4,75			4,75	4,75				
						5			5	5				
						5,25				5,25				
						5,50				5,50				
						5,75				5,75				
						6				6				

Таблица 2.18. Точки, присъждани на задачите със СО от 2023 г.

Пример за задача с разширен свободен отговор, която е разделена на много важни стъпки е задача 20 А), условието на която е на фигура 2.52.

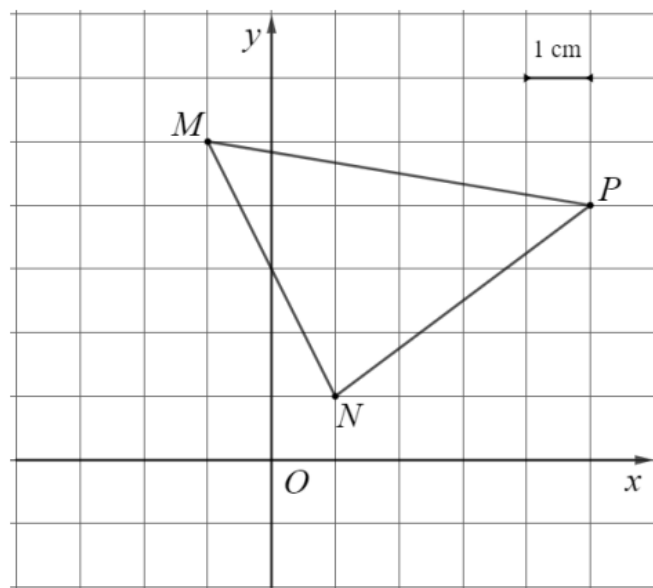
Точки	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
%	34,7%	0%	1,6%	0%	3,9%	0%	2,6%	0%	4,1%	0%	6,4%	0%	46,6%

Таблица 2.19. Оценяване на задача 20 А) според МОН

Оценяването на тази задача е през 0,25 единици. В таблица 2.19 са дадени точките и процента на учениците получилите тези точки. Както се вижда, процентът на учениците получили някои точки е близко до 0%. Това дава основание да се отделят 3 важни стъпки, които позволяват да се направи промяна в точкуването. Тези стъпки са

описани в редове 6-9 на таблица 2.20. По този начин задачата става 0-1-2-3 и може да бъде изследвана с IRT.

20. В координатна система Oxy с единична отсечка 1 cm са дадени точките M , N и P .



А) Запишете координатите на точките M , N и P .

Б) Запишете координатите на точка Q , симетрична на точката N спрямо координатното начало.

Фиг. 2.52. Условие на задача 20 А) и Б) от 2023 г.

Използвайки подобни разсъждения и за останалите задачи от втория тип, е направена нова схема за точкуване, предложена в най-дясната колона в таблица 2.20. Условието на тези задачи могат да се видят в приложение 6.

№ на задача	Точки от проверката	Обяснение	IRT
19	А)	0	0
		4	3 минути или 3 или 3 min
	Б)	0	0
		3	10 минути или 10 или 10 min
20	А)	0-0,25	0
		0,50-1,00	получени са 1 или 2 верни координати
		1,25-2,00	получени са 3 или 4 верни координати
		2,25-3,00	получени са 5 или 6 верни координати
	Б)	0-0,25	0
		0,50-0,75	получена е 1 вярна координата
		1	получени са 2 верни координати
	В)	0	0
		4	11 cm ² или 11
21	А)	0	0

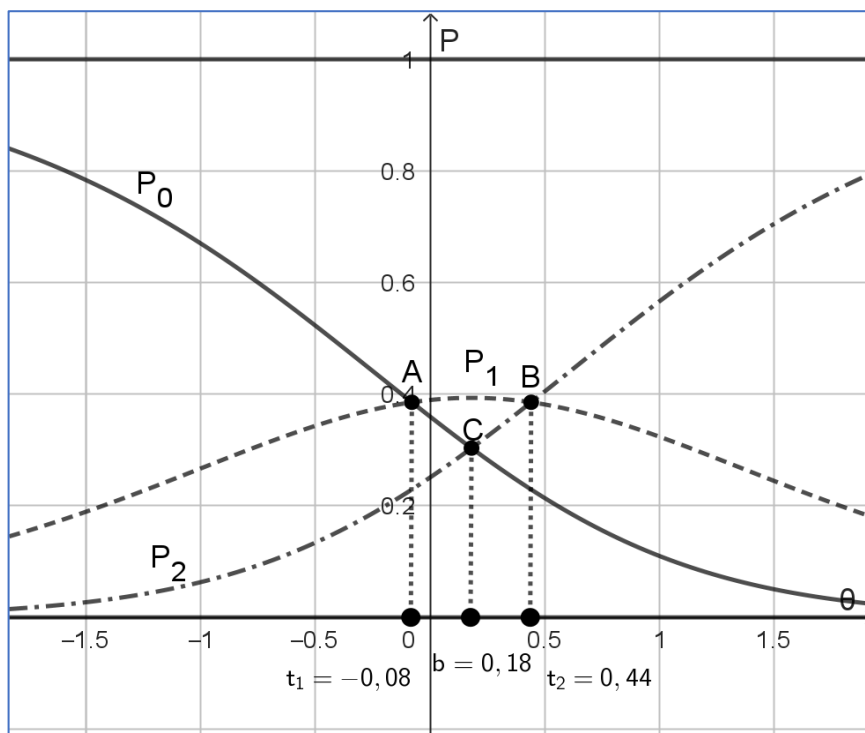
		0,25-1,00	частично разлага на множители	1
		1,25-4,00	разлага на множители целия израз	2
		4,25-6,00	решава уравнението	3
	Б)	0		0
		0,50-1,00	решено е 1 уравнение	1
		1,50-2,00	решени са 2 уравнения	2
	В)	0		0
		0,25-0,50	разкрити скоби или привеждане под общ знаменател	1
		0,75-1,25	направени и двете	2
		1,50-2,50	извършено е привеждане в нормален вид	3
		2,75-3,00	решено неравенство	4
		3,25-4,00	верен извод за решенията уравненията от А) и Б)	5
22	А)	0		0
		0,25-1,00	въведени означения x и $x-2$	1
		1,25-3,00	съставен верен модел	2
		3,25-5,00	решен модел	3
	Б)	0		0
		0,25-0,50	въведени неизвестни	1
		0,75-2,00	определена производителност	2
		2,25-4,00	съставен верен модел	3
		4,25-6,00	намерен отговор на задачата	4
23	А)	0		0
		0,25-1,00	правилен чертеж	1
		1,25-2,75	намерени елементи по чертежа	2
		3	намерени ъглите на $\triangle ABC$	3
	Б)	0		0
		0,25-2,50	намерени 1 или 2 условия за ромб	1
		2,75-3,00	доказва ромб	2
	В)	0		0
		0,50-1,50	доказва $AL = LP$	1
		2	доказва $AL = BQ$	2
	Г)	0		0
		0,25-1,50	доказва $AP > PL$	1
		1,75-3,75	доказва $PB > PQ$	2
		4	доказва $AP > PQ$	3

Таблица 2.20. Ново точкуване на задачите със СО

При така приетите точкувания и стандартните точкувания 0-1 на задачите с ИО е приложен Раш-моделът на всички задачи от 2023 г.

При някои от задачите се получава добро разпределение на характеристичните криви (това се получава при $t_1 < t_2$). Такава е задача 20 Б), чиито характеристични криви са показани на фигура 2.53. За нея може да се каже, че учениците със способности по-малки от $-0,08$ е най-вероятно да получат 0 точки, тези със способности между $-0,08$ и $0,44$ е най-вероятно да получат 1 точка, а тези със способности над $0,44$ е най-вероятно да получат 2 точки. Тази задача има оптимална трудност ($b = 0,18$) и е с добри

характеристики по отношение на разслояването на учениците по трите точки на оценяването.



Фиг. 2.53. Характеристични криви на задача 20 Б)

Пример за задача, при която при $t_1 > t_2$ е задача 23 В), условието на която е дадено на фигура 2.54, а характеристичните криви са на фигура 2.55. Оценяването на задачата според указанията на МОН е с 1 точка за доказано $AL=LP$, 0,5 точки за $LP=BQ$ още 0,5 точки за извода $AL=BQ$. Това точкуване е редактирано за нуждите на IRT, както е показано в таблица 2.20.

23. В $\triangle ABC$ $AC = BC$, BL ($L \in AC$) е ъглополовящата на $\angle ABC$ и $\angle BLC = 60^\circ$. През средата на BL е построена права PQ , така че $PQ \perp BL$ ($P \in AB$, $Q \in BC$).

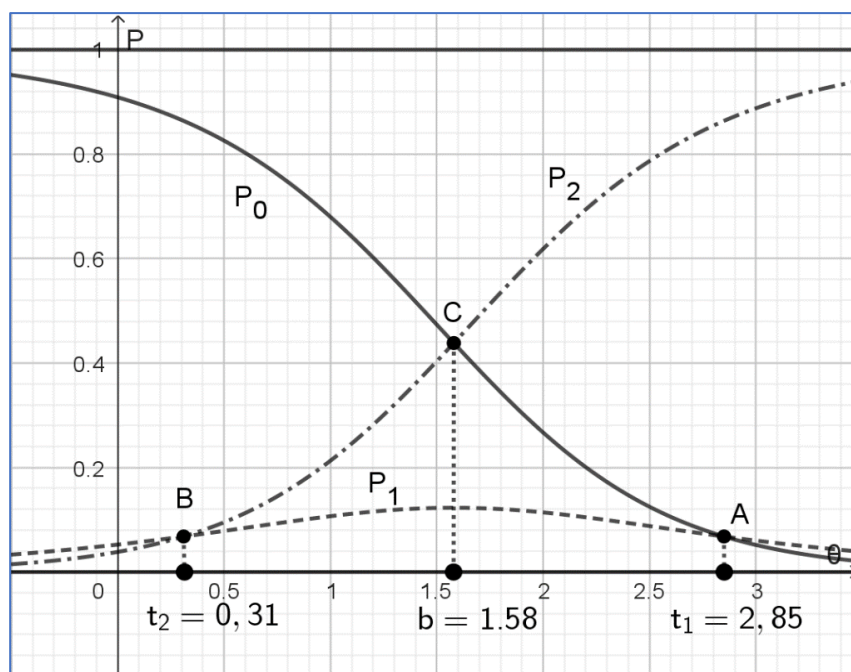
А) Намерете ъглите на $\triangle ABC$.

Б) Докажете, че $PBQL$ е ромб.

В) Докажете, че $AL = BQ$.

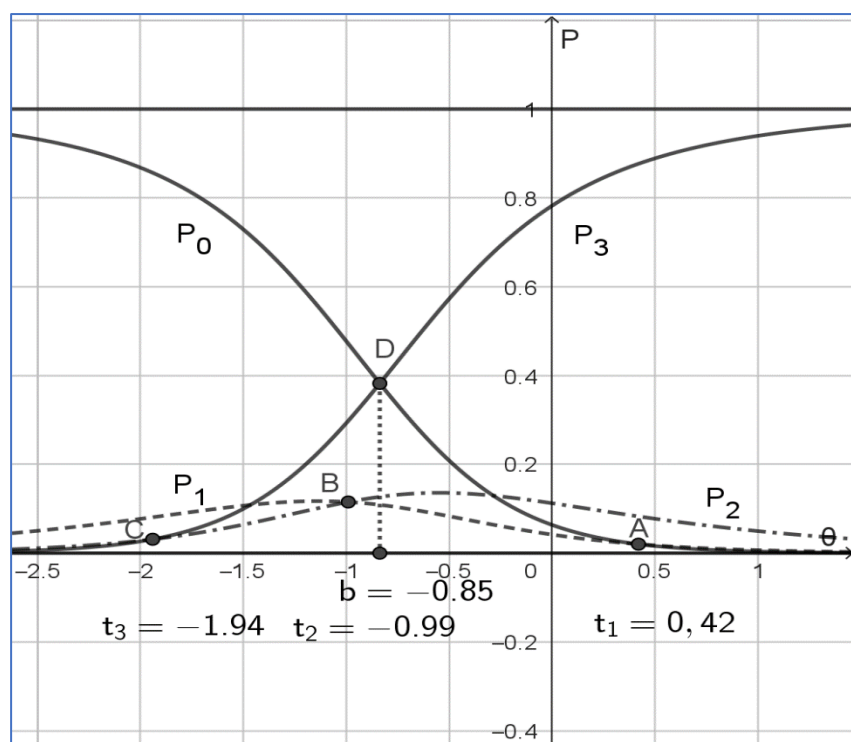
Г) Докажете, че $AP > PQ$.

Фиг. 2.54. Условие на задача 23 от 2023 г.



Фиг. 2.55. Характеристични криви на задача 23 В)

При тази задача е най-вероятно да има два типа ученици – със способности под 1,58, които е най-вероятно да получат 0 точки и такива със способности над 1,58, които е най-вероятно да получат 2 точки. С други думи, очаква се да има само два типа ученици – такива, които не са доказали нито едното равенство и такива, които са доказали и двете равенства. Ученици, които са доказали само едното равенство, се срещат с малка вероятност. Затова такава задача е подходящо да е 0-1 точки.



Фиг. 2.56. Характеристични криви на задача 20 А)

При разгледаната по-горе задача 20 А) се оказва, че дори окрупненото точкуване е излишно. Според характеристичните ѝ криви на фигура 2.56 може да се каже, че учениците е най-вероятно да имат 0 или 3 точки, а междинните точки са малко вероятни. С други думи, ако един ученик може да намери координатите на една точка, той може да намери координатите на трите точки от условието на задачата. Тази задача също е пример за ситуация, при която точките на пресичане на кривите P_0 , P_1 , P_2 и P_3 са подредени в обратен ред, т. е. $t_1 > t_2 > t_3$. Изводът, който може да се направи е, че тя би трябвало да се точкува с 0-1 точки. Освен това, трудността на задачата е $b = -0,85$, което означава, че е от лесните задачи в теста и раздробяването при точкуването ѝ на 13 части (според указанията на МОН) е неоправдано.

№	Изпълнена дейност	Предложение
19А	получено 3	1
19Б	получено 10	1
20А	получени верни координати на поне 1 точка	1
20Б	• получена 1 вярна координата на Q	• 1
	• получена е втора вярна координата на Q	• 1
20В	получено $S = 11$	1
21А	намерено разлагане и решено полученото уравнение	1
21Б	получени корени 3 и 9	1
21В	• сгрешено неравенство, но верни изводи за получените корени в получения от неравенството интервал	• 1
	• верни изводи, че 3, 6 и 9 са решения на неравенството	• 1
22А	• въведени неизвестни x и $x - 2$	• 1
	• получени брой работници 8 и 6	• 1
22Б	намерени 5 и 4 дни	1
23А	• правдоподобен чертеж и намерен ъгъл 40° или 100°	• 1
	• намерени и трите ъгъла 40° , 40° и 100°	• 1
23Б	• установено едно равенство, с което се доказва ромб	• 1
	• завършено е доказателството на ромб	• 1
23В	доказано $AL = BQ$	1
23Г	доказано $AP > PQ$	1

Таблица 2.21. Примерно точкуване на задачите със СО от 2023 г.

По подобен начин са изследвани всички задачи със свободен отговор. Като са взети предвид графиките на характеристичните им криви е коригиран броят на важните

стъпки при решаването им. Оказва се, че се открояват най-много 2 важни стъпки. На тази база може да се приложи примерно ръководство за точкуване, показано в таблица 2.21.

№ на задача	b-параметър	Съдържателна област	Точки МОН
9	-2,57	основна задача от вероятност	3
13	-2,21	ъгли в триъгълник, съседни ъгли	3
15	-1,62	симетрала, правоъгълен триъгълник с 30°	3
17	-1,23	ромб, медиана в правоъгълен триъгълник	3
5	-1,15	основно линейно неравенство	3
8	-1,13	разлагане на многочлен на множители	3
1	-1,09	числов израз с дробни и ред на действие	2
14	-0,88	Питагорова теорема	3
16	-0,88	еднакви триъгълници, равнобедрен триъгълник	3
20 А)	-0,85	координати на точки в Декартова КС	3
21 Б)	-0,71	основно модулно уравнение	2
3	-0,69	числов израз с прилагане на формулата $a^2 - b^2$	3
7	-0,50	намиране на скорост на движение	3
21 В)	-0,40	неравенство с дробни коефициенти	4
10	-0,24	моделиране на уравнение	3
11	-0,20	съседни ъгли и процент	2
4	-0,18	модулно уравнение, което няма решение	2
18	-0,09	конус - околна повърхнина	3
12	0,05	ъгли и успоредни прави	3
20 Б)	0,18	централна симетрия и Декартова КС	1
23 А)	0,41	моделиране на уравнение в равнобедрен триъгълник	3
2	0,43	прости числа	2
6	0,44	определяне на мащаб	3
22 А)	0,72	моделиране на уравнение в текстова задача	5
21 А)	1,25	разлагане на квадратен тричлен на множители	6
22 Б)	1,36	задача от работа	6
23 В)	1,58	равнобедрен триъгълник и ромб	2
19 Б)	1,68	разчитане на диаграма и част от цяло	3
19 А)	1,74	разчитане на диаграма и процент	4
23 Б)	1,99	доказване на ромб	3
20 В)	2,01	лице на триъгълник в Декартова КС	4
23 Г)	2,79	неравенство в триъгълник между ъгли и страни	4
		Общ брой точки	100

Таблица 2.22. Наредба по трудност на задачите от 2023

В таблица 2.22 са дадени всички задачи от НВО по математика за 2023, като са подредени според коефициента на трудност (b-параметъра). Логично би било най-лесните задачи да се оценяват с най-малко точки, а по-трудните – с повече. Както се вижда точките, определени от МОН в най-дясната колона, не отговарят на тази логика.

1	2	3	4	5	6
№ задача	b-параметър	точки от МОН	Предложение	Коефициент	Максимален брой точки
1	-1.09	2	0-1	3	3
2	0.43	2	0-1	3	3
3	-0.69	3	0-1	3	3
4	-0.18	2	0-1	3	3
5	-1.15	3	0-1	3	3
6	0.44	3	0-1	3	3
7	-0.50	3	0-1	3	3
8	-1.13	3	0-1	3	3
9	-2.57	3	0-1	2	2
10	-0.24	3	0-1	3	3
11	-0.20	2	0-1	3	3
12	0.05	3	0-1	3	3
13	-2.21	3	0-1	2	2
14	-0.88	3	0-1	3	3
15	-1.62	3	0-1	2	2
16	-0.88	3	0-1	3	3
17	-1.23	3	0-1	2	2
18	-0.09	3	0-1	3	3
19 А)	1.74	4	0-1	4	4
19 Б)	1.68	3	0-1	4	4
20 А)	-0.85	3	0-1	2	2
20 Б)	0.18	1	0-1-2	1	2
20 В)	2.01	4	0-1	4	4
21 А)	1.25	6	0-1	4	4
21 Б)	-0.71	2	0-1	2	2
21 В)	-0.40	4	0-1-2	1,5	3
22 А)	0.72	5	0-1-2	2	4
22 Б)	1.36	6	0-1	4	4
23 А)	0.41	3	0-1-2	2	4
23 Б)	1.99	3	0-1-2	2	4
23 В)	1.58	2	0-1	4	4
23 Г)	2.79	4	0-1	5	5
Общо					100

Таблица 2.23. Примерно оценяване на задачите от 2023

При сегашната практика задачите със СО се оценяват според броя на стъпките в решаването им, а не толкова според трудността им. Например, задача 23 В) е оценена на 2 точки, а тя е с висока трудност, докато задача 21 В) е по-лека и е оценена с 4 точки.

Както е известно, сегашното изискване на МОН е общият брой на точките на задачите в тестовете за НВО да е 100. Ако не се използва процентна скала, а се прилага IRT методологията, таблица 2.23 представя предложение за постигане на максимален брой от 100 точки. Получените точки в колона 4 на всяка задача, се умножават с коефициент, показан в колона 5. В случая този коефициент е съобразен с максималния брой точки, които са дадени от МОН на всяка задача (колона 3 на същата таблица). Освен това, взето е предвид и нивото на трудност на задачите. По тази причина някои задачи имат разлики в точкуването в колоните 3 и 6. Например, задача 19 Б) има по-висок коефициент на трудност ($b = 1,68$) от задача 20 А) ($b = -0,85$). Затова точките на 19 Б) са увеличени от 3 на 4, а на 20 А) са намалени от 3 на 2.

Тази идея за оценяване на задачите със свободен отговор би могла да бъде приложена при бъдещи НВО. Така проверителите ще дават цяло число точки за всяка важна стъпка (не повече от 2-3 на задача). Тези стъпки се определят предварително от авторите на теста. След това, екип от експерти ще направи анализ на получените резултати и според получените коефициенти на трудност ще бъдат дадени коефициенти за всяка задача, за да се получи необходимата сума от краен брой точки (в случая 100). Съвременните технологии позволяват обработката на данните да става в рамките на няколко часа. Работата на експертите също не би трябвало да отнеме повече от 1 работен ден.

В следващата глава е описан експеримент, в който се прави оценяване по традиционния начин и по начина, описан в тази точка на дисертационния труд на примерна тема за НВО след VII клас по математика.

5. Изводи от Втора Глава

Анализът на изследваните задачи от НВО по математика след VII клас чрез IRT дава възможност да се направят следните изводи:

1. Задачите с ИО през 2020, 2021 и 2023 г. са сравнително добре балансирани според коефициента на трудност, докато за 2022 г. стойностите на този коефициент

основно са разположени в сравнително тесния интервал $(-1,16; -0,23)$. Извод, който се разминава с извод, направен от КТТ.

2. Графиките с остатъците дават основание да се приеме, че двупараметричният модел е най-близък до емпиричните данни.
3. Трипараметричният модел позволява да се открият задачи с високи стойности на коефициента на налучкване. Такива задачи има при всички НВО.
4. Установена е висока степен на съгласуваност между коефициентите на трудност на задачите с ИО, пресметнати според КТТ и според IRT, получени с двупараметричния модел. При коефициентите на разграничителна сила има разминавания при някои от задачите и на тях е обърнато специално внимание.
5. Чрез използването на anchor-задачи са сравнени резултатите от задачите с ИО през изследвания четиригодишен период. Установено е, че всяка следваща година учениците понижават своите постижения.
6. Показано е, че раздробеното оценяване на някои задачи със СО не е оправдано.
7. Установено е, че има задачи, на които според ръководството за оценяване от МОН се дават малко точки, всъщност имат по-висок коефициент на трудност и обратно.

