



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ

„СВЕТИ КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Факултет по Математика и Информатика

гр. София



ДИПЛОМНА РАБОТА

**За придобиване на образователно-квалификационна степен
„магистър“**

**ТЕМА: Да се научим как да учим учениците да
решават задачи по математика**

Дипломант:

Гергана Георгиева Цачева

Специалност: ТОМИ

Ф.№ 9MI4000008

Научен ръководител:

(доц. д-р Таня Тонова)

Консултант:

(проф. д-р Иван Тонов)

София, 2025 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

I. УВОД.....	5
II. Изследователска теза.....	7
III. Описание на експеримента и ограничение	8
IV. Инструментариум.....	12
V. Теоретична рамка	13
1. Практики у нас и в чужбина.....	16
1.1. Сингапур.....	16
1.1.1. Общи положения.....	16
1.1.2. Училищна учебна програма	18
1.1.3. Thinking Schools, Learning Nation Programme (TSLN) – Мислещи училища, учеща нация	19
1.1.4. PW Programme (Project Work) – работа по проекти	19
1.1.5. Препоръчителни педагогически подходи	20
1.1.6. Преподавателски състав.....	21
1.1.7. Обучение по математика	22
A) Спираловиден подход.....	24
Б) CPA модел (Concrete – Pictorial – Abstract, Конкретно – Илюстративен – Абстрактен модел).....	24
В) Вариационен модел.....	24
Г) Релационен модел	25
1.1.8. Оценяване.....	25
1.2. Япония.....	26
1.2.1. Общи положения.....	26
1.2.2. Ключови характеристики	26
1.2.3. Учебни програми	28
1.2.4. Преподавателски състав.....	29
1.2.5. Обучение по математика	30
1.2.6. Оценяване.....	34
1.3. България	34
1.3.1. Общи положения.....	34
1.3.2. Тенденции към децентрализация	35
1.3.3. Рамков учебен план	35
A) Избираеми учебни часове	35
Б) Факултативни учебни часове	36

1.3.4. Компетентностен подход	36
1.3.5. Приобщаващо образование.....	37
1.3.6. Иновативни училища	38
1.3.7. Преподавателски състав.....	38
1.3.8. Обучение по математика	39
1.3.9. Оценяване.....	40
2. Проблеми и предизвикателства при обучението по математика.....	40
2.1. Негативно отношение към математиката	40
2.2. Учебна програма	42
2.3. Дисциплина и атмосфера в класната стая.....	42
3. Ефективни методи и практики за преподаване на математика.....	42
3.1. Преглед на вече решени задачи	42
3.2. Създаване на положително отношение	43
3.3. Евристика	44
3.4. Учене чрез правене	45
3.5. Постижимо предизвикателство.....	45
3.6. Работа на групи и кооперативно учене.....	45
3.7. Индивидуална работа.....	46
3.8. Обясняване на решенията на дъската	46
3.9. Интердисциплинарно обучение	46
3.10. Проектно-базирано обучение	46
VI. Анализи, изводи, опит	48
VII. Резултати от тест „Входно ниво“	53
1. VIII ^г клас	53
2. VIII ^в клас	55
VIII. Статистика, сравнение и анализ на резултатите от тест „Входно ниво“.....	57
IX. Анализ на анкетното проучване.....	59
1. Ученици, участващи в изследването	59
2. Въпроси	59
3. Коефициент на надеждност на изследването.....	60
3.1. Алфа на Кронбах	61
3.2. Корелационна матрица.....	61
3.3. Корелация на получените резултати	62
3.3.1. Активно участие – самоподготовка - резултати	62
3.3.2. Нагласи към предмета – тревожност и страх от грешки	62

4.	Анализ на навиците за учене	63
4.1.	Самоподготовка	63
4.2.	Поведение по време на час	67
4.3.	Мотивация.....	71
4.3.1.	Вътрешна мотивация	71
4.3.2.	Външна мотивация.....	74
X.	Заключение.....	80
XI.	Използвана литература	82
XII.	Приложения.....	87

I. УВОД

Обучението е важен процес за напредъка на човечеството, то е основата на личностното и професионалното израстване на човека. С постоянната промяна на света около нас, с непрекъснатото развитие на технологиите, все повече се усеща нуждата от критично мислене, от умение за взимане на решения, от способност за адаптация към съвременното на дигиталната ера. Съвременният човек трябва да може да планира, да оценява, да работи в група с хора, които са различни от него, да може да намира и използва необходимата информация, като това се случва през целия живот. По този начин човек получава увереност в собствените си възможности и на хоризонта се появяват нови възможности за развитие.

Училищното образование е само един от начините, по който човек може да получи знания, да развива способностите си и различни умения. Благодарение на училището човек изгражда уменията и компетентностите, които са необходими за бъдещето – самообучение през целия живот, в отговор на постоянно развиващата се заобикаляща ни среда. Чрез образованието човек получава знания, умения и компетенции, водещи до вяра в собствените възможности и усъвършенстване и реализация на собствения потенциал. То повишава креативността и потенциала, възможността всеки индивид да преследва и постига високи цели. Образованието е съществено и за социалното поведение на обучавания човек. Негова основна цел е развитието на интелектуалните, емоционални, социални, морални и духовни аспекти на хората. Получаването на добро образование е ключ към развитието на цялото общество. То спомага намаляването на безработицата и води до повишаване на социалния статус. Помага на всеки гражданин да изгради ценностна система, да разбира добре разликата между добро и зло, между правилно и неправилно. Образованият човек се стреми към подобряване на условията на живот като, освен това, той добре разбира правата и задълженията си в обществото.

Математиката не е само числа и пресмятания. Тя е „наука за структурата, реда и връзките, която се е развила от елементарни практики на броене, измерване и описване на формата на обектите. Тя се занимава с логически разсъждения и количествени изчисления и нейното развитие включва нарастваща степен на идеализация и абстракция на предмета. От XVII век математиката е незаменима добавка на физическите науки и технологиите, а в днешно време заема подобна

роля в количествените аспекти на науките за живота.“ [30]. Училищната математика е предметът, чрез който учениците се запознават с науката, като не само усвояват математически познания, но и развиват аналитично и логическо мислене, учат се на упоритост и постоянство, на екипна работа. Именно в училище е първият допир до базисните понятия, които се използват в бъдеще – аритметика, геометрия, алгебра и анализ, вероятности и статистика.

II. Изследователска теза

Обучението по математика е от изключителна важност за развитието на съвременните общества. Прилагането на целенасочени политики и методи би довело до устойчиво повишаване на резултатите.

Целта на дипломната работа е да се предложат ефективни методи за преподаване на математика.

Настоящото изследване ще включва следните **задачи**:

- Преглед и анализ на образователни системи в чужбина
- Преглед и анализ на образователната система в България
- Изготвяне на работни листове за ученици, включващи подробно решени примерни задачи, както и задачи за самостоятелна работа
- Провеждане на тест сред ученици и анализ на резултатите
- Провеждане на анкетно проучване сред ученици и анализ на резултатите

Хипотезата, която изследването цели да докаже, е:

Повишаването на резултатите на учениците по математика в голяма степен зависи от създаване на положително отношение към предмета в съвкупност с прилагането на ефективни методи за преподаване, специфичната организация на учебните часове и индивидуалната работа с всеки ученик.

Практическата насоченост и интердисциплинарното обучение, кооперативното учене и евристиката също допринасят за висока успеваемост. Акцентът пада предимно върху самоподготовката и прегледът на вече решени задачи, последвани от системни упражнения с цел затвърждаване на усвоените знания.

III. Описание на експеримента и ограничение

Изследването е проведено в едно училище – Природоматематическа гимназия „Христо Смирненски“ – гр. Перник.

Анкетното проучване е реализирано сред учениците от V и VIII клас, за да се направи сравнителен анализ на резултатите в началото на два етапа в обучението – прогимназиален и първи гимназиален. Целта е да се установят нагласите и мотивацията за учене на участниците в анкетата. Фактът, че експериментът е проведен само в едно училище, ограничава възможностите за обобщаване на резултатите. Различията в учебната среда, преподавателите и самите ученици могат да доведат до разлика в резултатите при изследвания, направени в други училища с различни ученици и условия.

Основната експериментална част е проведена сред учениците от VIII клас и включва преговор на учебния материал от VII клас и провеждане на тест за установяване на входното равнище.

Преговорът на темите от предходната учебна година е направен в рамките на 5 учебни часа, във всеки от които са преразгледани основните теореми и свойства и са решени примерни задачи. Коментират се типичните грешки и се показват различни методи на решаване на задачи. Учебните теми, които са разгледани, покриват учебната програма по математика от VII клас:

- Цели изрази
- Уравнения
- Неравенства
- Триъгълник. Еднакви триъгълници. Успоредни прави
- Успоредник

За всяка една от изброените теми е подготвен работен лист, който включва:

- Основни теоретични знания
- Примерни решени задачи
- Задачи за самоподготовка

Решените задачи, включени в работните листове, са внимателно и систематично подбрани така, че да покриват основните теоретични знания от VII клас и да демонстрират основни методи за решаване на различни типове задачи. Отделните задачи са от различна степен на трудност. Задачите за самоподготовка наподобяват примерните задачи. Тяхната цел е учениците да упражнят преговореното (наученото) от работния лист.

След всеки работен лист на учениците се дава обратна връзка и се оказва помощ при недостатъчно добре усвоен материал.

Работните листове са разработени в съответствие с принципите на Теорията за когнитивното натоварване (вж. Глава V, 3.1.). Тази теория подчертава факта, че нашата работна памет, която съхранява и обработва информация, има ограничен капацитет. Ако новата информация не се прехвърли в дългосрочната памет, тя може да бъде забравена. Процесът може да се забави ако информацията е твърде много. В работните листове са внедрени следните принципи:

- **Намаляване на излишното натоварване (опростяване на информацията) – Extraneous Load**
 - Теорията е поднесена стегнато без дълги и излишни обяснения. Същото се отнася и за решенията на задачите.
 - **Информацията е подредена логично** – първо теория, после пример и накрая задачи за самостоятелна работа
- **Оптимизиране на вътрешното натоварване – Intrinsic Load**
 - Задачите са подредени по сложност, за да не претоварват учениците още в самото начало
- **Принцип на подпомагане на смисловото натоварване (Germane Load)**
 - Включени са практически задачи за свързване на знанията с реални житейски ситуации и изграждане на трайни знания
- **Подобряване на представянето** – ясни изрази и визуални материали
- **Принцип на сегментирането (разделяне на части)** – Всеки работен лист е разделен на тематични части. Например темата за разлагане на многочлени е разделена на 4 отделни метода – чрез общ множител, чрез формули за съкратено умножение, чрез групиране и чрез допълване до точен квадрат. Всеки метод е представен кратко и с пример.

- **Принцип на разработени примери** – Подробно разработени примери с показване на междинните стъпки. Те служат за модел, който ученикът може да следва.
- **Принцип на насочване на вниманието** – Използват се ключови думи като „следователно“ и „в случая решение е...“, които сигнализират на ученика къде е важната стъпка; Маркира се важната информация, за да се насочи вниманието към нея. Използвани са цветови акценти за наблягане на важните стъпки. Дадени са цветни примерни чертежи на геометричните задачи.
- **Принцип на активното обработване** – включените задачи за самостоятелна работа изискват активно прилагане на наученото, а не просто преписване.

След направения преговор е проведен тест за установяване на входното равнище по математика.

Задачите за теста са старателно избрани и в голяма степен покриват типовете, решени по време на часовете и тези от работните листове. Задачите са различни по трудност. Точкуването е на стъпки и е изготвена скала за преобразуване на точките в оценки. Учениците са запознати с нея преди провеждането на теста.

Учениците са разделени на две групи, като на всяка от тях са дадени различни, но по същество подобни задачи. Целта е да се минимизира вероятността за злоупотреба (преписване), но все пак да има равнопоставеност.

Проучването обхваща учениците от две паралелки осми клас - VIII^В клас, профил „Хардуерни и софтуерни науки“, и VIII^Г клас, профил „Природни науки“. Този факт определя и трудностите, възникнали по време на експеримента. Нивото на началните знания и мотивацията и интереса на учениците към учебния предмет математика са различни и е нужно адаптиране на темпото на работа, включване на допълнителни разяснения и повторение на някои основни теми и задачи.

Сравнително малкият брой участници намалява представителността на резултатите и може да доведе до отклонения.

След направена проверка и оценка, на учениците е дадена обратна връзка относно затрудненията и грешките, които са направили на теста. Целта е да преговорят и упражнят неусвоените знания, за да могат да продължат с по-нататъшните теми в общообразователната си подготовка по математика.

Фактът, че учениците са от една и съща възрастова група също оказва влияние на изследването и би довело до разлики в резултатите при проучвания сред ученици от различни възрасти. Липсата на разнообразие не позволява да се направи връзка между възрастовите особености и резултатите.

IV. Инструментарий

За целите на изследването са използвани различни инструменти за събиране на данни и оценка на входното ниво на участниците. Те включват:

- **Анкетни карти (Приложение № 1)** – с цел събиране на информация за мотивацията и навиците на учене на учениците. Анализът на резултатите би помогнал повишаване на академичните постижения.
- **Работни листове (Приложение № 2)** – предназначени за преговор на основни понятия, формули и методи за решаване на типове задачи. Разделени са по теми, съобразно учебната програма от седми клас. Включват теоретична част, решени задачи и задачи за самоподготовка.
- **Тест за определяне на входно ниво (Приложение № 3)** – две различни групи със сходни задачи и оценяване. Целъ установяване на началното равнище и установяване на пропуски в началото на учебната година.

V. Теоретична рамка

Обучението по математика включва в себе си усвояване на правила, умения и прилагането на различни методи за решаване на математически задачи. То заема важно място в съвременните образователни системи, тъй като математиката подпомага развитието на логическото мислене, подобрява уменията за анализиране, за структуриране, последователност и абстрактни разсъждения. Математиката е в основата на редица други науки, които играят съществена роля за съвременния свят – икономика, инженерни науки, статистика, маркетинг, медицина и др.

Математиката играе съществена роля за формирането на логическо и критично мислене у обучаваните, основани на последователни разсъждения, абстракция, разбиране на връзки и модели. В основата на това стои изграждането на математическо мислене, чиито основи са положени от процесите, използвани при решаване на задачи – категоризация, класификация, извод, обобщение, изчисление, тестване на хипотези. Благодарение на тези мисловни процеси, обучаемите имат предимство при решаване на проблеми и взимане на решения. Учениците се учат да бъдат последователни и да структурират разсъжденията си, да разделят проблемите на няколко по-прости, да работят упорито и да бъдат организирани, да си сътрудничат с останалите по пътя към целта. Освен задълбочени познания по математика, решаването на задачи изисква и прилагането на евристични стратегии, обосновка и постоянство. Като цяло, обучението по математика е нужно за създаване на добре образовано общество, което ще може да се справи с новите технологии в съвременния свят, в който са необходими не само добре обосновани, но и творчески решения.

Основните цели на обучението по математика са:

- Усвояване на основни математически понятия, знания и умения
- Развитие на критическо и логическо мислене
- Съставяне на математически модели
- Прилагане на наученото в реални житейски ситуации

Всичко написано до тук показва защо изграждането на математическо мислене е една от най-важните цели при обучението по математика, но и една от най-трудно достижимите. То би подпомогнало науката, технологиите, икономиката на всяка държава. Реално крайната цел на преподаването е учениците да могат сами да се досещат къде и как да приложат математиката и това, което са научили, в реалния живот.

В обобщение, мисленето е основният процес, който отличава човека. Широко разпространеният в съвременния свят изкуствен интелект се справя отлично с обработката на данни с изключителна бързина и точност, неприсъщи на човека. Изкуственият интелект, включващ невронните мрежи и машинното обучение, използва езикови модели, за да създава съдържание, да прави обобщения и да разпознава модели. Онова, което го разграничава от човека, е липсата на самостоятелно мислене, креативност и способност да прави изводи – задачи и цели, които си поставя и постига обучението по математика. Умението да вижда връзки, да тълкува проблеми и да търси решение засега е непостижимо за машините. В този смисъл, обучението по математика е факторът, който не позволява замяната на човека от машините.

Но, за да бъде успешно обучението, освен като полезна, математиката трябва да бъде възприемана от учениците като интелектуално приключение, като възможност да се докоснат до откриването на нови и интересни части на света. Въпреки нейното безспорно практическо приложение, повечето хора я намират за маловажна, не изпитват необходимост от научаване на математически факти, а прилагат една малка част от аритметиката в ежедневието си. Често учениците имат негативно отношение към математиката, но е възможно те да работят по-усърдно и упорито, когато имат собствени цели и мотивация. Именно тук може да се намеси учителят, за да помогне на учениците да преодолеят отрицателната си нагласа:

- всеки ученик трябва да работи на ниво, което е съобразено с моментното му състояние и е подходящо за него самия;
- попълване на основни пропуски чрез използване на стратегии като „безгрешна математика“ (опит за предотвратяване на грешки по време на обучението), прогнозиране и оценка, различни визуализации;

- преподаване с насоченост към силните страни и с оглед на интересите на учениците;
- ефективност и ефикасност - връзката между усилията и постигането на поставената цел. Ефективността показва дали целите са изпълнени, а ефикасността оценява дали положеният труд е оптимален.
- намаляване на отрицателните реакции при грешки;
- повишаване на активността на учениците;

Най-важното схващане е идеята за постижимото предизвикателство. Учениците са различни и имат различни способности за учене, основни и практически умения. Ето защо е необходимо учителите да адаптират учебното съдържание според основните знания и нужди на различните ученици.

Мотивацията, от друга страна, е един от най-важните компоненти на ефективното обучение. Мотивацията е процес, който активира, ръководи и поддържа поведението с течение на времето. Мотивацията за учене играе важна роля за повишаване на резултатите на учениците. Тя описва психологическия процес, който включва в себе си потребности и желания и тяхното удовлетворяване. Мотивацията е състоянието, което ни кара да вървим напред, да научаваме нови неща и да постигаме целите си.

„Учениците, които искат да научат нещо, могат да научат всичко.“ (Славин, Р. Педагогическа психология, 2004)[18]. От първостепенно значение е да се намерят подходящите стимули за конкретните ученици с цел повишаване на тяхната мотивация. Ето защо е наложително учителят да дава на учениците мотивираща обратна връзка и да използва различни поощрения и стратегии, които спомагат процеса на обучение. Основна перспектива за покачване на нивото на мотивация е самоефективността – убеждението на човек, че е способен да постигне дадена цел. Приоритет трябва да бъде именно насърчаването на учениците да повярват в собствените си качества и възможности, като ги карат да осъзнаят, че няма връх, който да не могат да изкачат. Убеждението, че провалът е сигурен, води до липса на стимул за учене, което със сигурност ще доведе до ниски резултати. От съществено значение е учениците да разберат, че всички могат да учат и че успехът им зависи от усилията, които полагат. Това ще ги провокира да дадат всичко от

себе си и ще засили усещането, че именно старанието и трудът, а не способностите, водят до академичен успех.

Всичко това изисква наличието на добре подготвени преподаватели, които имат визия за обучението по математика, както и учебни програми по математика, отговарящи на съвременния свят.

1. Практики у нас и в чужбина

1.1. Сингапур

1.1.1. Общи положения

Сингапур, наред с други азиатски държави като Хонконг, Япония, Китай, Южна Корея, е начело на образователните класации, като заема твърдо първите места по математика, природни науки и четене. Тези постижения не са случайни – те са плод както на внимателно разработени и прилагани образователни политики, така и на местната култура, която отдава голямо значение на ученето и високите постижения. Съществен принос за успехите има и културата на тези държави – колективни цели, изпълнение на задачите, които се изискват от индивида.

След обявяване на независимостта си, по-голямата част от населението на Сингапур е бедно, необразовано и неграмотно. Държавата не разполага с особени природни ресурси, което изключва възможността икономиката ѝ да се изгради на тях. Затова фокусът е върху образованието като единствен начин за развитие на икономиката и повишаване на стандарта на живот. Първоначално Сингапур използва чужди образователни методики, програми и материали, но след слабото си представяне на международните класации инициира промяна. Министерство на образованието (МОЕ) взема най-доброто от практиките в чужбина, създава нови учебни програми, както и учебници и след известни промени ги прилага в класните стаи на държавата.

Сингапурската образователна система е силно структурирана и изцяло централизирана, като се набляга на основните умения в началното училище и по-късно на разделението в средното училище на база на академичните постижения.

Базира се на емпатията, на идеята, че всяко дете може да учи като се извежда на преден план неговия потенциал.

Всички училища се финансират от Министерство на образованието (МОЕ). Те се разделят на четири различни вида – държавни, финансирани от правителството, автономни и независими, като основната разлика е в степента на автономност по отношение на бюджет, прием на ученици и учебни програми. Най-високи постижения и резултати имат автономните и независимите учебни заведения, но таксите за обучение в тях са прекалено високи. Училищата са групирани в клъстери според местоположението си, като има четири зони – Изток, Запад, Север и Юг. Участниците в клъстерите си сътрудничат с цел повишаване на нивото на учителите и ръководителите, както и на всяко училище. Организират се различни групи по интереси и дискуссионни форми в зависимост от нуждите – например математически групи и др. На зонално ниво се организират Центрове за върхови постижения, чиято цел е да подпомага професионалното развитие на учителите във всяка предметна област. Центърът за върхови постижения по математика (СОЕ) по математика в Източната зона е един от основните и целта му е да се постигат високи постижения в областта на математиката чрез повишаване на квалификацията на учителите, иновативни методи в преподаването и изследователска дейност.

В допълнение на клъстерирането на образователните заведения, в Сингапур съществуват четири специализирани независими училища – Сингапурско спортно училище, Гимназия по математика и природни науки към Националния университет на Сингапур, Училище по изкуства и Училище по природни науки и технологии. Тази образователна система се основава на разпределение на учениците на база на техните способности и така се гарантира профилираното обучение на онези от тях, които имат специфични таланти и високи академични постижения.

Средното училище предлага четири различни курса на обучение в зависимост от резултатите, постигнати от учениците след завършване на началното училище:

- **Специално** – обучение за ученици със специални образователни потребности. Фокусът на учебния план е „Живот, учене и работа през XXI век“
- **Експресно** – четиригодишно обучение за ученици с академични наклонности. Целта е подготовка за изпитите на O-Level (обикновено ниво) на CGE (Сингапур – Кембридж общ сертификат за образование). Учебният план включва английски език, математика и науки (хуманитарни и природни). Около 50% от учениците са записани в този курс.
- **Нормално (Академично)** - четиригодишно обучение за ученици, които се нуждаят от умерено темпо на обучение в сравнение с експресния курс. След успешно полагане на изпитите пред учениците има няколко възможности, които в общи линии водят до място в политехнически курсове.
- **Нормално (Техническо)** - четиригодишно обучение за ученици, което включва практически и технически умения с акцент върху обучение, базирано на опита. Учебният план включва английски език, математика, компютърни и обществени науки.

1.1.2. Училищна учебна програма

Образователните политики се ръководят от три основни принципа:

- Образованието трябва да бъде в крак със съвременната икономика
- Езиците, природните науки, математиката и хуманитарните науки са акцент, за да се насърчи логическото мислене и ученето през целия живот
- Креативността в училище се насърчава, като инициативата за това трябва да идва от директорите и учителите, а не от министерството.

Основните цели на образованието са „да развива индивида и да обучава гражданина“. Всеки ученик се насърчава да разгърне пълния си потенциал и да достигне до максимума на своите възможности, като се поставя акцент върху ученето през целия живот и основни морални ценности. Има и разнообразни извънкласни дейности, проектни програми, дейности, свързани с националното възпитание.

Основните предмети в началното образование са майчин език, английски език, математика, природни и социални науки, гражданско и морално образование, изкуства, музика и спорт. В средните училища има по-голям избор от предмети, като започва профилирането – учениците специализират в различни области, например природни науки, търговия, и т.н. чрез широк набор от избираеми предмети.

Учебните програми се преразглеждат и актуализират на всеки шест години, което гарантира, че учениците ще бъдат добре подготвени и ще са конкурентни в днешния динамичен свят.