ТРЕТА ГЛАВА. Експеримент за апробация на тест за НВО по математика след VII клас

1. Постановка на задачата.

Направените изследвания на задачите по математика в периода 2020 г. – 2023 г. поставиха редица въпроси. По-съществените от тях са следните:

➤ При задачите с ИО:

- Какви са причините някои от тях да покажат недобри характеристики според някоя от двете теории за изследване на тестове, приложени в Глави 1 и 2?
- Как биха могли да се променят тези задачи?
- След като се направят промени, дали тези характеристики са се подобрили?
- Задачите с ИО предварително са оценени с 2 или 3 точки от авторите на теста. Както се оказа, някои лесни задачи се оценяват с 3 точки, а някои трудни – с 2 точки. Възможно ли е след провеждането на НВО да се проследи доколко има съответствие между лесните задачи и тези с 2 точки, както между трудните и тези с 3 точки?

➤ При задачите с разширен СО:

- Традиционно тези задачи се оценяват с 11-12-13 точки, които често се делят на половинки и четвъртинки. Дали това фрагментирано оценяване е наистина оправдано?
- Възможно ли е да се опрости тяхното оценяване, като същевременно то да е обективно, т. е. по-добре подготвените ученици да имат по-добри резултати от по-слабите?
- Как използването на вероятностната теория на тестове (IRT) може да подпомогне процеса на оценяването на задачите със СО?

➤ Има ли съответствие между баловете на учениците, ако се оценяват по начина, възприет в настоящите НВО и ако се вземе суровия бал, получен от сбора на броя на верните задачи с ИО и броя на изпълнените „важни“ стъпки при задачите със СО?

В предните две глави са анализирани задачите от проведените НВО, но може да се използва само информацията за верните отговори на задачите с ИО и получените точки на задачите със СО, без да има възможност да се направи ново оценяване на работите на учениците по последните задачи. По тази причина, за да се потвърдят отговори на някои повдигнатите въпроси, се проведе експеримент с ученици, на които предстоеше да завършат VII клас през 2024 година.

Целта на педагогическия експеримент е да се приложат и сравнят методите на КТТ и IRT за анализ на тестови задачи за формиране на тестовия бал на учениците при НВО по математика след VII клас.

За постигането на тази цел са поставени следните **изследователски задачи**:

- да се подготви изследователски инструментариум, включващ подходящи измерителни инструменти;
- да се проучат възможностите за сътрудничество с учители в страната;
- да се създаде организация за събиране на необходимите ресурси, които ще се използват в реализацията на експеримента;
- да се събере, анализира и обобщи емпиричния материал, по който да се направят съответните изводи относно методите за балообразуването на учениците.

Работната **хипотеза** е, че *използването на вероятностното моделиране предлага по-прецизно изследване на качествата на тестовите задачи и ще спомогне за въвеждане на по-опростено и по-обективно оценяване на учениците при НВО по математика след VII клас.*

Експериментът е извършен в три основни етапа – **предварителен, основен и заключителен**.

В **предварителния** етап са подбрани средно по 5 задачи с ИО от проведените четири НВО в периода 2020-2023 години. Критериите, по които са избрани тези задачи са:

- да отговарят на спецификацията на теста за НВО на ученици в VII клас (Приложение 1);
- да са от различни съдържателни области;

- да обхващат по възможност по-голяма част от учебното съдържание V-VII клас;
- да са с различен коефициент на трудност – лесни, оптимални и трудни;
- да имат сравнително лоши характеристики при изследването им с КТТ и IRT.

При задачите със СО, поради настъпилите промени във вида на НВО, са разглеждани само тези с разширен СО. За тях е проучено:

- какви типове такива задачи са давани през изминалите НВО;
- как са формулирани – с няколко подточки, без чертежи към тях и т. н.;
- как е проведено оценяването им от комисиите за проверка;
- какви характеристики са получили при анализа с методите на IRT описани във втора глава.

Направено бе проучване какви са възможностите на колеги в страната, които да проведат със своите ученици пробно НВО. Каква част от учебния материал ще бъде взет до средата на месец май, за да не бъде включено неизучено учебно съдържание.

Основният етап на експеримента премина през следните стъпки:

- Създадени са 20 задачи с ИО и 3 задачи с разширен СО по новия модел на НВО за 2024, като са отчетени изводите, получени в предварителния етап. Някои от задачите с ИО са почти идентични с даваните през годините, докато в други задачи са направени промени, които отразяват откритите в предните глави на дисертационния труд проблеми. Целта е да се проследи доколко тези промени са въздействали на измерителните качества на проблемните задачи – дали са довели до подобрения или не. Някои промени са във формулировката на задачата, а други – в избора на дистракторите. Условиата на тези задачи са в приложение 7;
- Пробното НВО бе разделено на две части:
 - Първа част, в която учениците работят 75 минути, съдържа задачи само с 4 избираеми отговора, само един от които е верен;
 - Втора част, в която времето за работа е 90 минути, се състои от 3 задачи с разширен СО, на които учениците трябва да напишат пълните решения с необходимите обосновки и чертежи;

- Задачите с ИО, според модела от 2024 г., се оценяват с 2, 3 или 4 точки, като общият им сбор трябва да е 65 точки. Възможностите за разпределяне на броя на задачите според това условие са няколко, като за експеримента бе избран вариант с 3 лесни задачи (по 2 точки), 9 оптимално трудни задачи (по 3 точки) и 8 трудни задачи (по 4 точки);
- Трудността на създадените задачи с ИО бе съобразена според трудността на задачите от миналите години, които служеха за образец. В този смисъл може да се приеме, че те са апробирани;
- Задачите с разширен СО са три на брой, като едната е алгебрична, другата е с приложен характер, а третата е геометрична. Всяка от тях е с две или три подточки;
- За задачите с разширен СО са подготвени два варианта на ръководство за оценяване:
 - *Традиционен (контролен) вариант*, който е приет за проверка в настоящите НВО. При него с 1 точка се оценява всеки етап от решението на задачата, като е възможно за части от тези етапи да се оценяват и с дробни – 0,5 или 0,25. По този начин точките за всяка от тези задачи е 12 точки за задачи № 21 и № 23 и 11 точки за задача №22. Общият им сбор е 35 точки;
 - *Експериментален вариант*, при който всяка подточка на всяка задача се разглежда като отделна задача и се оценява с цяло число точки по описания във втора глава начин, според броя на важните стъпки в нейното решаване, за да може да се приложат методите на IRT. Така 0-1 задача е № 23 А), 0-1-2 задачи са № 21 А), 21 Б), 21 В), 22 А), 22 Б) и 23 В), а 0-1-2-3 задача е № 23 Б);
- За всеки ученик е предвиден формуляр (приложение 7), в който да отбележи верния според него отговор на всяка задача с ИО, а проверяващият трябва да нанесе точките, получени при верен отговор на тези задачи. Задачите с разширен СО се описват на отделни листове, като получените точки за всяка подточка проверителят нанася в същия формуляр;
- На всеки ученик са предоставени формулите, които са одобрени за използване по време на НВО;
- Пробният изпит се проведе с ученици от различни училища в страната – основни, средни и математически гимназии в периода 27 април – 1 юни 2024 г.;

- Броят на учениците според училището, в което учат е даден в таблица 3.1. Както се вижда, повечето ученици са от средни или основни училища, като има и от математически гимназии, където се предполага, че подготовката по математика е на по-високо ниво от останалите училища. Участие взеха ученици от 9 административни области на България;

Вид училище	Град	Брой	Общо
МГ	Плевен	32	80
МГ	Монтана	25	
МГ	Разград	23	
СУ	Плевен	32	90
СУ	София	19	
СУ	Пловдив	39	
ОУ	Благоевград	38	317
ОУ	Плевен	117	
ОУ	Добрич	32	
ОУ	Монтана	67	
ОУ	Шумен	63	
Общ брой			487

Таблица 3.1. Брой на учениците, участвали в експеримента

- Оценяването според традиционния вариант бе направено от учителите на учениците, след което работите на учениците са изпратени на автора на дисертационния труд за оценяване според експерименталния вариант. За целта тези работи са или сканирани, или изпратени по куриер. Примерно изпълнение на това може да се види в приложение 8.

Заключителният етап на изследването включва:

- Анализ на задачите след провеждането и оценяването на пробното НВО;
- Сравняване по различни показатели на традиционния и експерименталния начин на точкуване;
- Предложения за начина на точкуване при бъдещи НВО.

2. Анализ на получените резултати след провеждане на експеримента.

Анализ на някои от задачите с ИО от пробно НВО, проведено през 2024 г. е публикуван от автора на дисертационния труд в (Цонев, 2024-б).

Повечето от задачите с ИО, които са подбрани за пробния изпит съответстват на давани задачи на проведените НВО за изследвания период 2020-2023 г. Изключение са само две от тях: № 9 и № 20. Таблица 3.2. показва кои задачи от минали НВО съответстват на задачите от пробното НВО, номерата на последните са в колона 1.

1	2	3	4
Пробно НВО	Минало НВО	Условие в дисертационния труд	Особености на задачата
1	1(2021) 1(2020)	фигура 1.19 фигура 2.8	Висока трудност Добра разграничителна сила
2	5(2023)	-	-
3	8(2022)	-	-
4	18(2021) 6(2023)	- фигура 1.31	Лесна задача Висока трудност Ниска разграничителна сила
5	6(2020) 6(2022)	фигура 1.9 -	Лесна задача -
6	2(2023)	фигура 1.30	Висока трудност Ниска разграничителна сила
7	6(2021)	фигура 1.17	Много трудна задача Атрактивен дистрактор
8	7(2020)	фигура 1.5	Висока трудност Атрактивен дистрактор
9	-	-	-
10	7(2022)	фигура 1.24	Висока трудност Добра разграничителна сила
11	11(2022)	-	-
12	12(2020)	-	-
13	12(2021)	фигура 2.19	Висок коефициент на налучкване
14	18(2020)	фигура 1.7	Висока трудност Ниска разграничителна сила
15	16(2023)	-	-
16	15(2022)	фигура 1.25	Трудна задача Добра разграничителна сила
17	17(2021)	фигура 1.18	Лесна задача Висок коефициент на налучкване
18	14(2021)	-	-
19	15(2020)	фигура 2.11	Висок коефициент на налучкване Ниска разграничителна сила
20	-	-	-

Таблица 3.2. Съответствие на задачите от пробното НВО и минали НВО

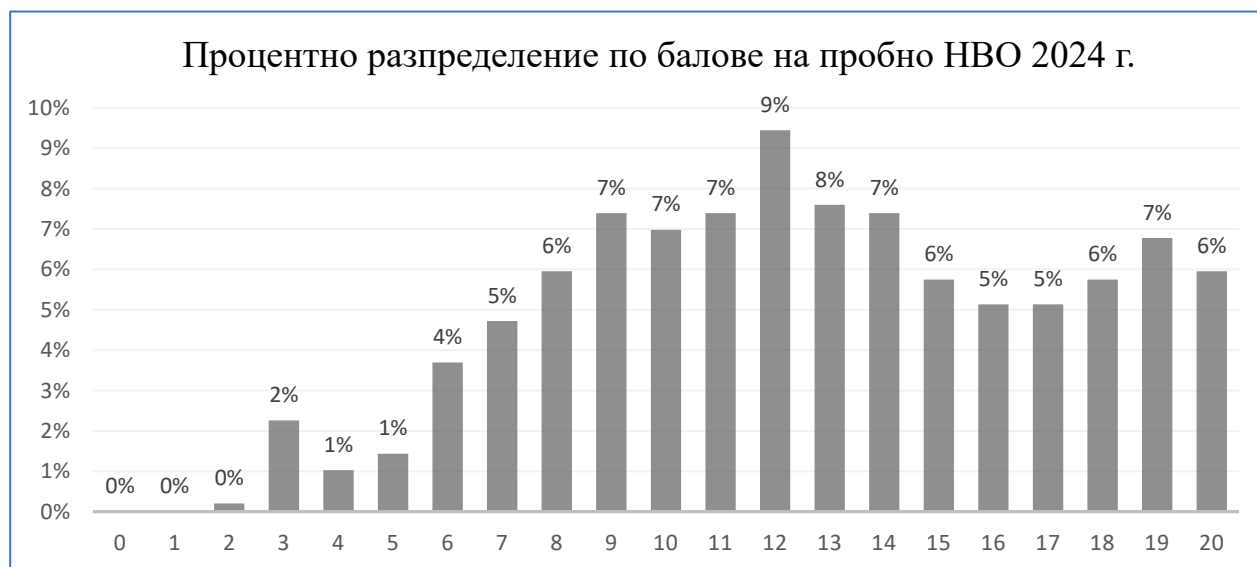
Голяма част от даваните задачи през миналите НВО са разгледани в предните две глави на дисертационния труд. В колона 2 на таблица 3.2 са дадени номерата на тези задачи, а местата, където се появяват условията им за пръв път са посочени в колона 3. В колона 4 са дадени кратки техни характеристики, установени с КТТ или IRT.

На задачите, които не са разглеждани досега в дисертационния труд, в таблицата е поставено тире.

2.1 Общ анализ на задачите с ИО чрез КТТ.

Основни статистически характеристики на суровия бал, получен върху първите 20 задачи с ИО:

- брой участници 487;
- минимален бал – 2 точки;
- максимален бал – 20 точки;
- среден бал – 12.62 точки;
- медиана – 12 точки;
- мода – 12 точки;
- средноквадратично отклонение – 4.44.



Фиг. 3.1. Процентно разпределение по балове на пробно НВО-2024 г.

Процентното разпределение по балове е изобразено на фигура 3.1. Впечатление правят ниските проценти на точките от 0 до 5. Това може да се дължи на факта, че задачите са решавани от ученици, голяма част от които са били по-добре мотивирани от учителите си. Освен това, 180 ученици от област Плевен участваха по собствено желание в пробния изпит, организиран от СМБ – Плевен. В останалия интервал от 6 до 20 точки диаграмата е подобна на тези от проведените изследвания в първа глава НВО (фигури 1.1, 1.14, 1.21 и 1.27).

Според линейния метод за трансформация на суровия бал, използван в предните глави, оценка Среден (3,00) може да се получи като се вземе 25% от максималния бал (в случая 25% от 20 точки = 5 точки), които се завишават с едно средно квадратично отклонение – 4 точки. Така, оценката 3,00 се получава при 9 точки. Оценка отличен (6,00) се получава при минимално 95% от 20 = 19 точки. Така линейната функция, която трансформира точките в оценка е $y = 0,3x + 0,3$. Както се вижда на фигура 3.2 слабите оценки са сравнително малка част – около 5% от всички ученици. Този резултат е много по-различен от описаните данни в първа глава (вж. например фигура 1.28). При останалите оценки се наблюдава идентично поведение – увеличаване на процента ученици от Среден към Мн. добър и после понижаване на този процент до оценка Отличен.



Фиг. 3.2. Диаграма на оценките според линейната трансформация

В таблици 3.3 и 3.4 са дадени номерата на задачите, подредени съответно според коефициентите на тяхната трудност и на дискриминативна сила ($gpbis$). Оцветените задачи ще бъдат разгледани по-нататък в дисертационния труд. Както се вижда, има разнообразие в трудността на задачите. Има една много лесна задача, 4 лесни, 13 оптимални и 2 по-трудни, което е добра характеристика ако НВО се разглежда като нормативен тест. При съставянето на теста задачите по-лесните задачи са оценени с 2 точки, трудните – с 3 точки, а най-трудните – с 4 точки. Както се вижда от таблица 3.3, има малко разминаване при по-леките задачи, но може да се каже, че то не е съществено.

Дискриминацията на задачите, с изключение на №20 е на добро ниво. Тази задача е дадена, без да е апробирана. В нейното условие е заложен един експеримент – верният отговор е елементарен сбор от дадените две числа в условието и може да се уцели лесно по този начин. По-нататък ще се види, че това е доказано с методите на IRT. Задачи 6 и 10, въпреки че са апробирани, са показали по-ниска разграничителна сила и ще им бъде обърнато внимание по-нататък.

точки	№	Трудност	rpbis	Тълкуване
2 т.	13	0.86	0.36	мн. лесна
3 т.	4	0.81	0.41	лесна
3 т.	10	0.81	0.26	лесна
3 т.	12	0.79	0.46	лесна
2 т.	5	0.75	0.35	лесна
3 т.	1	0.70	0.40	оптимална
2 т.	2	0.69	0.38	оптимална
3 т.	17	0.68	0.41	оптимална
4 т.	14	0.65	0.40	оптимална
3 т.	15	0.64	0.37	оптимална
3 т.	18	0.63	0.55	оптимална
3 т.	11	0.60	0.39	оптимална
4 т.	16	0.60	0.45	оптимална
4 т.	20	0.56	0.16	оптимална
3 т.	3	0.55	0.40	оптимална
4 т.	7	0.55	0.45	оптимална
4 т.	9	0.52	0.54	оптимална
4 т.	8	0.44	0.46	оптимална
4 т.	6	0.40	0.25	трудна
4 т.	19	0.39	0.42	трудна

Таблица 3.3. Наредба на задачите с ИО от 2024 г. според трудността им

№	Трудност	rpbis	Тълкуване
20	0.56	0.16	ниска
6	0.40	0.25	средна
10	0.81	0.26	средна
5	0.75	0.35	добра
13	0.86	0.36	добра
15	0.64	0.37	добра
2	0.69	0.38	добра
11	0.60	0.39	добра
1	0.70	0.40	добра
3	0.55	0.40	добра
14	0.65	0.40	добра
17	0.68	0.41	мн. добра
4	0.81	0.41	мн. добра
19	0.39	0.42	мн. добра
16	0.60	0.45	мн. добра
7	0.55	0.45	мн. добра
12	0.79	0.46	мн. добра
8	0.44	0.46	мн. добра
9	0.52	0.54	мн. добра
18	0.63	0.55	мн. добра

Таблица 3.4. Наредба на задачите с ИО от 2024 г. според дискриминативната им сила

№	А	Б	В	Г	Без отговор
1	5%	5%	20%	70%	0%
2	69%	10%	7%	14%	1%
3	22%	12%	55%	11%	1%
4	81%	8%	2%	7%	2%
5	5%	75%	16%	3%	1%
6	11%	40%	32%	17%	0%
7	5%	7%	32%	55%	1%
8	44%	6%	44%	6%	0%
9	52%	11%	13%	24%	0%
10	4%	81%	4%	10%	0%
11	18%	60%	15%	5%	2%
12	3%	6%	10%	79%	1%
13	2%	9%	3%	86%	0%
14	65%	15%	13%	5%	1%
15	14%	3%	19%	64%	0%
16	10%	24%	60%	6%	1%
17	11%	9%	68%	12%	0%
18	17%	63%	9%	8%	2%
19	39%	24%	10%	25%	2%
20	32%	7%	56%	3%	1%

Таблица 3.5. Процентно съотношение на отговорите на задачите с ИО от 2024 г.

Според данните в таблица 3.5 няма дистрактор, който да не е избран. Някои са малко избирани, около 2-3%. Причините са различни. В някои задачи като № 13 верният отговор е събрал 86% и за дистракторите не остават много проценти. При други задачи, като №8 и № 20, има много атрактивен дистрактор.

Надеждността на теста, измерена с jMetrik, се представя с коефициента алфа на Кронбах, която има стойност 0,8227. Тази стойност, макар и малко по-ниска, е съпоставима с тези от изследваните НВО – 2020 г. (0,8604), 2021 г. (0,8677), 2022 г. (0,8876) и 2023 г. (0,8485).

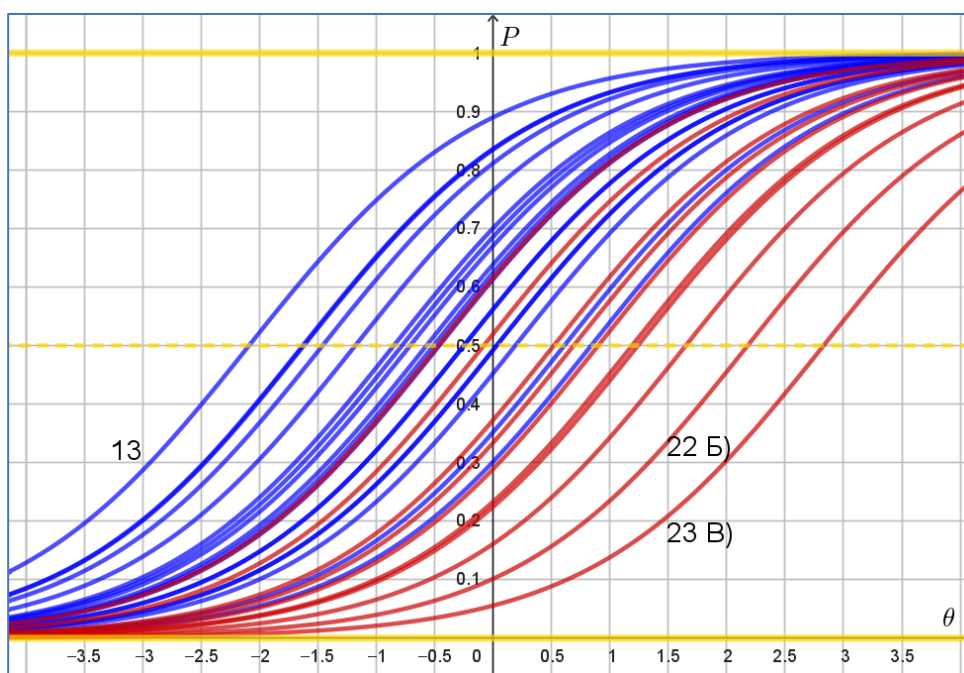
Изводът от направения общ анализ (чрез КТТ) на задачите с ИО е, че техните характеристики са съпоставими с тези на проведените през 2020-2023 години НВО.

2.2 Общ анализ на всички задачи от пробното НВО чрез IRT.

За да се приложи апарата на IRT, задачите с ИО от пробното НВО се точкуват с 0-1 точки, а тези с разширен СО:

- задача № 23 А) с 0-1 точки;

- задачи № 21 А), 21 Б), 21 В), 22 А), 22 Б) и 23 В) с 0-1-2 точки;
- задача № 23 Б) с 0-1-2-3 точки.



Фиг. 3.3. Характеристични криви на задачите от 2024 г.

На фигура 3.3 са изобразени характеристичните криви на всички задачи чрез еднопараметричния Раш-модел. Подточките на задачите със свободен отговор се разглеждат като отделни задачи, т. е. изследвани са 28 задачи. В синьо са задачите с ИО, а тези със СО са в червен цвят. Както би трябвало да се очаква, по-лесните задачи са с ИО, а по-трудните са със СО.

№	Трудност
13	-2,09
4	-1,63
10	-1,62
12	-1,46
5	-1,18
1	-0,85
2	-0,78
17	-0,71
14	-0,57
15	-0,51
21 А)	-0,47
18	-0,46
11	-0,25
16	-0,25

№	Трудност
20	-0,08
3	0,03
7	0,03
9	0,19
23 А)	0,52
8	0,61
21 Б)	0,69
6	0,84
19	0,90
23 Б)	1,19
22 А)	1,24
21 В)	1,65
22 Б)	2,18
23 В)	2,83

Таблица 3.6. Задачите от 2024 г., подредени по трудност от Раш-модел

Както се вижда и от таблица 3.6 задачите покриват сравнително равномерно интервал на трудност от $-2,09$ до $2,83$. Най-лесна е задача № 13, а най-трудни са № 22 Б) и № 23 В). Може да се отбележи, че наредбата на задачите с ИО според КТТ и Раш-модела е една и съща (вж. таблица 3.3).

Според трипараметричния модел, приложен за задачите с ИО, две от тях имат много висок коефициент на налучкване $c = 0,50$, видно от таблица 3.7. Те са с номера 13 и 20, са отбелязани по-рано и ще бъдат анализирани по-нататък.

№	a-param	b-param	c-param
9	2,38	0,18	0,14
18	2,38	-0,26	0,15
19	1,88	0,83	0,16
8	2,12	0,59	0,17
1	1,36	-0,58	0,18
4	1,71	-1,10	0,19
2	1,24	-0,52	0,19
12	2,23	-0,85	0,20
15	1,27	-0,24	0,20
17	1,52	-0,36	0,22
7	1,92	0,26	0,22
10	0,93	-1,44	0,23
6	1,13	1,43	0,23
5	1,23	-0,76	0,25
11	1,77	0,18	0,27
14	1,72	-0,07	0,28
16	2,38	0,17	0,28
3	2,04	0,50	0,30
13	1,38	-1,00	0,50
20	1,19	1,37	0,50

Таблица 3.7. Наредба на задачите с ИО според 3PL

За построяването на *item-person-map* диаграмата на фигура 3.4 се използва метода от точка 2.1.3 на втора глава, като в този случай:

- на всеки символ “#” съответстват 10 ученици;
- на всеки символ “.” съответстват под 10 ученици.

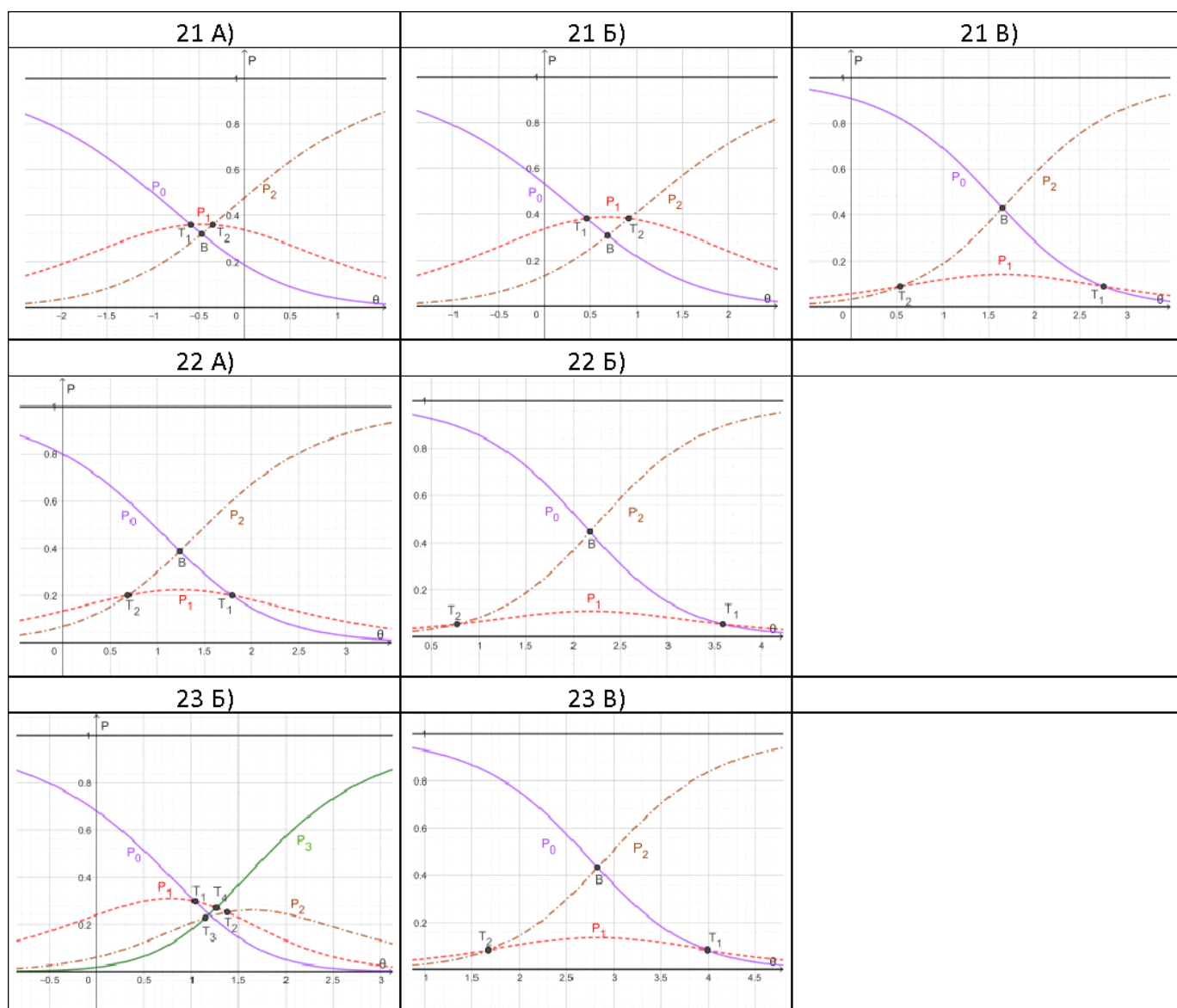
Както се вижда от диаграмата пиковите стойности и по двата показателя са на една и съща позиция $-0,4$ на маркирания ред θ/b . Може да считаме, че тестът, съставен от представените задачи, е добре балансиран за съответните ученици, защото двете

разпределения имат връх в близки стойности и покриват почти едни и същ интервал на способност/трудност. Все пак, за по-силните ученици с постижения над 2,8 липсват задачи с такава висока трудност.

Брой ученици																	
№ задача	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
23B)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21B)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22B)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22A)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23A)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21A)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Фиг. 3.4. Диаграма на задачите и респондентите от 2024 г.

На фигура 3.5 може да се забележи, че само при задачи 21 А) и 21 Б) е най-вероятно учениците да получат 0, 1 или 2, както е предвидено при оценяването. При тези задачи абсцисите на точките Т₁ са по-малки от тези на Т₂. За разлика от тях, при задачи 21 В), 22 А), 22 Б) и 23 В) е по-вероятно учениците да получат 0 или 2 точки, т. е. или да решат вярно задачата, или да не я решат. При тези задачи абсцисите на точките Т₁ са по-големи от тези на Т₂. Подходящо е те или да се точкуват с 0-1 точки, или да се помисли за оценяване, при което да може да се дава междинната 1 точка при по-леки условия. Задача 23 Б) е оценявана с 0-1-2-3 точки, но както се вижда от графиката вероятността да има ученици с 2 точки е ниска. При нея е най-вероятно да има ученици с 0, 1 или 3 точки. Тя е подходящо да бъде 0-1-2 задача. Тези задачи са създадени като се има предвид точкуването на проведените НВО през изследвания четиригодишен период. Въпреки това, само при 2 (евентуално при 3) от тях има възможност да се получат междинни точки. При другите задачи учениците, ако са започнали вярно задачата, успяват да я довършат. Една от причините може да се потърси в това, че по втория модул не работят всички ученици. Повечето, които пишат решения на задачите с разширен СО са по-подготвени и успяват да ги решат докрай. Възможно е да допуснат някоя малка грешка, но това не бива да се отразява съществено на техните точки.



Фиг. 3.5. Графики на характеристичните криви на задачите със СО от 2024 г.

2.3 Анализ на някои задачи с ИО от пробното НВО

Първата задача, на която ще бъде обърнато внимание е задача 1, която е от раздел „Числени стойности на рационални изрази“. Условието ѝ е дадено на фигура 3.6. Нейните характеристики според КТТ са дадени в таблица 3.8. Тя има оптимална трудност и добра разграничителна сила. Отговорите А) и Б) се получават, ако първо се пресметне разликата $2024 - 2000$ и след това се умножи с $(+ 0,5)$ или с $(- 0,5)$. Ниският процент на тези отговори означава, че този ред на действията е спазен от повечето ученици. Третия отговор В) се получава, ако се сгреси произведението на двете отрицателни числа и се получи $- 1000$. Интересното е, че тези два вида грешки при аналогичната ситуация на задача 1 от 2021 г. дават обратни на тези резултати. Там процентът на учениците, сгресли реда на действие е по-голям от този на учениците,

сгрешили умножението на отрицателни числа. Според трипараметричния IRT модел коефициентът на налучкване е сравнително малък $c = 0,18$, видно в таблица 3.7. Тези данни определят задачата като добра за целите на НВО и показват, че учениците се справят сравнително добре с подобни типове задачи. Може да се предположи, че в последните години в училище е обърнато повече внимание на задачите с ред на действие.

1. Стойността на израза $2024 - 2000 \cdot (-0,5)$ е: А) -12 Б) 12 В) 1024 +Г) 3024

Фиг. 3.6. Условие на задача 1 от 2024 г.

Задача №1	Правилен отговор: Г	Процент не отговорили: 0,21%
Трудност: 0,70	Разграничителна сила: 0,40	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	5%	- 0,28
Б	5%	- 0,29
В	20%	- 0,38
+Г	70%	0,40

Таблица 3.8. Резултати на тестова задача 1 от 2024 г.

4. На географска карта на 6 cm съответстват 150 km действително разстояние. Ако разстоянието между два града на картата е 8 cm, то действителното разстояние между тях в километри е: +А) 200 km Б) 220 km В) 240 km Г) 250 km

Фиг. 3.7. Условие на задача 4 от 2024 г.

Задача 4, с условие на фигура 3.7 и характеристики в таблица 3.9, проверява знанията в раздел „Пропорции“. Тя е от най-лесните в теста и има много добра разграничителна сила. Подобната на нея задача 18 от 2021 година има идентични характеристики, видно от таблици 1.24 и 1.26. Коефициентът ѝ на налучкване е сравнително нисък ($c = 0,19$ от таблица 3.7). Следователно, учениците добре се справят

със задачите за намиране на неизвестен елемент от пропорция. Проблем за учениците се оказва, ако при подобни задачи се търси мащабът на картата, както се вижда при задача 6 от 2023 г. на фигура 1.31 и резултатите от нея в таблица 1.26.

Задача №4	Правилен отговор: А	Процент не отговорили: 1,03%
Трудност: 0,81	Разграничителна сила: 0,41	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
+А	81%	0,41
Б	8%	- 0,39
В	2%	- 0,12
Г	7%	- 0,20

Таблица 3.9. Резултати на тестова задача 4 от 2024 г.

Проблемите с простите числа в VII клас се потвърждават с резултатите на задача 6 от фигура 3.8, публикувани в таблица 3.10. Задачата е от трудните в теста и има средна разграничителна сила. При нея, както и при задача 2 от 2023 г. на фигура 1.30, се откроява, освен верният отговор, така и отговорът, който се получава, ако се брои числото 1 за просто. Отговор Г) се получава, ако се съберат нечетните числа. Той събира немалко проценти, като разделителната му сила е близо до нулата, което показва, че е посочван и от добрите ученици. Коефициентът на налучкване е в рамките на нормалното ($c = 0,23$ от таблица 3.7).

6. Дадени са числата 1, 2, 3, 5 и 9. Сборът на простите числа измежду тях е:	
A) 8	
+Б) 10	
В) 11	
Г) 18	

Фиг. 3.8. Условие на задача 6 от 2024 г.

Задача №6	Правилен отговор: Б	Процент не отговорили: 0,41%
Трудност: 0,40	Разграничителна сила: 0,25	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	11%	- 0,19
+Б	40%	0,25
В	32%	- 0,34
Г	17%	- 0,02

Таблица 3.10. Резултати на тестова задача 6 от 2024 г.

Задача 10 от фигура 3.9 не изисква изчисления, а само наблюдение на диаграмата. Тя се оказва от лесните за 2024 г., за разлика от подобната ѝ задача 7 от 2022 г. на фигура 1.24. Сравнително ниската стойност на коефициента на налучкване ($c = 0,23$ от таблица 3.7) и средната стойност на разграничителната ѝ сила показват, че задачата добре отделя силните от слабите ученици. Според таблица 3.11 най-атрактивен от дистракторите се оказва отговор Г), който отчита част от зададения въпрос в задачата – през 2024 година клуб „Туризм“ наистина има повече членове от клуб „Танци“, но това не е за пръв път. Такъв тип задачи, в които няма аритметични действия имат място в НВО, защото показват четивната грамотност на учениците.



Фиг. 3.9. Условие на задача 10 от 2024 г.

Задача №10	Правилен отговор: Б	Процент не отговорили: 0,41%
Трудност: 0,81	Разграничителна сила: 0,26	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	4%	- 0,16
+Б	81%	0,26
В	4%	- 0,36
Г	10%	- 0,03

Таблица 3.11. Резултати на тестова задача 10 от 2024 г.

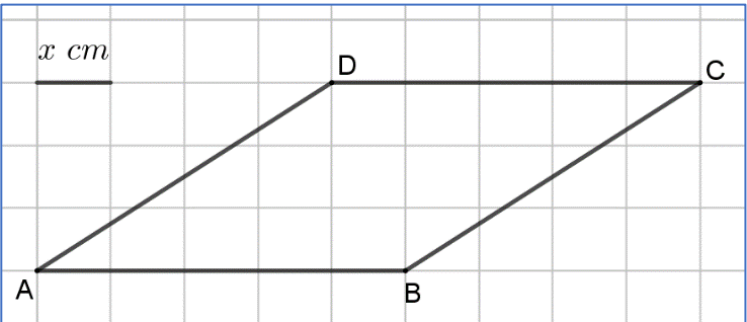
Задачи 6 и 10 са с различна трудност. И двете не изискват сложни изчисления, но показват ниски стойности на дискриминация. Едната е с малко текст, но трябва

учениците да познават понятие, рядко ползвано в VII клас. Другата е с повече текст, което в нашето съвремие се оказва проблем за много ученици.

Следващата задача 17 от фигура 3.10 има за цел да проследи как ще се изменят параметрите ѝ, ако малко се измени чертежа. Текстът в условието е абсолютно същия като на задача 17 от 2021 г. на фигура 1.18. Промяната е във височината на ромба. Тази промяна води до отговор, който не може да се налучква лесно, както показва и съответния коефициент ($c = 0,22$ от таблица 3.7). За сравнение, задачата от 2021 г. има много висок коефициент на налучкване $c = 0,39$, видно от таблица 2.6. Задачата е с оптимална трудност, като разграничителната ѝ сила се е повишила спрямо тази от 2021 г. (тогава е 0,30). В анализа на задача 17 (2021 г.) в първа глава бе допусната възможността за такова повишаване. В таблица 3.12 прави впечатление отговор Г), който се получава, като получената стойност на $x = 2$ се умножи с даденото число 40. Той е посочен от 12% от учениците. Почти същата част (11%) са посочили отговор А), който може да се получи ако се сгреша пресмятането на $x = 1$ и после се умножи с даденото 40. Следователно около 1/4 от учениците може да се каже, че не прилагат вярно формулата за лице на успоредник, а по-скоро пресмятат неговия периметър. Т. е. грешат двете понятия.

17. В квадратна мрежа с единична отсечка $x \text{ cm}$ е начертан ромб $ABCD$. Ако обиколката на ромба е 40 cm , то лицето му е:

А) 40 cm^2
 Б) 50 cm^2
 +В) 60 cm^2
 Г) 80 cm^2



Фиг. 3.10. Условие на задача 17 от 2024 г.

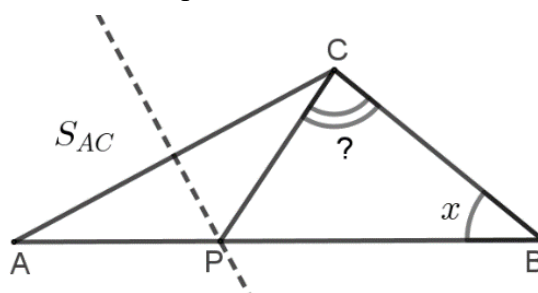
Задача №17	Правилен отговор: В	Процент не отговорили: 0,41%
Трудност: 0,68	Разграничителна сила: 0,41	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	11%	- 0,38
Б	9%	- 0,18
+В	68%	0,41
Г	12%	- 0,05

Таблица 3.12. Резултати на тестова задача 17 от 2024 г.

Задача 19 на фигура 3.11, както и задача 17 показва как една редакция на условието на дадена задача променя съществено нейните характеристики. Базисната задача е № 15 от 2020 г. от фигура 2.11. За решаването и на двете задачи основно се използва свойството на симетралата. При задачата от 2020 г., обаче отговорът е лесен за налучкване ($c = 0,37$ от таблица 2.3), както е коментирано във втора глава. Така тя се оказва една от най-лесните за това НВО. За разлика от нея, задачата от 2024 г. е най-трудната задача с ИО (вж. таблица 3.3). Освен това, възможността за налучкване е сведена до минимум ($c = 0,16$ от таблица 3.7).

19. На чертежа симетралата на страната AC на триъгълника $\triangle ABC$ пресича страната AB в точка P . Ако $\angle ACB = 100^\circ$ и $\angle ABC = x$, то $\angle PCB$ е равен на:

- +А) $20^\circ + x$
- Б) $40^\circ + x$
- В) $30^\circ + x$
- Г) $80^\circ - x$



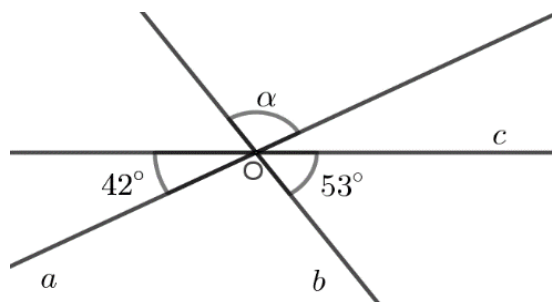
Фиг. 3.11. Условие на задача 19 от 2024 г.

Следват двете задачи от 2024 г., които показват най-висок коефициент на налучкване ($c = 0,50$ в таблица 3.7). Едната е най-лесната в теста под № 13 на фигура 3.12. Пръвообраза ѝ е задача 12 от 2021 г. на фигура 2.19. Интересно е, че въпреки идентичните им условия, коефициентите на налучкване са много различни. Тази от 2021 г. има много нисък коефициент ($c = 0,15$ от таблица 2.6), а другата от 2024 г. е с много висок коефициент. Една възможна причина е, че в условието на задачата от 2024 г. има два отговора, които завършват на 5. Грешният е равен на сбора от дадените ъгли, а верният – на разликата до 180° . Може да се предположи, че свойството „сбор на съседни ъгли“ е много добре усвоено в училище.

13. Правите a , b и c се пресичат в точка O .

По данните от чертежа мярката на ъгъл α е:

- А) 100°
- +Б) 95°
- В) 90°
- Г) 85°



Фиг. 3.12. Условие на задача 13 от 2024 г.

Другата задача с най-високия коефициент на налучкване е с номер 20 на фигура 3.13. Тя е с оптимална трудност и няма аналог в предните години. Решението ѝ изисква да се ползват две формули за обем – на кълбо и на конус, като се реши права обратна задача. По принцип такива задачи се изучават с 6 клас и затрудняват учениците както в 6, така и в VII клас. Така тя би трябвало да е от най-трудните в теста. За експеримента, обаче е заложено верният отговор да се получи чрез елементарен сбор на двете числа в условието ($3+3=6$). Както се вижда от таблица 3.13 разграничителната сила е много ниска (0,16). Учениците са предпочели основна отговорите А) и В), които могат да се вземат директно от условието, без да се извършват необходимите пресмятания.

20. Метално кълбо с радиус 3 cm е претопено и е излят конус с височина 3 cm. Радиусът на основата на този конус е:

- А) 3 cm
- Б) 4 cm
- +В) 6 cm
- Г) 8 cm

Фиг. 3.13. Условие на задача 20 от 2024 г.

Задача №20	Правилен отговор: В	Процент не отговорили: 0,82%
Трудност: 0,56	Разграничителна сила: 0,16	
Отговори	Процент	Разграничителна сила
А	32%	- 0,29
Б	7%	- 0,18
+В	56%	0,16
Г	3%	- 0,09

Таблица 3.13. Резултати на тестова задача 20 от 2024 г.

Последните две задачи трябва да служат за пример, че трябва да бъдем много внимателни, когато подбираме числата в условията и в предложените избираеми отговори, за да не може лесно да се отгатват верните отговори. Особено, ако искаме учениците да извършат някои пресмятания или да приложат някои свойства.

Задачите 12, 17, 19 и 20 показват, че верните отговори не бива да се получават чрез елементарни аритметични действия на числата в условието. Още повече, ако тези действия не са логически обосновани. В противен случай, лесното им налучкване не допринася за правилното разслояване на добре подготвените ученици от останалите.

3. Сравняване по различни показатели на традиционния и експерименталния начин на точкуване.

Нека се припомним, че двата начина за оценяване, които разглеждаме тук са:

- „традиционен“ – всяка задача с ИО се оценява с 2, 3 или 4 точки, като общия сбор 65, а задачите със СО се оценяват с 11 или 12 точки – общо 35 точки. Така максималният бал от двете части на НВО е **100 точки**;
- „експериментален“ – всяка задача с ИО се оценява с 1 точка, а на всяка подточка на задачите със СО се дават максимално 1, 2 или 3 точки. Така максималният бал е **36 точки**.