1.1.3. Thinking Schools, Learning Nation Programme (TSLN) – Мислещи училища, учеща нация

Двугодишна програма, предложена през 1997 год., която има за цел да насърчава критичното мислене, креативността, ученето през целия живот и националното самосъзнание (патриотизма). Целят се следните резултати:

- Развитие на честност, почтеност и чувство за принадлежност към собствената култура, но и уважение на различията;
- Отговорност към семейството и родината
- Способност за мислене и разсъждение, смелост и увереност за изразяване на нови идеи
- Умение да търсиш, да разбираш и прилагаш знанията
- Иновативност, предприемачески дух и стремеж към учене през целия живот
- Насърчаване на връзката между научно-изследователската дейност и практиката, както и интердисциплинарен подход в обучението.

1.1.4. PW Programme (Project Work) – работа по проекти

Работата по проекти е ключов фактор за образованието и PW програмата заменя The Thinking Programme. Тя развива умения и компетенции, които подпомагат учениците да разберат реални житейски проблеми, да разгледат различни възможности и да предложат разнообразни решения. Така се подобрява умението за работа в екип, междуличностните взаимоотношения и създаването на

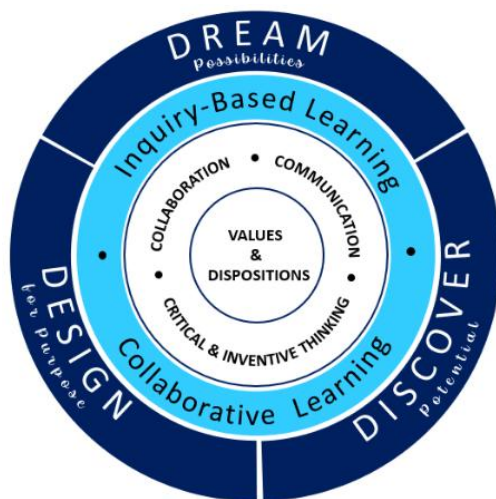
интердисциплинарни връзки. Учениците стават гъвкави, развиват изобретателността си, експериментират и стават по-уверени.

Ключови характеристики на програмата:

- „Мечтайте за възможности, открийте потенциал, проектирайте с цел“ – активното включване на всички ученици с цел да бъдат полезни и ангажирани
- Препоръчителните педагогически практики включват учене, основано на проучване и съвместно обучение
- Компетенции, умения и ценности като резултат от обучението на XXI век

1.1.5. Препоръчителни педагогически подходи

- **Съвместно обучение** – ориентирано към ученика. Ученици с различен произход, с различни знания и интереси работят заедно по изпълнението на задачата. Разглеждат се различни гледни точки, оспорват се идеи, за да се достигне до целта.
- **Обучение, основано на проучване** – активно и самостоятелно учене, при което учениците изследват проблеми и търсят отговори.
- **Проектно-базирано обучение** – ангажира учениците в процеса на изследване на житейски проблем. С помощта на учителя учениците правят проучване, формулират целите, планират и работят съвместно за постигане на резултат.
- **Обучение, базирано на дизайн (Design-Based Learning)** – учениците изследват даден проблем, дават идеи и създават модели за решаване на реални проблеми. Генерират се различни идеи, прави им се оценка и се прилагат усвоените знания на практика. Базирано на активно учене.



Фиг. 1. Модел на Singapore PW (Проектно-базирана учебна програма на Сингапур)
Източник: Министерство на образованието, Сингапур [43]

1.1.6. Преподавателски състав

„Нито една образователна система не може да бъде по-добра от качеството на своите учители“ (Андреас Шлайхер, ръководител „Образование и умения“ към ОИСР, създател на тестовите PISA).

Убедени, че качеството на образователната система зависи пряко от квалификацията на преподавателите, Сингапур инвестира сериозно и в осигуряването на отлично подготвени учители. Професията е сред най-желаните в страната поради конкурентните заплати, съизмерими с тези на инженерите, както и поради безплатното обучение. Докато се обучават, студентите получават заплата, средства за учебници и компютърна техника. Високият социален статус, уважението и добрите условия на труд в училищата също допринасят за привлекателността на професията.

Подборът на учителите е изключително строг. Те се избират сред най-добрите 30% от завършилите ученици, с високо ниво на грамотност. След това автобиографиите се проверяват за преминати квалификации, както и за доказателства за интерес към образованието. Още преди да преминат специализирано обучение в NIE (National Institute of Education, Национален институт по образованието), те се включват в програма „Въведение в преподаването“, като по този начин се свързват с опитни учители. След завършване се задължават да работят като учители за период от три или четири години, като

така се гарантира обезпечаване на нуждите на училищата. Рамковият учебен план (известен като V3SK) формулира знанията и уменията, необходими на учителите да развият способности за решаване на проблеми, критично мислене и принос към обществото. Основна цел е подготовка за проектно-базираното, експерименталното и участващо обучение.

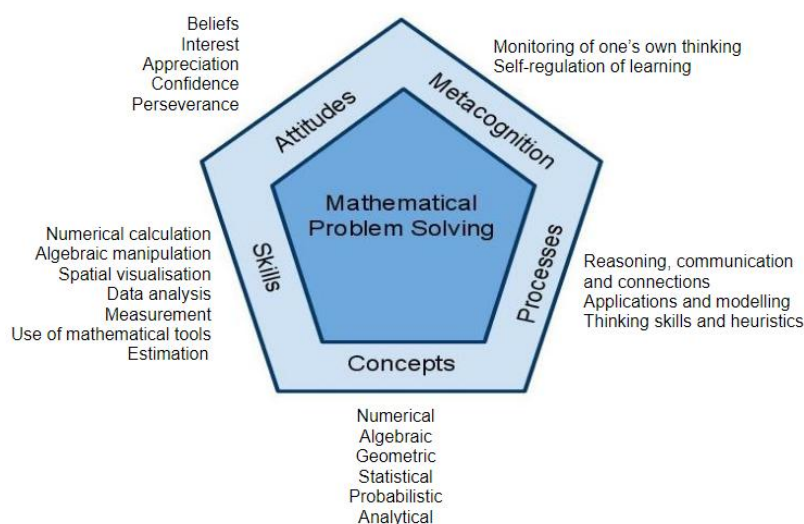
1.1.7. Обучение по математика

Математиката е задължителен предмет във всички училища в Сингапур. Учебната програма е разработена централно, а резултатите се оценяват чрез национални изпити. Преразглежда се на всеки шест години, с междинен преглед след три години. Комисиите, назначени от МОЕ, взимат предвид мненията на учителите и съвременните тенденции в математическото образование в англоезичните, европейските и азиатските държави. Седмичният брой часове по математика се увеличава от седем в първи клас на единадесет в четвърти. В пети и шести клас стандартните ученици имат по девет или десет часа математика седмично. Така се поставя акцент на обучението по математика още от начално ниво, който продължава и в последствие. В средното образование темите по математика са базирани на CGE O-Level за елементарна математика. Учебната програма включва цели и реални числа, декартова геометрия, питагорова теорема, уравнения, окръжност, трансформации, вероятности и статистика. Седмично часовете по математика са 5 за специални/експресни курсове, 6 за нормални академични и 8-9 за нормални технически. Математиката не е задължителна за предуниверситетското ниво на обучение, но близо 95% от учениците вземат поне един вид математика. Изпитите за ниво GCE A включват комплексни числа, функции, графики, вектори, вероятности и статистика.

Съвременните програми по математика са адаптирани към нуждите на всяко дете, като основна опорна точка е решаването на математически задачи. Математическото образование в Сингапур се славя с отлични резултати на международни изследвания (TIMMS, PISA), на които техните представители заемат челните места. Проучванията показват, че както най-добрите, така и ученици на средно ниво в Сингапур, не само се представят много добре спрямо международните критерии, а и показват положително отношение към изучаването на математика, което е силно свързано с постиженията.

Така се достига до математическото образование в Сингапур, познато още като „Сингапурски метод“ – основан на глобални теории, препоръки и добри практики и водещ до високи резултати и развитие в световен мащаб. Този високоефективен подход на преподаване, разработен от МОЕ, цели постигане на дълбочина на знанията и отлично владение на материала. Не се налага наизустяването на правила, а се иска учениците да мислят креативно и математически, разчитайки на вече придобити знания. Учениците не могат да разчитат на просто възпроизвеждане (решаване на много задачи по конкретен пример), а се учат да прилагат нови методи още от самото начало. В модерния свят не е важно какво можеш да възпроизведеш, а това какво можеш да направиш с тези знания. Така се придобива увереност, находчивост и по-добра подготовка.

Сингапурската рамкова учебна програма се използва във всички класове и набляга на развитието на математическите способности на учениците, като акцентира върху решаването на проблеми (“problem solving”). Пет взаимно свързани компонента изграждат „пентагона“ и подпомагат развитието на тези способности – концепции, умения, процеси, метапознание, нагласи.



Фиг. 2. Сингапурска рамкова учебна програма по математика

Източник: Министерство на образованието, Сингапур [40]

Ключови характеристики:

А) Спираловиден подход

Понятията и уменията от всяка съдържателна област се преразглеждат през определени интервали от време, като нивото се усложнява при всяко повторение. Така материалът се представя в логическа последователност, а знанията се затвърждават и надграждат. Този подход набляга на задълбоченото разбиране, а не на запаметяване на формули и правила.

Б) CPA модел (Concrete – Pictorial – Abstract, Конкретно – Илюстративен – Абстрактен модел)

Базиран на теорията на Брунер (психолог, известен с приноса си в психологията и теориите на ученето), този модел разделя обучението по математика на три етапа:

- **Конкретен** – използват се предмети, чрез които се представят количествата и се моделират връзките между обектите.
- **Илюстративен** – преминава се към използването на диаграми, схеми, изображения, числови линии и модели. Често използван е т. нар. bar model (подобно използвания у нас метод „решаване на задачи чрез отсечки“) – по-големи величини се изобразяват с по-големи стълбове. Тази визуализация дава нагледна представа за отношенията между неизвестните и подпомага съставянето на математически модели.
- **Абстрактен** – прилагане на математически символи и формули. При запис на отношението на величините се използват неизвестни, например x .

Този подход спомага изграждането на солидна математическа основа и насърчава задълбоченото разбиране и математическо мислене, стимулирайки активното учене, а не механичното запаметяване.

В) Вариационен модел

Урокът се разнообразява чрез поредица от примери по конкретната тема. Задачите не са еднотипни и учениците се запознават с различни начини за представяне на една и съща идея. Например, първо се решава конкретна задача, след което се прави малка промяна в условието на задачата и учениците сами трябва да открият до какво води това. После се представя задача, при която се

използва обратен подход и накрая задача, при която се използват няколко различни метода. Така се гарантира по-дълбоко разбиране на учебния материал.

Г) Релационен модел

Предложен от Ричард Скемп (Катедра по образование, Университет на Уоруик), този модел разграничава две нива на разбиране:

- **Инструментално** – способността за изпълнение на алгоритъм
- **Релационно** – способността да се обясни алгоритъма

Сингапурското образование по математика се стреми учениците да напреднат отвъд възприемането на математиката като набор от произволни правила или процедури и да развият релационно разбиране на математическите концепции.

1.1.8. Оценяване

Използва се комбинация от формиращо и обобщаващо оценяване, което подпомага наблюдението на напредъка на учениците. Оценката е неразделна част от процеса на обучение и допринася за развитието на ученика и непрекъснатото повишаване на неговите резултати. Освен тестове в училище Сингапурската образователна система провежда и национални тестове. PSLE – Primary School Leaving Examination, който се полага при завършване на шести клас, проверява пригодността на учениците за средно образование. Въз основа на този изпит учениците се насочват към различните типове, отговарящи на тяхното темпо и способности.

По време на средното образование се полагат серия изпити GCE (The Singapore - Cambridge General Certificate of Education), които са с различна степен на трудност, а резултатите на GCE A-Level са вход и за университетско образование.

В тестовите се набляга на многостъпкови задачи, при които от учениците се изисква обосновка на решението, както и на задачи върху житейски проблеми. Целта е задълбоченото разбиране на материята, а не механично прилагане на формули и различни методи.

1.2. Япония

1.2.1. Общи положения

Япония, като световно призната икономическа сила, е известна с високото качество на образование, както и с добрите резултати при международни изследвания (PISA, TIMMS, математически състезания и олимпиади). Образователната система буди интерес и се сочи за пример за високи академични резултати, системност и дисциплина. В основата ѝ стоят културни традиции, модернизации и непрекъснатия стремеж към подобрения и иновации. Тя набляга на правила, упоритост, неуморен труд и работа в екип и внушава на учениците основните принципи на етиката, груповите дейности, японската култура и етикет. Важна цел е „пълноценно развитие на личността“ и „достойнство на индивида“. Образователната система трябва да помага на децата да станат независими личности, като принципът е баланс между образование, морал и здраве. Образованието е задължително, като съществува специална система за подпомагане на самостоятелността на ученици с увреждания. Рамковата учебна програма е на високо ниво, като всички необходими ресурси се предоставят от правителството.

Моделът на образователната система в Япония е 6-3-3 – шест години начално, три години прогимназиално и три години гимназиално образование, като задължителното образование е до девети клас. В гимназиите обучението може да бъде редовно, заочно или дистанционно.

В японската образователна система учебните стандарти (Course of Study) се преразглеждат приблизително на всеки 10 години. Целта е да се гарантира, че съдържанието на учебните програми, методите на преподаване и очакваните резултати от учениците съответстват на променящите се изисквания на обществото, икономиката и глобалната среда.

1.2.2. Ключови характеристики

А) Правила

В Япония дисциплината и правилата в училище заемат централно място в образователния процес. Те се разглеждат не само като начин за поддържане на ред, но и като средство за възпитание на характера и колективна отговорност. От най-ранна възраст учениците са задължени да спазват установените норми,

включително строги правила за външния вид и поведението. Забранени са обеци, пиърсинги, лакирани нокти. В училище всички ученици носят специални пантофи.

Учтивото поведение е част от ежедневието - уважението към учители, съученици и учебна среда се счита за изключително важно. Спазването на правилата се следи от дежурни ученици, което подчертава акцента върху самоуправление и взаимна отговорност. Дисциплината се поддържа не чрез наказания, а чрез групов натиск, доверие и отговорност. Основният подход е корекция на поведението чрез разговори, наставничество и участие в допълнителни дейности.

Б) Равенство

Япония предлага равни възможности за образование независимо от социално-икономическия статус. Само 9% от различията в образователните резултати се дължат на произхода на децата.

В) Екипна работа

Учениците се насърчават да работят на групи, да участват в общи дейности и да си помагат взаимно. Акцент е споделяната отговорност. Чрез общи усилия учениците се учат не само на знания, но и на важни социални умения.

Г) Желание за работа и усърдие

Децата имат трудови навици, изградени още от ранно детство. В училище те помагат в различни дейности – например при почистване или в кухнята, като така се учат да уважават чуждия труд. Основен принцип е постоянството и стремежът да се полагат усилия въпреки трудностите.

Д) Култура и традиции

Учениците се учат на японската култура и традиции и как да се държат в обществото. Будизмът е повлиял значително върху образователната система, особено веднага след навлизането си в страната. В миналото храмовете са били основни образователни центрове. Религията повлиява на редица културни елементи – писменост, изкуство, музика. Дзен будизмът, с фокус върху медитацията и концентрацията, спомага високите образователни резултати в страната.

Е) Фокус върху високи академични постижения и изпити

Японската система е известна със своята силна ориентация към стандартизирани изпити, особено за прием във висшите учебни заведения. Учениците трябва да положат изпити с изключителна трудност, което влияе върху мотивацията им. Съществува голяма конкуренция за най-добрите гимназии и университети, което предопределя натовареността на учениците.

Ж) Активно учене

Основната цел на обучението е учениците да учат с ясни цели и да бъдат проактивно ангажирани в процеса на учене. В часовете се поставя акцент върху развитието на умения и способности, вместо върху пасивното усвояване на информация. Учениците участват активно, извършват анализ, оценка и провеждат различни изследвания въз основа на собствената си преценка. Знанията не се предоставят наготово, а се създават и придобиват.

З) Силна връзка с учителя

Изгражда се доверие между ученика и учителя по време на извънкласни занимания и почивка. Те носят титлата „сенсей“ – хора, които имат повече знания от теб, хора, които са съвременни будители.

1.2.3. Учебни програми

Математиката е задължителен предмет в начален, прогимназиален и първи етап от гимназиалното обучение. Целта на началното и прогимназиалното обучение е учениците да изпитват удоволствие от математиката, докато в гимназията се насърчава креативността. Всяко училище спазва рамковата учебна програма и трябва да формулира общ план за учебния предмет, който включва цели и съдържание, качества и нагласи, които трябва да се насърчават, учебни дейности, методология на преподаване и план за оценяване.

Математиката в прогимназията обхваща четири области – Числа и алгебрични изрази, Геометрични фигури, Функции и Използване на данни. Общата концепция цели развитие на математическото мислене, разбиране на основните понятия и правила, съставяне на математически модели, представяне, интерпретация и обработка на данните.

Природните науки се изучават през целия етап на образованието, като фокусът е върху компетенциите за научно решаване на проблеми, свързани с природни обекти и явления. Провеждат се наблюдения и експерименти.

1.2.4. Преподавателски състав

Професията е високо ценена и се ползва с широко обществено уважение. Близо 82% от действащите учители посочват, че професията е била техен първи избор, като основен мотив за това изтъкват възможността да влияят положително върху развитието на децата и да допринасят за благото на обществото. Ролята на учителя надхвърля преподаването и обучението. Той е модел за подражание с безспорен авторитет.

Законът позволява на всеки, който е получил необходимата академична степен или кредити, да бъде сертифициран като учител, независимо от университета, който е завършил и областта на обучение. Тази система се нарича „отворена“. В Япония има няколко вида образователни заведения, в които може да се получи педагогическо образование и са признати от Министерство на образованието, културата, спорта, науките и технологиите – Училища за педагогическо образование към Националните университети, „полу“-училища за педагогическо образование, висши училища по образование, колежи за висше образование, програми за напреднали и др.

Възнаграждението на преподавателите се счита за конкурентно, като надвишава средното равнище на останалите държавни служители с приблизително 4%.

В Япония разпределението на учителите се осъществява централизирано, а отделните училища нямат право да наемат персонал. Така учителите се назначават в райони и училища, в които има най-голяма нужда от тях. Съгласно изискванията на MEXT (Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Министерство на образованието, културата, спорта, науката и технологиите), учителите са длъжни периодично да променят местоработата си, като в рамките на професионалната си кариера задължително преминават и през назначение в малко населено място. Това се смята за важен елемент от тяхното професионално израстване и им позволява да натрупат опит в различна образователна и социално-икономическа среда.

Освен това те са ангажирани с непрекъснато професионално развитие. Новоназначените учители започват работа с едногодишен договор, през който задължително трябва да преминат през специална програма за развитие на учителите. В този период те работят под ръководството на наставник, който ги подкрепя и насочва. Професионалната квалификация на учителите се надгражда и чрез обучения, организирани през втората, третата, шестата и десетата година от преподавателската им дейност.

Япония е известна със своята методология за професионално развитие на учителите, наречена „Lesson Study“ (изучаване на уроци). Този модел, инициран от самите учители, се оценява като особено ефективен, тъй като насърчава критическото мислене и усъвършенстването на преподавателските практики. В основата му стои съвместното планиране на урок, фокусирано върху конкретна образователна цел или затруднение в обучението. Обикновено един учител провежда урока, а останалите наблюдават, като по-късно участниците анализират процеса в детайлна дискусия. Вниманието се насочва към постигането на целите, ефективността на методите и възможностите за подобрене. Така се насърчава сътрудничеството и се укрепват екипните взаимоотношения между преподавателите.

Чрез този цикъл на планиране, наблюдение и рефлексия учителите не само усъвършенстват собствената си практика, но допринасят и за разработването на по-ефективни учебни програми, практически уроци и демонстрации. Основният акцент остава върху подобряването на ученето на учениците чрез непрекъснато професионално развитие на преподавателите, което от своя страна се отразява положително на образователните резултати.

1.2.5. Обучение по математика

А) Структурирано решаване на задачи (Structured Problem Solving)

Обучението по математика в Япония се характеризира със структуриран подход към решаването на задачи (problem solving), който насърчава креативността и дълбокото разбиране. В основата на този подход стои моделът, предложен от Дьорд Пойа в книгата „Как се решава тази задача“, който включва четири етапа:

- **Разбиране на проблема** – обикновено учителят въвежда задачата и подпомага учениците в разбирането на нейната същност

- **Изготвяне на план** – всеки ученик самостоятелно разработва собствен план за решаване
- **Изпълнение на плана** – задачата се решава, като се прилагат придобитите знания и умения
- **Поглед назад** – учениците проверяват верността на решението и преценяват дали използваният метод е най-подходящият.

В японското преподаване по математика учителят не заема водеща роля, а създава условия, в които учениците сами избират стратегии за решаване на задачи. Обучението е насочено към развиване на математическо мислене чрез разнообразни сюжетни задачи. Макар и повлияна от американския подход за решаване на проблеми, японската методика претърпява съществени трансформации – докато в САЩ акцентът е върху самия процес на решаване, в Япония основната цел е изграждането и усъвършенстването на математически умения.

Структурираният подход в японската учебна програма по математика е насочен към постигането на две ключови цели: изграждане на интерес към предмета и насърчаване на творческата дейност. Този подход подчертава процеса на решаване на проблеми, като предоставя възможности на учениците сами да откриват математически идеи и концепции. Подходът има три основни характеристики:

- **Кохезия на задачите**

Структурирането на учебния процес се обуславя от принципа „кохезия“ – свързаност, единство, обединение. Именно тя разкрива ключовите компоненти на обучителния процес – сплотеност и логическа последователност на задачите и целите на урока.

Обикновено типичният урок е разработен около решаването на една единствена задача, която е внимателно подбрана. Целта е да се постигне конкретна учебна цел, като се използват вече натрупаните знания и умения. Това прави планирането и изборът на задача изключително важни.

След решаването на тази задача учителят представя други текстови задачи, които са логически свързани помежду си и правят урока смислен и подреден. Именно тази кохезия – свързаност между отделните урочни елементи и желаните цели, осигурява единство и структурираност на обучителния процес. Естествената и логическа връзка между отделните задачи спомага трайността на знанията, повишава мотивацията и развива аналитичното мислене.

- **Обширно обсъждане (Neriage)**

Провежда се задълбочена, обмислена дискусия, в която се обсъждат различните подходи и решения, предложени от самите ученици. Учителят насочва дискусията така, че да подпомогне сравняването и анализирането на различните стратегии. Дискусията е предварително планирана и учителят е предвидил разнообразните методи на решение. Тези методи включват освен ефективни методи и такива, които са причинени от недоразумения. Именно тази съвместна работа и рефлексия подпомагат задълбоченото концептуално и процедурно разбиране и допринасят за развитието на математическите способности на учениците. По този начин се извеждат най-съществените математически идеи.

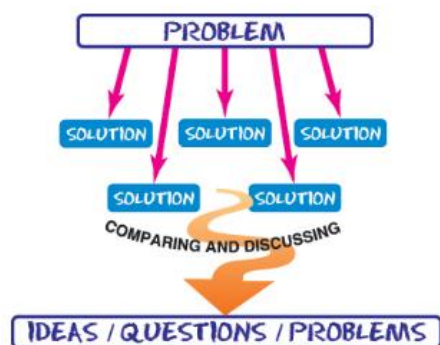
- **Работа на черната дъска (Bansho)**

На дъската не се записват само решения. Тя се използва като средство за проследяване на различните мисловни процеси, стратегии, идеи, споделени по време на урока. Учителят води записки на урока, но използва дъската и да помогне на учениците да запомнят какво трябва да направят. По този начин учениците могат ясно да видят логиката на математическите разсъждения и да изградят по-дълбоко разбиране на материята. Методът може да се разглежда като аналогия на менталните карти – и в двата случая целта е не само запис на информация, а визуализация на мисловния процес като фокусът е върху връзките между отделните елементи. При Bansho в центъра се поставя основната задача, около която е структуриран урокът. По този начин се създава цялостна картина на урока и се подпомага осъзнаването на кохезията в урока.

Учителят използва дъската за:

- Водене на ясни и структурирани записки по урока

- Подпомагане на учениците да разберат връзките между отделните части на урока
- Сравняване, противопоставяне и обсъждане на идеите
- Откриване на нови идеи
- Развитие на уменията за водене на записки



Фиг. 3. Модел на японското структурирано решаване на задачи

Източник: https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/sympo_2006/takahashi.pdf [48]

Б) Хронология на урока

Моделът и структурата на урока по математика следват хронологичен ред – от въведението до заключителните дейности. Урокът е структуриран подобно на разказ с четири основни етапа: начало (въвеждаща ситуация), развитие, обрат с неочаквано събитие и заключение (резюме на „историята“). За японските учители ключов елемент е „обратът“, който обикновено възниква по време на дискусията с целия клас. Освен това, в Япония уроците не се разглеждат като самостоятелни единици, а като взаимосвързани части от поредица уроци, наречена *tangen* (единица).

По този начин урокът демонстрира как математическите идеи се развиват стъпка по стъпка в хода на учебния процес.

В) Концепция *milieu* (среда)

Концепцията за среда е на преден план като основен инструмент за описание на обучението по математика. Тя описва изследователския процес, осъществяван от учащия. По същество тя се състои от въпросите, зададени от учителя и

учениците, получените отговори и връзките между отделните части на урока. Тя може да служи и за анализ на специфични части от урока.

1.2.6. Оценяване

В Япония се приема, че преподаването и оценяването са двете страни на една и съща монета. Чрез оценяването се гарантира постигането на образователните цели, заложи в рамковата учебна програма. Оценките дават възможност на преподавателите да проследят ефективността на използваните педагогически практики, както и да усъвършенстват методите си на преподаване.

В прогимназиалния етап оценяването е формализирано. Освен редовните класни тестове, учениците полагат и национални изпити, подобни на GCSE във Великобритания, които са от ключово значение за избора на образователната пътека, по която ще продължат обучението си в гимназията. Този изпит включва няколко предмета, включително математика и природни науки. Учениците също така полагат приемни изпити за университети.

Методите за оценяване в Япония съчетават формиращо оценяване, формални изпити и холистичен подход към постиженията (разглеждане на постиженията като съвкупност от различни аспекти - академични, личностни, социални, емоционални и творчески). Системата поставя силен акцент върху личностното развитие и подготвя учениците за конкурентния свят.

1.3. България

1.3.1. Общи положения

Образованието в България е продукт на дългогодишни традиции. До деветдесетте години на XX век е основано на принципите на руския модел, но след това започват промени под влияние на европейските модели. В днешни дни образователната система е ориентирана към нуждите на съвременния свят и изискванията на Европейския съюз.

Образователната система е структурирана и централизирана. Основен орган на управление е МОН (Министерство на образованието и науката). Всички промени в учебните програми, материали и образователни политики се извършват от министерството. Държавният образователен стандарт за общообразователната

подготовка дефинира целите, характеристиките и съдържанието, както и изискванията за резултатите от обучението.

Образованието в България е безплатно и задължително до навършване на шестнадесет годишна възраст (десети клас). Освен държавните училища, съществуват и частни, като при тях също има финансиране от държавата при определени условия.

Училищното образование се дели на три етапа – начално, основно и гимназиално. Гимназиалното се разделя на два етапа – първи и втори гимназиален етап. България е една от малкото държави в световен мащаб, при която основното образование се получава след седем години обучение (в повечето страни е след девет, дори десет). По този начин се извършва ранно профилиране, което често се оказва не особено ефективно, поради незрялостта на учениците в тази възраст, често водеща до неправилен избор на направление. Гимназиалното обучение е профилирано и професионално.

1.3.2. Тенденции към децентрализация

- чрез въвеждане на делегирани бюджети
- директорите на училищата сами назначават персонала
- чрез решения на педагогическия съвет се вземат редица самостоятелни решения
- определяне на избираемите и факултативните учебни часове (ИУЧ, ФУЧ).
Учебните планове за ФУЧ се определят изцяло от училищата

1.3.3. Рамков учебен план

Държавният образователен стандарт определя рамковите учебни планове в зависимост от степента и формата на образованието. Освен задължителната общообразователна подготовка училищата имат известна автономия в учебните планове чрез въвеждане на избираеми и факултативни учебни часове.

А) Избираеми учебни часове

Избираемите учебни часове дават възможност на училищата да правят известни промени в рамковите учебни планове. Освен за обучение по профилирана

подготовка, тези часове могат да бъдат използвани както за разширена подготовка по общообразователните предмети, така и за специализирана подготовка.

Б) Факултативни учебни часове

Факултативните часове се използват за допълнителна подготовка по учебни предмети, като това спомага развитието на способностите на учениците в конкретни области (например подготовка за състезателна математика). Учебният план се изготвя от преподавателя и може да включва теми, които не се изучават в училище или пък се изучават в следващ етап и се утвърждава от директора на институцията.

1.3.4. Компетентностен подход

Образователната система в България обхваща следните групи ключови компетентности, които са взаимосвързани и представляват съвкупност от знания и умения, необходими за личностното развитие на индивида през целия живот, за изграждането на активна гражданска позиция и участие в социалния живот, както и за реализация в бъдещето. Чрез този модел се стимулира критическото мислене, работата в екип и споделяната отговорност, които са част от основните умения, необходими за съвременния свят. Ключовите компетентности са:

- компетентности в областта на българския език
- умения за общуване на чужди езици
- математическа компетентност и основни компетентности в областта на природните науки и на технологиите
- умения за учене
- социални и граждански компетентности
- инициативност и предприемчивост
- културна компетентност и умения за изразяване чрез творчество
- умения за подкрепа на устойчивото развитие и за здравословен начин на живот и спорт. [11]

Основните характеристики, които се използват при този подход са:

- **интегрирани междупредметни връзки** – подпомагат цялостното разбиране на учебния материал чрез свързване на различни области
- **практическа насоченост на обучението** – прилагане на знанията в реални житейски ситуации
- **ориентация към резултати** – постигане на конкретни образователни резултати
- **иновативни подходи в процеса на обучение** – развиване на критическо мислене, активно учене и др.

1.3.5. Приобщаващо образование

Приобщаващото образование е ключова образователна политика, чрез която се дава отговор на различието и индивидуалните способности на всеки индивид. На учениците се предоставя обща и допълнителна подкрепа за личностно развитие като се дава възможност за повишаване на способностите и уменията им.[9] Предизвикателство е фактът, че деца с различни образователни потребности трябва да бъдат обучавани според една образователна рамка. Именно затова трябва да бъдат прилагани различни подходи при обучението, като различията се приемат и се работи чрез прилагане на принципите на мотивация и ориентираност към ученика. Наредбата за приобщаващо образование осигурява правото на всяко дете да участва пълноценно в учебния процес, независимо от неговите възможности, образователни потребности или социално-икономически статус.

При установяване на необходимост от допълнителна подкрепа училището изготвя план и съставя екип за подкрепа. Въпреки усилията за прилагане на основните принципи на този модел, съществуват редица сериозни пречки. Много учители не са достатъчно подготвени, а организирането на учебния процес често се оказва затруднено, което прави почти невъзможно отговарянето на индивидуалните потребности на всеки ученик. Освен това в обществото все още се наблюдават предразсъдъци спрямо децата със специални образователни потребности, което допълнително усложнява тяхното пълноценно включване в образователната среда

1.3.6. Иновативни училища

За иновативни се считат училища, които въвеждат иновативни практики в учебния процес, които спомагат да се реформира образованието в зависимост от нуждите и спецификата на училищата. Така се осигурява автономност до голяма степен, което дава възможност да се развива мисленето и въображението, да се насърчават интересите и талантите. Иновациите могат да включват нови методи на преподаване, създаване на съвременна образователна среда, както и нови интегративни учебни предмети, които да включват в себе си модерни технологии, ново учебно съдържание и др. Набляга се на учене чрез правене, STEM подходите, работата в екип и др. Успешните методи се представят пред училища – партньори с цел популяризиране.

1.3.7. Преподавателски състав

Сериозен проблем в България са застаряващите учители и слабият интерес на завършващите средно образование към педагогическата професия. Около 50% от учителите в училищното образование са на възраст над петдесет години при средно 39% за ЕС, а около 31% са на 55 години при средно около 24% за ЕС. Това означава, че през следващите 10 години половината от учителите ще бъдат в пенсионна възраст. Недостигът на учители е сериозен и в малките населени места. Дефицит се наблюдава при учителите по математика, физика, химия, информатика и тези специалисти ще стават все по-търсени.

След деветдесетте години на XX век учителската професия се възприема като крайно неперспективна и непрестижна, което повишава липсата на обучени кадри. Редица мерки са предприети от държавата, за да повишат привлекателността на педагогическата професия – повишаване на заплатите, премахване на таксите за обучение в редица защитени педагогически специалности и др. За съжаление мерките все още не водят до сериозни резултати – все още младите учители, когато изобщо ги има, трудно се задържат в системата на образованието.

В България учител може да бъде човек, завършил педагогическа специалност в университет или такъв, който е завършил друго образование, но и следдипломна квалификация по предмета, по който ще преподава.

1.3.8. Обучение по математика

Математиката е фундаментална наука, която е необходима за обучението по химия, физика, инженерни науки, икономика, технологии.

В прогимназиалния етап на обучение часовете по математика са пет часа седмично, а в гимназиалния спадат на 3 часа седмично за осми и девети клас, и 2 часа от десети до дванадесети клас. В прогимназиален етап се изучават дроби, проценти, уравнения, геометрични фигури и тела, основи на вероятностите. В гимназиален темите са функции, вероятности и статистика, геометрия, уравнения и др. Поради профилирането си част от учениците в XI и XII клас изучават математиката на по-високо ниво и с повишен брой часове. Това са ученици, които са избрали математиката да бъде профилиращ предмет в образованието им.

След завършен начален етап на образованието се провежда Национално външно оценяване по математика. Освен това става възможно разделянето на учениците според математическите им способности и умения поради разкритите паралелки с профил „Математически“. Подборът става въз основа на постигнатите резултати на НВО, както и на редица национални математически състезания и областния кръг на олимпиадата по математика.

В края на прогимназиален етап на образование (VII клас) учениците се явяват на Национално външно оценяване по математика. Чрез него се измерва индивидуалният напредък на всеки ученик, а въз основа на резултатите се осъществява прием в осми клас. Фокусът на НВО е мониторинг на образователната система – измерва се функционалната грамотност, сравняват се постиженията, следи се качеството на образователния процес и постигането на ключовите компетентности, заложи в учебните програми, но и класиране на учениците на база техните постижения.

НВО по математика се провежда и в края на първи гимназиален етап (X клас). При него акцентът пада върху мониторинг на образованието, тъй като резултатите не се използват за прием в учебни заведения.

При завършване на втори гимназиален етап учениците имат възможност да положат държавен зрелостен изпит по математика, който служи и за прием в университетите в страната. Учениците, за които математиката е бил профилиращ предмет по време на обучението, полагат изпит по профилирана подготовка.

Учениците със заложи и талант в математиката имат възможност да се явят на национални и регионални математически състезания, които имат за цел да популяризират предмета и да насърчат сериозната подготовка.

1.3.9. Оценяване

Оценяването в България включва формиращо оценяване, текущи изпити и национални тестове. Национални външни оценявания (НВО) по български език и литература и математика се провеждат след различни етапи на образованието – след четвърти, седми и десети клас. Тези изпити са под формата на тест и включват задачи с избираем отговор и задачи със свободен отговор. Външните оценявания имат за цел да диагностицират напредъка и потребностите на ученика, както и степента на постигане на очакваните резултати. Използват се и за мониторинг на образователната система с цел подобряване на качеството на образованието. В началото на учебната година министърът на образованието и науката може да определи и други предмети, по които да се проведе НВО.

Средното образование завършва с полагане на ДЗИ (държавни зрелостни изпити), оценките от които могат да послужат за вход в университети. Зрелостниците полагат задължителен ДЗИ по български език и литература и по още един от профилиращите предмети. Учениците, завършващи професионално образование полагат изпит по професията.

2. Проблеми и предизвикателства при обучението по математика

Обучението по математика в съвременния свят среща множество трудности и предизвикателства. Основните са:

2.1. Негативно отношение към математиката

Много ученици твърдят, че не харесват и дори мразят математиката. Често се среща мнението, че човек трябва да е „гений“ и да притежава специфични заложи, за да се справя добре по математика. Тези убеждения водят до изграждане на неувереност у учениците и в последствие демотивация. Широко разпространено е и схващането, че наученото по математиката няма приложение в живота и знанията на високо ниво по този предмет не са необходими. Това допълнително

отслабва интереса на учениците и води до понижаване на тяхната мотивация за учене. Това отрицателно отношение към предмета може да се дължи на различни причини:

- **Страх от провал** – голяма част от учениците се притесняват да направят грешка и често това води до пълен отказ да направят опит да решат задача. Част от тях се смущават от евентуалната реакция на техните съученици и възможността за подигравки. Това поведение е типично за подрастващите, тъй като при тях мястото в социалния живот е от изключителна важност. Те искат да бъдат приети и дори да са лидери, а това изключва възможността да правиш грешки. Ролята на учителя е да насърчи учениците да опитат и да не се страхуват да грешат, тъй като е важен не толкова крайният резултат, а самият процес на решаване на задачата.
- **Математическа тревожност** – чувство на безпокойство и напрежение, водещо до пълна неспособност на ученика да се справи с математически задачи. Ученикът достига до паника, често срещана по време на тестове, изпитвания или при решаване на задачи на дъската. В тези ситуации ученикът не може да се фокусира, „забравя“ наученото и това води до ниски резултати. Това състояние често се дължи на предишни ниски оценки, страх от евентуалните реакции на родителите и други.
- **Липса на увереност** – ученикът не е сигурен в собствените си възможности и се отказва преди да е направил опит. Често срещани аргументи са „Аз не мога да реша това.“, „Не знам как се решава.“, „Много е трудно.“ и други. Този проблем може да се преодолее с чести и системни упражнения от страна на ученика, подкрепа от страна на учителя, работа на групи.
- **Пропуски от предишен материал** – ученикът не е усвоил достатъчно добре знания и умения, които са изучавани в предишни години. В резултат на това новите теми, които често са свързани с предходни знания, не могат да бъдат възприети и остават неразбрани. Това води до натрупване на пропуски, понижаване на резултатите и невъзможност да се справи със следващия учебен материал.

- **Стереотипи** – идеята, че математиката може да се научи и разбере само от „много умни“ и „надарени“ ученици. Смята се, че само хора, които притежават талант, могат да се справят с решаването на задачи, а това води до понижаване на мотивацията и до отказ да се търси помощ при проблем. Решението на този проблем би могло да бъде похвалата за усилията, които са положени, както и фокусът върху отличните познания по предмета.

2.2. Учебна програма

Твърде амбициозната учебна програма и недостатъчно часове по математика водят до задълбочаване на проблемите в обучението по математика. Учителите продължават напред, въпреки че учениците срещат затруднения и не са усвоили базовите знания. Липсата на достатъчно време за упражнения е предпоставка за недобро разбиране и понижаване на резултатите. В резултат на това рядко могат да се използват успешни стратегии за преподаване като индивидуален подход, евристика, кооперативно учене, интердисциплинарен подход и други, което води до демотивация и негативно отношение към математиката.

2.3. Дисциплина и атмосфера в класната стая

Дисциплината на учениците в класната стая също оказва влияние върху обучението. Липсата на ред води до невъзможност за концентрация, а от там и до невъзможност за усвояване на знанията. Учителят трябва да зададе ясни правила, които да важат за всички ученици, и да се опита да поддържа вниманието. При проблем е необходимо да потърси съдействие от останалите педагогически специалисти и родителите.

3. Ефективни методи и практики за преподаване на математика

3.1. Преглед на вече решени задачи

Този метод е една от най-ефективните стратегии за подпомагане на усвояването на нови знания. Той поставя акцент върху анализ и разбиране на решенията на задачите вместо запаметяване на алгоритми и модели. В основата му стои предварително разработен пример, в който всяка стъпка от решението е

подробно описана и обяснена. Задачата на учениците е да анализират представените решения, да разберат използваните стратегии, да ги обсъдят и да предложат други варианти. Така учениците стават активни участници в учебния процес. Целта е да се насърчи самостоятелната работа, разбирането на идеята и стъпките на решението. При нужда учителят предлага допълнителни обяснения и помощ на отделните ученици или групи, подпомага процеса чрез насочващи въпроси и стимулира учениците да представят свои обяснения на задачите.

Решенията примерни задачи трябва да бъдат подбрани внимателно и да са подредени по сложност, да имат връзка помежду си и да разглеждат различни стратегии за решаване. Разработените примери предоставят на учениците стратегии и модели, които да следват при решаване на задачи. Те могат да бъдат използвани по време на час или за самостоятелна работа въкъщи, за индивидуална или груповата работа.

Този метод се базира на проучване, направено от Джон Суелър „Теория на когнитивното натоварване“. Според него процесът на учене е тясно свързан с възможностите на работната памет. Когнитивното натоварване е количеството информация, което тази памет може да обработи. Надвишаването на това количество води до затруднения при усвояването на новите знания. Тази теория предполага, че изучаването на решени примери би улеснило обучението по математика, но само ако преди тях са предоставени обяснителни материали. Ученик, оставен да реши нов тип задача с минимални инструкции, може да го направи, но поради претоварването на работната памет е възможно да забрави стъпките. Описаният метод може да доведе до намаляване на тревожността, като развива аналитични умения и увереност в собствените възможности.

3.2. Създаване на положително отношение

Успехът в обучението по математика в голяма степен зависи от нагласите на учениците към предмета. Тези негативни нагласи биха могли да бъдат преодоляни чрез създаване на позитивна учебна среда, в която учениците не се страхуват от грешките си, а ги възприемат като важна част от процеса на обучение. Учениците трябва да осъзнаят, че математиката не е просто получаване на верен отговор, а процес, в който грешките са напълно естествени.

- **Похвала за усилията и труда** – учениците трябва да получават похвали за положените усилия, а не само за крайния резултат. Фокусът е върху самия процес, а не върху верния отговор или личните възможности на ученика. (например „Браво! Положил си много труд и си постигнал много!“, а не „Браво! Много си умен!“)
- **Възможност да повишат оценките си** – добра практика е да се дава такава възможност на учениците, например чрез поправка на някой тест или задача. Напредъкът в математиката се базира на натрупани знания, затова е от изключителна важност материалът да бъде добре овладян. По този начин се цели учениците все пак да научат нужното преди да се продължи към следваща тема. Друга такава възможност е взимане на участие по време на час, решаване на допълнителни задачи, работа по проект или др.
- **Възможност да направят теста отново** – работеща стратегия е понякога да се дава възможност на учениците да направят контролната работа отново, ако резултатът не ги удовлетворява. Това би намалило страха от провал, но освен това би спомогнало реалната цел на обучението – ученикът да научи конкретния материал и да продължи напред с необходимите базови знания. За да се елиминира възможността за безотговорност, учителят може да изиска активност по време на час, допълнителна домашна работа или други. Освен това, първоначалната оценка може също да се вземе предвид, за да разберат учениците, че отговорността за резултатите е в техни ръце.

3.3. Евристика

Терминът произлиза от гръцки и означава „Аз намирам“. Този метод предполага учениците да бъдат в ролята на откриватели, да разсъждават и сами да намират решения на задачите. Учителят дава задача и оставя учениците да направят опит сами да намерят решение като ги подпомага с подходящи въпроси и насоки. Фокусът е върху ученика – той трябва сам да намери подход за решение, а учителят е в ролята на страничен наблюдател. Учениците са активни участници в часа, те експериментират и така задълбочават познанията си по математика, придобиват увереност, развиват своите наблюдателност, аналитично мислене и способност за оценка на резултатите. Подходът е по-подходящ за по-големи ученици, с достатъчно натрупани знания и интелигентност над средното ниво. Стратегията

има известни недостатъци. На учениците трябва да се предостави достатъчно време, за да приключат с разсъжденията и да стигнат до решение, което е невъзможно в условията на българската образователна система – няма достатъчно часове за упражнения и обобщения. Освен това някои ученици не успяват да достигнат сами до решението и губят интерес, разочароват се и се демотивират. От друга страна учителите трябва да дават индивидуални насоки на всеки ученик, което също е трудно приложимо.

3.4. Учене чрез правене

Подход, който също би довел до положителни резултати е лабораторният подход. При него учениците играят и оперират с различни предмети в дадени ситуации. Целта е да се изгради готовност за развитие на абстрактни понятия. Подходът е подходящ за по-малки ученици и изисква добре оборудвани класни стаи, както и отлична подготовка от страна на учителя.

3.5. Постижимо предизвикателство

Основната идея на тази стратегия е да се различи нивото на всеки ученик и да се предоставят задачи, които едновременно го стимулират да излезе от зоната си комфорт, но и са постижими за неговите възможности. Целта е учениците да бъдат ангажирани в процеса на обучение като положат известни усилия за решаването на конкретна задача. Акцентът е да се постигне баланс между това дадената задача да е достатъчно трудна, за да предизвика интереса на ученика, но и постижима за неговите възможности. Така, при достигнато решение, учениците се чувстват удовлетворени от успеха си и виждат смисъл от усилията и постоянството си. Постижимото предизвикателство е мощен инструмент за повишаване на мотивацията и намаляване на стреса и тревожността. В резултат учениците развиват важни качества като постоянство, интерес, изобретателност и трудолюбие, а математиката се възприема като по-достъпна.

3.6. Работа на групи и кооперативно учене

Съвместното обучение трябва да се насърчава, за да се подпомогне екипната работа. В съвременния свят рядко се срещат задачи, върху които се работи самостоятелно. Ето защо е необходимо учениците да свикнат да работят в екип. Тази стратегия премахва конкуренцията между учениците и е еднакво полезна, както за учениците с ниски и средни резултати, така и за напредналите.

Участниците в групата са активни, възползват се от знанията на останалите и са мотивирани да дадат най-доброто от себе си. Насърчават се дискусиите и различните идеи, както и разглеждането на задачата от различни страни. Водещо е описването и обяснението на решението, което спомага затвърждаването на знанията.

3.7. Индивидуална работа

Използването на този метод позволява на всеки ученик да работи самостоятелно с темпо, което отговаря на собствените му възможности. Важно е учителят да дава на всеки ученик задачи, които са съобразени с неговото ниво, като така се постига и диференцирано обучение. Учителят има възможност да провери знанията и уменията на всеки ученик, като при проблем предоставя допълнителна помощ и инструкции.

3.8. Обясняване на решенията на дъската

Акцентът пада върху процеса на решаване на задачата, разсъжденията и идеите, които се предлагат. Решенията на задачите могат да бъдат представени от учителя или от учениците. Чрез този метод се стимулира умението за аргументиране и ясно обяснение на решенията. Възможно е да се достигне до дискусия, предлагане на допълнителни идеи или оптимизация на някои от решенията.

3.9. Интердисциплинарно обучение

При тази обучителна стратегия преподаваният материал се обвързва със знания, придобити по други предмети, например природни науки, информационни технологии, изобразително изкуство и др. По този начин се демонстрира приложимостта на знанията по математика в реалния живот и връзката между абстрактните математически понятия, останалите предмети и практиката. В резултат учениците достигат до ефективни умения, креативност, критично мислене и работа в екип. Интересът към математиката се повишава, а връзките между различните области водят до по-добро разбиране.

3.10. Проектно-базирано обучение

Насърчава активното учене, с помощта на което учениците придобиват знания и умения при решаване на задачи, свързани с практиката. Това е процес на

учене чрез търсене на решение на реален проблем. Стратегията се използва в тясна връзка с интердисциплинарния подход. Учителят дава насоки, а учениците участват активно чрез проучване, работа в екип и представяне на проекта. Методът е ефективен, защото учениците трябва сами да потърсят решение на даден проблем и да успеят да го презентират добре. В резултат учениците придобиват по-задълбочени знания, развиват аналитични и практически умения и свързват различни области на знанието.

VI. Анализи, изводи, опит

През последните десетилетия българската образователна система претърпява множество реформи, насочени към осъвременяване на учебните програми, усъвършенстване на методите и подходите на преподаване, интегриране на дигитални устройства, подкрепа на деца със специални образователни потребности. В България са реализирани редица инициативи, насочени към осигуряване на равен достъп до образователна среда, което води до известно намаляване на отпадащите ученици, въпреки че процентът е около 10%, над средния за ЕС.

Въпреки тези промени, България продължава да се сблъсква със затруднения и предизвикателства при прилагането на образователните си политики на практика. Резултатите от обучението на учениците в страната остават незадоволително ниски според международните стандарти. Последните международни изследвания показват, че над 40% от нашите ученици не достигат дори базовото ниво на умения, необходими за прилагане на знанията в реални житейски ситуации. Данните на Организацията за икономическо сътрудничество и развитие (ОИСР, OECD) сочат, че ако всички петнадесетгодишни в България постигат поне основните нива, то това би довело до дългосрочно повишаване на brutния вътрешен продукт (БВП).