За да се сравнят получените резултати по двата начина – традиционния и експерименталния, може да се подходи по различни начини. Един от тях е описан в (Банков, 2012). За целта, ще приравним точките, получени от **експерименталното** (X) оценяване (от 0 до 36 т.) към тези от **традиционното** (Y) оценяване (от 0 до 100 т.). Това се прави с формулата:

$$X_i^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X_i - \mu_X) + \mu_Y,$$

където

- X_i са точките на i -тия ученик според експерименталното оценяване;
- X_i^* са тези точки, приравнени към традиционното оценяване;
- μ_X и μ_Y са средните стойности на суровите балове на учениците, получени съответно от експерименталното и традиционното оценяване;
- σ_X и σ_Y са техните съответни средноквадратични отклонения.

Така се получава формулата:

$$X_i^* = 2,76(X_i - 17,63) + 49.$$

След това е получен коефициентът на корелация между **получените балове** (X^*) и тези от традиционното оценяване (Y). Стойността на този коефициент е 0,99192, което означава, че двете оценявания са идентични. За сравнение, в таблица 3.14 са дадени точките на първите 20 ученици по трите скали. Очевидно в повечето случаи разликите са 0 или 1 точки, макар че има и по-големи разлики – от 10 точки.

Една от причините за големите разлики е когато единият и другият оценител не са оценявали еднакво напредъка на ученика в решенията на задачите със СО. Това не е необичайна ситуация при НВО и по тази причина там има арбитър, който преценява коя от оценките на двамата оценители е по-близка до реалната. Следва да се отбележи, че 1 т. по експерименталното оценяване съответства приблизително 3 т. по традиционното. Колегите, които са оценявали по традиционния начин своите ученици, понякога са склонни да дават 1-2 „бонус“ точки на ученици, които обикновено работят добре в час, но в случая са допуснали грешки. Тези грешки, обаче при експерименталното оценяване са наказвани, така както е предвидено в ръководството за оценяване.

№	X	X*	Y
1	34	94	94
2	27	75	80
3	32	89	88
4	26	72	66
5	27	75	79
6	32	89	89
7	26	72	65
8	33	92	93
9	21	58	61
10	33	92	98,5
11	35	97	94
12	34	94	95
13	24	67	77
14	28	78	82
15	30	83	85
16	36	100	94
17	36	100	100
18	21	58	64
19	34	94	96
20	9	25	24

Таблица 3.14. Точки на първите 20 ученици по три скали за оценяване

Друга ситуация, при която се получават по-големи разлики в точките между X^* и Y може да се илюстрира с ученик номер 13. Той е допуснал 1 грешка на задача 2, при което сборът на суровия му бал на задачите с ИО е $X_{13} = 19$, което дава приравнен бал $X_{13}^* = 53$, докато балът по традиционното оценяване е $Y_{13} = 63$. Така разликата между двете оценявания в общия му бал също е 10 точки.

Въпреки, че ги има, случаите на по-големи разлики са малко на брой и не влияят съществено на общата статистика, което се доказва от високия коефициент на корелация между баловете X^* и Y .

4. Изводи от Трета Глава.

Резултатите от направения експеримент могат да се класифицират според трите основни посоки на изследването:

По отношение на задачите с избираем отговор:

1. Важен елемент при съставянето им е да не се допуска верният отговор да се получава чрез елементарни аритметични действия на числата в условието – задачи 12 и 20;
2. Чертежите към геометричните задачи да не дават прекалено много информация за получаването на отговора, особено в случаи, когато е необходимо да се приложат някои свойства на обектите – задачи 17 и 19;
3. Ако чертежът на геометричната задача е достатъчно подсказващ, да се изберат отговори, които не биха могли да се налукат лесно – задача 19;
4. Понятия, които рядко се ползват в VII клас често не водят до добра дискриминация на учениците – *мащаб* в задача 4 и *прости числа* в задача 6.

По отношение на задачите с разширен СО:

5. Положителна тенденция е те да се разделят на няколко подточки, като мнението на автора е, че всяка подточка може да подпомага решенията на следващите, а не да бъде задължително независима от тях. Така по-слабо подготвените ученици имат по-голяма възможност да получат точки и във втората част на НВО – проблем, който се вижда всяка година;
6. Всяка подточка да се оценява, като се отделят няколко важни стъпки в решението ѝ. Тези стъпки не бива да са повече от 2-3. Така има възможност да се направи изследване с помощта на вероятностното моделиране и да се сравняват по-точно резултатите от различни НВО;
7. Да се дава възможност за сравнително лесно получаване на 1 точка, което да е сравнимо с решаване на задача с ИО.

По отношение на балообразуването:

8. Оценяването на за задачите с ИО с 2, 3 или 4 точки не е много оправдано. Очевидно, дори те да са добре познати и апробирани, не винаги на по-лесните задачи съответстват по-малко точки;

9. Теорията препоръчва оценяването на задачите с ИО да е с 0-1 точки, независимо от тяхната трудност. Този коефициент показва всъщност каква част от учениците са посочили верния отговор, така че се очаква, ако един ученик е добре подготвен, той да може да посочи повече верни отговори;
10. Оценяването на отделните подточки на задачите с разширен свободен отговор да е с цяло число точки 0-1-2 или 0-1-2-3, които да съответстват на важните стъпки в решението им;
11. Високата стойност на коефициента на корелация между двата вида оценяване, получен в точка 3.3 на тази глава показва идентичност на двата начина на оценяване, като експерименталният начин е податлив на анализ с методите на съвременната теория на тестовете;
12. При нужда от унифицирана скала, може получените балове да се представят в проценти от 0 до 100.

Използването на общите задачи между пробното НВО от 2024 г. и изминалите НВО могат да послужат при бъдещи изследвания като “anchor” задачи за по-обективно сравняване на резултатите на учениците от четирите изследвани години. Този метод е приложен в точка 3 на втора глава. Чрез подобни примерни НВО, които да се проведат в специално подбрани училища в страната може да се създаде система за сравняване на тези резултати. Може да се препоръча на авторите на бъдещите НВО по математика да апробират задачите, като използват идеите на този експеримент. По този начин биха се избегнали някои неволни грешки както в условията, така и в отговорите на задачите с ИО. Също така, може да се види доколко важните стъпки в решаването на задачите с разширен СО добре разделят решението, така щото учениците да имат възможност да получават с добра вероятност междинните точки на тези задачи.

Изводите от тази глава, както и тези от втора глава потвърждават хипотезата на педагогическия експеримент. При условие, че оценяването на НВО се опрости, както е описано тук в изводи 9 и 10, по-прецизно могат да се анализират всички задачи от НВО чрез средствата на IRT. При това, тази теория е по-надеждна при сравняването на различни популации отколкото общоприетото им сравняване посредством средния успех.

Заклучение

Настоящата разработка е в резултат на дългогодишното участие на автора в комисии за съставяне и проверяване на различни изпити и оценявания на регионално и национално ниво. Фокусът в дисертационния труд са Националните външни оценявания по математика, които се провеждат с ученици, завършващи VII клас. В тази връзка са потърсени отговори на въпроси, които от самото начало на провеждането на външните оценявания са на дневен ред – как да се тълкуват постигнатите от учениците резултати; в каква степен учениците са усвоили учебния материал; съответстват ли даваните задачи на поставените предварителни изисквания относно съдържателната и познавателната област; доколко тези задачи са „добри“ от гледна точка на теориите за тестови задачи с избираем или свободен отговор; как могат да се подобрят някои от тях, които са показали определен „дефект“; доколко използването на НВО за вход в гимназиите е оправдано; възможно ли е оценяването на задачите да се постави на друга основа; в каква степен обучението от разстояние в електронна среда е въздействало върху постиженията на учениците?

Основна цел в дисертационния труд е да се приложат различни методи за анализ на резултати от стандартизирани оценявания на ученици по математика (НВО) и да се анализират положителните и отрицателните страни на всеки от тях. Използвайки този анализ, да се дадат препоръки за тяхното използване. Основната хипотеза е, че правилното използване на Класическата теория на тестовете, съчетана със съвременната Item Responsibility Theory, дава по-обективна, по-точна и надеждна картина за постиженията по математика на учениците от VII клас. Тази хипотеза е потвърдена в дисертационния труд.

В подкрепа на тази теза авторът е проучил и анализирал публикации, свързани с прилагането на двете теории в национални и международни изследвания на ученическите постижения. Изучил е различни софтуерни продукти за обработка на резултатите от проведените тестове.

От проведените наблюдения и анализи може да се направят следните **изводи**:

От първа глава:

- Застъпени са всички теми от съдържателната рамка на тестовата спецификация;
- Задачите с ИО основно са на познавателно равнище Знание и Разбиране

- Трудността и дискриминативната сила са с добри показатели, с няколко малки изключения;
- Задачите със СО не дават добавена стойност при голяма част от учениците в малките и средни по големина области на страната. Това, обаче за София-град и отчасти за Пловдив не е така;
- COVID епидемията се отрази на резултатите на учениците, особено на тези, които се обучаваха в ОРЕС и завършиха през 2022 година VII клас;

От втора глава:

- Изследването с различните модели на IRT показва, че двупараметричният модел се съгласува най-добре с емпиричните данни. Резултатите от този модел потвърждават изводите, получени с КТТ;
- Прилагането на трипараметричния модел дава възможност да се откриват задачи, които имат висок коефициент на налущване. За тези задачи е добре да се потърси по-добър вариант или да не се включват в следващи оценявания;
- Трудността на задачите с ИО се съгласува добре със способностите на учениците, като липсват задачи, които са за много силните и много слабите ученици;
- Сравняването на постиженията на учениците с помощта на anchor-задачи показва, че те се понижават през изследвания период от четири години, като това понижение се оказва статистически значимо;
- Точкуването на задачите по общоприетия начин не винаги съответства на трудността им. Има не малко примери, в които трудна задача се оценява с малко точки, а лесна – с повече точки;
- Показана е идея за оценяване, базирана на резултатите на учениците, която може да бъде внедрена в бъдещи НВО;

От трета глава:

- Установени са няколко причини, които могат да влошат качествата на задачите с ИО, като са предложени начини откриване на такива задачи, както и варианти за подобряването на тези качества;
- Оценяването на задачите с ИО е добре да е с 1 точка при верен отговор и 0 точки в останалите случаи;
- Оценяването на задачите със СО не е нужно да бъде раздробено, както се прави в настоящите НВО. Достатъчно е техните подточки да бъдат оценявани с 1, 2 до 3 точки, които съответстват на важните стъпки в решаването им;

- При нужда от унифицирана скала от 0 до 100, суровите балове на учениците, получени от горните две оценявания, могат да се представят в процентна скала.

Някои идеи за бъдещи разработки, които се появиха в процеса на разработката на този труд:

- ✓ Използването на общите задачи между проведеното пробното НВО от 2024 г. и миналите НВО в периода 2020-2023 година могат да послужат като anchor-задачи за по-обективно сравняване на резултатите на учениците от четирите изследвани години. Този метод е приложен в точка 3 на втора глава;
- ✓ Чрез подобни примерни външни оценявания, които да се проведат в специално подбрани училища в страната, може да се създаде система за сравняване на резултати от проведени такива оценявания по математика. Същото може да се експериментира и в други учебни дисциплини;
- ✓ Да се проучи въпросът с обективността на оценяването и доколко прилагането на методите за изследване на тестове с IRT биха подобрили тази обективност.

Приноси на дисертационния труд

Научноприложни приноси

1. Съпоставени са различни модели на IRT (с един, два и три параметъра) с получените емпирични данни върху задачите с ИО от проведените НВО в периода 2020-2023 г., като са изследвани резултатите на всички ученици от четири административни области в България. Обосновано е, че двупараметричния модел съответства най-добре на тези данни.
2. Направена е съпоставка на различни методи за оценяване на задачите със СО. Създадена е опростена скала за оценяване на задачите със СО, така че да може да се приложат методите на IRT за изследване на техните показатели. Тази скала е обоснована на базата на получените резултати от проведените НВО;
3. Сравнени са постиженията на учениците по математика в изследваните четири години, като е приложен метод, базиран на двупараметричния модел на IRT, за сравняване на различни популации чрез така наречените anchor-задачи. Установено намаляване на тези постижения с всяка следваща година;
4. Предложени са варианти за трансформация на точките от задачите с ИО в широко използваната у нас шестобална система;

Приложни приноси

5. Направен е изводът, че приложените методи на КТТ върху задачите с ИО от НВО след VII клас в изследвания четиригодишен период са добре балансирани по отношение на коефициентите на трудност и разграничителна сила.
6. Показано е, че задачите с ИО от НВО в този период покриват изискванията по отношение на съдържателната и познавателната област от рамката за оценяване;
7. Установено е, че задачите със СО от НВО в изследвания период не допринасят съществено към балообразуването с цел класиране на учениците;
8. Проведен е педагогически експеримент, като са съставени 23 авторски задачи, които са съобразени с тези на проведените НВО в изследвания четиригодишен период;
9. Установено е, че има разминаване в наредбата по трудност на задачите с ИО според общоприетия начин (с 0, 2, 3 или 4 точки) и според условието за вярна-невярна задача (с 0 или 1 точка);
10. Показан е метод за оценяване на задачите с разширен СО според броя на „важните“ стъпки в решаването им;
11. Установено е, че има отлично съответствие на получените балове на учениците по двата начина, наречени традиционен и експериментален.

Литература

- Алашка, Р. (2016). Двухфакторни вероятностни модели в образованието. *Механика, транспорт, комуникации*, 14(3/2), VII-7 - VII-12.
- Алашка, Р. (2017). *Приложение на вероятностни модели за анализ на резултати от изпити и тестове, Дисертационен труд за присъждане на научната и образователна степен „доктор“*. София: Софийски университет "Св. Кл. Охридски".
- Банков К., Витанов Т. (2010). Външното оценяване по математика, състояние и перспективи. *Математика и математическо образование*. Албена: СМБ.
- Банков, К. (2002). Вероятностно моделиране за измерване на ученическите постижения. *Математика и информатика*(4), 41-49.
- Банков, К. (2012). *Увод в тестологията*. София: Изкуства.
- Банков, К. (2023). Точкуване на задачи и използване на скали при стандартизирани оценявания. *Математическото образование 75-годишна мисия и история*, 73-86.
- Банков, К. (2024). *Широко мащабни оценъчно-диагностични педагогически изследвания*. София: Университетско издателство "Св. Климент Охридски".
- Бижков Г. и Краевски В. (2002). *Методология и методи на педагогическите изследвания*. София: Университетско издателство "Св. Кл. Охридски".
- Бижков, Г. (1996). *Теория и методика на дидактическите тестове*. София: Просвета.
- Ганева, З. (2016). *Да преоткроем статистиката с IBM SPSS STATISTICS*. София: Елестра ЕООД.
- Георгиева, Н. (1998). *Технологичен модел за измерване и оценка на постиженията на учениците*, Образователни изисквания за учебно съдържание, Съвет на Европа, 2-4 април (студия), с 41-55
- Георгиева, Н., К. Банков. (1997). *Измерване на постиженията на учениците по математика в края на IV и VIII клас*. Стратегии на образователната и научната политика, 4, с. 36-39.

- Георгиева, Н., К. Банков, П. Тодорова. (1998). *Национална проверка по математика в IV клас – технологичен модели и резултати*. Начално образование, 6-7, 1998, с. 19-30.
- Данчев, П., К. Банков, В. Стоименова и др. (2015). *Апробация на статистически модели за оценка на добавената стойност на училищата, използващи резултати от национални оценявания. Основни резултати и изводи*. Washington, D.C.: World Bank Group.
- Джалев, Л. (2013). *Сравнителен анализ на приложимостта на две психометрични теории на тестовете (върху данни от теста за общообразователна подготовка)*. Дисертационен труд за присъждане на научната и образователна степен „доктор“. София: Нов български университет.
- Джалев, Л. (2014). Приложимост на Класическата тестова теория и Теорията за отговор на тестов въпрос: преглед на литературата по въпроса. *Българско списание по психология*(1-3), 81-102.
- Иванов, И. (2006). *Педагогическа диагностика*. Шумен: Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“.
- Ким, В. С. (2007). *Тестирование учебных достижений. Монография*. Уссурийск: УГПИ.
- МОН. (03 10 2024 г.). *Наредба № 11 от 1 септември 2016 г. за оценяване на резултатите от обучението на учениците*. Извлечено от <https://lex.bg/bg/laws/ldoc/2136905302>
- МОН-2020. (16 09 2024 г.). *НВО за учениците в VII клас през учебната 2019-2020 година*. Извлечено от МОН: https://www.mon.bg/nfs/2020/06/nvo-viikl-math_17062020.pdf
- МОН-2021. (16 09 2024 г.). *НВО за учениците в VII клас през учебната 2020-2021 година*. Извлечено от https://www.mon.bg/nfs/2021/06/nvo-math_7kl_18062021.pdf
- МОН-2022. (16 09 2024 г.). *НВО за учениците в VII клас през учебната 2021-2022 година*. Извлечено от https://www.mon.bg/nfs/2022/06/7kl_nvo_math_16062022.pdf

МОН-2023. (16 09 2024 г.). *НВО за учениците в VII клас през учебната 2022-2023 година*. Извлечено от

https://www.mon.bg/nfs/2023/06/nvo_math_7klas_variant2_16.06.2023.pdf

Петров, Ф. (03 10 2024 г.). *Шестобалната система за оценяване в България, която е петобална*. Извлечено от <https://www.cphpvb.net/history/11846-grading-in-bulgaria/>

Портал за отворени данни на Република България. (16 09 2024 г.). Извлечено от <https://data.egov.bg/>

Стоименова, Е. (2000). *Измерителни качества на тестове: В помощ на авторите на тестове*. София: БАН. Институт по математика и информатика.

Стоянова, Ф. (1996). *Тестология за учители*. София: Атика.

Цонев, П. (2022). Някои изводи върху резултатите от националното външно оценяване по математика за VII клас. *Математика и информатика*, 65(6), 587-601.

Цонев, П. (2023-а). Избор на подходящ модел за изследване на задачите от НВО по математика след VII клас според методите на IRT. *Математика и информатика*, 66(4), 491-505.

Цонев, П. (2023-б). Сравнение на резултатите от задачите с избираем отговор от НВО по математика след VII клас, проведени през 2020, 2021 и 2022 години. *Годишна международна научна конференция на ВВВУ „Георги Бенковски“*, (стр. 353-363). Долна Митрополия.

Цонев, П. (2024-а). Примерно точкуване на задачите със свободен отговор от Националното външно оценяване след VII клас през 2023 година, базирано на вероятностно моделиране. *Математика и математическо образование*, 53, 161-168.

Цонев, П. (2024-б). Анализ на някои задачи с избираем отговор от пробно национално външно оценяване, проведено през 2024 година. *Годишна международна научна конференция на ВВВУ „Георги Бенковски“*, (стр. 380-389). Долна Митрополия.

ЦОПУО. (2024). Извлечено от Център за оценяване в предучилищното и училищното образование: <https://www.copuo.bg>

- Чехларова, Т. (2022). Национално външно оценяване по математика в IV клас през 2022 година. *Математика и информатика*, 65(6), 344 – 357.
- Янкова, Т. (16 09 2024 г.). 21. *ПРОВЕРКА ЗА НОРМАЛНОСТ НА ГС*. Извлечено от Упражнения по Вероятности и Статистика – Таня Янкова: https://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/database/probstat/VerStatXPtema21_Testing%20normality%20_BG.pdf
- Birnbaum, A. (1968). *Some Latent Trait Models and Their Use in Inferring an Examinee's Ability* (Lord, F.M. and Novick, M.R., Eds., *Statistical Theories of Mental Test Scores* ed.). Addison-Wesley: Reading, 397-479.
- Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives* (Handbook I: Cognitive Domain ed.). London: Longmans.
- Cronbach, L. J. (1971). Test validation. In R. L. Thorndike (Ed.). In *Educational measurement (2nd ed.)* (pp. 443-507). Washington, DC: American Council on Education.
- F. M. Novick & M. R. Lord. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Reading/Mass, Addison-Wesley,.
- GeoGebra*. (2024). Извлечено от <https://www.geogebra.org>
- Hambelton, R., Swaminathan, H., Rogers, H. (1991). *Fundamentals of item response theory*. SAGE Publications.
- Harmon, M. (2011). *t-Tests in Excel - The Excel Statistical Master*. Mark Harmon.
- Meyer, J. P. (16 09 2024 г.). Извлечено от Psychomeasurement Systems: <https://itemanalysis.com>
- Rasch, G. (1980). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. (Copenhagen, Danish Institute for Educational Research), expanded edition (1980) with foreword and afterword by B.D. Wright. Chicago: The University of Chicago Press.
- Tsonev, P. (2024). Challenging Mathematic Task-Types for Students Finishing 7th Grade in Bulgarian Schools. *KNOWLEDGE-BASED ORGANIZATION*, 30 (Issue 2), стр. 1-4. Sibiu.

Публикации на автора, свързани с темата на дисертацията

- Цонев, П. (2023-б). Сравнение на резултатите от задачите с избираем отговор от НВО по математика след VII клас, проведени през 2020, 2021 и 2022 години. *Годишна международна научна конференция на ВВВУ „Георги Бенковски“*, (стр. 353-363). Долна Митрополия.
- Цонев, П. (2024-а). Примерно точкуване на задачите със свободен отговор от Националното външно оценяване след VII клас през 2023 година, базирано на вероятностно моделиран. *Математика и математическо образование*, 53, 161–168.
- Цонев, П. (2024-б). Анализ на някои задачи с избираем отговор от пробно национално външно оценяване, проведено през 2024 година. *Годишна международна научна конференция на ВВВУ „Георги Бенковски“*, (стр. 380-389). Долна Митрополия.
- Tsonev, P. (2024). Challenging Mathematic Task-Types for Students Finishing 7th Grade in Bulgarian Schools. *International conference KNOWLEDGE-BASED ORGANIZATION*, 30(2) 1-4.

Декларация за оригиналност

от Павлин Иванов Цонев

докторант в задочна форма на обучение

към докторска програма „Методика на обучението по математика и информатика“ -

Методика на обучението по математика

при ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ във ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“ и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема „Методи за анализ на резултати от стандартизирани оценявания на ученици по математика“ са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участия.

София, 2025 г.