Осъвременяването на учебните програми и начина на преподаване е строго наложително. Трупането на пасивни знания не е критерий за успех в ерата на изкуствения интелект и все по-бързо развиващите се технологии. Макар България да има добри традиции в сферата на образованието и да заема челните места в изследванията през осемдесетте години на XX век, целите и светът се променят. Постигнатото като образователни резултати вчера е маловажно днес и именно това налага преразглеждането на учебните програми и тяхната актуализация на по-кратък период от време. Модерното образование не предполага приложение на натрупани факти и знания, а развиване на компетенции, работа в екип, логическо и критическо мислене. Нужно е да се подготвят личности с по-добри и комплексни умения за по-динамичния свят. Тенденциите показват, че най-бързо развиващите се икономики в световен мащаб са онези, при които е направена цялостна бърза промяна на образователния модел. Пример за такъв пробив в образованието е

Сингапур. В България промените в образователните системи се правят „на парче“, често без да се стъпи на анализи на резултатите след предишните направени промени. Причина за това е и нестабилната политика на страната, която често води до промяна на ръководните постове в образователните единици и липсата на ясна и дългосрочна визия и цел.

Независимо от ежегодните отлични постижения на български ученици на международни олимпиади по различни учебни предмети – математика, природни науки и др., това не е достатъчно за модерното стопанство. Успешните икономики не се ръководят от успешни личности, а от образовани екипи. Това изисква голяма част от населението да има висока квалификация, да има знания и умения, които да може да прилага на практика, да забрави индивидуализма и да се научи на споделена отговорност и работа на групи.

Съществува и друг проблем на - менталитетът. За разлика от държавите в Азия, които се славят с отлично образование, в България институциите, в частност образованието като такава, както и учителите, не се радват на особено уважение и доверие сред населението. Културата на поведение и традициите, отговорността към страната, ученето през целия живот остават само цели на обучението, които нямат реална приложимост на практика. Промяната на нагласите изисква осъзнаване и разбиране на личната роля в обществото. Отправна точка за това е вътрешната мотивация и ясното виждане, че успехът е важен. Именно моралните качества и социалните умения водят до стабилни резултати в образованието в Япония. Мотивацията в България е много ниска, тъй като често образованите, знаещи и можещи хора са с по-нисък социално-икономически статус от необразованите си съграждани. Това обезкуражава подрастващите и ги демотивира да се стремят към знания и развитие.

Разгледаните учебни системи се характеризират със строг подбор на преподавателския състав. Само зрелостниците с най-добри резултати имат възможност да продължат обучението си и да станат учители. В това отношение България прави изключение. Поради ниския интерес и недостатъчното възнаграждение, има недостиг на учителите в страната, което е посочено в предишната точка, посветена на образователната система в България.

Ранното профилиране също води до евентуални проблеми. В България профилирането се извършва след завършен основен етап (седми клас), при което възрастта на учениците не предполага взимането на осъзнати решения за своето бъдеще. Често тези решения, поради незрялостта на учениците, се взимат под влияние на родителите и заобикалящата ги среда.

Предизвикателствата на съвременния технологичен свят изискват модернизация на образованието. Изследванията показват, че средният брой часове по математика в българското училище е по-нисък от този в другите държави. Заради това и последните промени, инициирани от МОН са в тази посока – повишаване на часовете по математика и природни науки, защото това е отговорът на развитите общества.

Математиката не е свят от формули и уравнения. Тя е универсалният език, с който можем да опишем целия свят. Тя ни дава възможност да се научим на труд и постоянство, на работа в екип, на усърдие, на критическо и логическо мислене – все компетенции, необходими за повишаване на социално-икономическия статус на населението. Наред с това ни помага да намерим смисъл в природата, да проумеем случващото се около нас, като използваме знанията и уменията, които сме натрупали. Например експоненциалните зависимости при епидемични обстановки могат да се опишат и разберат чрез математическия апарат.

Приобщаващото образование, което е обект на оценяване от ОИСР, покрива изискванията на организацията. Практиката показва, обаче, че често то съществува само формално, „на хартия“, и е невъзможно да се приложат принципите му на практика. Недостатъчно подготвените учители, ограничените ресурси и предразсъдъците са само част от предизвикателствата пред този модел. Често учителите срещат затруднения да диференцират знанията и уменията, заложи в урока, така че да отговарят на потребностите на децата с различни образователни потребности, в това число и на талантливите деца. Образователната система в България не предоставя възможност за диференциран подход. Фокусът пада върху учениците със средни резултати, докато тези със скромни възможности, както и онези, които притежават талант, остават без реална подкрепа. По време на учебния час учениците с ограничени възможности се налага да достигат останалите, а талантливите нямат реално поле за изява и за допълнително развитие на потенциала

си. Именно индивидуалният подход към ученика в Сингапур е една от причините за добрите резултати.

Полученото образование не съответства на потребностите на пазара, което често води до недостиг или пренасищане на специалисти в определени области. Необходимо е да се разработят и приложат мерки и политики за по-добра реализация чрез регулация на определени специалности.

Акцентът на разгледаните образователни системи (Сингапур и Япония) е върху постигане на успех чрез усърдие, усилия и труд, като често стресът и натискът върху учениците се сочи за основен проблем. Резултатите, обаче, показват висок образователен стандарт и бързо развиващи се икономики, нещо, към което се стремим.

Националните оценявания в България често се прилагат без да бъде направен подробен анализ на измерителните качества на тестовите задачи, които се използват. Коефициентът на надеждност е мярка за точността на получените балове и устойчивостта на резултатите от измерването. Тестовите се прилагат директно, без нужната апробация – процес, при който тестовите задачи се поставят и анализират в средата, в която се очаква да работят. Това „предварително изследване“ има за цел да направи оценка на качествата на тестовите задачи, като се коригират неточностите, непълните условия, „неработещите“ дистрактори и грешките в задачите.

Направеният анализ на образователните системи в чужбина показва, че голяма част от подходите, с които те се характеризират, се използват и у нас. Примери за това са спираловидният подход (Сингапур), проектно-базираното обучение (Сингапур), фокусът върху решаването на проблеми (Япония и Сингапур), външните оценявания (изпити на различни етапи и в Сингапур, и в Япония), формиращото оценяване и др. Защо в България тези модели не водят до очакваните резултати? Образованието ни се намира на петдесет и седмо място в световната класация. Причините са комплексни – социални неравенства, култура, мотивация. Пътят към подобряване е пълна промяна на образователната система и формиране на ясни и дългосрочни цели и стратегии, базирани на анализи на резултати. Нужен е поглед към най-добрите образователни системи в световен мащаб, които след внимателно проучване и адаптация към нашите условия, да

бъдат приложени в страната. Задължителна е промяната на нагласите в обществото към зачитане на правила и норми, уважение към институциите, усърдие, труд и полагане на усилия за повишаване на собствените знания и умения.

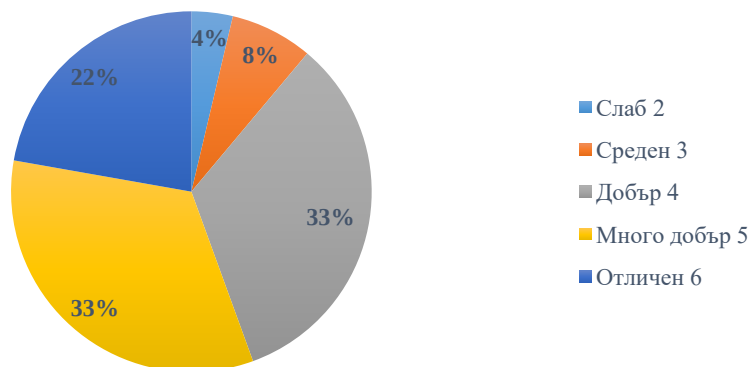
VII. Резултати от тест „Входно ниво“

1. VIII клас

Таблица № 1

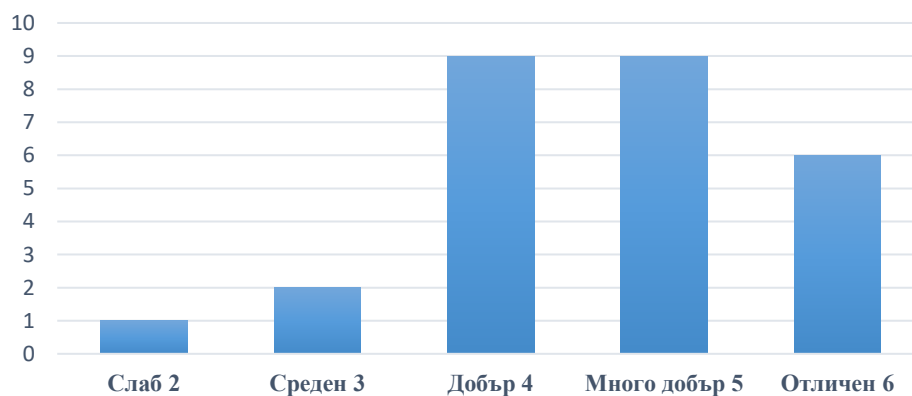
№	Ученик	Точки	Оценки	Оценка в цифри
1	А.Й.	29	Отличен	6.00
2	А.С.		отсъствал	
3	А.И.	14	Добър	4.00
4	Б.С.	29	Отличен	6.00
5	Б.Г.	24	Много добър	5.00
6	В.Н.	16	Добър	4.00
7	Г.А.	24	Много добър	5.00
8	Д.Т.	14	Добър	4.00
10	Д.Р.	17	Добър	4.00
11	Д.С.	5	Слаб	2.00
12	Д.П.	23	Много добър	5.00
13	И.К.	22	Много добър	5.00
14	Й.К.	26	Много добър	5.00
15	К.А.	28	Отличен	6.00
16	К.Д.	19	Много добър	5.00
17	М.Т.	17	Добър	4.00
18	М.Й.	16	Добър	4.00
19	М.Р.	19	Много добър	5.00
20	М.Е.	30	Отличен	6.00
21	Н.Я.	26	Много добър	5.00
22	Н.К.	31	Отличен	6.00
23	Н.У.	11	Среден	3.00
24	Н.А.	17	Добър	4.00
25	Н.С.	11	Среден	3.00
26	Н.Г.	18	Добър	4.00
27	С.Ч.	32	Отличен	6.00
27	Ц.Д.	25	Много добър	5.00
28	Ц.Л.	18	Добър	4.00

**Процентно разпределение на оценките в
тест "Входно ниво" - VIII клас**



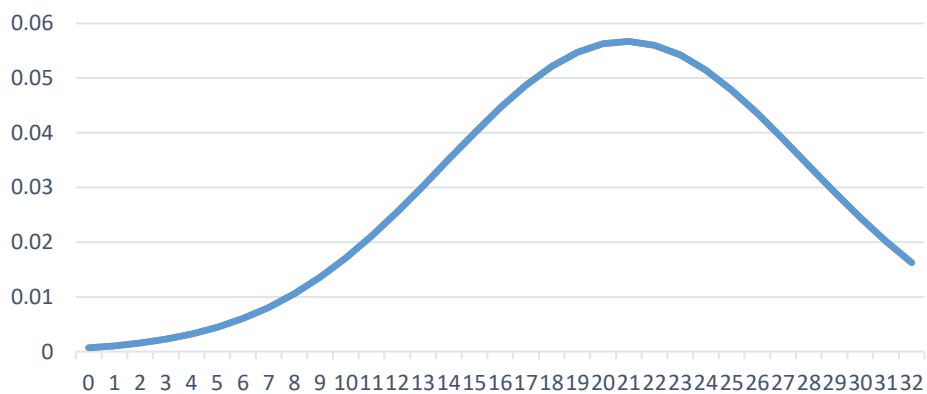
Фиг. 4.

**Разпределение на оценките в тест "Входно
ниво" - VIII клас**



Фиг. 5.

Нормално разпределение на точките - VIII клас

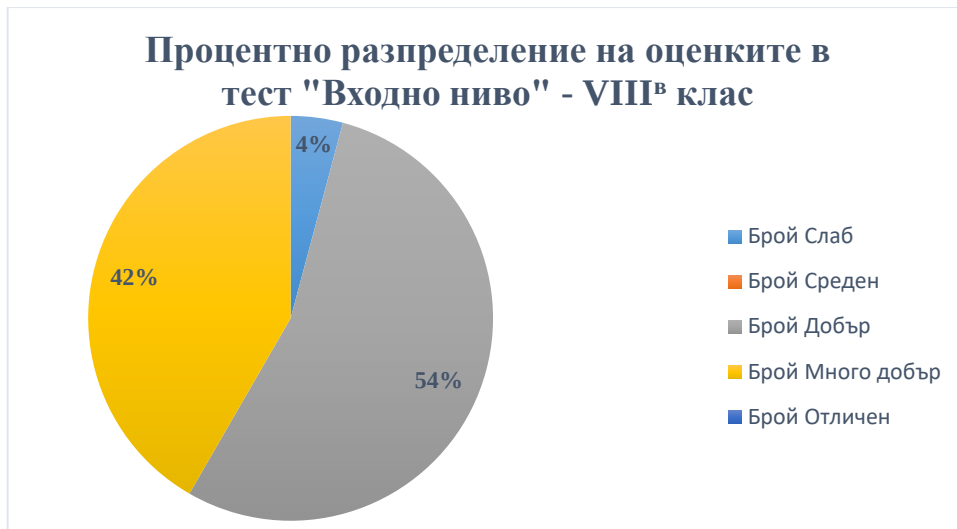


Фиг. 6.

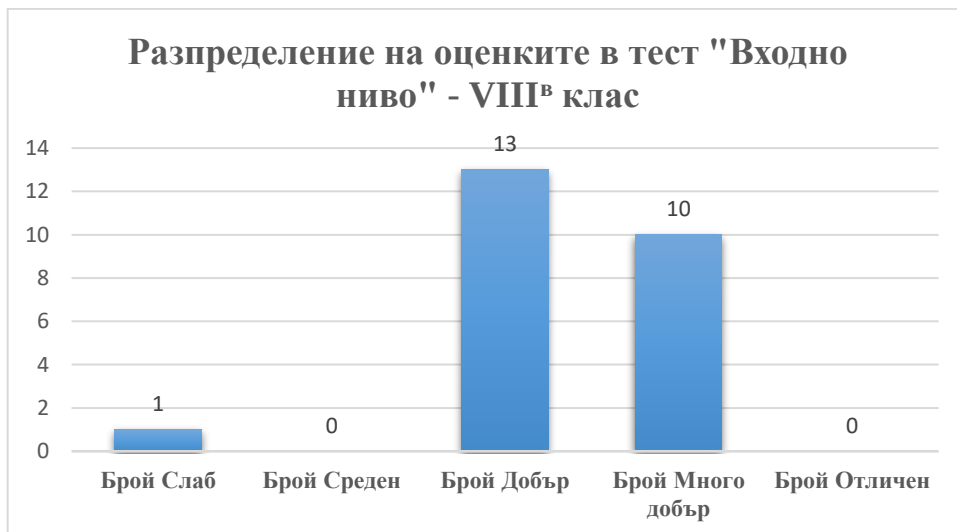
2. VIII^в клас

Таблица № 2

№	Ученик	Точки	Оценка с думи	Оценка в цифри
1	А.Н.	22	Много добър	5.00
2	А.З.		Отсъствал	
3	Б.Г.	14	Добър	4.00
4	В.С.	14	Добър	4.00
5	В.Я.	22	Много добър	5.00
6	В.Г.	17	Добър	4.00
7	Г.С.	23	Много добър	5.00
8	Д.Г.		Отсъствал	
10	И.И.	14	Добър	4.00
11	Й.Д.	21	Много добър	5.00
12	Й.Й.	25	Много добър	5.00
13	Й.Р.	23	Много добър	5.00
14	К.Ц.	17	Добър	4.00
15	К.Б.	19	Много добър	5.00
16	К.К.	14	Добър	4.00
17	К.К.	23	Много добър	5.00
18	Л.Ж.	21	Много добър	5.00
19	Л.Г.	0	Слаб	2.00
20	М.Д.	16	Добър	4.00
21	М.Й.	14	Добър	4.00
22	М.П.	16	Добър	4.00
23	М.Р.	23	Много добър	5.00
24	Н.К.	14	Добър	4.00
25	П.А.	19	Много добър	5.00
26	Р.О.	22	Много добър	5.00
27	С.Н.	14	Добър	4.00



Фиг. 7.

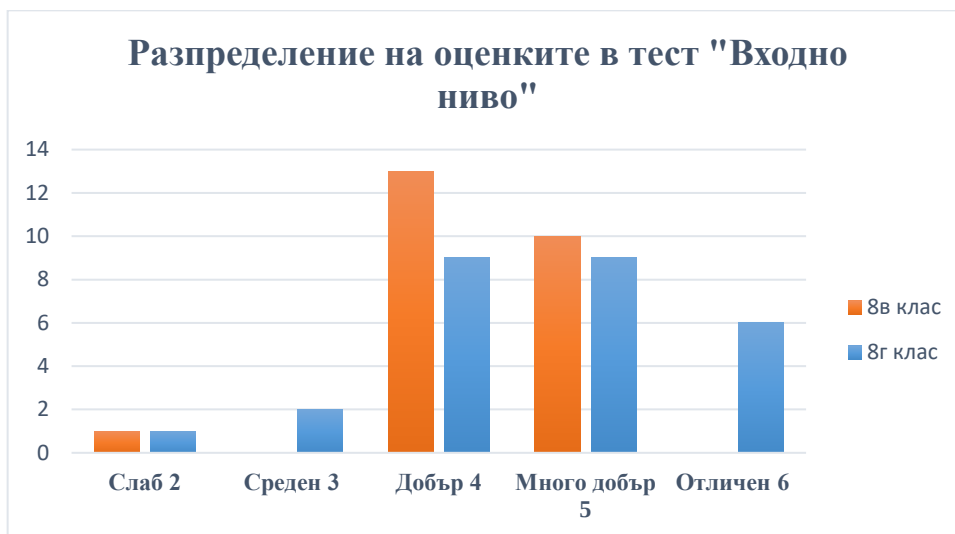


Фиг. 8.

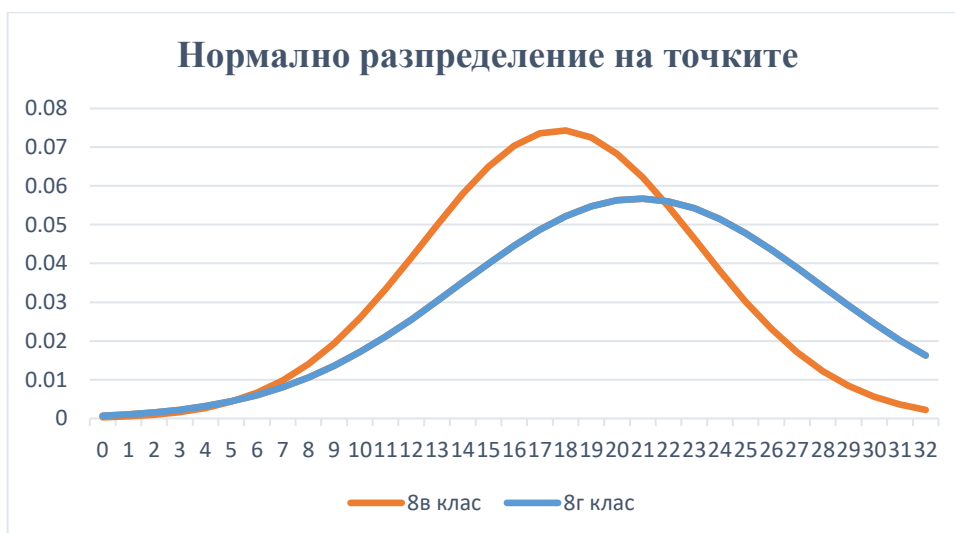


Фиг. 9.

VIII. Статистика, сравнение и анализ на резултатите от тест „Входно ниво“



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Таблица № 3

Клас	Брой ученици в класа	Брой неизпитани ученици в класа	Брой оценки					Среден успех	
			Слаб	Среден	Добър	Мн. добър	Отличен		
			2	3	4	5	6	С думи	С цифри
VIII ^в	26	2	1	0	11	12	0	Мн. добър	4.63
VIII ^г	28	1	1	2	9	9	6	Добър	4.42
Общо:	54	3	2	2	20	21	6	Мн. добър	4.53

Резултатите от теста показват затрудненията на учениците и учебното съдържание, което не е усвоено напълно. Учениците се затрудняват при:

- Прилагане на формули за съкратено умножение и разлагане на многочлени на множители
- Съставяне на математически модел за задачи от движение
- Работа с проценти

Като най-трудни могат да се определят задача 2 и 6, при които процентът решили изцяло задачата е много малък. В VIII^Г клас 8 ученика изобщо не са решили задача 6, а в VIII^В клас – 10 човека. На задача 2 средният брой точки в VIII^Г клас е 4,06 от максимални 11, а в VIII^В клас – 3,63. На база резултатите задача 1 и 3 могат да се определят като най-лесни.

При оценяването се използва суровият бал (точките, получени от всеки ученик), който се приравнява към оценка по шестобалната система чрез използване на скала, която е приложена към всеки тест. Скалата за оценяване е получена с помощта на метода чрез използване на брой получени точки спрямо максималния брой точки от теста. Използва се формулата:

$$P = 2 + 4 \cdot \frac{R}{M}, \text{ където:}$$

P – Оценка на ученика.

R – получен тестов бал от ученика

M – максимален брой точки от теста

Средният брой точки в VIII^В клас е около 18, а в VIII^Г – около 21 (Таблица № 1 и Таблица № 2). Симетричната форма на нормалното разпределение на точките в VIII^В клас показва (фиг. 9), че по-голямата част от учениците са постигнали резултат, близък до средния. При VIII^Г клас резултатите на голяма част от учениците са по-близко до максималния (фиг. 6). Сравнението на нормалното разпределение на точките в двата класа показва (фиг. 11), че има разлика в постиженията на учениците от двата класа. В VIII^Г има шест отлични оценки, а в VIII^В няма нито една (Таблица № 3). И в двата класа има по една слаба оценка.

IX. Анализ на анкетното проучване

1. Ученици, участващи в изследването

Анкетното проучване е проведено сред ученици от пети и осми клас в Природоматематическа гимназия „Христо Смирненски“ – град Перник. Общият брой на участниците е 63, като 19 са от пети клас, а 44 - от осми клас. Процентното разпределение е показано на фиг. 12. Двете групи ученици са избрани, за да се направи сравнителен анализ между нагласите и мотивацията в началото на прогимназиален етап и в началото на първи гимназиален етап.



Фиг. 12.

- **Ученици от V клас – профил „Математически“.** Намират се в началото на прогимназиален етап на обучение, все още не са изградили напълно своето отношение към математиката.
- **Ученици от VIII клас – профил „Хардуерни и софтуерни науки“ и профил „Природни науки“.** Навиците за учене, мотивацията и осъзнаването на важността на предмета са вече изградени.

2. Въпроси

Въпросникът (вж. Приложение № 1) съдържа петдесет и един въпроса, които са насочени към изследване на нагласите и отношението към учебния предмет математика. Анкетата е разработена в Google forms и е разпространена чрез използване на инструментите на Google Workspace, а именно Google Classroom. Анкетата е напълно анонимна – не се събират лични данни и e-mail

адреси на учениците. Целта е учениците да отговарят честно без да изпитват притеснения от последици от дадените отговори.

Въпросите в анкетата са формулирани като твърдения, чиято цел е да се събере информация за начина на работа в час и самоподготовката на учениците за часа по математика, мотивацията им и навиците им за учене, влиянието на средата и степента на интерес към предмета. За оценка на отговорите се използва петстепенна скала на Ликерт, при която учениците трябва да посочат степента на съгласие или несъгласие с всяко от твърденията. При посочване на отговор на въпрос всеки ученик има възможност да избира от пет възможности по скала от 1 до 5, където 1 е „никога“, 2 – „рядко“, 3 – „понякога“, 4 – „често“, 5 – „винаги“. Когато въпросът касае отделено време (например за самоподготовка), то 1 е „най-малко“, а 5 – „най-много“. По този начин могат да се измерят различни стойности, нагласи, честота, качество, удовлетвореност и др.

Въпросите са групирани в няколко раздела:

- **„Работа в клас“** – анализира участие по време на час, внимание, ангажираност, тревожност.
- **„Тест/ Контролна работа/ Изпитване/ Класна работа/ Оценяване“** – анализира подготовката за различни изпитвания, мотивация за по-добри постижения, роля на оценката.
- **„Самоподготовка“** – изследва навиците за учене, време и различни методи за подготовка.
- **„Общи въпроси“** – изследва нагласите към учебния предмет и оценка на собствените постижения.

3. Коефициент на надеждност на изследването

Надеждността на теста е мярка за точността на получените резултати и устойчивостта им от измерването. Тя изразява вероятността за получаване на един и същи резултат от един кандидат във времето. Ако хипотетично проведем един и същи тест няколко пъти на едни и същи ученици, като приемем, че те не го помнят, то получените резултати при различните изследвания трябва да бъдат сходни.

Стойността на коефициента на надеждност варира от 0 до 1, като по-висока стойност показва по-голяма надеждност. Висока надеждност над 0,80 показва, че задачите са „хомогенни“. Надеждността определя съгласуваността между твърденията – колко близки са те.

3.1. Алфа на Кронбах

С негова помощ се идентифицира какъв е приносът на всяко твърдение за общата надеждност на теста. В конкретния въпросник $\alpha = 0,88$ за целия въпросник, което показва, че въпросите са добре формулирани и тестът има много добра надеждност ($0,8 < \alpha < 0,9$).

$$\alpha = \frac{N}{N-1} \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2}{\sigma_{\text{обща}}^2} \right)$$

, където:

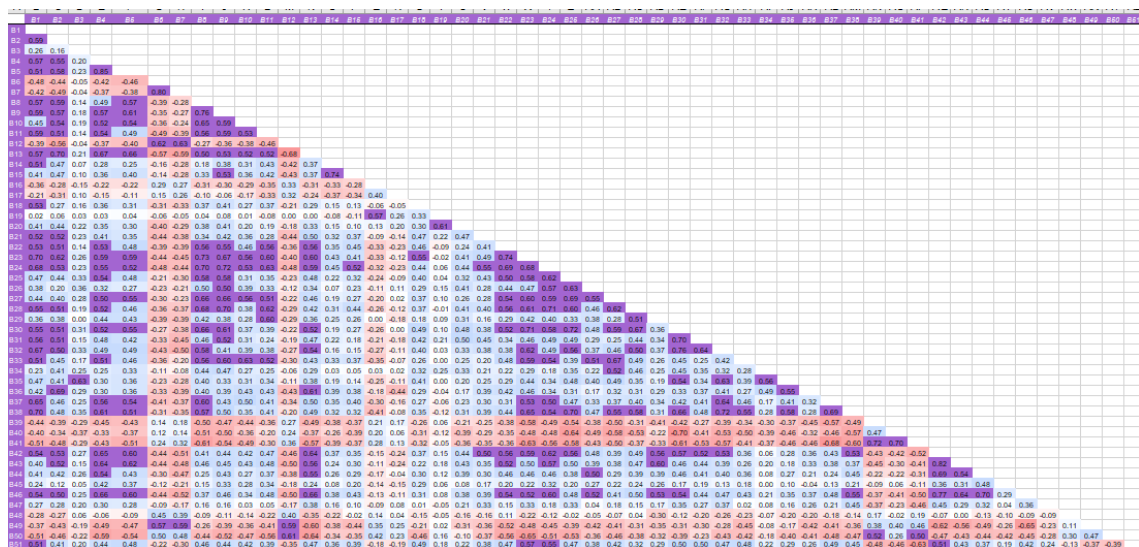
N – брой въпроси

σ_i^2 – дисперсия на всеки от въпросите

$\sigma_{\text{обща}}^2$ – дисперсия на сумата на всички въпроси

3.2. Корелационна матрица

Корелационната матрица (фиг. 13) съдържа коефициентите на корелация за всяка двойка тестови задачи. В изследвания тест средният коефициент на корелация, изчислен по този метод, е 0,90. Той е близък до максималната стойност 1, както и до стойността на алфа на Кронбах. Това показва, че надеждността на теста е отлична.



Фиг. 13. Корелационна матрица на анкетното проучване

3.3. Корелация на получените резултати

Корелационният анализ (фиг. 13) показва връзката между отговорите на различните твърдения като се анализират коефициентите им на корелация. Колкото е по-голям коефициентът, толкова е по-силна връзката между твърденията. Целта е са се покаже причинно-следствена връзка при факторите, отнасящи се до положените усилия, мотивацията и резултатите на учениците.

3.3.1. Активно участие – самоподготовка - резултати

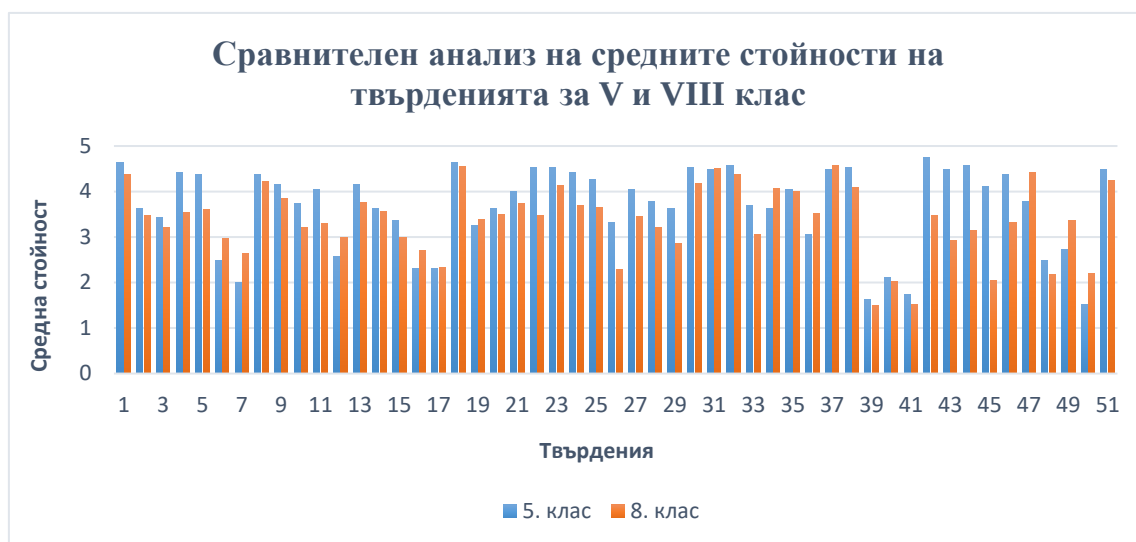
Корелационната матрица показва, че учениците, които внимават по време на час, са именно онези, които поставят училището и подготовката на първо място. Те отделят и достатъчно време и внимателно подготвят домашната си работа. Онези от тях, които участват активно по време на час, участват в дискусиите и се опитват да предлагат решения на задачите, при проблем не се страхуват да потърсят помощ от преподавателя си. В този смисъл подкрепата на учителя и липсата на притеснение у учениците водят до по-добри резултати, а евентуалната им липса е стимул за по-усърдна работа. Тези ученици ясно осъзнават полезността на математиката, както и тясната ѝ връзка с останалите предмети.

3.3.2. Нагласи към предмета – тревожност и страх от грешки

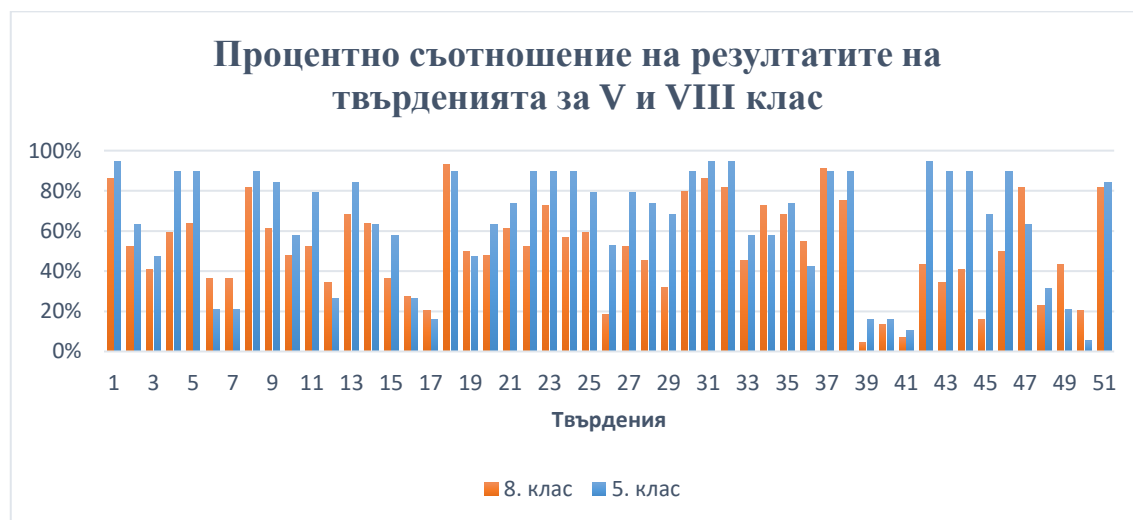
Учениците, които смятат, че математиката е трудна, често не пишат домашните си работи и не участват активно в часа. Те смятат, че недоброто им представяне на тестове се дължи на притеснение. И обратно, учениците, които

харесват предмета, са активни участници в часа по математика. Вътрешната им мотивация ги кара да отделят най-много време за самоподготовка, а евентуалните им ниски оценки са стимул за по-задълбочена работа. Те не се страхуват да предлагат решения и осъзнават важността на математиката.

4. Анализ на навиците за учене



Фиг. 14.



Фиг. 15.

4.1. Самоподготовка

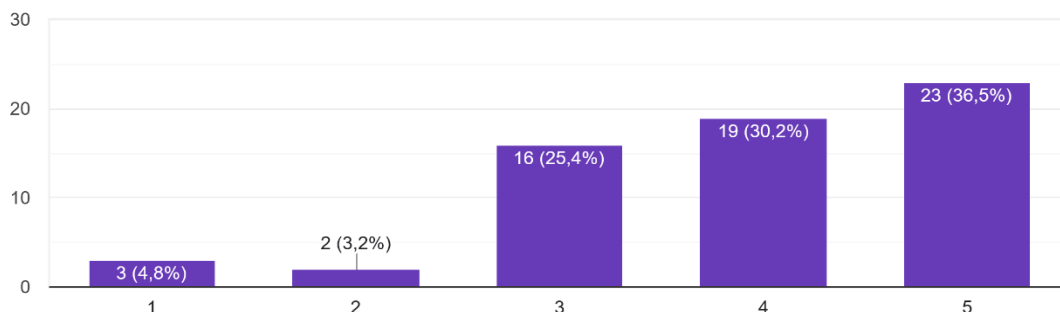
Резултатите от проведената анкета показват, че близо 67% от учениците посочват, че за тях подготовката за училище е от първостепенно значение (фиг. 16), а за около 42% тя е на първо място (преди спортните дейности и допълнителни

школи – фиг. 17). 54% твърдят, че отделят повече от достатъчно време за самоподготовката си. Въпреки това близо 16% демонстрират, че имат по-важни занимания извън училище. Комуникацията с приятели е по-важна от ученето за близо 72%, което сочи, че за подрастващите социалните контакти са най-важни (фиг. 18).

Сравнението на резултатите при двете възрастови групи ясно демонстрира, че петокласниците отдават по-голямо значение на подготовката за училище от осмекласниците. 89% от учениците от V клас посочват, че за тях подготовката за училище е от първостепенно значение, а 79% поставят училището пред допълнителните занимания (спортни дейности и различни школи). Едва 57% от гимназистите считат, че подготовката за училище е най-важна, а 59% го поставят пред допълнителните занимания. За 53% от петокласниците обаче училището е по-важно от общуването с приятели. Тези резултати се дължат на факта, че учениците в прогимназиален етап все още зачитат училището като институция и с помощта на родителите си осъзнават важността му.

За мен подготовката за училище е от първостепенно значение.

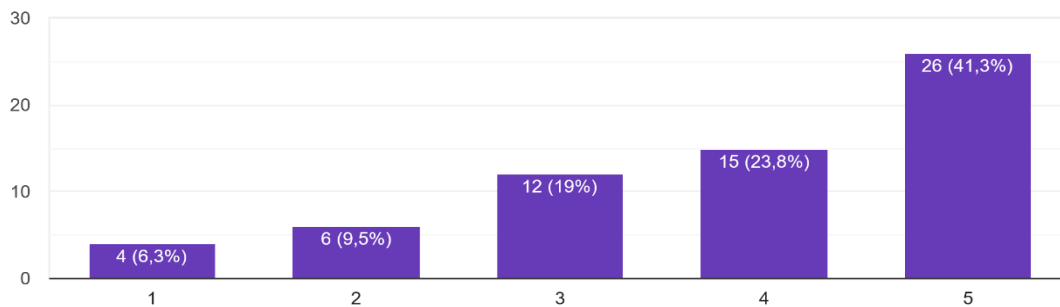
63 отговора



Фиг. 16.

Поставям училището пред спорта и допълнителните занимания (допълнителни уроци, школи и т.н.).

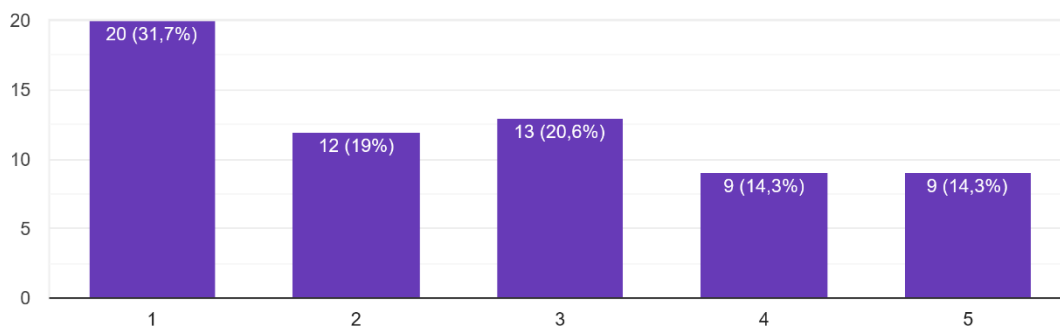
63 отговора



Фиг. 17.

За мен училището е по-важно от комуникацията с приятели.

63 отговора

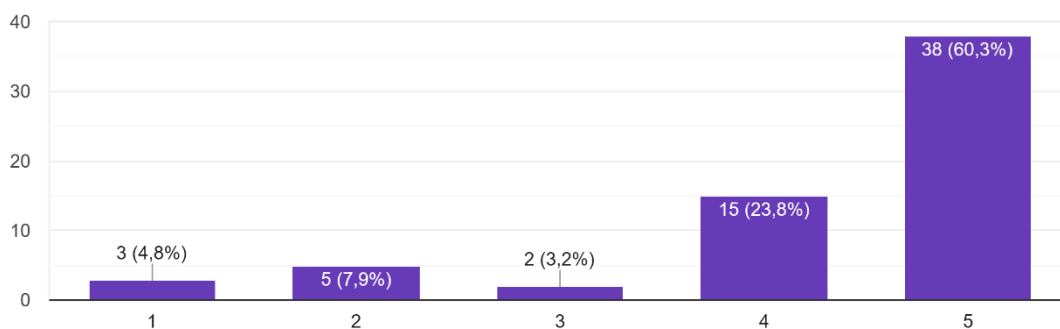


Фиг. 18.

Относно подготовката си за тестове и изпитвания (фиг. 19, фиг. 20, фиг. 21, фиг. 22), по-голямата част от анкетираните ученици полагат усилия. Над 60% са отговорили, че винаги се подготвят за изпитване, а 68% правят преглед на уроците си като част от подготовката си. Около 50% от отговорилите на анкетата преглеждат повторно решените по време на час задачи, а 48% решават допълнителни задачи с цел по-добро усвояване на материала и постигане на по-високи резултати.

Винаги се подготвям за изпитване.

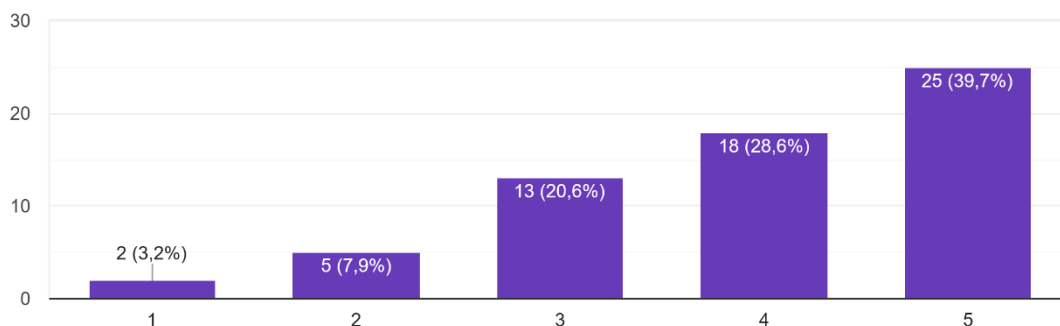
63 отговора



Фиг. 19.

Чета отново уроците си, за да си припомня материала.

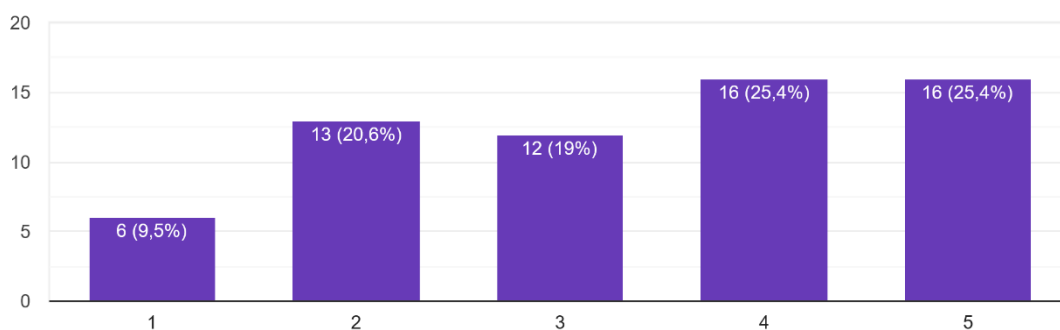
63 отговора



Фиг. 20.

Решавам задачите, които сме решавали по време на час.

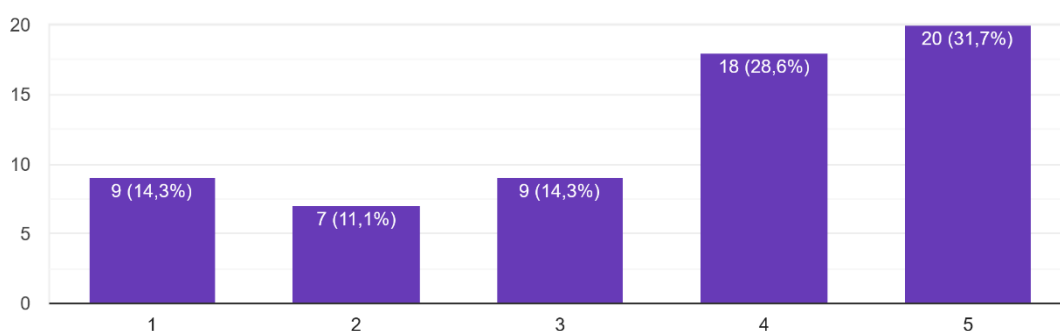
63 отговора



Фиг. 21.

Решавам допълнителни задачи, за да се подготвя по-добре.

63 отговора

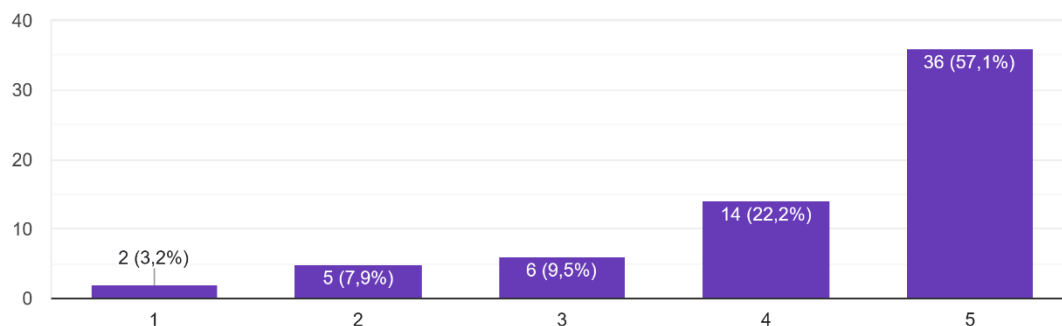


Фиг. 22.

43% от анкетиранияте отделят достатъчно време и внимание при подготовката на домашната работа (фиг. 23), а едва 8% я смятат за безсмислена и не я пишат (фиг. 24). Всички тези данни демонстрират висока учебна дисциплина и добри навици за учене при голяма част от учениците.

Отделям достатъчно време и пиша домашната си работа внимателно.

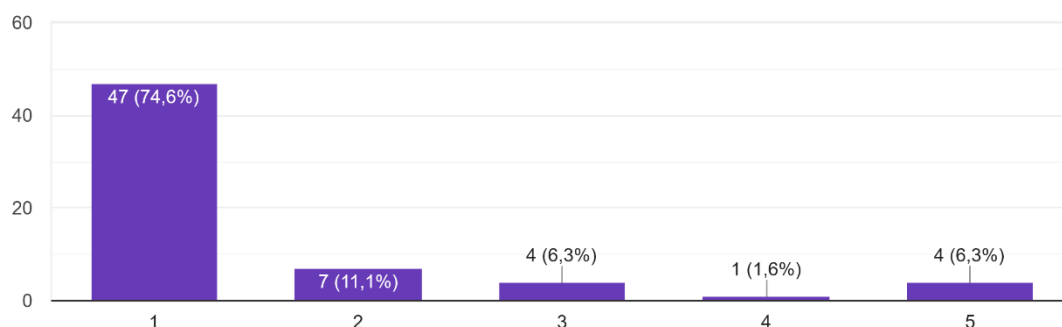
63 отговора



Фиг. 23.

За мен домашната работа е безсмислена и не я пиша.

63 отговора



Фиг. 24.

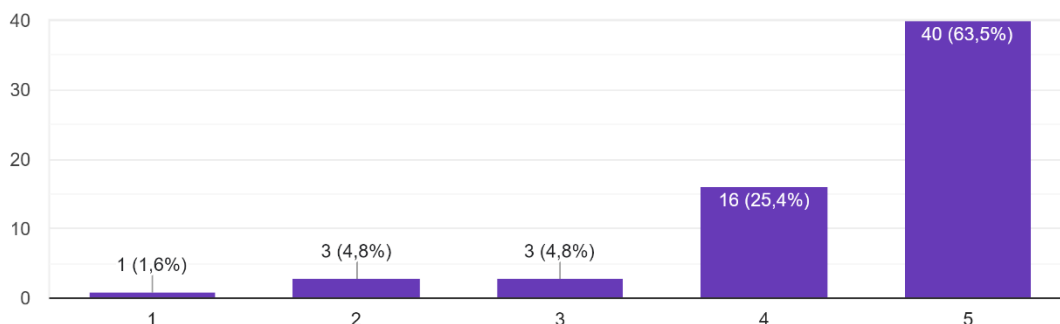
4.2. Поведение по време на час

Въпросите, включени в тази секция, изследват участието и активността на учениците по време на час, както и тяхната степен на тревожност при работа в клас.

Значителна част от анкетираните ученици (89%) твърдят, че по време на час внимават и си водят записки, докато учителят преподава или обяснява различни методи за решаване на задачи (фиг. 25). Високият процент е показател за осъзнаването на важността на учебния процес и свидетелства за усърдието, което полагат учениците. Учениците разбират, че записките са необходими за осмисляне на материала и са ценна помощ при самоподготовка.

В час внимавам и записвам всичко, за да мога да си припомня новите знания вкъщи.