Декларатор: _____

Павлин Цонев

Приложение 1
СПЕЦИФИКАЦИЯ НА ТЕСТА
ЗА НАЦИОНАЛНО ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ ПО МАТЕМАТИКА
НА УЧЕНИЦИ В VII КЛАС
ЗА УЧЕБНАТА 2018/2019 ГОДИНА

Националното външно оценяване през учебната 2018 – 2019 година по математика ще се проведе по нов модел, определен от:

- Закон за предучилищното и училищното образование, който е в сила от 01.08.2016 г.;
- Наредба № 11 за оценяване на резултатите от обучението на учениците;
- Наредба № 5 от 30.11.2015 г., за общообразователната подготовка;
- учебни програми по математика за V клас (в сила от учебната 2016 – 2017 година); за VI клас (в сила от учебната 2017 – 2018 година) и за VII клас (в сила от учебната 2018 – 2019 година).

Спецификацията съдържа следните основни елементи:

1. цели на националното външно оценяване;
2. очаквани резултати от учебните програми от V до VII клас;
3. национална изпитна програма;
4. структура на теста:
 - вид и времетраене;
 - формат на теста (видове задачи);
 - оценяване (брой точки по задачи и критерии за оценяване);
 - разпределение на задачите по съдържателни области и познавателни равнища.

1. Цели на НВО в VII клас

- диагностика на индивидуалните постижения на учениците от VII клас;
- мониторинг на образователния процес за прилагане на политики и мерки, насочени към подобряване на качеството на образованието;
- установяване на степента на постигане на отделни очаквани резултати от обучението по математика, определени в учебната програма за съответния клас;
- установяване на степента на постигане на отделни очаквани резултати от обучението в края на прогимназиалния етап по математика, определени в държавния образователен стандарт за общо образователна подготовка;
- използване на резултатите от НВО по математика като балообразуващ елемент при приемането на ученици в VIII клас.

2. Учебно съдържание:

Съдържателната рамка на НВО включва задачи по математика от задължителното учебно съдържание, включено в учебните програми от V до VII клас, като се прилагат знанията и уменията, придобити в обучението до VII клас включително.

Области на компетентностите	Теми от учебното съдържание
Числа. Алгебра	- Естествени числа. Кратни и делители на число. Прости и съставни числа. Признаци за делимост; - Рационални числа. Действия с рационални числа (събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване). Свойства на числови равенства и неравенства. Процент – основни задачи; - Цели изрази. Тъждествени изрази. Формули за съкратено умножение; - Разлагане на многочлени на множители; - Линейни уравнения с едно неизвестно $ax + b = c$ и уравнения, свеждащи се до линейни чрез еквивалентни преобразувания; - Модулно линейно уравнение от вида $ax + b = c$; - Линейни неравенства с едно неизвестно $ax + b < 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ и $ax + b \geq 0$ и неравенства, свеждащи се към тях чрез еквивалентни преобразувания.
Фигури и тела. Измерване	- Лице и периметър на равнинни фигури; - Многоъгълник. Правилен многоъгълник; - Правоъгълна координатна система. Разстояние от точка до права; - Елементи и свойства на ръбести тела (куб, правоъгълен паралелепипед, права призма, правилна пирамида); - Елементи и свойства на валчести тела (прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, сфера и кълбо); - Съседни и противоположни ъгли. Перпендикулярни прави; - Успоредни прави – признаци и свойства; - Триъгълник. Сбор от ъглите в триъгълник. Външен ъгъл на триъгълник; - Еднакви триъгълници. Питагорова теорема - Симетрала на отсечка и ъглополовяща на ъгъл; - Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник;

	- Правоъгълен триъгълник. Медиана към хипотенуза в правоъгълен триъгълник. Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30°; - Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Неравенство между страните на триъгълник; - Успоредник. Видове успоредници – правоъгълник, ромб, квадрат;
Елементи от вероятности и статистика	- Представяне, разчитане и интерпретиране на данни, представени чрез диаграми и графики; - Множества и операции с тях; - Случайно събитие. Вероятност на случайно събитие.
Логически знания. Моделиране	- Отношения и пропорции. Права и обратна пропорционалност; - Средноаритметично на две и повече числа; - Моделиране с изрази, линейни уравнения и неравенства.

3. Структура на теста:

3.1. Вид и времетраене:

- Изпитът от НВО е писмен.
- Равнището на компетентностите на седмокласниците се проверява чрез тест.
- Времетраене – 150 минути, а за учениците със СОП е до 80 минути над определеното време.

3.2. Формат на теста:

Изпитният тест съдържа общо 25 задачи и лист с формули. Видовете задачи включени в теста са задачи с избираем отговор (структурирани с четири възможности за отговор, от които само един е верен), задачи с кратък свободен отговор (изискващи числов, символен или словесен кратък отговор, без да се привежда решението на задачите) и задачи с разширен свободен отговор (аргументирано описание на изпълнението на задачата с аналитико-синтетичен характер или оценка).

3.3 Видове задачи:

- 17 задачи с избираем отговор;
- 5 задачи с кратък свободен отговор;
- 3 задачи с разширен свободен отговор.

Таблица 1. Структура на теста

Брой задачи 25	17	5	3
Тип задача	1 - 17 Задачи с избираем отговор с четири възможни отговора, от които точно един е правилният.	18 - 22 Задачи с кратък свободен отговор, на които ученикът записва само отговора. Някои от задачите може да се конструират на базата на независими подзадачи или задачи, които описват реална ситуация и може да изискват един или повече отговори.	23 - 25 Задачи с разширен, свободен отговор, решенията на които са с пълни обосновки и се представят в писмен вид.
Познавателно равнище	Знание, разбиране	Знание, разбиране и приложение	Анализ, синтез, аргументация, оценка

4. Оценяване

Максималният брой точки от теста е 100.

Всяка правилно решена задача се оценява в съответствие с приложен ключ и критерии за оценяване.

Всяка вярно оценена задача от 1 до 17 се оценява с по 2 или с по 3 точки. За вярно решена задача се приема задача, на която е маркиран правилният отговор от посочените четири алтернативи.

Всяка вярно решена задача от 18 до 22 се оценява с 4 до 7 точки. За вярно решена задача или подзадача от 18 до 22 се приема тази, на която е записан верният отговор.

Задачите с разширен свободен отговор (от 23 до 25) се оценяват максимално с 10 или 11 точки. За вярно решени задачи се приемат тези, чието решение е обосновано правилно и е дадено в писмен вид. Точките от 1 до 10 (или 11) от тази част се разпределят съгласно съпътстващите критерии за тяхното оценяване.

Разпределението на точките по структурните части е дадено в таблица 2.

Таблица 2. Примерно разпределение на точките

	Брой задачи	Максимален брой точки
Задачи с избираем отговор	17	до 43
Задачи с кратък отговор	5	до 27
Задачи с разширен отговор	3	до 30
Общо	25	до 100

5. Разпределение на задачите по съдържателни области и познавателни равнища

Проверката на знанията и уменията на учениците по математика се извършва в две направления – съдържателно и познавателно. Съдържателното направление се описва с различните теми от учебното съдържание, а познавателното – с мисловните дейности, които са необходими за решаването на задачите.

В таблица 3 и 4 е дадено приблизителното процентно разпределение на съдържателните области и познавателните равнища.

Таблица 3. Процентно разпределение на задачите с избираем отговор (от 1 – 17 задача)

Съдържателни области	Процент
Числа. Алгебра	41%
Фигури и тела. Измерване	41%
Елементи от вероятности и статистика	6%
Логически знания. Моделиране	12%
Познавателни равнища	Процент
Знание	41%
Разбиране	47%
Приложение	12%

Таблица 4. Процентно разпределение на задачите със свободен отговор (кратък свободен отговор и разширен свободен отговор 18 – 25 задача)

Съдържателни области	Процент
Числа. Алгебра	35%
Фигури и тела. Измерване	35%
Елементи от вероятности и статистика	10%
Логически знания. Моделиране	20%
Познавателни равнища	Процент
Приложение	63%
Анализ, синтез, аргументация и оценка	37%

Измерваните елементи от съдържателните области са определени въз основа на учебното съдържание, включено в учебните програми за пети, шести и седми клас.

Познавателните области описват видовете мисловна дейност, които са необходими за решаване на задачите от теста. Проверката на познавателното равнище при националното

външно оценяване по математика се извършва в четири познавателни области: знание, разбиране и приложение, анализ и синтез, аргументация.

По-подробно описание на познавателните равнища е дадено по-долу.

ЗНАНИЕ. Възможностите за използване на математиката съществено зависят от конкретните знания, които имат учениците. Колкото повече познания имат те за конкретни математически факти, процедури, понятия, алгоритми, толкова по-голям е техният потенциал, за да използват математиката при решаване на задачи. В тази познавателна област се включват следните мисловни дейности:

Припомняне – припомняне на дефиниции, терминология, означения, свойства на числа или фигури, математически правила, твърдения.

Познаване – разпознаване на математически обекти, форми, фигури, числа, изрази. Разпознаване на еквивалентни математически обекти.

Пресмятане – използване на алгоритми.

Класифициране – класифициране (групиране) на математически обекти, форми, фигури, числа, изрази по определено свойство; вземане на решение за причисляване (или не) на обект към дадена група обекти.

РАЗБИРАНЕ И ПРИЛОЖЕНИЕ. В съвременния свят се цени възможността знанието да бъде използвано на практика. В математически контекст това означава да се използват с разбиране математическите знания за решаване на различни видове задачи. Има се предвид подбор на известни начини за представяне на математически обекти, използване на алгоритми и модели за решаване на стандартни задачи. В тази познавателна област се включват следните мисловни дейности:

Прилагане – алгебричните действия с рационални числа; използване на свойствата на алгебричните операции за рационално пресмятане.

Сравняване и разбиране – правене на изводи чрез съпоставяне на данни, методи или стратегии.

Представяне – представяне на даден математически обект по еквивалентен начин.

Моделиране – съставяне на модел (например уравнение, неравенство, чертеж, графика, диаграма) за решаване на стандартна задача.

Решаване на рутинни задачи – решаване на задачи по познат модел (алгоритъм).

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ. Тази област е свързана със способностите за логическо и систематично мислене. Тя включва и интуитивните разсъждения, които се използват за да се намери решение на приложни задачи. Тук се включват следните мисловни дейности:

Анализиране – изследване на дадена информация и избиране на математически факти, необходими да се реши определена задача; правене на валидни заключения от дадена информация.

Синтезиране – комбиниране на различни математически процедури за получаване на резултати и комбиниране на резултати за получаване на нови резултати.

АРГУМЕНТАЦИЯ. Тази област е свързана със способностите за логическо и систематично мислене. Включват се задачи, за решаването на които ученикът трябва да владее добре учебното съдържание и изучаваните математически методи. Задачите може да са чисто математически или свързани с моделиране на реални ситуации. И двата вида, обаче, са свързани с трансфер на знания и умения в нови ситуации. Тези задачи изискват аргументация или поради своя нов за учениците контекст, или поради това, че решението е многостъпково, или защото изискват комбиниране на знания от различни области на математиката.

Анализиране – изследване на дадена информация и избиране на математически факти, необходими за решаването на определена задача; определяне, описание и използване на връзки между променливи или обекти в математическа ситуация; правене на валидни заключения от дадена информация.

Обобщаване – разширяване на областта на валидност и приложимост на математически резултат чрез допълнителни доводи или по-общи и по-широко приложими разсъждения.

Синтезиране/обединяване – комбиниране на различни математически процедури за получаване на резултати и комбиниране на резултати за получаване на нови резултати. Правене на връзки между различни елементи на познанието и връзки между различни математически идеи.

Обясняване – чрез изследване на резултата като очакване и реалност, чрез позоваване на известни твърдения, математически резултати и свойства.

Решаване на нерутинни задачи – решаване на задачи от математиката или живота чрез алгебричен или геометричен модел. Прилагане на процедури в комплексни ситуации.

Нивата на сложност на задачите са описани в Таблица 5.

Таблица 5. Нива на сложност

Ниво на сложност	Описание на нивото	Препоръчителен бал за задача	Препоръчително време за решаване на задача
1	Задачите от първо ниво са задачи с едностъпкови алгоритми на решение. При тях се прилагат непосредствено определения на понятия, теореми, формули. Тества се отделен теоретичен факт.	2 точки, 3 точки	2 – 3 минути
2	Задачите от второ ниво на сложност са задачи с двустъпков алгоритъм на решение. Това са стандартни задачи. Тества се знание с друго знание или умение, приложени в типична (позната) ситуация или в комбинация с други знания или умения от една и	4 точки, 7 точки	5 – 10 минути

	съща или от две различни съдържателни области.		
3 - 4	Задачите от последното ниво на сложност са задачи с многостъпкови алгоритми на решение. Откриването на решението на задачата изисква аналитико–синтетични разсъждения в непозната ситуация. Решението се представя с логически свързани аргументи и правилно използвана математическа терминология	10 точки, 11 точки	15 – 20 минути

Разпределението на задачите в теста по учебно съдържание и познавателно равнище е представено в таблица 6.

Таблица 6. Примерно разпределение на задачите в изпитния тест

		Познавателни равнища					Брой задачи	Процент
		Знание	Разбиране	Приложение	Анализ и синтез	Аргументация	25	100
Съдържателни области	Числа. Алгебра	4	3	1			8	32%
	Фигури и тела. Измерване	4	3	1			8	32%
	Елементи от вероятности и статистика		1				1	4%
	Логически знания и моделиране		2	3	2	1	8	32%

Оценявани знания, умения и отношения (според ДОС за общообразователна подготовка за прогимназиален етап и учебните програми за V, VI и VII клас)

Оценяваните компетентности са свързани с измерваните елементи на учебното съдържание. Стандартите за оценяване са формулирани съобразно знанията, уменията и отношенията, които трябва да имат учениците в края на VII клас (прогимназиалния етап). Те интегрират очакваните резултати заложи в учебните програми по математика от V до VII клас:

Необходимите знания, които учениците трябва да придобият са:

- за числата, количествата, структурите и фигурите;
- за основните математически операции и представяния;
- за смисъла на математическите понятия и идеи;
- за разбиране на въпросите, на които математиката може да отговори.

Познавателните и практическите умения са:

- да прилагат основните математически принципи и алгоритми;
- да използват математическото съдържание в ежедневен контекст;
- да формулират и оценяват математически разсъждения;
- да използват точно математическия език при аргументация и доказване на тези;
- да използва подходящи математически инструменти и алгоритми.

Отношение към математиката е:

- като начин да се опознае и ориентира в света;
- като критерий да различава истинност и достоверност на процеси;
- като надеждно познание за откриване на причини и търсене на аргументи и преценяване на тяхната значимост.

Критериите за оценяване на математическите компетентности са:

1. Решаване на математически задачи:

- 1.1. Разбиране на основни математически понятия;
- 1.2. Описание и възпроизвеждане на стандартни математически алгоритми;
- 1.3. Прилагане на алгоритми и методи за решаване на математически задачи;
- 1.4. Определяне на достатъчност и необходимост на данни;
- 1.5. Извличане на характеристики и свойства на обекти и проследяване на тяхното изменение.

2. Математическа комуникация и аргументация:

- 2.1. Разпознаване и използване на синоними на математически понятия;
- 2.2. Изразяване на математически факти, аргументи, разсъждения по различен начин, в това число и на ежедневен език;
- 2.3. Съставяне на достоверен математически текст;
- 2.4. Прилагане на математически критерии за описание на информация;
- 2.5. Формулиране на хипотези и тези, както и доводи в тяхна защита;
- 2.6. Проследяване и използване на процедури за математическо обосноваване;
- 2.7. Преценяване на достоверност и реалност на междинни и крайни резултати.

3. Математическо моделиране:

- 3.1. Разбиране, разчитане и описание на готов модел или елементи от него;
- 3.2. Разбиране на ситуацията, която се моделира;
- 3.3. Преформулиране на проблема в математическа задача;
- 3.4. Съставяне на математическия модел според реалната задача;
- 3.5. Преобразуване на математически модел с математически методи и алгоритми;
- 3.6. Интерпретиране и обяснение на резултатите в контекста на реалния проблем;
- 3.7. Описване на методи за решаване на динамични модели.

4. Представяне и използване на математически обекти и ситуации:

- 4.1. Разбиране и обясняване на различни видове представяния;
- 4.2. Интерпретиране и разграничаване на различни видове представяния на математически обекти и ситуации;
- 4.3. Съпоставяне и използване на свойствата на различни представяния на един и същ обект;
- 4.4. Съставяне на математическа конструкция по описание;
- 4.5. Определяне на общност и на еквивалентност на изображения.

5. Използване на математически език и помощни материали:

- 5.1. Използване на математически символи, термини и формули;
- 5.2. Прилагане на формалните процедури за описание и решаване на задача;
- 5.3. Използване на различни инструменти и помощни материали (включително технологии);
- 5.4. Познаване на предимствата и ограниченията при използването на помощни материали.

Таблица 7: Списък на съдържателните области, включени за НВО

Видове задачи	Оценявани знания, умения и отношения на ученика
задачи с избираем отговор	Сравнява рационални числа и извършва действията събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване (степен с естествен степенен показател, степен с цял показател); закръглява рационални числа с определена точност; умее да представя числата в стандартен запис.
задачи с кратък свободен отговор	Пресмята числови изрази в множеството на рационалните числа. Извършва действията (събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване с цял степенен показател) с цели изрази, извършва тждествени преобразувания с тях и пресмята стойност на цял израз.
задачи с разширен	Решава линейни уравнения без параметър, уравнения, свеждащи се до линейни от вида $(ax+b)(cx+d)=0$ и модулни уравнения от вида $ ax+b =c$. Решава линейни неравенства с едно неизвестно без параметър.

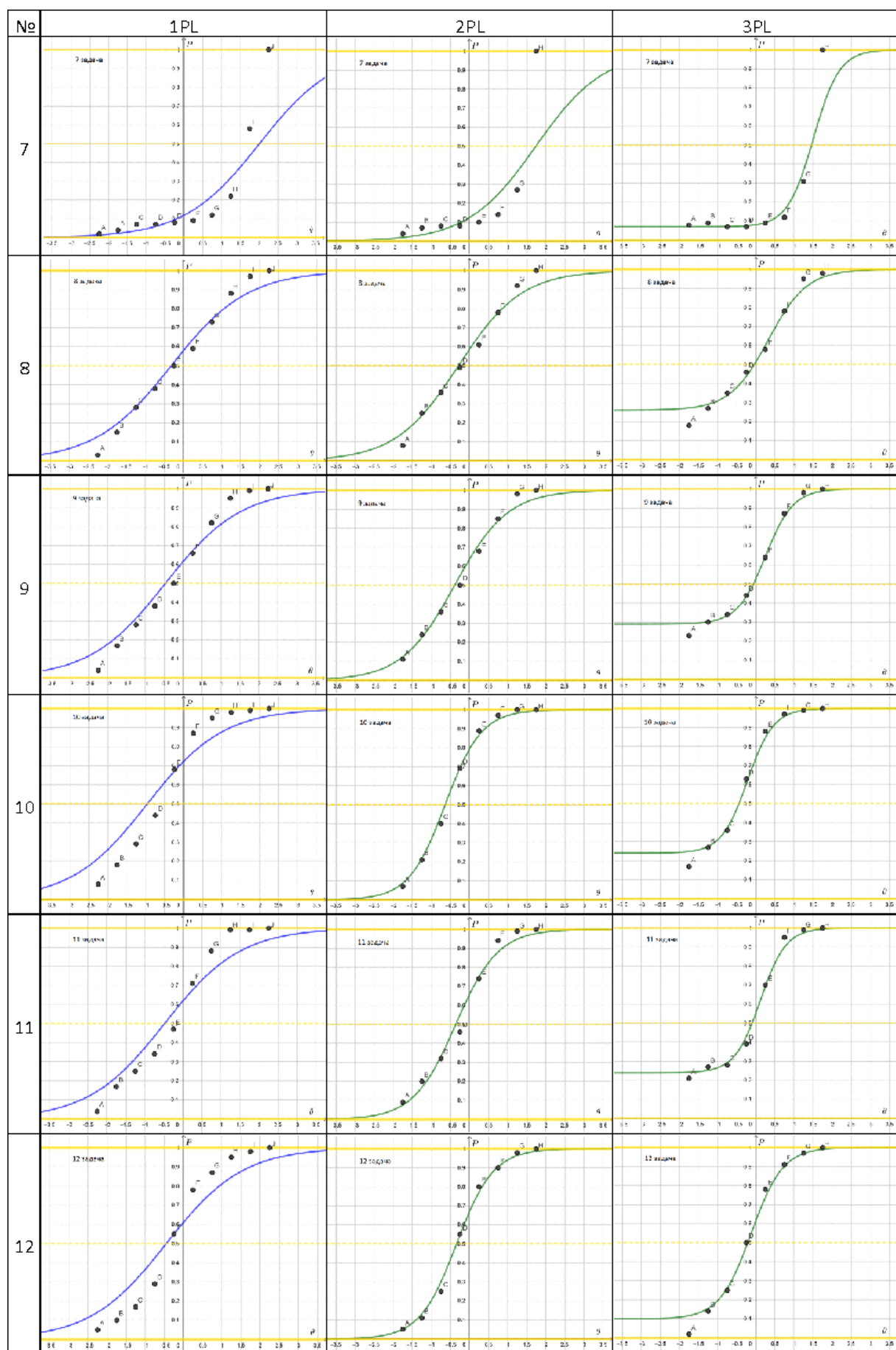
свободен отговор	Знае основните равнинни геометрични фигури: триъгълник, четириъгълник, правилен многоъгълник и окръжност, техните елементи, видове, техни свойства и признаци и умее да ги прилага.
	Познава права призма, правилна пирамида, прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, знае елементите и развивките им; познава сфера и кълбо и знае елементите им.
	Определя по вид и намира ъгли, получени при пресичането на прави в равнината.
	Прилага признаците за еднаквост на триъгълници.
	Прилага Питагоровата теорема.
	Построява геометрични обекти, описани в основните построителни задачи.
	Прилага формулите за периметър и лице на основни равнинни фигури.
	Прилага формулите за лице на повърхнина и обем на ръбести и валчести тела.
	Разбира връзките между кратни и производни на мерните единици и умее да преминава от една мерна единица в друга.
	Построява точка по дадени координати и определя координати на точка спрямо Декартова координатна система в равнината.
	Разбира на конкретно ниво смисъла на логическите съюзи „и“, „или“, „ако ... то ...“, отрицанието „не“ и на релациите „следва“ и „еквивалентност“.
	Преценява вярност и рационалност в конкретна ситуация и умее да обосновава изводи.
	Образува на конкретно ниво отрицание на съждение.
	Разбира смисъла на думите определение, аксиома, теорема, разграничава условие от заключение на теорема.
	Познава метода за доказване на твърдение чрез допускане на противното.
	Събира систематично, организира и описва данни и ги представя по различни начини.
	Разчита, интерпретира и оценява информация, представена с текст, с графики, с таблици или с диаграми.
	Умее да намира средноаритметично и да го използва за интерпретиране на данни.
	Умее да намира подмножество на дадено множество и сечение/обединение на множества.
	Използва множества от данни за отговаряне на въпроси и за решаване на задачи.