63 отговора



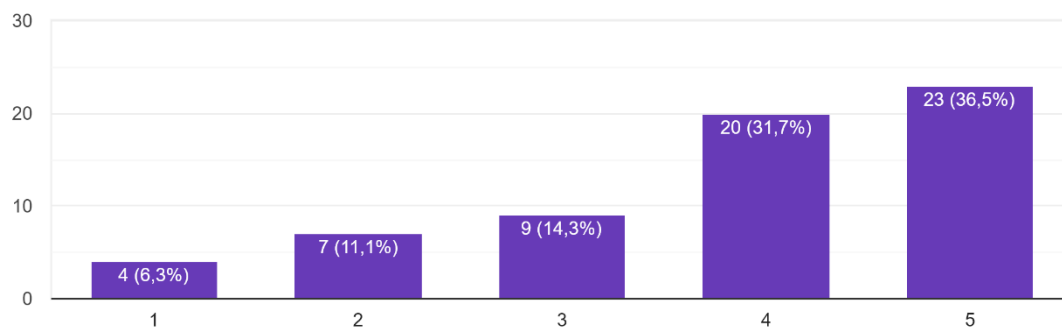
Фиг. 25.

По темата за активното участие - около 68% участват в дискусиите по решаваните задачи и се стараят да предложат свое решение (фиг. 26, фиг. 27). Тези резултати подкрепят твърдението, че голяма част от учениците проявяват висока ангажираност и активност, което е показател за положителната нагласа към предмета. Въпреки високият процент, обаче, резултатите разкриват и група ученици (около 30%), които проявяват висока степен на тревожност и изпитват притеснения да се включват активно в часа по математика (фиг. 28). Причините за това вероятно са различни, но обезпокоително е, че около 35% споделят, че се притесняват от подигравки в случай на грешка (фиг. 29). Това е голяма пречка за учебния процес и показва, че не малка част от учениците са пасивни по време на час. Този проблем може да се избегне, като учителят положи усилия да наблегне, че грешките са неделима част от процеса на обучение и тяхното обсъждане би могло да доведе до повишаване на резултатите.

Сравнителният анализ между двете групи ученици показва по-високи нива на тревожност при гимназистите. При осмокласниците (36%) притеснението и страхът от грешка са по-големи отколкото при петокласниците (21%), което често води до намаляване на активността по време на час. Причините за тези резултати са различни, но често се свързват с пубертета и промените, до които той води. Част от факторите са желанието за адаптация, за одобрение от връстниците, стремежа да бъдеш популярен. Тревожността идва от страха да бъдеш отхвърлен или да не оправдаеш очакванията на останалите. Повишената отговорност на гимназистите е ключов фактор за притесненията – от тях се очаква избор на професия и бъдеща реализация.

Участвам активно в дискусиите и решаването на задачите по време на час.

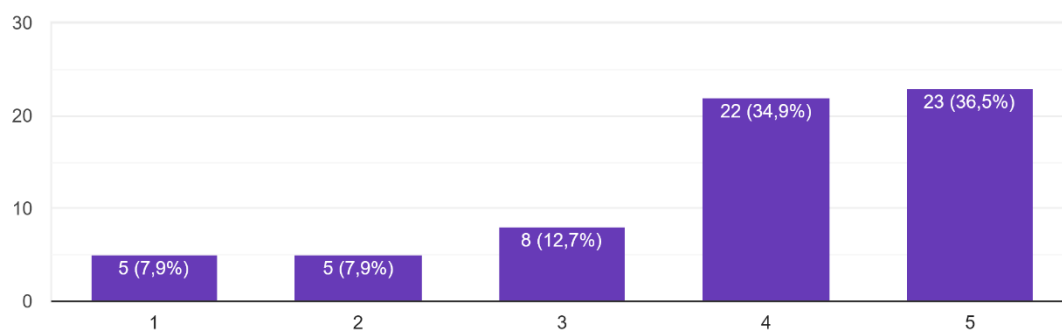
63 отговора



Фиг. 26.

Старая се да предлагам решения на задачите, които решаваме по време на час.

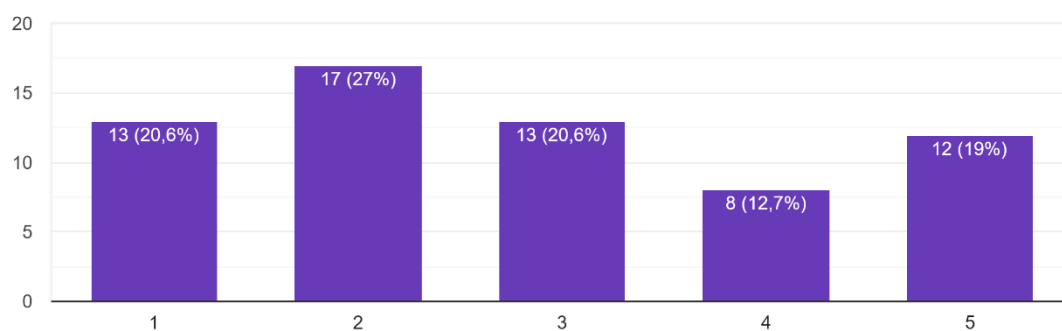
63 отговора



Фиг. 27.

Притеснявам се да взимам участие по време на час, за да не сгреша.

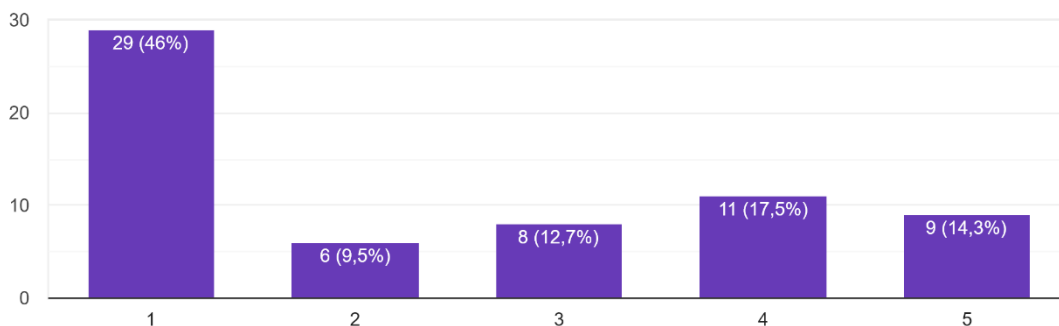
63 отговора



Фиг. 28.

Притеснявам се да решавам задачи на дъската, за да не ми се подиграват съучениците/преподавателя.

63 отговора



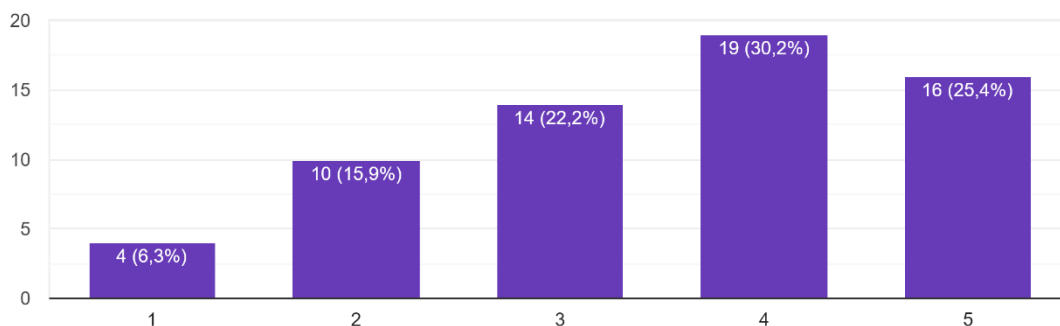
Фиг. 29.

Относно търсенето на помощ и допълнителна информация при проблем или недостатъчно добре разбран материал се разграничават ясно различни групи ученици. 55% от анкетираните не се притесняват да попитат учителя при проблем, което е индикатор за изградена подкрепяща среда и добра комуникация учител – ученик (фиг. 30). Насърчаването на активността по време на час би могло да допринесе за повишаване на този процент, като същевременно ще спомогне навременното изясняване на неразбрания материал и намаляването на пропуските в знанията. Това е ключов фактор за повишаване на мотивацията и резултатите.

Фактът, че едва 43% биха потърсили информация в интернет (фиг. 31), сочи, че голяма част от учениците нямат изградени навици за самостоятелна работа и не прибегват до търсене на информация, а разчитат основно на външна помощ (от страна на учителя). Този резултат също е тревожен, тъй като в съвременния свят дигиталната грамотност, в частност търсенето и извличането на информация, е една от ключовите компетентности, необходими за развитие на критично и аналитично мислене. Учителите биха могли да се справят с този проблем чрез повече дейности, свързани с търсене и извличане на информация, чрез включване на проектно-базирано обучение и различни задачи, изискващи употребата на дигитални ресурси.

Ако не разбера нещо по време на час, питам преподавателя.

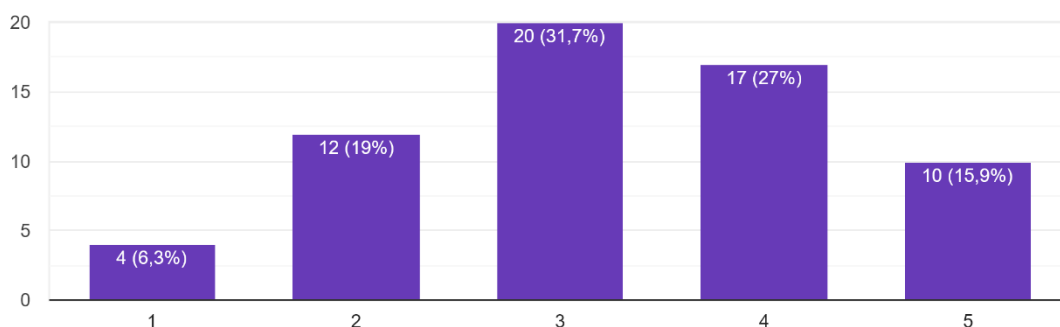
63 отговора



Фиг. 30.

Ако не разбера нещо по време на час, ще потърся информация в интернет.

63 отговора



Фиг. 31.

4.3. Мотивация

4.3.1. Вътрешна мотивация

Вътрешната мотивация за учене възниква, когато човек има интерес и самото действие му носи удовлетвореност, а не защото някой друг изисква това от него. Учениците започват да работят самостоятелно, защото чувстват, че положените усилия имат значение и биха довели до успешна реализация в бъдеще.

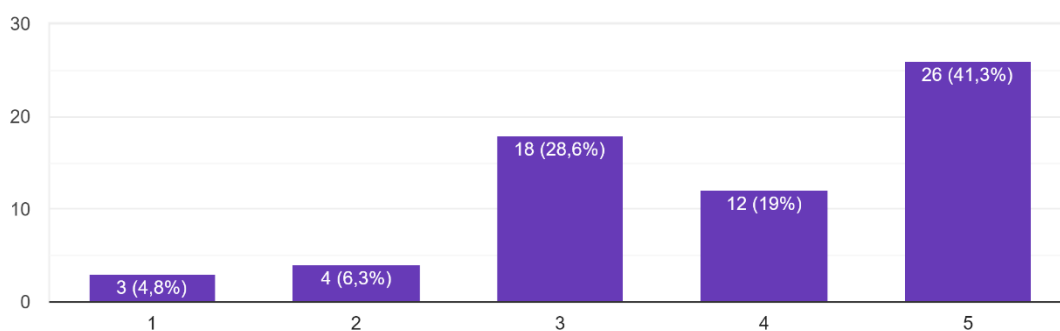
Анализът на резултатите от проведеното проучване ясно показва, че голяма част от учениците притежават вътрешна мотивация за учене по математика (фиг. 32, фиг. 33, фиг. 34, фиг. 36). Около 60% от анкетираните смятат математиката за полезен предмет, а близо 40% от учениците я свързват с бъдещите си цели. 50% твърдят, че харесват математиката и обичат да решават задачи. Всичките тези резултати подчертават положителните нагласи на учениците към предмета.

Нивата на вътрешна мотивация при по-малките ученици са много по-високи. 95% от петокласниците оценяват математиката като полезна срещу 43% от осмекласниците. 89% от по-малките обичат да решават задачи срещу 34% от гимназистите. Тези резултати демонстрират, че ентусиазмът, желанието и удоволствието от математиката намаляват с възрастта.

Сравнението на нагласите при различните групи показва и най-съществената причина. Учениците, които са в паралелка с математически профил, изпитват удовлетворение при решаване на задачи, което води и до по-добри резултати. Профилите на анкетираните осмекласници не са с математическа насоченост и това се отразява на резултатите.

Смятам, че това, което учим по математика, е полезно.

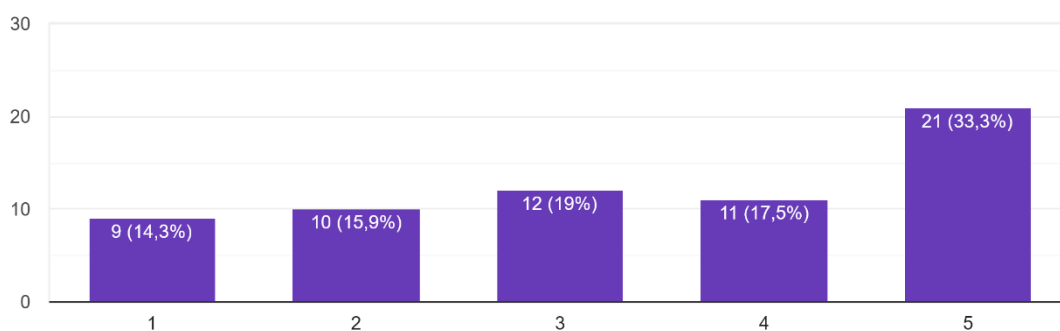
63 отговора



Фиг. 32.

Харесвам математиката, защото решаването на задачите ми е интересно.

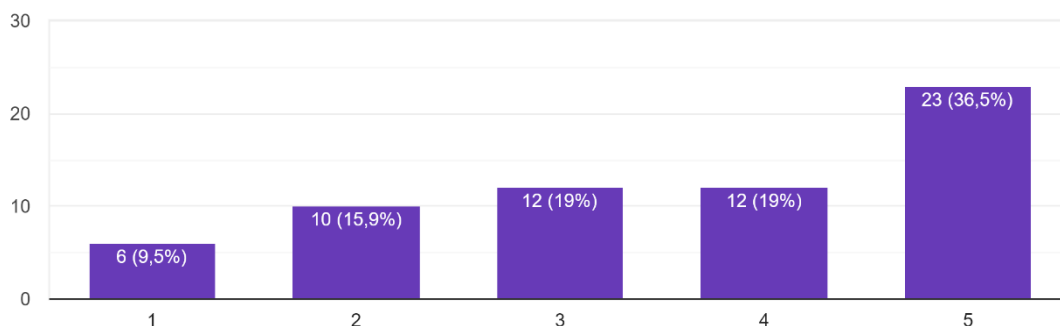
63 отговора



Фиг. 33.

Уча по математика, защото ще ми трябва за в бъдеще.

63 отговора

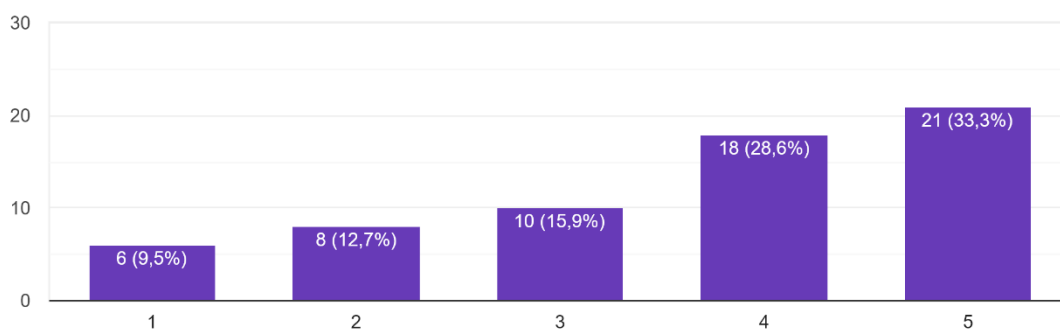


Фиг. 34.

Близо 62% от учениците виждат връзката между математиката и останалите предмети и осъзнават, че знанията са интердисциплинарни и приложими в различни области (фиг. 35).

Смятам, че това, което науча по математика, може да бъде полезно при усвояването на знанията по друг предмет.

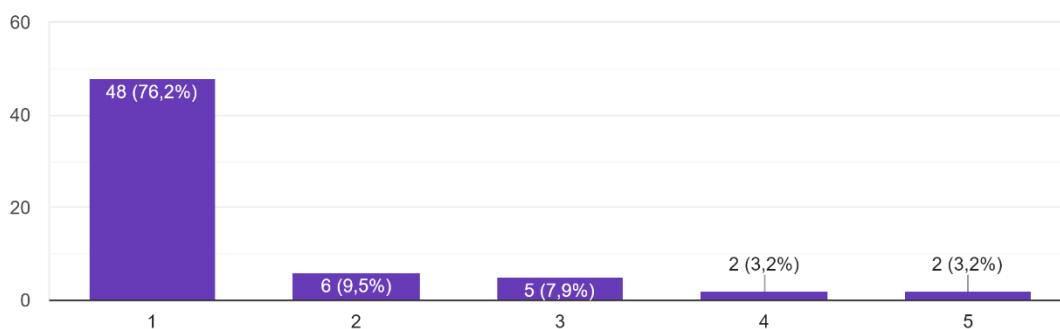
63 отговора



Фиг. 35.

Не полагам усилия за усвояването на материала по математика, защото не смятам, че ще ми е нужен.

63 отговора



Фиг. 36.

Въпреки относително високите резултати трябва да се работи за повишаване на вътрешната мотивация чрез използване на различни средства:

- Учениците трябва да се убедят в значението на материала и как могат да използват натрупаното знание.
- Предизвикване на интерес чрез използване на различни средства – демонстрации, опити, интересно представяне на материала и др.
- Подпомагане на учениците да поставят собствени цели

4.3.2. Външна мотивация

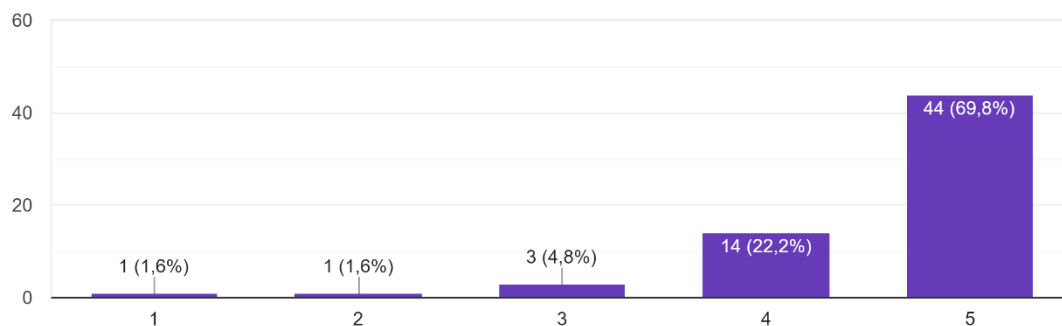
Външната мотивация включва фактори, които влияят на човешкото поведение. Често има бърз, но краткотраен ефект, за разлика от вътрешната мотивация.

Почти всички анкетирани ученици (92%) се фокусират върху добрите оценки като признание на усвоените знания (фиг. 37). Това показва, че за учениците не са важни толкова уменията и компетенциите, а тяхното измерване в оценки. Данните сочат, че близо 49% от учениците искат да удовлетворят очакванията на своите родители, а 52% желаят да оправдаят изискванията на своите преподаватели (фиг. 38, фиг. 39).

При тези твърдения няма съществена разлика в отговорите на двете групи анкетирани ученици. Това показва устойчивост на стремежа към по-високи оценки като признание на постигнатите резултати и желанието да се отговори на очакванията на учители и родители. Сравнителният анализ на средните стойности на твърденията показва, че външната мотивация играе по-малка роля в сравнение с вътрешната. Това води до по-дълготрайни и устойчиви резултати при формиране на нагласите у учениците.

За мен е важно да имам добри оценки.

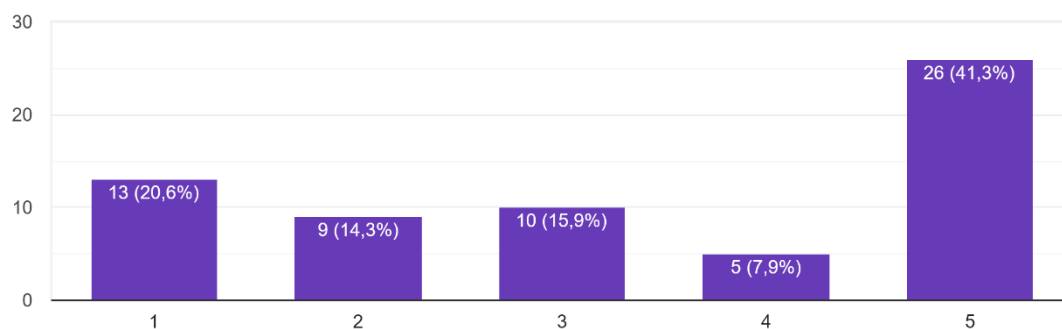
63 отговора



Фиг. 37.

Искам да имам високи оценки, за да задоволя родителите си.

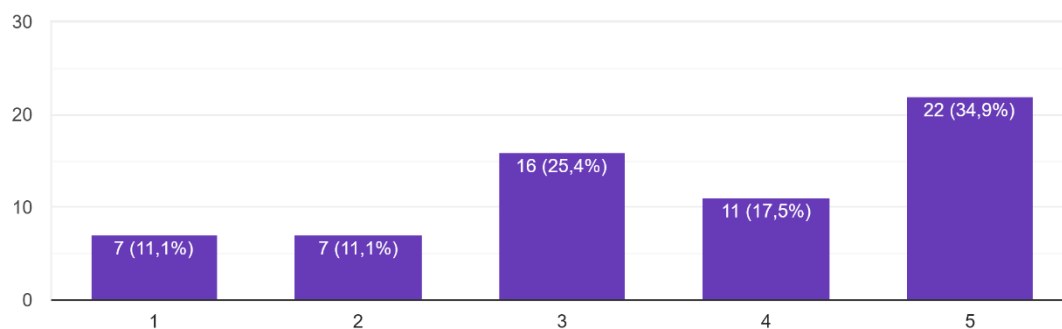
63 отговора



Фиг. 38.

Искам да имам високи оценки, за да са доволни преподавателите ми.

63 отговора



Фиг. 39.

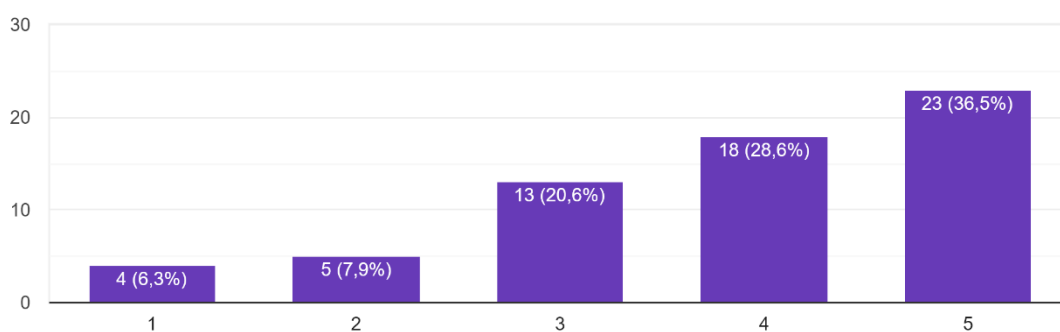
Интерес буди фактът, че цели 68% от петокласниците заявяват желание да кандидатстват в университет чрез изпит по математика. Това показва целенасочена и дългосрочна подготовка и стремеж към бъдещи успехи. За сравнение едва 16%

от анкетираните осмокласници смятат, че ще полагат кандидатстудентски изпит по предмета.

Около 65% от анкетираните смятат, че ниската оценка показва нивото на усвояване на знанията и ги мотивира да положат повече усилия (фиг. 40, фиг. 41, фиг. 42). Това показва, че оценките (и високите, и ниските) играят ролята на стимул, а не наказание, за голяма част от учениците. Те са мярка за подобряване на резултатите и мотив за целенасочена работа.

Смятам, че ниската оценка показва какво не съм успял да усвоя.