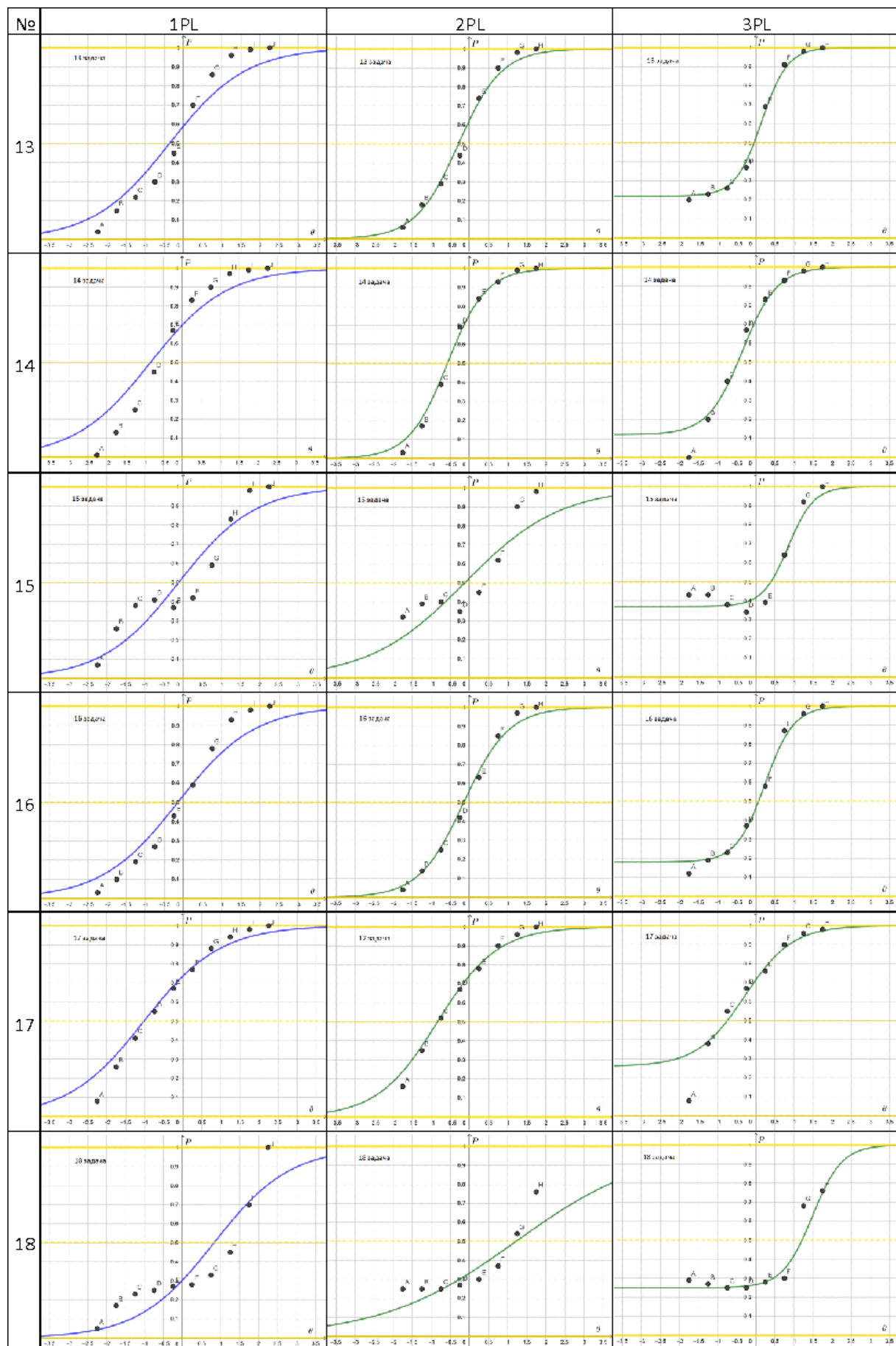
	Знае понятието „случайно събитие“ на най-просто ниво, може да пресмята вероятност на случайно събитие като отношение на възможности.
	Умее да построява кръгови диаграми и да интерпретира данни.
	Умее да прилага определението на класическа вероятност.
	Знае понятието „процент“ и умее да представя и намира определено количество по различни начини.
	Знае понятието „лихва“ и го прилага в задачи.
	Оценява и интерпретира съдържателно получен при моделиране резултат и предвижда в определени рамки очакван резултат.
	Моделира с числов или с цял алгебричен израз.
	Моделира с линейни уравнения или с уравнения, свеждащи се до линейни; моделира с линейни неравенства.
	Знае понятието „пропорция“, основното свойство на пропорциите и може да го прилага при решаване на задачи.
	Познава права и обратна пропорционалност и умее да ги прилага в практически задачи.

Приложение 2

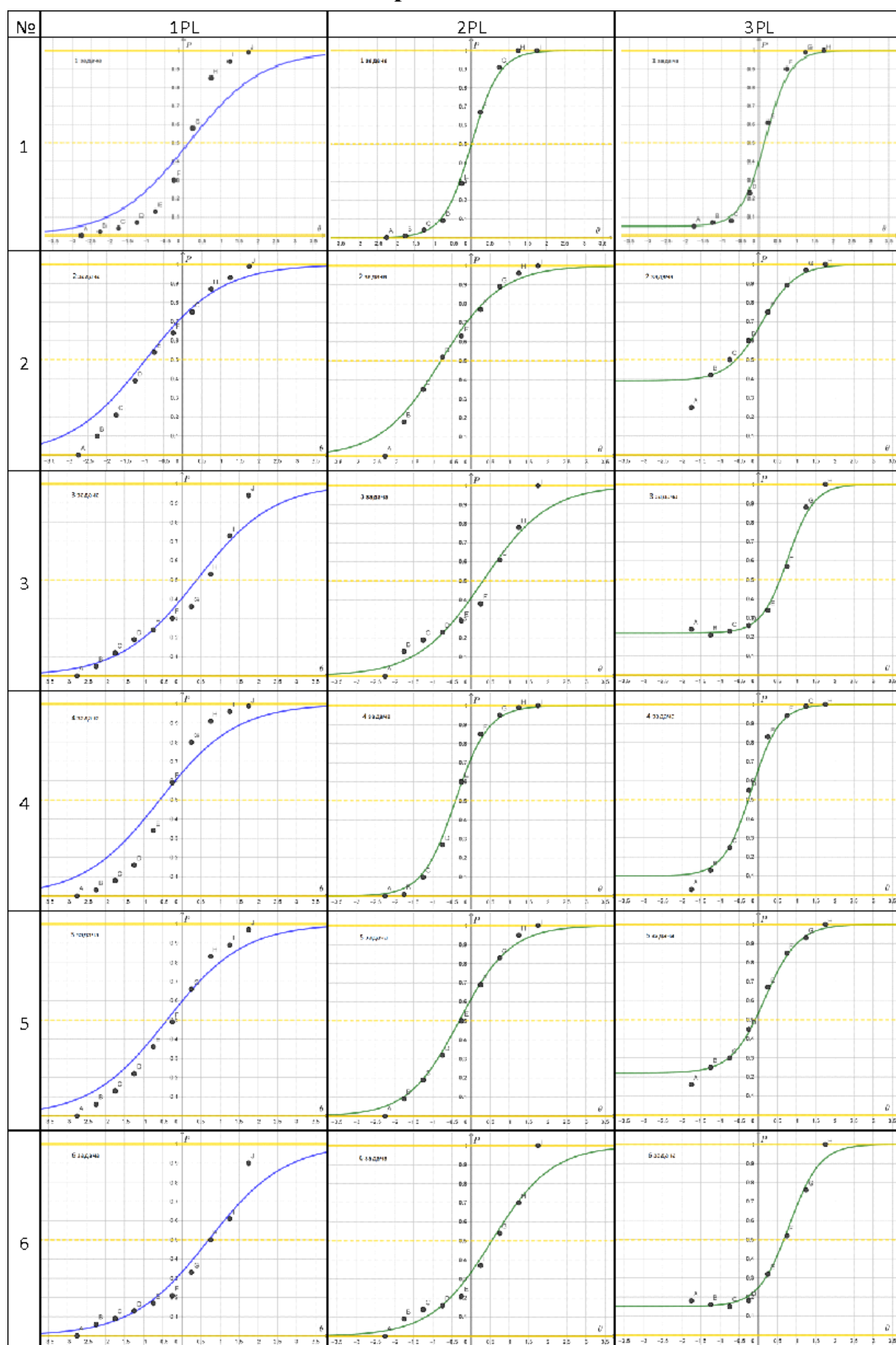
Квантили $\chi_q^2(k)$ на асиметричното χ^2 -разпределение на Пирсън

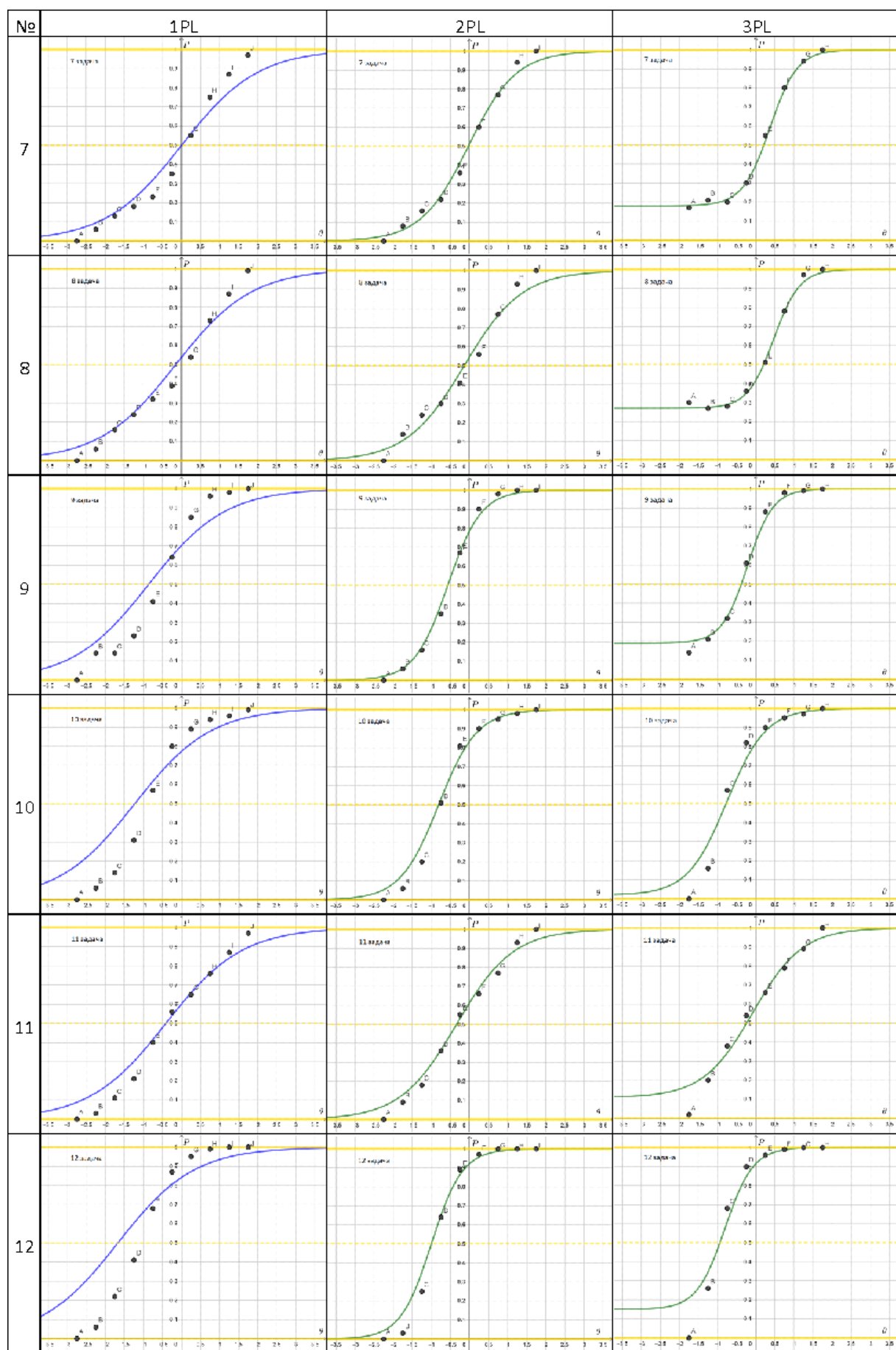
$k \backslash q$	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	2.7055406	3.8414553	5.0239026	6.6348913	7.8793998
2	4.6051761	5.9914764	7.3777791	9.210351	10.59653
3	6.2513945	7.8147247	9.348404	11.344882	12.838073
4	7.779434	9.4877285	11.143262	13.276699	14.860166
5	9.2363491	11.070483	12.832492	15.086317	16.749648
6	10.644637	12.591577	14.449355	16.811872	18.547513
7	12.017031	14.067127	16.012774	18.475324	20.277738
8	13.361562	15.507312	17.534545	20.090159	21.954861
9	14.683663	16.91896	19.022778	21.666048	23.589275
10	15.987175	18.307029	20.483201	23.209287	25.188055
11	17.275007	19.675153	21.920023	24.725022	26.756864
12	18.54934	21.026055	23.33666	26.216964	28.29966
13	19.811933	22.362027	24.735581	27.688184	29.819318
14	21.064141	23.684782	26.118935	29.141163	31.319425
15	22.307121	24.995797	27.488365	30.577951	32.801491
16	23.541821	26.296221	28.845325	31.999861	34.267053
17	24.769028	27.5871	30.190983	33.408717	35.718378
18	25.989418	28.869321	31.52641	34.805237	37.156386
19	27.203565	30.143505	32.852337	36.190775	38.582122
20	28.41197	31.41042	34.169581	37.566272	39.996856
21	29.615086	32.670558	35.478856	38.932232	41.400943
22	30.813285	33.92446	36.780678	40.289448	42.795664
23	32.00689	35.17246	38.075609	41.638334	44.181385
24	33.196235	36.415026	39.36406	42.979781	45.558363
25	34.381583	37.652489	40.646498	44.314014	46.927966
26	35.563164	38.88513	41.923138	45.641636	48.289777
27	36.741228	40.113266	43.194521	46.962837	49.645035
28	37.915907	41.337152	44.46079	48.278166	50.993559
29	39.087475	42.556948	45.722279	49.587829	52.335495
30	40.256017	43.772954	46.979218	50.892181	53.671868
35	46.058772	49.801832	53.203308	57.341988	60.274592
40	51.805044	55.758487	59.341679	63.690771	66.766047
45	57.505291	61.656219	65.410131	69.956901	73.166036
50	63.167113	67.504805	71.420194	76.153802	79.489839
55	68.796207	73.311479	77.380436	82.291977	85.749058
60	74.396999	79.081954	83.297706	88.37943	91.951806
65	79.97299	84.82064	89.177163	94.421996	98.104916
70	85.527036	90.531262	95.023149	100.42505	104.21477
75	91.061453	96.216663	100.83929	106.39285	110.28543
80	96.578196	101.87947	106.62854	112.32879	116.32093
90	107.56501	113.14523	118.13591	124.1162	128.29868
100	118.498	124.3421	129.56125	135.80689	140.16971