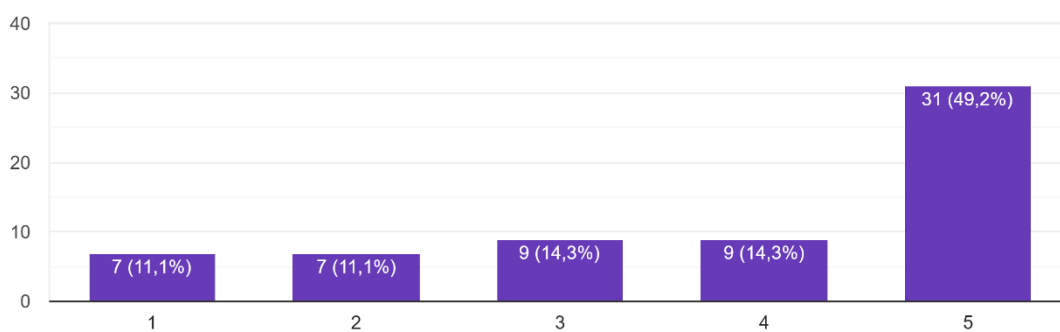
63 отговора



Фиг. 40.

За мен ниската оценка е стимул да започна да полагам повече усилия.

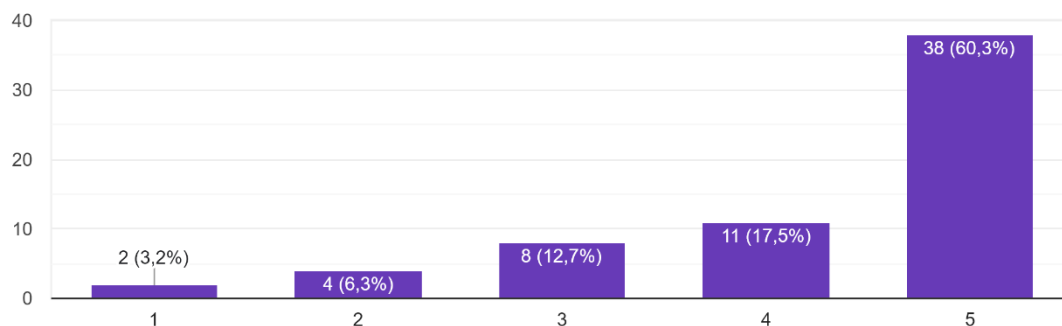
63 отговора



Фиг. 41.

Когато получа ниска оценка, полагам повече усилия за подобряване на резултатите си.

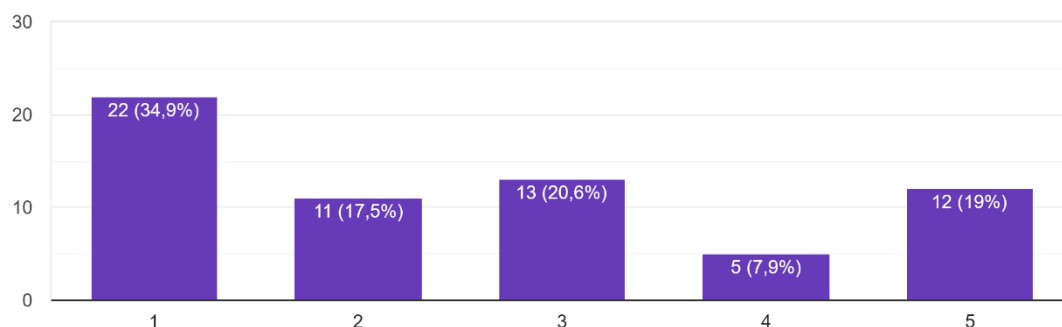
63 отговора



Фиг. 42.

Притеснявам се от ниска оценка заради родителите си.

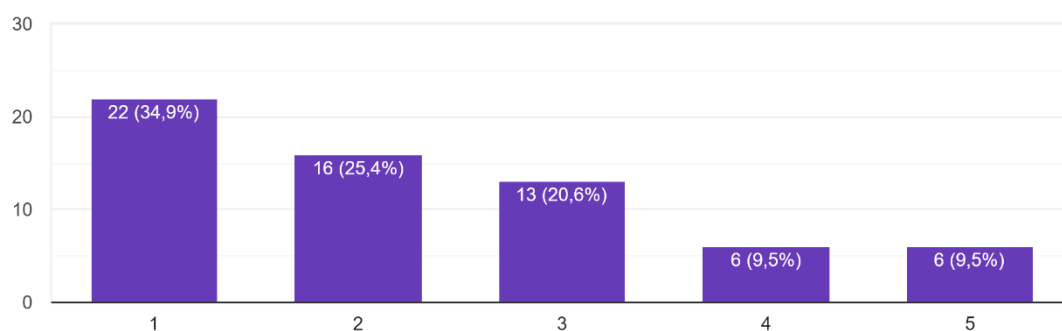
63 отговора



Фиг. 43.

Притеснявам се от ниска оценка заради учителя си.

63 отговора



Фиг. 44.

Тук отново се засяга въпросът за тревожността и притесненията на учениците (фиг. 43, фиг. 44). Около 52% посочват, че не изпитват притеснения от ниските си оценки заради родителите си, а приблизително 70% твърдят, че не се притесняват от ниските си оценки заради учителя си. Анализът на отговорите на тези

твърдения доказва, че страхът от наказание и притеснението не са основен фактор при мотивацията за учене. Учениците не се чувстват заплашени, когато изкарат ниски оценки, а по-скоро изпитват мотивация за по-високи резултати и бъдещи успехи. Това е особено важно, тъй като показва положителната страна на обратната връзка.

Въпреки високите нива на външна мотивация, учителите могат да приложат следните принципи с цел нейното повишаване:

- **Ясни очаквания** – учениците трябва да знаят какво се очаква от тях, как ще бъдат оценявани и какви ще бъдат резултатите от успеха.
- **Ясна и честа обратна връзка** – трябва да бъде конкретна и да бъде дадена непосредствено след изпълнение на задачата. Изпълнява ролята на стимул и показва на учениците какво са направили правилно. Обратната връзка трябва да бъде насочена не само към резултатите, а и към положените усилия.
- **Похвали** – трябва да бъдат конкретни
- **Оценки** – основават се на способностите, а не на положените усилия. Повишените оценки често може да действат като стимул.
- **Оценка на индивидуалния прогрес** – ученикът получава похвала или оценка за напредък в сравнение с предишните си резултати.

Проведената анкета дава цялостен поглед върху отношението на учениците към математиката и обхваща поведенчески и мотивационни аспекти – като участие в час, притеснения, стрес, страх от оценки. Изследвани са корелации между твърденията и е направен сравнителен анализ между двете групи ученици.

Подобряването на микроклимата в класната стая и изграждането на подкрепяща среда би спомогнало повишаването на резултатите на учениците. Атмосферата на доверие и подкрепа, изграждането на нагласа, че грешките са част от обучителния процес, би довело до намаляване на стреса и тревожността у учениците. Работата на групи и проектните дейности, които изискват активност от всички участници, както и положителната обратна връзка биха могли да повишат положителното отношение към предмета. Мотивираните за постижения ученици

искат и очакват да успеят. След неуспех те ще удвоят усилията си до постигане на целта. Силната мотивация за постижения и успехът са взаимно свързани – успехът подхранва желанието за още успехи, което от своя страна подхранва успеха.

Х. Заключение

Настоящата дипломна работа има за цел да направи обзор на различни подходи в обучението по математика в България и по света, да анализира проблемите в обучението по математика и да предложи ефективни практики и методи за преподаване. Прилагането на системна и целенасочена образователна политика води до трайно повишаване на академичните резултати и устойчиво икономическо развитие. Акцент на дипломната работа е изграждането на активни участници в учебния процес в лицето на учениците и създаване на положителни нагласи към предмета.

Проведеният експеримент дава база за анализ на мотивацията и възгледите на учениците към математиката, а фокусът е върху самоподготовката и прегледът на вече решени задачи, последвани от системни упражнения с цел затвърждаване на усвоените знания.

Използването на създадените работни листове води до по-висока активност и увереност на учениците, както и до сравнително добри резултати на теста. Наблюдението на поведението на учениците показва положително отношение и готовност за активно участие по време на час.

Основни приноси:

- Изтъкване на важността на внимателно съставените работни листове по ключови теми от учебната програма по математика в VII клас, включващи основни теоретични знания, примерни задачи с подробни решения и задачи за самостоятелна работа.
- Потвърждаване на ролята на обратната връзка с цел повишаване на академичните резултати
- Обработка на суровите данни от проведения тест и анкетното проучване и направени обосновани изводи
- Систематизиране на отговорите на анкетното проучване с ключови твърдения, покриващи теми като мотивация, нагласи, навици за учене, тревожност.

Възможности и препоръки за бъдещи изследвания:

- Да се включат експериментална и контролна група с оглед на по-обширен и точен анализ
- Да се разшири обхвата на учениците в по-голям брой класове и различни училища и профили, като се направи съпоставка между участниците
- Да се наблегне на използването на доказани ефективни методи на преподаване
- В анкетното проучване може да се добави въпрос за успеха по математика с намерението да се направи по-задълбочено и обосновано тълкуване на резултатите
- Да се изготвят работни листове и за други класове
- В работните листове да се включат повече задачи от практико-приложен характер
- Да се проследи ефективността от използването на работни листове при по-големи ученици и да се направи анализ на устойчивостта на резултатите

Направените изводи и препоръки могат да послужат като основа за бъдещи педагогически практики и научни разработки в областта на обучението по математика. По този начин дипломната работа допринася не само за повишаване на ефективността на учебния процес, но и за изграждане на по-устойчива и мотивираща образователна среда.

XI. Използвана литература

1. Банков, К., Стоева, Т., Цветкова, И., Петрова, Д. *Математика 8. клас*. Просвета – София АД, 2017
2. Витанов, Т., Кожухарова, Г., Кьосева, М., Узунова, К. *Математика 8. клас*. ИК Анубис, 2017
3. Ганева, З. *Да преоткрием статистиката*. Печат Елестра ЕООД, 2016.
4. Димитрова, Е. и колектив. *Пробни изпити за външно оценяване и кандидатстване след 7. клас*. Регалия, 2024
5. *Заклучителна декларация от участниците в Националния форум „Училища с иновации за бъдещето“*. МОН, 2022. Извлечено на 23.07.2025 г., от: https://www.mon.bg/nfs/2022/11/dekl-nf-inovacii_02112022.pdf
6. *За прехода от знания към умения*. Извлечено на 23.07.2025 г., от: <https://www.mon.bg/nfs/2019/12/ii-book.pdf>
7. Коларов, К. *Избрани задачи по математика за кандидат-студенти*. ЕФ Интеграл – квх., Добрич, 1996
8. Коларов, К., Петков, П., Петкова, М., Арнаудов, П., Арнаудова, Л. *Сборник задачи по алгебра VII-XII клас*. ЕФ Интеграл – квх., Добрич, 1995
9. *Задачи*. Извлечено на 15.09.2024 г. от: <https://math-bg.com/%d0%bd%d0%b0%d1%87%d0%b0%d0%bb%d0%be/>
10. *Наредба за приобщаващото образование*. МОН, 2017. Извлечено на 23.07.2025 г., от: https://www.mon.bg/nfs/2024/06/naredba-priobshtavashto_06082024.pdf
11. *НАРЕДБА № 4 от 30 ноември 2015 г. за общообразователната подготовка*. МОН, 2015. Извлечено на 23.07.2025 г., от: https://www.mon.bg/nfs/2023/08/nrdb4-2015_izm2023-ucheben-plan-25082023.pdf
12. *НАРЕДБА № 5 от 30 ноември 2015 г. за общообразователната подготовка*. МОН, 2015. Извлечено на 23.07.2025 г., от: https://www.mon.bg/nfs/2023/09/nrdb5-2015_oop_izm092023_27092023.pdf
13. *НАРЕДБА № 9 от 19.08.2016 г. за институциите в системата на предучилищното и училищното образование*. Извлечено на 23.07.2025 г., от: https://world.mon.bg/ischools/downloads/Naredba_9.pdf
14. *НАРЕДБА № 11 от 1 септември 2016 г. за оценяване на резултатите от обучението на учениците*. МОН, 2016. Извлечено на 23.07.2025 г., от: https://www.mon.bg/nfs/2024/04/naredba11-2026-ocenjavane_izm0424_16042024.pdf
15. Нинова, Ю., Матакиева, Сн., Райков, Н., Бонина – Христова, Т. *Математика*. Просвета Плюс, 2024

16. *Образование 2023: Застаряващи учители и висок процент младежи без цифрови умения*. Извлечено на 23.07.2025 г., от:
<https://www.investor.bg/a/525-obrazovanie/385521-obrazovanie-2023-zastaryavashti-uchiteli-i-visok-protsent-mladezhi-bez-tsifrovi-umeniya>
17. Паскалева, З. Алашка, М., Алашка, Р. *Математика 7. клас*. „Архимед 2 ЕООД, 2018
18. Паскалева, З. Алашка, М., Алашка, Р. *Математика 7. Клас. Книга за ученика*. „Архимед 2 ЕООД, 2023
19. Рангелова, П., Бекриев, К. *Сборник за 7. клас*. Коала прес – Пловдив, 2018
20. Славин, Р. *Педагогическа психология*. Наука и изкуство, 2004.
21. Христова, Асенка. *Наръчник за оценяване на уменията за саморегулирано учене*. Институт за изследвания в образованието, 2022. Извлечено на 03.08.2025 г., от: <http://ire-bg.org/wpsite/wp-content/uploads/2022/04/%D0%9D%D0%B0%D1%80%D1%8A%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA-%D0%B7%D0%B0-%D0%BE%D1%86%D0%B5%D0%BD%D1%8F%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B5-%D0%BD%D0%B0-%D1%83%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%D1%82%D0%B0-%D0%B7%D0%B0-%D1%81%D0%B0%D0%BC%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%B3%D1%83%D0%BB%D0%B8%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BE-%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B5.pdf>
22. Batteau, Valerie, Miyakawa, Takeshi, Ryu, Minbom. *Collective problem-solving in Japanese primary mathematics lessons*. Извлечено на 02.07.2025 г., от:
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-025-10400-5>
23. *Bulgaria. TIMSS, 2023*. Извлечено на 23.07.2025 г., от:
<https://timss2023.org/wp-content/uploads/2024/10/Bulgaria.pdf>
24. Chandler, P., Sweller, J. *Cognitive Load Theory and the Format of Instruction*. University of Wollongong, 1991. Извлечено на 16.08.2025 г. от:
https://ro.uow.edu.au/articles/journal_contribution/Cognitive_Load_Theory_and_the_Format_of_Instruction/27778410?file=50549310
25. Chandler, P., Sweller, J. *Cognitive Load Theory and the Format of Instruction*. University of Birmingham, 2009. Извлечено на 31.08.2025 г. от:
<https://2024.sci-hub.se/3515/6892c1fd3f0797762198d93d652a9918/sweller1991.pdf>
26. *Cognitive Load Theory in Practice. Examples for the Classroom*. Centre for Education Statistics and Evaluation. Извлечено на 31.08.2025 г. от:
<https://education.nsw.gov.au/content/dam/main-education/about-us/educational-data/cese/2017-cognitive-load-theory-practice-guide.pdf>
27. Doig, Brian, Groves, S. *Lesson Study: Teacher Professional Development through Communities of Inquiry*. Извлечено на 03.08.2025 г., от:
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ960950.pdf>

28. *Education and skills*. OECD, 2025. Извлечено на 23.07.2025 г., от: https://www.oecd.org/en/publications/education-and-skills-in-bulgaria_ac0229da-en/full-report.html
29. *Empowered educators. Singapore: A teaching model for the 21st century*. NCEE. Извлечено на 03.08.2025 г., от: <https://edpolicy.stanford.edu/sites/default/files/SingaporeCountryBrief.pdf>
30. *Education Rankings by Country 2025*. Извлечено на 23.07.2025 г., от: <https://worldpopulationreview.com/country-rankings/education-rankings-by-country>
31. Fan, Lianghuo, Wong, Ngai-Ying, Cai, Jinfa, Li, Shiqi. *How Chinese teach mathematics. Perspectives from insiders*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015
32. Fraser, Craig G. Folkerts, Menso , Gray, Jeremy John, Berggren, John L. and Knorr, Wilbur R.. *"mathematics"*. Encyclopedia Britannica, 2024. Извлечено на 03.08.2025 г., от: <https://www.britannica.com/science/mathematics>
33. Hare, S. *Teaching Math Through Worked Examples*. Извлечено на 20.08.2025 г. от: <https://youteachyou.org/blogs/articles/teaching-math-through-worked-examples?srsId=AfmBOoqVa5RuU4IMB6qMgSbY5ZfVsSvabh5fSTHmlcGMbc7LUnZQSyv>
34. *Japan. Teachers and teaching conditions, primary and lower secondary education*. Talis, 2018. Извлечено на 22.07.2025 г., от: <https://gpseducation.oecd.org/CountryProfile?primaryCountry=JPN&treshold=10&topic=TA>
35. *Japan*. Извлечено на 23.07.2025 г., от: <https://timss2023.org/wp-content/uploads/2024/10/Japan.pdf>
36. Jenlink, Patrick M. and others. *Mathematics as the science of patterns. Making the invisible visible to students through teaching*. Information Age Publishing, 2022
37. Kaur, Berinderjeet. *Mathematics Education in Singapore – an insider's perspective*. National Institute of Education, Singapore
38. Leen, Chiam, Hong, H., Kwan, F., Ying, T. *Creative and Critical Thinking in Singapore Schools*. NIE Working Paper Series No.2. National Institute of Education.
39. *Low educational outcomes could cost Bulgaria over \$400 billion*. Извлечено на 23.07.2025 г., от: <https://aibest.org/tpost/g17yxolta1-low-educational-outcomes-could-cost-bulg>
40. Makhija, Mohit. *5G: A Japanese Approach to Problem Solving*. Извлечено на 22.07.2025 г., от: <https://www.linkedin.com/pulse/5g-japanese-approach-problem-solving-mohit-m-makhija-xlt5f>

41. Mandavkar, Pavan. *Japanese education system*. Извлечено на 22.07.2025 г., от: https://www.researchgate.net/publication/391229871_Japanese_Education_System?enrichId=rgreq-2d1cc330a6b914b627c70c08753ae909-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzM5MTIyOTg3MTtBUzoxMTQzMTI4MTQwOTUzMTg0MkAxNzQ1ODMyMTQzNjI4&el=1_x_2&_esc=publicationCoverPdf
42. *MATHEMATICS SYLLABUS*. MOE, Singapore, 2013. Извлечено на 21.07.2025 г., от: https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf
43. Ntow, F. *ESC711M: Methods of Teaching Mathematics*. Institute of Education, University of Cape Coast. Republic of Ghana, 2022. Извлечено на 15.08.2025 г. от: <https://ioe.ucc.edu.gh/sites/default/files/2023-01/PGDE%20-%20ESC%20711M%20-%20METHODS%20OF%20TEACHING%20MATHEMATICS.pdf>
44. Patra, Dr. Goutam. *Meaning, aims and process of education*. Govt. College of Education, Banipur. Извлечено на 02.08.2025 г., от: <http://banipurbedcollege.org/e-learning-goutam-patra/Meaning%20and%20Process%20of%20Education.pdf>
45. *Project Work Syllabus 2024 Pre-University*. Ministry of Education, Singapore. Извлечено на 20.07.2025 г., от: <https://www.moe.gov.sg/-/media/files/post-secondary/syllabuses/2024-project-work-syllabus-pre-university.pdf>
46. Rajakumar, P. *National Focus Group on Teaching of Mathematics*. National Council of Educational Research and Training, 2006. Извлечено на 03.08.2025 г., от: <https://ncert.nic.in/pdf/focus-group/math.pdf>
47. Rohlen, Thomas, Le Tendre, Gerald. *Teaching and Learning in Japan*. Cambridge Univ. Press, 1996
48. Stacey, Kaye. *What is mathematical thinking and why is it important?* University of Melbourne, Australia. Извлечено на 02.08.2025 г., от: https://www.researchgate.net/publication/254408829_WHAT_IS_MATHEMATICAL_THINKING_AND_WHY_IS_IT_IMPORTANT/link/00463539af7ac496000000/download
49. Takahashi, Akihiko. *Beyond Show and Tell: Neriage for Teaching through Problem-Solving – Ideas from Japanese Problem-Solving Approaches for Teaching Mathematics*. Извлечено на 22.07.2025 г., от: <https://lessonresearch.net/wp-content/uploads/2020/07/Characteristics-of-Japanese-Mathematics-Lessons-2.pdf>
50. Takahashi, Akihiko. *Characteristics of Japanese Mathematics Lessons*. Извлечено на 22.07.2025 г., от: https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/sympo_2006/takahashi.pdf
51. Willis, J. *Learning to Love Math. Teaching Strategies That Change Student Attitudes and Get Results*. ASCD, 2010

52. Yamada, Aki, Yamada, R. *Active Learning – Beyond the Future*. Извлечено на 22.07.2025 г., от: <https://www.intechopen.com/chapters/63363>
53. Yamasaki, Hirotoishi. *Teachers and Teacher Education in Japan*. Извлечено на 22.07.2025 г., от: <https://core.ac.uk/download/pdf/222958109.pdf>
54. Young, J.W.A. Ph.D. *The Teaching of Mathematics*. Longman, Greens & Co, 1908. Извлечено на 01.08.2025 г., от: <https://archive.org/details/teachingofmathem00youn/page/n7/mode/2up?view=theater>
55. Yoong, Wong, Yee, Lee, Kaur, Berinder, Kaur, Yee, Foong, Fong, Ng. *Mathematics Education: The Singapore Journey*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2009

ХІІ. Приложения

ПРИЛОЖЕНИЕ № 1

Анкета

Драги ученици,

Настоящата анкета има за цел да установи как се подготвяте за часа по математика и да събере информация за мотивацията Ви и Вашите навици за учене. Анализът на събраната информация може да бъде използван за подобряване на резултатите Ви в училище, както и за постигане на бъдещите Ви цели.

Прочетете внимателно въпросите и отговорите като се стремите да бъдете точни и да изберете отговорите, които най-много се доближават до нагласите и поведението Ви към настоящия момент. При отговаряне на въпросите имате възможност да избирате от пет възможности по скала от 1 до 5, където 1 е „никога“, 2 – „рядко“, 3 – „понякога“, 4 – „често“, 5 – „винаги“. Когато въпросът касае отделено време (например за самоподготовка), то 1 е „най-малко“, а 5 – „най-много“.

Въз основа на отговорите на въпросите ще бъде направен анализ, който би подпомогнал бъдещото Ви развитие и представяне в училище.

Работа в клас

1. В час внимавам и записвам всичко, за да мога да си припомня новите знания вкъщи.
2. Ако не разбира нещо по време на час, питам преподавателя.
3. Ако не разбира нещо по време на час, ще потърся информация в интернет.
4. Участвам активно в дискусиите и решаването на задачите по време на час.
5. Старая се да предлагам решения на задачите, които решаваме по време на час.
6. Притеснявам се да взимам участие по време на час, за да не сгреша.

7. Притеснявам се да решавам задачи на дъската, за да не ми се подиграват съучениците/ преподавателя.

Тест/ Контролна работа/ Изпитване/ Класна работа/ Оценяване

8. Винаги се подготвям за изпитване.
9. Чета отново уроците си, за да си припомня материала.
10. Решавам задачите, които сме решавали по време на час.
11. Решавам допълнителни задачи, за да се подготвя по-добре.
12. По време на тест се притеснявам много и забравям наученото.
13. По време на тест се концентрирам и показвам най-доброто от себе си.
14. Времето ми стига, за да реша задачите си.
15. Времето ми стига, за да направя проверка на решените задачи.
16. Притеснявам се от ниска оценка заради родителите си.
17. Притеснявам се от ниска оценка заради учителя си.
18. За мен е важно да имам добри оценки.
19. Искam да имам високи оценки, за да задоволя родителите си.
20. Искam да имам високи оценки, за да са доволни преподавателите ми.
21. Смятам, че ниската оценка показва какво не съм успял да усвоя.
22. За мен ниската оценка е стимул да започна да полагам повече усилия.
23. Когато получа ниска оценка, полагам повече усилия за подобряване на резултатите си.