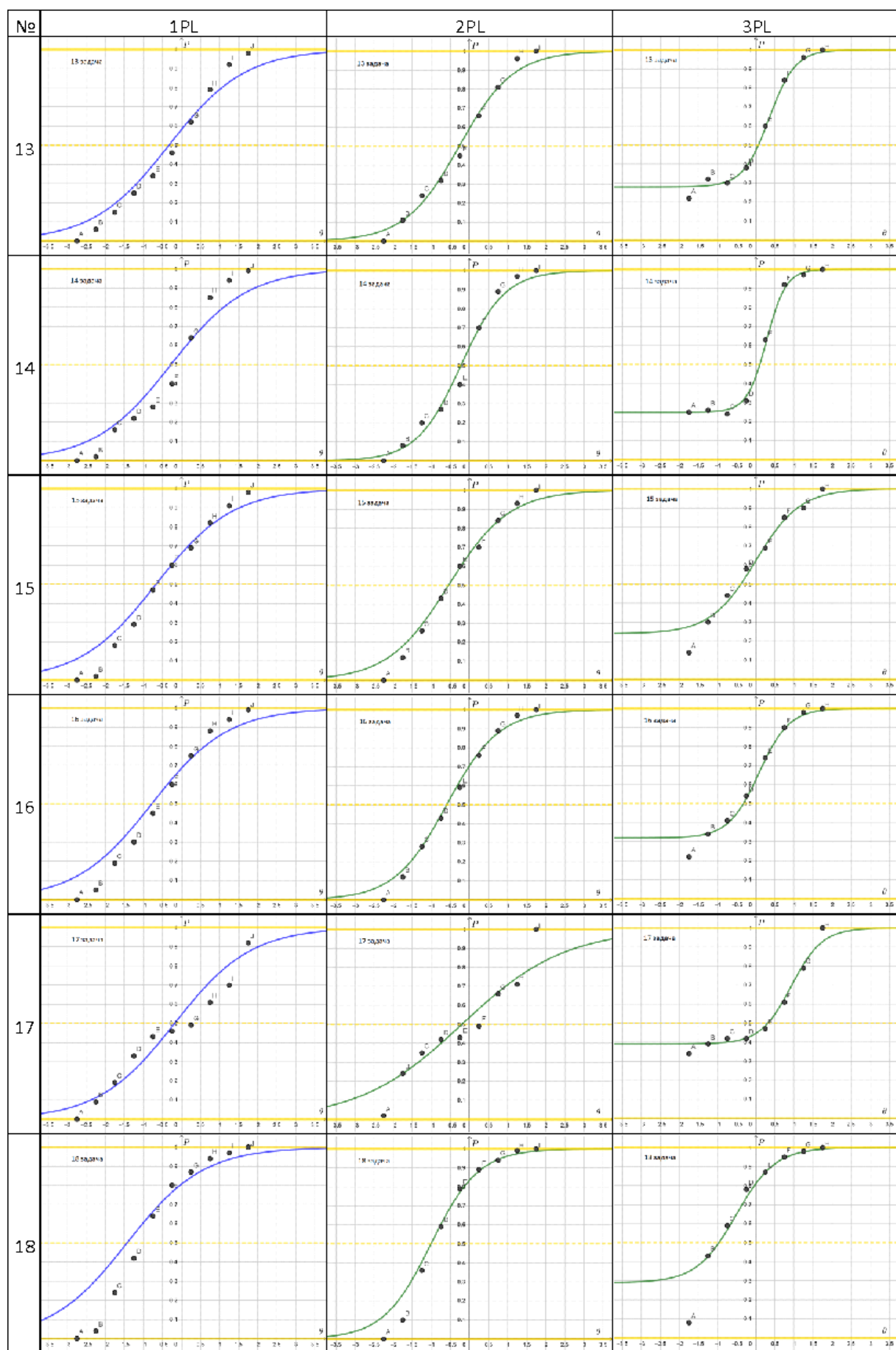




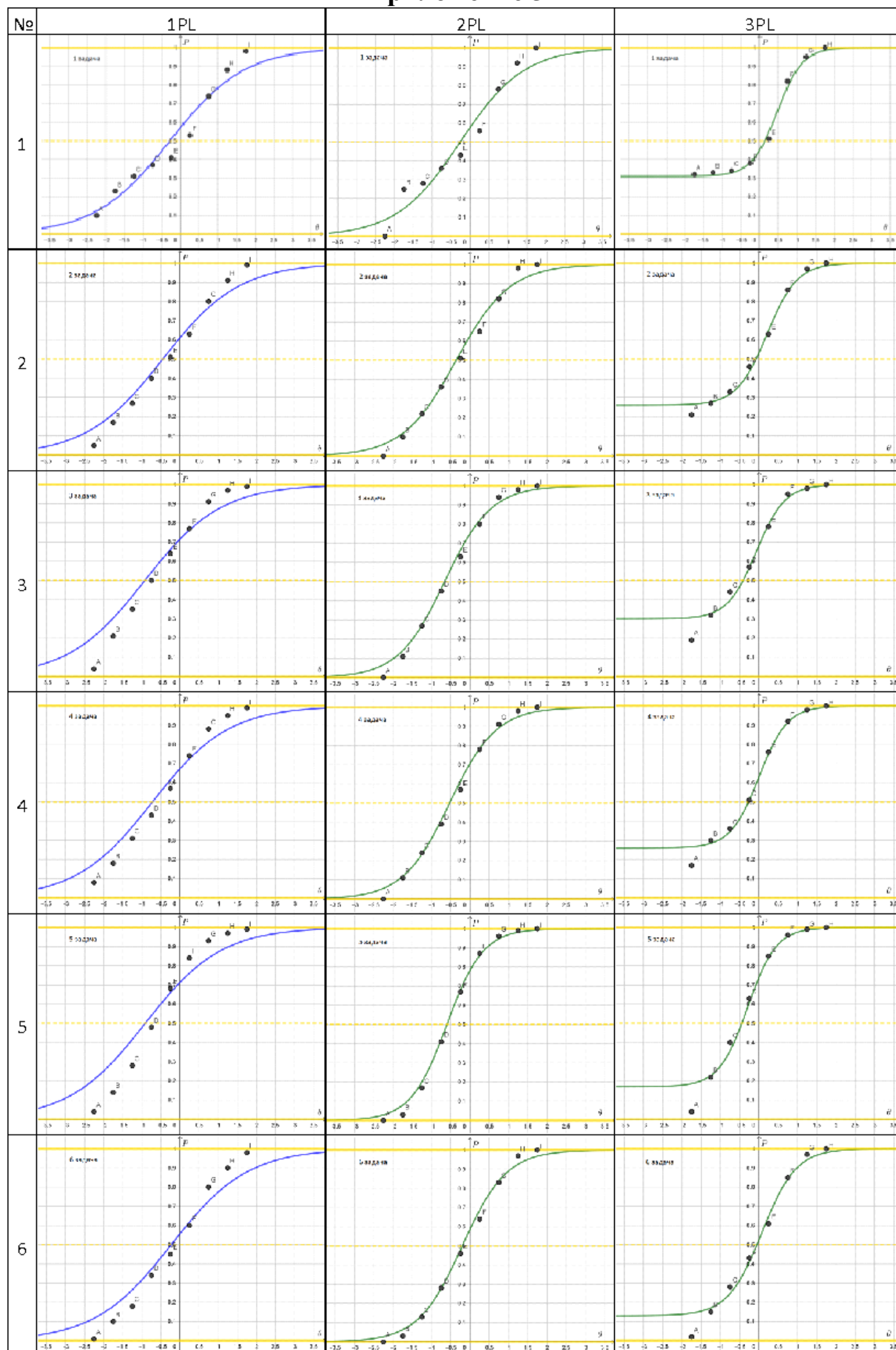
Приложение 4

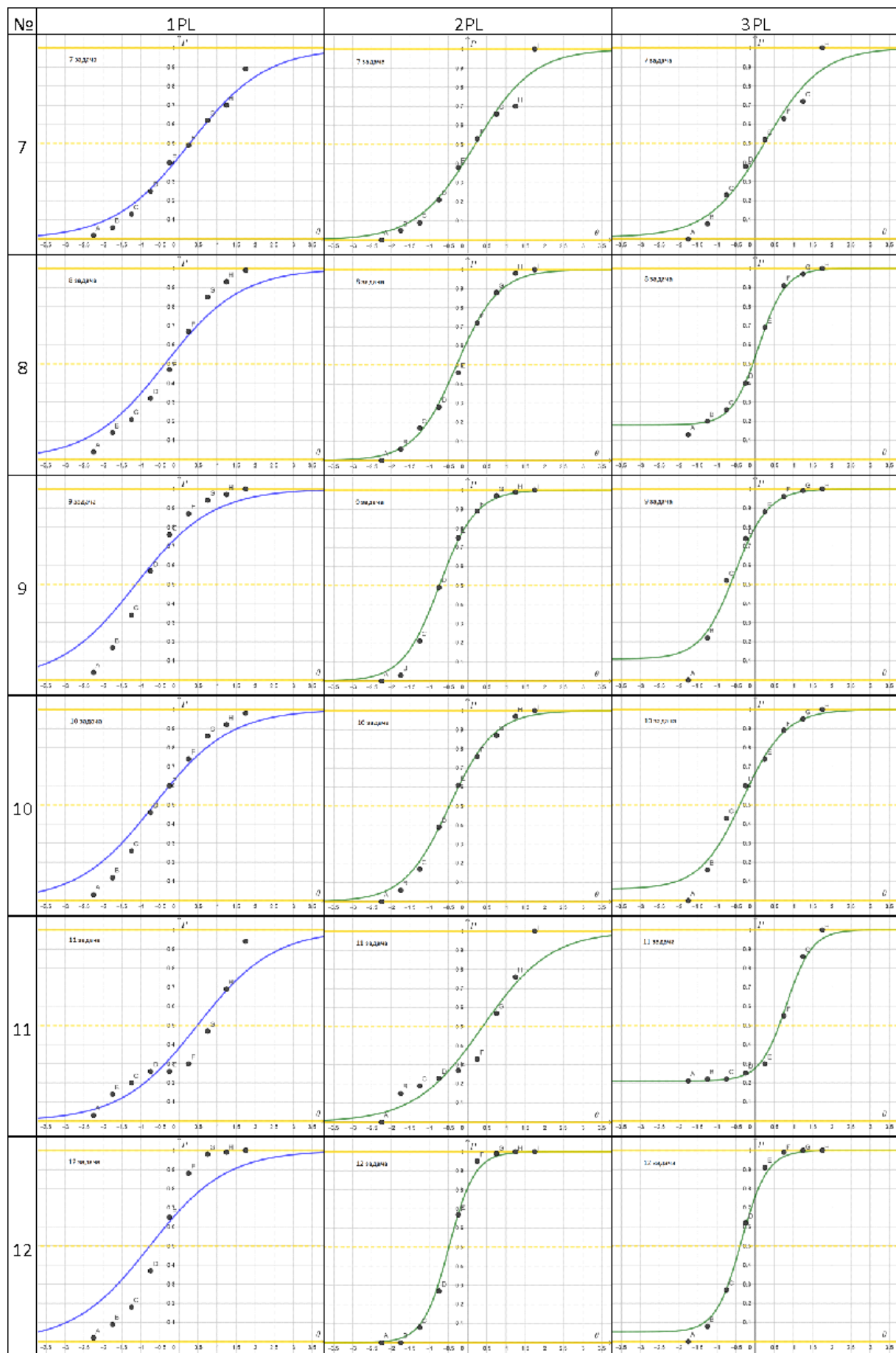


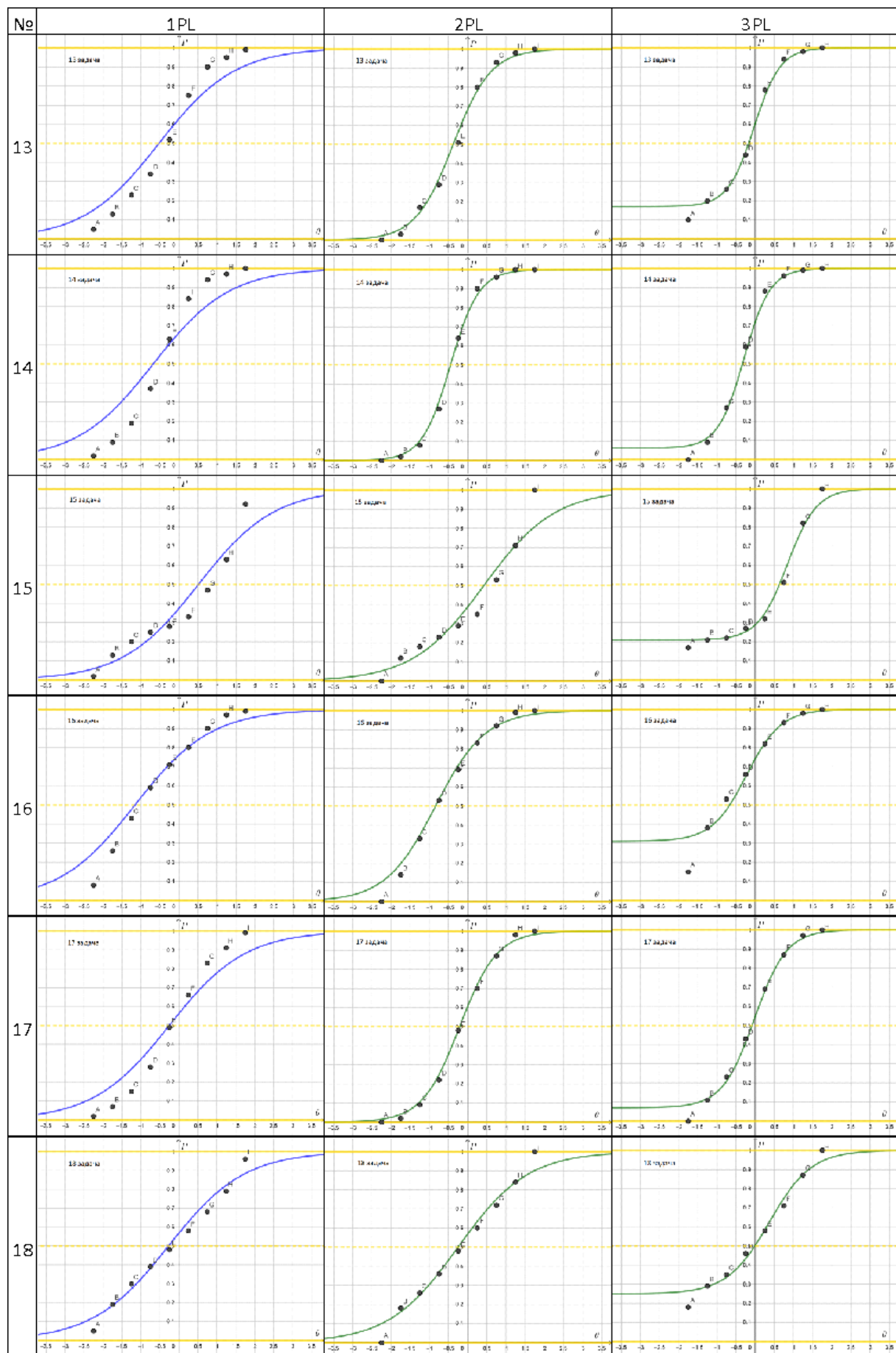




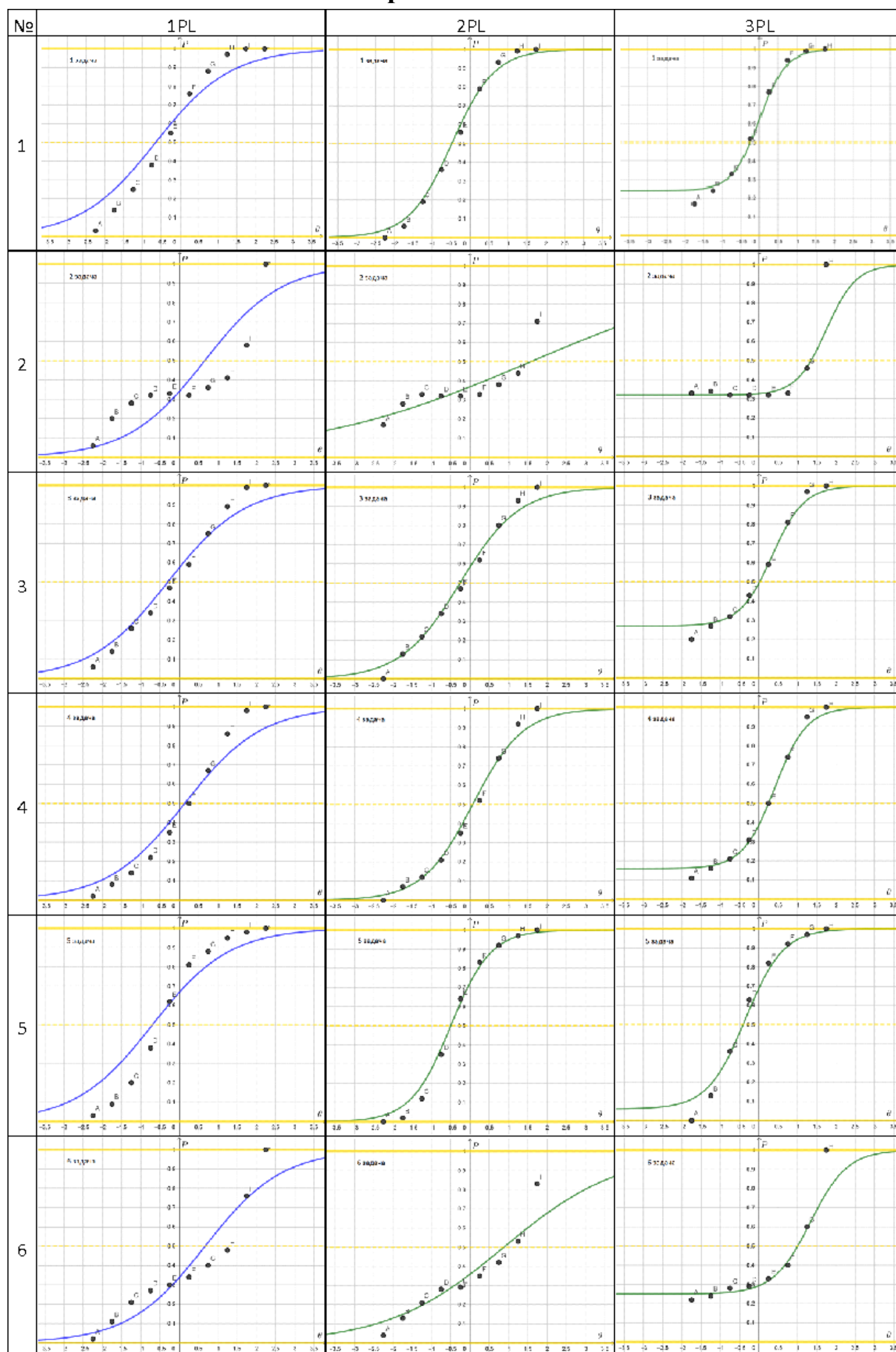
Приложение 5

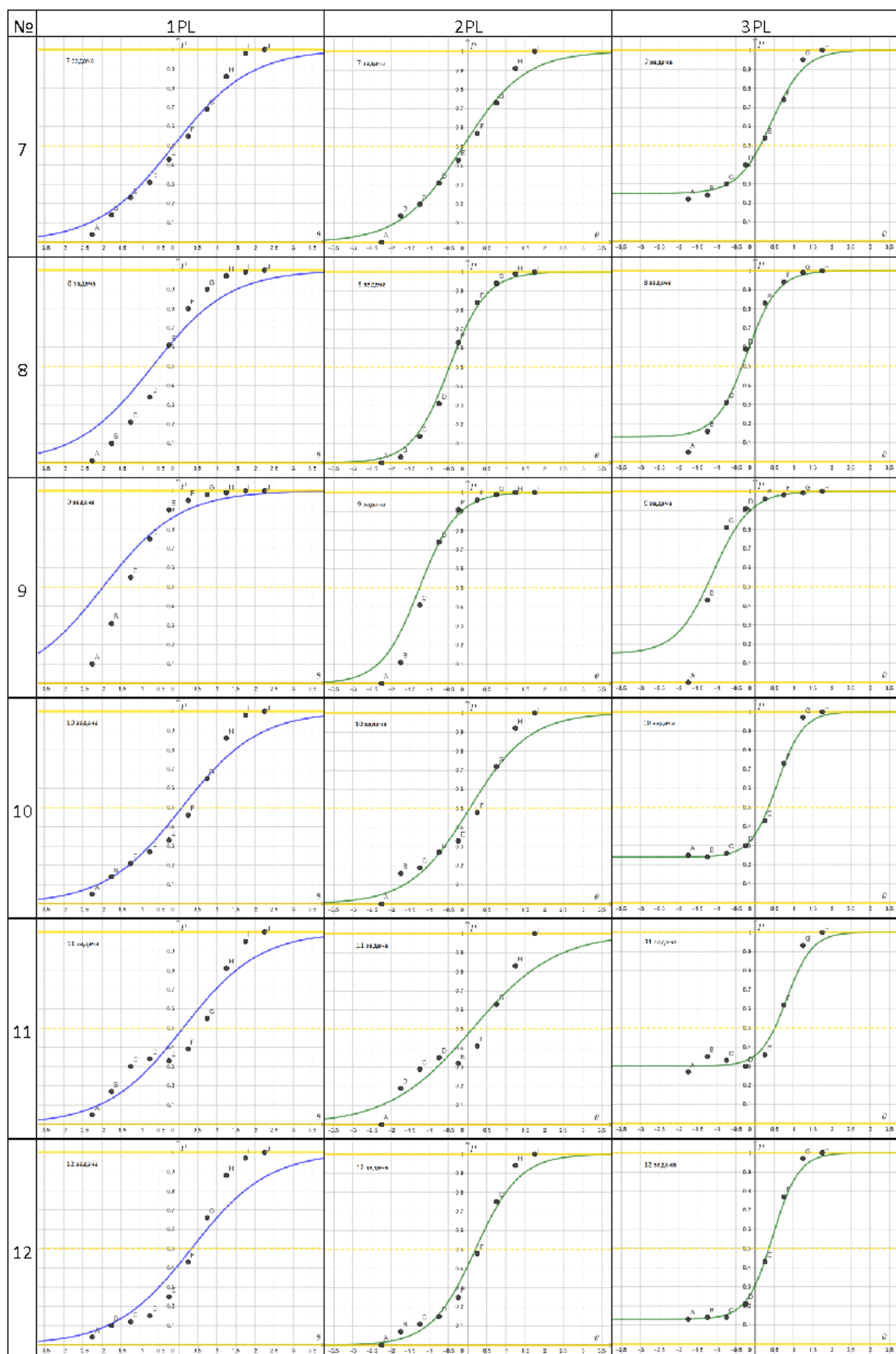


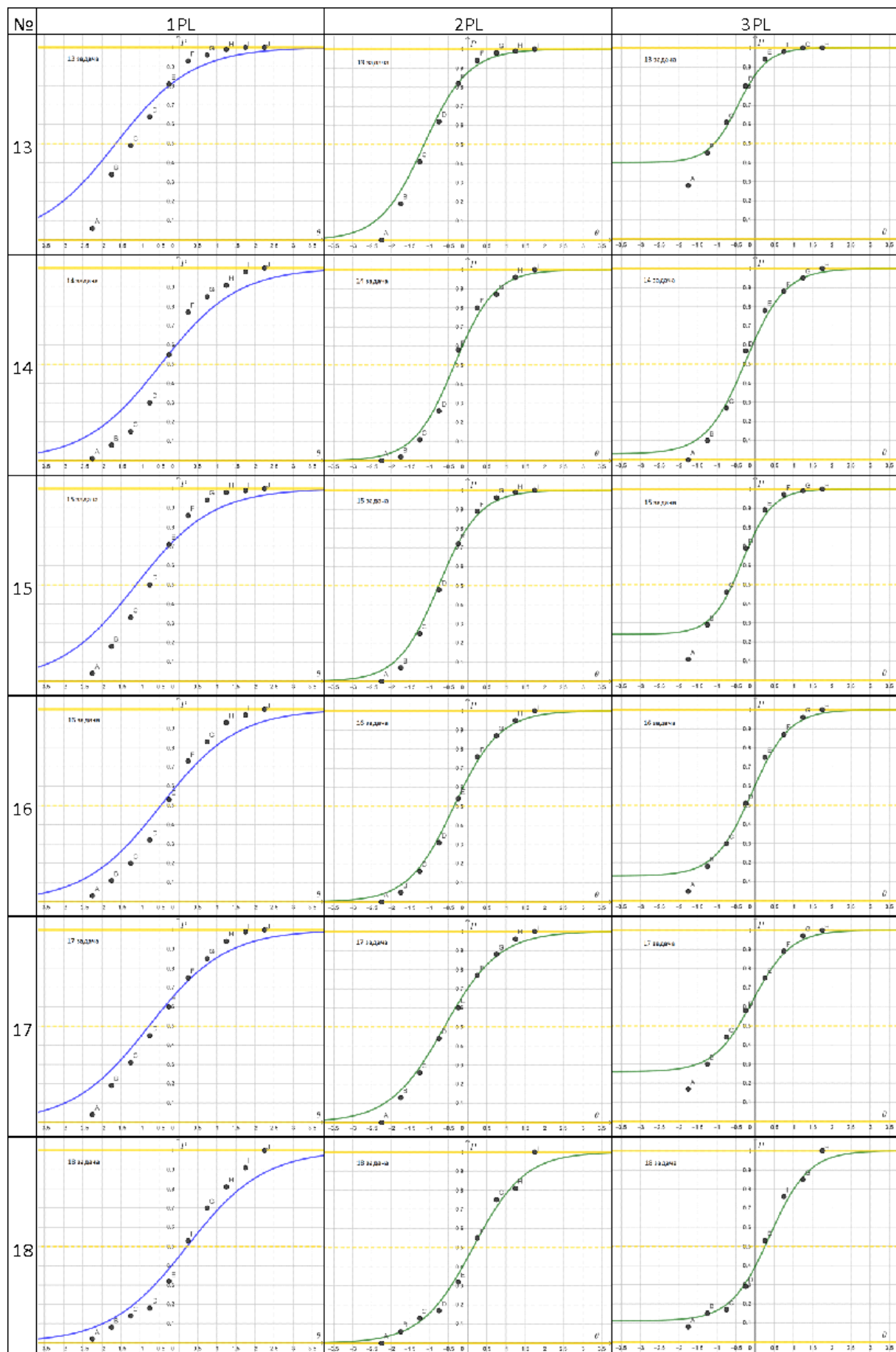




Приложение 6







Приложение 7

ПРОБЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА – VII клас

ПЪРВА ЧАСТ (75 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори.

1. Стойността на израза $2024 - 2000 \cdot (-0,5)$ е:
А) -12 Б) 12 В) 1024 Г) 3024
2. Решенията на неравенството $6 - 2(x - 4) \geq 0$ са представени с интервала:
А) $(-\infty; 7]$ Б) $(-\infty; 1]$ В) $[4; +\infty)$ Г) $[7; +\infty)$
3. Сборът от решенията на уравнението $3 - |x - 2| = |x - 2| - 3$ е:
А) 0 Б) 2 В) 4 Г) 6
4. На географска карта на 6 cm съответстват 150 km действително разстояние. Ако разстоянието между два града на картата е 8 cm, то действителното разстояние между тях в километри е:
А) 200 km Б) 220 km В) 240 km Г) 250 km
5. В един клас има 26 ученици, от които 18 са момчета. Каква е вероятността в час по математика да бъде изпитано едно момиче?
А) $\frac{4}{9}$ Б) $\frac{4}{13}$ В) $\frac{9}{13}$ Г) $\frac{13}{4}$
6. Дадени са числата $1, 2, 3, 5$ и 9 . Сборът на простите числа измежду тях е:
А) 8 Б) 10 В) 11 Г) 18
7. Изразът $(a - b)^2 - a + b$ е тъждествено равен на:
А) $(b - a)(b - a - 1)$
Б) $(b - a)(a - b - 1)$
В) $(a - b)(a - b + 1)$
Г) $(a - b)(a - b - 1)$
8. Цената на една стока била 200 лв. За да увеличи интереса към нея търговецът я намалил с 10% , но след седмица я увеличил с 10% . Така първоначалната цена:
А) не се е променила
Б) се намалила с 1 лв.
В) се намалила с 2 лв.
Г) се увеличила с 10 лв.

9. Ани обича да кара велосипед по велоалеята в парка. Един ден тя изминала 6 км с постоянна скорост 18 km/h. За колко време е изминала това разстояние?

- A) 20 min Б) 24 min В) 30 min Г) 3 h

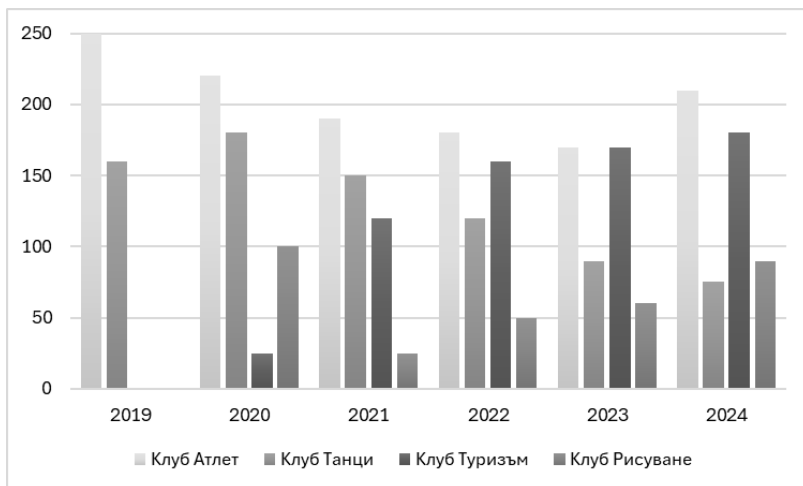
10. През 2019 година в училище са създадени два клуба „Атлет“ и „Танци“. През следващата година са се увеличили с още два – „Туризм“ и „Рисуване“. На диаграмата е изобразен броя на членовете във всеки клуб за годините от 2019 до 2024. Определете годината, в която клуб „Туризм“ за пръв път е имал повече членове от клуб „Танци“.

A) 2021

Б) 2022

В) 2023

Г) 2024



11. Мяката на ъгъл, който е $\frac{7}{2}$ от своя съседен, е равна на:

A) 40°

Б) 140°

В) 120°

Г) 150°

12. Успоредните прави a и b са пресечени от правата c .

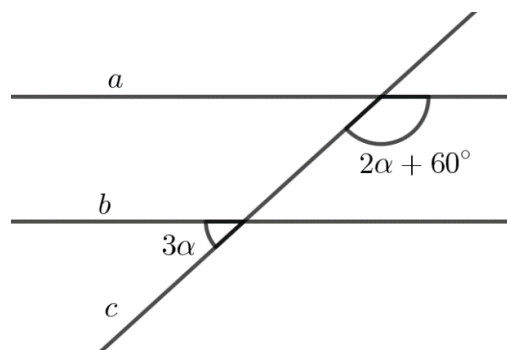
По данните от чертежа мяката на α е:

A) 12°

Б) 15°

В) 20°

Г) 24°

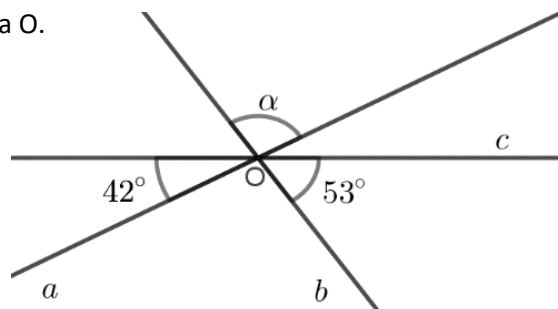


13. Правите a , b и c на чертежа се пресичат в точката О.

По данните от чертежа мяката на ъгъл α е:

A) 100°

Б) 95°



в) 90°

г) 85°

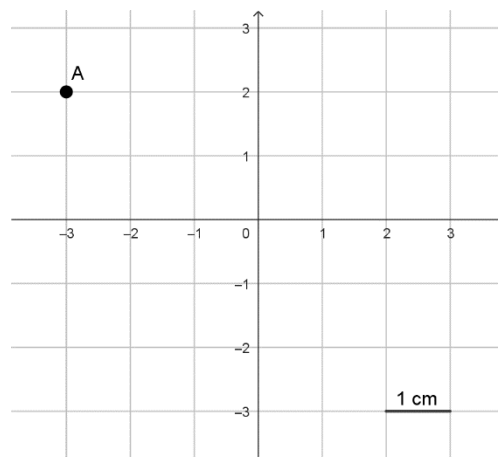
14. На чертежа е дадена точка А в правоъгълна координатна система с единична отсечка 1 cm. Ако точките В и С са симетричните на А относно координатните оси, то лицето на $\triangle ABC$ в cm^2 е:

А) 12

Б) 18

В) 24

Г) 36



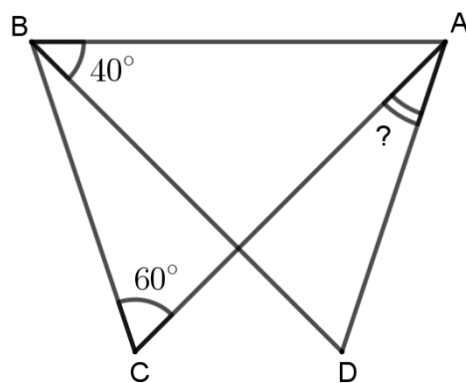
15. На чертежа $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, $\angle ACB = 60^\circ$ и $\angle ABD = 40^\circ$. Мярката на $\angle CAD$ е:

А) 20°

Б) 25°

В) 30°

Г) 40°



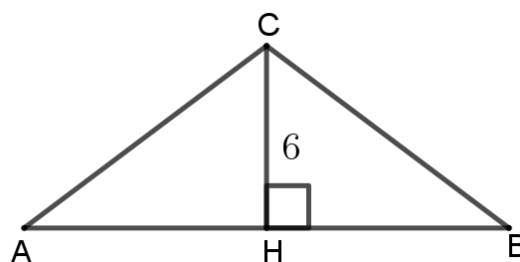
16. На чертежа $\triangle ABC$ е равнобедрен ($AC = BC$), CH е височина, $CH = 6$ cm и $AH:CH = 4:3$. Да се намери периметъра на $\triangle ABC$.

А) 18 cm

Б) 32 cm

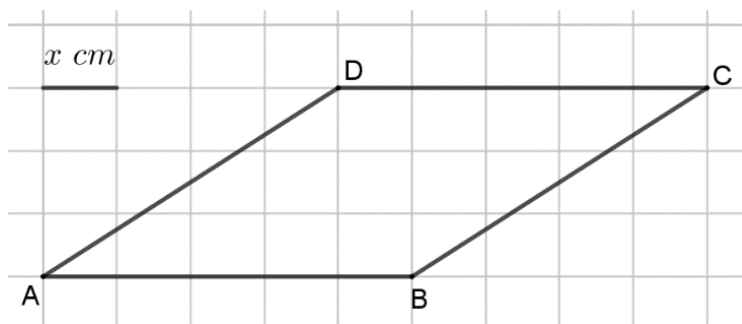
В) 36 cm

Г) 72 cm



17. В квадратна мрежа с единична отсечка $x\text{ cm}$ е начертан ромб $ABCD$. Ако обиколката на ромба е 40 cm , то лицето му е:

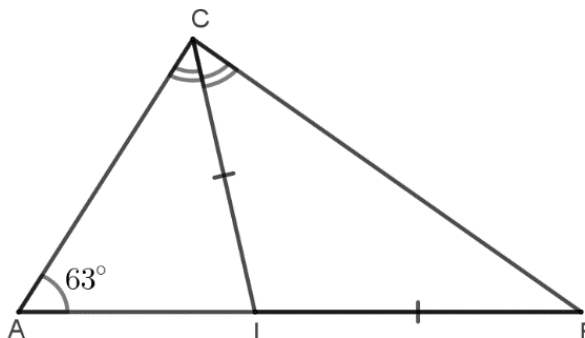
- А) 40 cm^2
- Б) 50 cm^2
- В) 60 cm^2
- Г) 80 cm^2



18. На чертежа CL е ъглополовяща в $\triangle ABC$, $CL = LB$ и $\angle CAB = 63^\circ$.

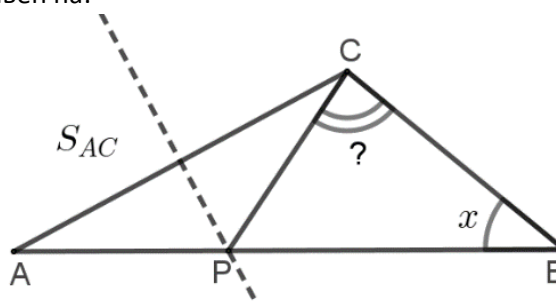
Мярката на $\angle ABC$ е:

- А) 37°
- Б) 39°
- В) 43°
- Г) 47°



19. На чертежа симетралата на страната AC на триъгълника $\triangle ABC$ пресича страната AB в точка P . Ако $\angle ACB = 100^\circ$ и $\angle ABC = x$, то $\angle PCB$ е равен на:

- А) $20^\circ + x$
- Б) $40^\circ + x$
- В) $30^\circ + x$
- Г) $80^\circ - x$



20. Метално кълбо с радиус 3 cm е претопено и е излят конус с височина 3 cm . Радиусът на основата на този конус е:

- А) 3 cm
- Б) 4 cm
- В) 6 cm
- Г) 8 cm

ПРОБЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА – VII клас

ВТОРА ЧАСТ (90 минути)

На задачите от 21. до 23. напишете пълните решения с необходимите обосновки и чертежи.

21. Даден е изразът $A = (2x - 3)^2 - 2(1 - x)(1 - 2x)$.

А) Да се представи A като многочлен в нормален вид;

Б) Да се реши неравенството $A > 2 - 3(2x - 1)$;

В) Да се реши уравнението $|A| + 2|6x - 7| = 33$.

22. Алекс налял 150 ml сок в чаша с вместимост 200 ml. Той обича да пие сока си охладен и извадил от хладилника кубчета с лед, които били с размери 2 cm x 2 cm x 2 cm. Той искал да сложи възможно най-много кубчета в чашата със сока, така че тя да не прелее. След като помислил малко, успял да прецени колко от кубчетата му трябват и ги пуснал в чашата.

А) Колко ледени кубчета сложил Алекс в чашата? ($1000 \text{ ml} = 1 \text{ dm}^3$)

Б) Малко след това, негов приятел му се обадил по телефона и двамата се заприказвали. Като свършили да говорят ледът в чашата се бил разтопил напълно. Ако е известно, че ледът при разтопяването си увеличава обема с 8%, проверете дали чашата е преляла.

23. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, на който $\sphericalangle ACB$ е с 20° по-голям от съседния му. Върху страните BC и AB са избрани съответно точките L и P , така че AL и LP са ъглополовящи на ъглите $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ALB$.

А) Да се намери $\sphericalangle ACB$;

Б) Да се докаже, че $\triangle ALC$ и $\triangle ALP$ са еднакви;

В) Да се намери ъгъла между правите AL и CP .

Име и фамилия

Училище гр./с.

Бланка за отговори на задачи от №1. до №20. Първа част (задачи с избираем отговор)

№	Отг.	Отг.	Отг.	Отг.	Брой точки
1.	А	Б	В	Г	
2.	А	Б	В	Г	
3.	А	Б	В	Г	
4.	А	Б	В	Г	
5.	А	Б	В	Г	
6.	А	Б	В	Г	
7.	А	Б	В	Г	
8.	А	Б	В	Г	
9.	А	Б	В	Г	
10.	А	Б	В	Г	
11.	А	Б	В	Г	
12.	А	Б	В	Г	
13.	А	Б	В	Г	
14.	А	Б	В	Г	
15.	А	Б	В	Г	
16.	А	Б	В	Г	
17.	А	Б	В	Г	
18.	А	Б	В	Г	
19.	А	Б	В	Г	
20.	А	Б	В	Г	

Брой точки от първа част: _____

Точки на задачите от втора част								
Задача	21.			22.		23.		
	А)	Б)	В)	А)	Б)	А)	Б)	В)
Максимални	5	2	5	6	5	2	6	4
Получени точки								

Общ брой точки (I и II част): _____

Бланка с верните отговори на задачи от №1. до №20.

№	Отг.	Отг.	Отг.	Отг.	Брой точки
1.	А	Б	В	Г	3
2.	А	Б	В	Г	2
3.	А	Б	В	Г	3
4.	А	Б	В	Г	3
5.	А	Б	В	Г	2
6.	А	Б	В	Г	4
7.	А	Б	В	Г	4
8.	А	Б	В	Г	4
9.	А	Б	В	Г	4
10.	А	Б	В	Г	3
11.	А	Б	В	Г	3
12.	А	Б	В	Г	3
13.	А	Б	В	Г	2
14.	А	Б	В	Г	4
15.	А	Б	В	Г	3
16.	А	Б	В	Г	4
17.	А	Б	В	Г	3
18.	А	Б	В	Г	3
19.	А	Б	В	Г	4
20.	А	Б	В	Г	4

Решения на задачите от втората част с оценяване по традиционния начин

21. (общо 12 т.)

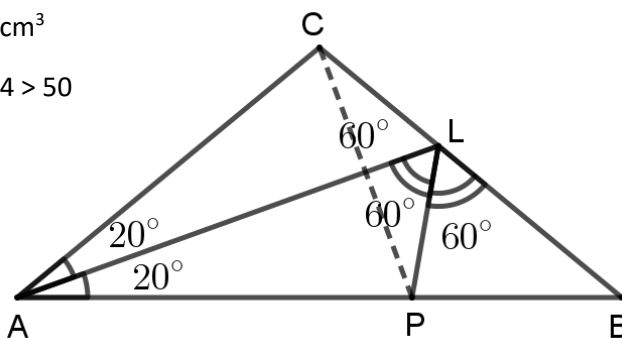
- А) 1т. за $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$
 1т. за $(1 - x)(1 - 2x) = 1 - x - 2x + 2x^2$
 1т. за $-2(1 - x)(1 - 2x) = -2 + 6x - 4x^2$
 2т. за $A = 7 - 6x$.
- Б) 2т. за извода, че всяко x е решение на неравенството
- В) 2т. за получено $|6x - 7| = 11$
 1т. за един верен отговор $x_1 = 3$ или $x_2 = -\frac{2}{3}$
 2т. за втория верен отговор.

22. (общо 11 т.)

- А) 2т. за изравняване на мерните единици $50 \text{ ml} = 50 \text{ cm}^3$
 2т. за поставяне на условие да не прелее чашата $8. x \leq 50$, като x – броя на кубчетата
 2т. за извода, че трябва **6 броя** кубчета
- Б) 3т. за увеличения обем на кубчетата $= 51,84 \text{ cm}^3$
 2т. за извода, че чашата ще прелее, т. е. $51,84 > 50$

23. (общо 12 т.)

- А) 2т. за намерен ъгъл $\angle ACB = 100^\circ$
- Б) 2т. за чертеж с вярно означени точки L и P
 2т. за доказано едно от равенствата за еднаквост на триъгълници
 2т. за доказани трите равенства за еднаквост на триъгълници
- В) 2т. за частичен напредък (например доказано, че някой от триъгълниците APC или CPL са равнобедрени)
 2т. за извода, че AL е ъглополовяща $\Rightarrow$ височина (или друг верен извод) $\Rightarrow AL \perp CP$.



Приложение 8

Име и фамилия _____

Училище С.У. „П.К. Яворов“ гр./е. Пловдив

Бланка за отговори на задачи от №1. до №20. Първа част (задачи с избираем отговор)

№	Отг.	Отг.	Отг.	Отг.	Брой точки
1.	A	B	B	Г	3
2.	A	B	B	Г	2
3.	A	B	B	Г	3
4.	A	B	B	Г	3
5.	A	B	B	Г	3
6.	A	B	B	Г	4
7.	A	B	B	Г	4
8.	A	B	B	Г	4
9.	A	B	B	Г	4
10.	A	B	B	Г	2
11.	A	B	B	Г	4
12.	A	B	B	Г	3
13.	A	B	B	Г	2
14.	A	B	B	Г	3
15.	A	B	B	Г	3
16.	A	B	B	Г	4
17.	A	B	B	Г	3
18.	A	B	B	Г	3
19.	A	B	B	Г	4
20.	A	B	B	Г	4

Брой точки от първа част: 65

Точки на задачите от втора част								
Задача	21.			22.		23.		
	A)	Б)	В)	A)	Б)	A)	Б)	В)
Максимални точки	5	2	5	6	5	2	6	4
Получени точки	5	2	5	6	5	2	6	4

Общ брой точки (I и II част): 65 + 35 = 100

задача 21.

$$A = (2x-3)^2 - 2(1-x)/(1-2x)$$

$$1) A = (2x-3)^2 - 2(1-x)/(1-2x)$$

$$A = 4x^2 - 12x + 9 - 2(1-2x+x+2x^2) =$$

$$= 4x^2 - 12x + 9 - 2 + 4x + 2x - 4x^2 =$$

$$= -6x + 7$$

$$\Rightarrow A = -6x + 7$$

$$Б) A > 2 - 3(2x-1)$$

$$A > 2 - 6x + 3$$

$$-6x + 7 > 2 - 6x + 3$$

$$7 > 2 + 3$$

$$7 > 5$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$$

$\Rightarrow \forall$ число x принадлежит



$$В) |A| + 2|6x-7| = 33$$

$$|-6x+7| + 2|6x-7| = 33$$

$$|6x-7| = |6x-7|$$

$$\Rightarrow |6x-7| + 2|6x-7| = 33$$

$$3|6x-7| = 33$$

$$|6x-7| = 11$$

$$\Rightarrow 6x-7 = 11$$

$$6x = 18$$

$$\Rightarrow x_1 = 3$$

$$\text{или } 6x-7 = -11$$

$$6x = -4$$

$$x = -\frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$$

зада 22.

A) $V_{\text{на едно кубче}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^3 = 0,008 \text{ dm}^3 = 8 \text{ ml}$

$$\Rightarrow 150 + 8x \leq 200$$

$$8x \leq 50$$

$$x \leq \frac{50}{8} = 6\frac{1}{4} \Rightarrow x = 6 \text{ кубчета} \text{ по максимум се подбрат в чашата}$$

Б) $V_{\text{на едно кубче}} = 8 \text{ ml}$

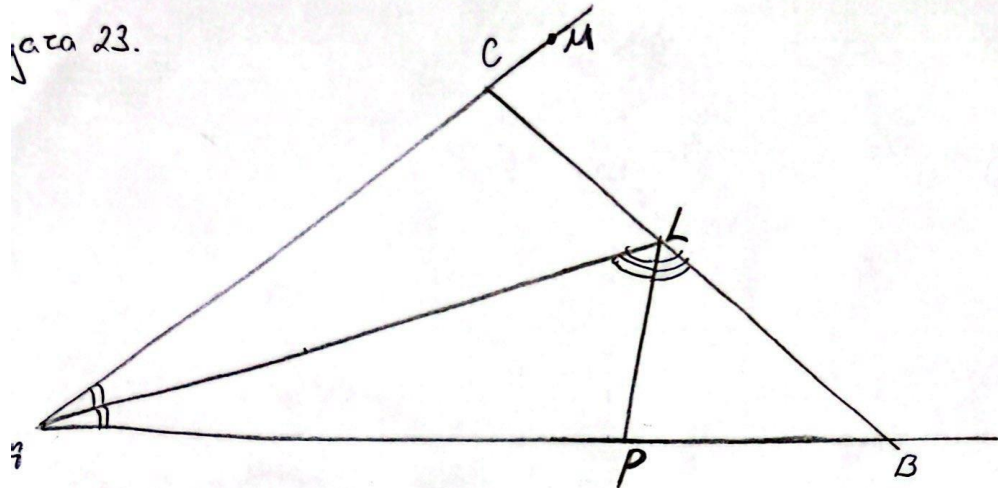
$$\Rightarrow V_{\text{на всички кубчета}} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ ml}$$

$$V_{\text{на кубчетата след като са се разтопили}} = 48 + 8\% \cdot 48 = 108\% \cdot 48 = \\ = \frac{108}{100} \cdot 48 = 51\frac{21}{25} \text{ ml}$$

$$\text{Тоа като } 150 + 51\frac{21}{25} = 201\frac{21}{25} \text{ ml} > 200 \text{ ml}$$

следователно чашата ще прелее

Задача 23.



A) $\angle ACB = \angle BCM + 20^\circ$

$\Rightarrow \angle ABC + \angle BCM = \angle BCM + 20^\circ + \angle BCM = 180^\circ$

$\Rightarrow 2 \cdot \angle BCM = 160^\circ$

$\Rightarrow \angle BCM = 80^\circ$

$\Rightarrow \angle ACB = 100^\circ$

B) $\angle C = 100^\circ$

$\Rightarrow \angle A = 40^\circ = \angle B$

$\Rightarrow \angle LAP = 20^\circ$

$\Rightarrow \angle ALB = 120^\circ$

$\Rightarrow \angle ALP = \angle PLB = 60^\circ \Rightarrow \angle ALC = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle APL = 100^\circ$

Знаем $\triangle APL$ и $\triangle ALC$:

1) AL - обща

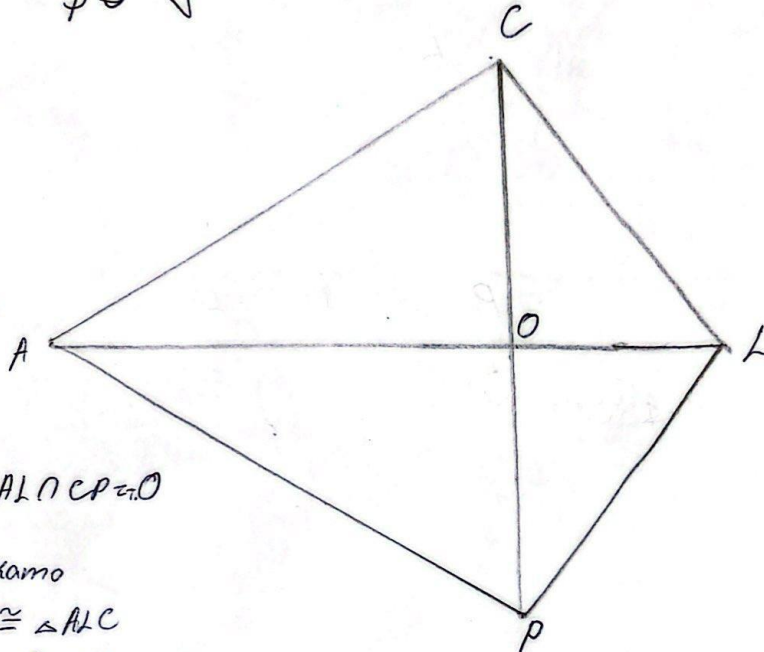
2) $\angle ALP = \angle ALC$

3) $\angle PAL = \angle LAC$

$\Rightarrow \triangle APL \cong \triangle ALC$ по II признак

3)

Нека разгледаме четириъгълника $ACLP$



Нека $AL \cap CP = O$

Тогава

$$\triangle ALP \cong \triangle ALC$$

$$\Rightarrow AP = AC$$

$$\angle LAC = \angle LAP$$

$$\angle PLA = \angle CLA$$

$$AP = AC$$

AL е обща

$$PL = CL$$

$\Rightarrow$ ъгълът между CP и AL е прав

$$\Rightarrow \angle AOP = 90^\circ$$