Самоподготовка

24. За мен подготовката за училище е от първостепенно значение.
25. Поставям училището пред спорта и допълнителните занимания (допълнителни уроци, школи и т.н.).
26. За мен училището е по-важно от комуникацията с приятели.
27. Първо подготвям уроците си и после се занимавам със странични неща.
28. Колко време отделяте на ден за самоподготовка?
29. Колко от това време отделяте за математика?
30. Чета внимателно урока си и се опитвам да разбера темата.
31. Когато уча, се опитвам да запомня всичко прочетено.

32. Когато уча, се опитвам да разбера урока и да мога да приложа наученото при решаване на задачи.
33. Решавам отново задачите, които сме разглеждали по време на час.
34. Обсъждам със съученици материала, когато някой от нас не е разбрал нещо.
35. Когато уча и не разбирам нещо, търся допълнителна информация в интернет или помощ от друг човек.
36. Когато уча и не разбирам нещо, моля преподавателя си за помощ.
37. Спазвам сроковете при изпълнение на задачите си.
38. Отделям достатъчно време и пиша домашната си работа внимателно.
39. За мен домашната работа е безсмислена и не я пиша.
40. Пиша домашната си работа през междучасието.
41. Преписвам решенията на задачите от домашната работа от съучениците си.

Общи въпроси

42. Смятам, че това, което учим по математика, е полезно.
43. Харесвам математиката, защото решаването на задачите ми е интересно.
44. Уча по математика, защото ще ми трябва за в бъдеще.
45. Уча по математика, защото ще кандидатствам в университет с изпит/ ДЗИ по математика.
46. Смятам, че това, което науча по математика, може да бъде полезно при усвояването на знанията по друг предмет.
47. Не полагам усилия за усвояването на материала по математика, защото не смятам, че ще ми е нужен.
48. Ако се представям добре и уча повече, моите съученици ще смятат, че съм „зубър“.
49. Смятам, че математиката е трудна.
50. Изпуснал съм много от материала по математика и сега не се справям добре.
51. Смятам, че ако полагам повече усилия, ще се справям по-добре по математика.

Работни листове

Работен лист № 1

Цели изрази

I. Формули за съкратено умножение

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
--	--

II. Нормален вид на едночлен и многочлен

Едночлен	Многочлен
- Произведението на всички числови множители се записва най-отпред - Произведението на еднаквите променливи се записва като степен	- Сбор от едночлени в нормален вид - Няма подобни едночлени

1. $9a^2ac = 9a^3c$

2. $2ab^23a = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b^2 = 6a^2b^2$

3. $2x^2(-3)xy^2y^3 = -6x^3y^5$

4. $(x+y)^2 - 3(x-y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 - 3(x^2 - y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - 3x^2 + 3y^2 = -2x^2 + 2xy + 4y^2$

5. $(x+y)^2 + y(x+1) = x^2 + 2xy + y^2 + yx + y = x^2 + 3xy + y^2 + y$

6. $(2a-1)(2a+1) - (2a+b)^2 = (2a)^2 - 1^2 - ((2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot b + b^2) = 4a^2 - 1 - 4a^2 - 4ab - b^2 = -4ab - b^2 - 1$

III. Разлагане на многочлени на множители

- Чрез изнасяне на общ множител

1. $16x^4 + x = x \cdot 16x^3 + x \cdot 1 = x \cdot (16x^3 + 1)$

2. $8x^3 - 4xy = 4x \cdot 2x^2 - 4x \cdot y = 4x(2x^2 - y)$

3. $y(x + y) - z(x + y) = (x + y)(y - z)$

4. $b(b - 2) + a(2 - b) = b(b - 2) + a \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (2 - b) =$
 $= b(b - 2) - a(-2 + b) = b(b - 2) - a(b - 2) = (b - 2)(b - a)$

- Чрез използване на формули за съкратено умножение

5. $a^2 - 6a + 9 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = (a - 3)^2$

6. $(3a - b)^2 - 9b^2 = (3a - b)^2 - (3b)^2 = ((3a - b) - (3b))((3a - b) + (3b)) =$
 $= (3a - 4b)(3a + 2b)$

7. $a^2 - 6a + 9 - 16 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 - 4^2 = (a - 3)^2 - 4^2 = (a - 3 + 4)(a - 3 - 4) =$
 $= (a + 1)(a - 7)$

8. $8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)((2x)^2 - 2x \cdot 1 + 1) = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

- Чрез групиране

9. $5x + 5y + x + y = 5(x + y) + (x + y) = (x + y)(5 + 1) = 6(x + y)$

10. $x^3 - xy + 2x^2 - 2y = x(x^2 - y) + 2(x^2 - y) = (x^2 - y)(x + 2)$

11. $x^2 + 3x + 2$

Ще представим $3x$ като сбор от едночлени, за да можем да групираме.

$3x = u \cdot x + v \cdot x$. Търсим числата u, v , такива, че $u \cdot v = a \cdot c$ и $u + v = b$. В нашия случай $a = 1, b = 3, c = 2$ (това са коефициентите съответно пред x^2, x и свободния член). $\Rightarrow u \cdot v = 2, u + v = 3$. Възможни варианти са: 1 и 2, -1 и -2 и в конкретния случай 1 и 2 са търсените числа, защото $u + v$ е положително. Следователно $3x = 2x + 1x$

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2x + x + 2 = (x^2 + 2x) + (x + 2) = x(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(x + 1)$$

$$4x^2 - 37x + 9$$

12. $37x = u \cdot x + v \cdot x$

$$u \cdot v = 36$$

$$u + v = -37$$

Числото 36 може да се представи като произведение така: 1.36; 2.18; 3.12; 4.9; (-1).(-36); (-2).(-18); (-3).(-12); (-4).(-9). Тъй като $u + v$ е отрицателно число, разглеждаме само случаите с 2 отрицателни числа. В случая решение е: -1 и -36.

$$\Rightarrow 4x^2 - 37x + 9 = 4x^2 - 36x - x + 9 = 4x(x-9) - (x-9) = (x-9)(4x-1)$$

- Чрез допълване до точен квадрат

13. $x^2 + 4x - 12$

За да използваме формулите за съкратено умножение: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, трябва да добавим и извадим събираеми.

$$a = x, 2ab = 2x \cdot b \Rightarrow b = 2.$$

$x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2$. Тъй като 2^2 липсва в дадения многочлен, го добавяме и изваждаме (за да запазим многочлена непроменен).

$$x^2 + 4x - 12 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 - 12 = (x + 2)^2 - 4 - 12 = (x + 2)^2 - 16 = (x + 2)^2 - 4^2 = (x + 2 + 4)(x + 2 - 4) = (x + 6)(x - 2)$$

14. $x^2 - 6x - 7 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 - 7 = (x - 3)^2 - 16 = (x - 3)^2 - 4^2 = (x - 3 - 4)(x - 3 + 4) = (x - 7)(x + 1)$

- Комбиниран метод

$$x^3 - 6x^2 - 7x = x(x^2 - 6x^2 - 7x) = x(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 - 7) =$$

15. $= x((x - 3)^2 - 16) = x((x - 3)^2 - 4^2) = x(x - 3 - 4)(x - 3 + 4) = x(x - 7)(x + 1)$

16. $4x^3 - 37x^2 + 9x = x(4x^2 - 37x^2 + 9x) = x(4x^2 - 36x - x + 9) = x(4x(x - 9) - (x - 9)) = x(x - 9)(4x - 1)$

IV. Задачи за самостоятелна работа:

1. Приведете многочлена в нормален вид:

a) $(x - y)^2 - 2(x - y)(x + y) + (x + y)^2$

b) $4(a - 2)(a + 2) + (a + 4)^2$

c) $(a + b)^3 - b(b - 1)(b - a)$

d) $x^3 - y(y^2 + z) - (x + y)^3 + 2y(x + z)$

e) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

f) $2y(x - 1)(x - 3) + (x + y)^2$

g) $3x(x + y)(x - y) - (x + y)^3$

h) $(a - 1)(a - b)^2 + (b + 1)(b - 1) + 2ab(a - 1)$

2. Разложите многочлена на множители:

a) $2xy + x + 4y + 2$

b) $3ab + 8bc + 2b + 12abc$

c) $6x^3 + 16x^2 + 8x$

d) $2a^2 + 11a + 15$

e) $4a^2 - 12a - 7$

f) $x^2 - 2x - 8$

g) $x^3 + 8x^2 - 9x$

h) $x^2 + 2x - 15$

Решения на задачите за самостоятелна работа

от Работен лист № 1

Цели изрази

1. Приведете многочлена в нормален вид:

- $(x-y)^2 - 2(x-y)(x+y) + (x+y)^2 =$
- a) $= x^2 - 2xy + y^2 - 2(x^2 - y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) =$
 $= x^2 - 2xy + y^2 - 2x^2 + 2y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 4y^2$
- b) $4(a-2)(a+2) + (a+4)^2 = 4(a^2 - 4) + a^2 + 8a + 16 = 4a^2 - 16 + a^2 + 8a + 16 =$
 $= 5a^2 + 8a$
- c) $(a+b)^3 - b(b-1)(b-a) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - b(b^2 - ab - b + a) =$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - b^3 + ab^2 + b^2 - ab = a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + b^2 - ab$
 $x^3 - y(y^2 + z) - (x+y)^3 + 2y(x+z) = x^3 - y^3 - yz - (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) +$
- d) $+2xy + 2yz = x^3 - y^3 - yz - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + 2xy + 2yz =$
 $= -2y^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 2xy + yz$
- e) $(x-2)(x+2)(x^2+4) = (x^2-4)(x^2+4) = x^4 - 16$
- f) $2y(x-1)(x-3) + (x+y)^2 = 2y(x^2 - 4x + 3) + (x^2 + 2xy + y^2) =$
 $= 2x^2y - 8xy + 6y + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2x^2y - 6xy + 6y$
- g) $3x(x+y)(x-y) - (x+y)^3 = 3x(x^2 - y^2) - (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) =$
 $= 3x^3 - 3xy^2 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 = 2x^3 - y^3 - 3x^2y - 6xy^2$
 $(a-1)(a-b)^2 + (b+1)(b-1) + 2ab(a-1) =$
- h) $= (a-1)(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 1) + 2ab(a-1) =$
 $= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2 + 2ab - b^2 + b^2 - 1 + 2a^2b - 2ab =$
 $= a^3 - a^2 + ab^2 - 1$

2. Разложете многочлена на множители:

- a) $2xy + x + 4y + 2 = x(2y+1) + 2(2y+1) = (2y+1)(x+2)$
- b) $3ab + 8bc + 2b + 12abc = 3ab(1+4c) + 2b(4c+1) = (4c+1)(3ab+2b)$
- c) $6x^3 + 16x^2 + 8x = x(6x^2 + 16x + 8) = x(6x^2 + 12x + 4x + 8) =$
 $= x(6x(x+2) + 4(x+2)) = x((x+2)(6x+4))$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad 2a^2 + 11a + 15 &= 2a^2 + 6a + 5a + 15 = 2a(a + 3) + 5(a + 3) = \\ &= (a + 3)(2a + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad 4a^2 - 12a - 7 &= (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (2a - 3)^2 - 16 = \\ &= (2a - 3 - 4)(2a - 3 + 4) = (2a - 7)(2a + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad x^2 - 2x - 8 &= x^2 - 2x \cdot 1 + 1 - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 3^2 = \\ &= (x - 1 - 3)(x - 1 + 3) = (x - 4)(x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 8x^2 - 9x &= x(x^2 + 8x - 9) = x(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 - 9) = \\ \text{g)} \quad &= x((x + 4)^2 - 25) = x(x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = \\ &= x(x - 1)(x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad x^2 + 2x - 15 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 - 1 - 15 = (x + 1)^2 - 4^2 = \\ &= (x + 1 - 4)(x + 1 + 4) = (x - 3)(x + 5) \end{aligned}$$

Работен лист № 2

Уравнения

I. Линейни уравнения

Метод на решаване	Пример
- Всеки член (събираемо) на уравнението може да се прехвърли от другата страна на уравнението с противоположен знак. - Прехвърляме членовете, които съдържат x от лявата страна на уравнението, а свободните членове – от дясната. - Делим двете страни на уравнението на коефициента пред x	$4x + 16 = 0$ $4x = -16$ $x = -\frac{16}{4}$ $x = -4$
$0x = 0$	Всяко x е решение
$0x = 10$	Н.р.к.

$$3x - 9 = 0$$

7. $3x = 9$
 $x = 3$

$$7x + 11 = 2x - 24$$
$$7x - 2x = -24 - 11$$

8. $5x = -35$
 $x = -\frac{35}{5}$
 $x = -7$

$$x^2 - 10x = (x - 5)^2$$
$$x^2 - 10x = x^2 - 10x + 25$$

9. $x^2 - 10x - x^2 + 10x = 25$
 $0x = 25$
н.р.к.

$$x^2 = (x - 5)(x + 5) + 25$$
$$x^2 = x^2 - 25 + 25$$

10. $x^2 - x^2 = -25 + 25$
 $0x = 0$
Всяко x е решение.

II. Уравнения от вида $(ax + b)(cx + d) = 0$

$ax + b = 0$	$cx + d = 0$
$ax = -b$	или $cx = -d$
$x_1 = -\frac{b}{a}$	$x_2 = -\frac{d}{c}$

$$\begin{aligned}
 &(2x+3)(4x-1)=0 \\
 1. \quad &2x+3=0 \quad \text{или} \quad 4x-1=0 \\
 &2x=-3 \quad \quad \quad 4x=1 \\
 &x_1=-1,5 \quad \quad \quad x_2=0,25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &25-x^2=0 \\
 &(5-x)(5+x)=0 \\
 2. \quad &5-x=0 \quad \text{или} \quad 5+x=0 \\
 &-x=-5 \quad \quad \quad x_2=-5 \\
 &x_1=5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &4x^2-37x+9=0 \\
 &4x^2-36x-x+9=0 \\
 &4x(x-9)-(x-9)=0 \\
 3. \quad &(x-9)(4x-1)=0 \\
 &x-9=0 \quad \text{или} \quad 4x-1=0 \\
 &x_1=9 \quad \quad \quad 4x=1 \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad x_2=\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x^2+4x-12=0 \\
 &x^2+2.2.x+2^2-2^2-12=0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(x+2)^2-16=0 \\
 4. \quad &(x+2)^2-4^2=0 \\
 &(x+2+4)(x+2-4)=0 \\
 &(x+6)(x-2)=0 \\
 &x+6=0 \quad \text{или} \quad x-2=0 \\
 &x_1=-6 \quad \quad \quad x_2=2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x^2+3x+2=0 \\
 &x^2+2x+x+2=0 \\
 5. \quad &x(x+2)+(x+2)=0 \\
 &(x+2)(x+1)=0 \\
 &x+2=0 \quad \text{или} \quad x+1=0 \\
 &x_1=-2 \quad \quad \quad x_2=-1
 \end{aligned}$$

III. Модулни уравнения от вида $|ax+b|=c$

$c > 0$	$c = 0$	$c < 0$
$ ax+b =c$ $ax+b=c$ или $ax+b=-c$ $ax=c-b$ $ax=-c-b$ $x_1=\frac{c-b}{a}$ $x_2=\frac{-c-b}{a}$	$ ax+b =c$ $ax+b=0$ $ax=-b$ $x=-\frac{b}{a}$	Няма реални корени

$$\begin{aligned}
 &|3x+6|=3 \\
 &3x+6=3 \quad \text{или} \quad 3x+6=-3 \\
 1. \quad &3x=3-6 \quad \quad \quad 3x=-3-6 \\
 &3x=-3 \quad \quad \quad 3x=-9 \\
 &x_1=-1 \quad \quad \quad x_2=-3 \\
 &|x+6|=0 \\
 2. \quad &x+6=0 \\
 &x=-6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &|-7x+3|+2=0 \\
 3. \quad &|-7x+3|=-2 \\
 &\text{н.р.к.} \\
 &|x+6|+|x+6|=0 \\
 &2|x+6|=0 \\
 4. \quad &|x+6|=0 \\
 &x+6=0 \\
 &x=-6
 \end{aligned}$$

$$2|-7x+3|-3=0$$

$$2|-7x+3|=3$$

$$|-7x+3|=\frac{3}{2}$$

$$5. \quad -7x+3=\frac{3}{2} \quad \text{или} \quad -7x+3=-\frac{3}{2}$$

$$-7x=\frac{3}{2}-3 \quad -7x=-\frac{3}{2}-3$$

$$-7x=\frac{3}{2} \quad -7x=-\frac{9}{2}$$

$$x_1=-\frac{3}{14} \quad x_2=\frac{9}{14}$$

IV. Уравнения, свеждащи се до линейни

$$(x+3)^2-(x-2)^2=x(x+6)$$

$$x^2+6x+9-x^2+4x-4=x^2+6x$$

$$10x+5-x^2-6x=0$$

$$1. \quad -x^2+4x+5=0$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$u \cdot v = -5$$

$$u+v=-4$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$x^2-5x+x-5=0$$

$$x(x-5)+(x-5)=0$$

$$(x-5)(x+1)=0$$

$$x-5=0 \quad \text{или} \quad x+1=0$$

$$x_1=5 \quad x_2=-1$$

Възможните решения са: -1 и 5; 1 и -5.

В нашия случай: 1 и -5.

$$|x^2-4|=5$$

$$x^2-4=5 \quad \text{или} \quad x^2-4=-5$$

$$2. \quad x^2-9=0 \quad x^2+1=0$$

$$(x-3)(x+3)=0 \quad x^2+1>0 \text{ за } \forall x \Rightarrow \text{н.р.к.}$$

$$x-3=0 \quad \text{или} \quad x+3=0$$

$$x_1=3 \quad x_2=-3$$

V. Задачи от движение

Основна формула $S = V \cdot t$	• Скорост – V • Време – t • Изминат път – S
---	--

Движение в спокойни води, по течението, срещу течението (използва се и при движение по въздуха срещу или по посока на вятъра)	- В спокойни води - $V_{\text{сп}}$. - Скорост на течението - $V_{\text{теч}}$. - Скорост при движение по течението - $V_{\text{сп}} + V_{\text{теч}}$. - Скорост при движение срещу течението - $V_{\text{сп}} - V_{\text{теч}}$. - Плавателни и летателни съдове без мотор нямат собствена скорост. - Салът се движи САМО по течението и НЯМА собствена скорост!
Движение на влак покрай стълб (човек) и по мост/ в тунел	При движение по мост/ в тунел: пътят, който изминава влакът, е равен на дължината на тунела + дължината на влака

1. В 9:00 h една сутрин от две речни пристанища един срещу друг едновременно потеглят катер и сал. Собствената скорост на катера е 30 km/h, а скоростта на течението на реката е 3 km/h. Ако разстоянието между двете пристанища е 240 km, намерете в колко часа катерът и салът са се намирали на 30 km един от друг, след като са се разминали.

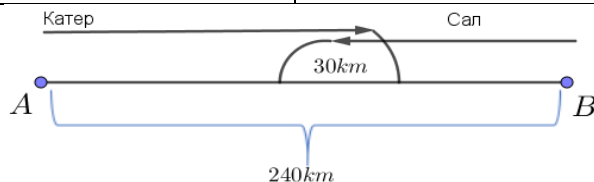
Салът няма собствена скорост, значи се движи **ПО течението**. Катерът се движи **СРЕЩУ** течението.

	$V \text{ (km/h)}$	$t \text{ (h)}$	$S \text{ (km)}$
Катер	$V_{\text{кат}} - V_{\text{теч}} = 30 - 3 = 27$	x	$27x$
Сал	3	x	$3x$

$$27x + 3x = 240 + 30$$

$$30x = 270$$

$$x = 9$$



Катерът и салът са пътували общо 9 часа. След като са тръгнали в 9:00 h, то значи, че в 18:00 са били на 30 km един от друг, след като са се разминали.

2. Влак, дълъг 240 m, преминава през тунел за 20 секунди, а покрай стълб – за 8 секунди. Намерете скоростта на влака в km/h и дължината на тунела.

	V (km/h)	t (s)	Дължина на влака	Дължина на тунела S (m)	Общо изминат път
Покрай стълб		8	240	0	240
През тунел		20	240	x	$240 + x$

$$S = V \cdot t$$

$$V = \frac{S}{t}$$

$$V = \frac{240}{8} = 30 \text{ m/s е скоростта на влака}$$

$$30 \text{ m/s} = \frac{30 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{30 \cdot 60 \cdot 60 \text{ m}}{1 \text{ h}} = 108 \text{ km/h е скоростта на влака}$$

$$\frac{240 + x}{20} = 30$$

$$\frac{240 + x}{20} = 30 \quad | \cdot 20$$

$$240 + x = 600$$

$$x = 360 \text{ m е дължината на тунела.}$$

3. Камион прави доставки между градовете A и B , като в сряда изминал пътя за 2 h 40 min. Първата половина от пътя се движел със скорост 50 km/h, а втората – със 75 km/h. Намерете разстоянието между градовете A и B и средната скорост, с която камионът е изминал целия път.

Ще превърнем 2 h 40 min в часове.

$$40 \text{ min} = \frac{40}{60} \text{ h} = \frac{2}{3} \text{ h}$$

$$2 \text{ h } 40 \text{ min} = 2 \frac{2}{3} \text{ h} = \frac{8}{3} \text{ h}$$

	V (km/h)	t (h)	S (km)
Първа половина на пътя	50	x	$50x$
Втора половина на пътя	75	$\frac{8}{3} - x$	$75\left(\frac{8}{3} - x\right)$

Тъй като двете половини на пътя са равни, съставяме уравнение:

$$50x = 75\left(\frac{8}{3} - x\right)$$

$$50x = 200 - 75x$$

$$50x + 75x = 200$$

$$125x = 200$$

$x = 1,6$ h е времето, за което камионът е изминал първата половина от пътя.

$50 \cdot 1,6 = 80$ km е половината от пътя.

$\Rightarrow$ Разстоянието между А и В е: $2 \cdot 80 = 160$ km

$$S = V \cdot t$$

$$V_{cp} = \frac{160}{\frac{8}{3}} = 160 \cdot \frac{3}{8} = 60 \text{ km/h}$$

е средната скорост, с която камионът се е движил по

пътя от А до В

VI. Задачи от работа

Основна формула и означения $A = P \cdot t$ или $A = N \cdot t$	- Извършена работа – A - Производителност (норма) – извършена работа за единица време – P или N - Време – t
---	--

1. Една тръба пълни басейн за 8 часа, а втора тръба пълни същия басейн за 12 часа. В 8:00 часа пуснали първата тръба, а един час след нея – и втората. В колко часа басейнът ще бъде пълен на 75%?

	Производителност P	Време t (h)	Работа A
Тръба 1	$\frac{1}{8}$	$x+1$	$\frac{1}{8}(x+1)$
Тръба 2	$\frac{1}{12}$	x	$\frac{1}{12}x$

$$\frac{1}{8}(x+1) + \frac{1}{12}x = 75\% \cdot 1$$

$$\frac{1}{8}x + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}x = \frac{75}{100}$$

$$x\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{5}{24}x = \frac{5}{8} \quad | \cdot 24$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

Втората тръба е работила 3 часа като е била пусната в 9:00 h. Следователно, в 12:00 h басейнът ще бъде пълен на 75%.

2. Ученик трябвало да реши определен брой задачи от сборника по математика през ваканцията. Първоначално планирал да решава по 10 задачи на ден. През първите 5 дена обаче той решавал по 8 задачи на ден, след което започнал да решава по 15 задачи на ден. Така 2 дни преди крайния срок той решил предвидените задачи. Колко дни е решавал задачи ученикът и колко задачи е решил?

	Норма N	Време t (дни)	Работа A
По план	10	x	$10x$
В действителност – първите 5 дни	8	5	40
В действителност – следващите дни	15	$x-5-2 = x-7$	$15(x-7)$

$$15(x-7) + 40 = 10x$$

$$15x - 105 + 40 = 10x$$

$$15x - 10x = 105 - 40$$

$$5x = 65$$

$x = 13$ дни е първоначалният срок.

⇒ Ученикът е решил задачите за $13 - 2 = 11$ дни.

$10.13 = 130$ задачи е трябвало да реши.

3. Фирма трябвало да прави по 25 чанти дневно, за да изпълни поръчка в определен срок. След три дни работа фирмата увеличила дневната си производителност с 20% и изработила 100 чанти над плана за определения срок. Да се намери колко чанти е произвела фирмата.

	Норма N	Време t (дни)	Работа A
По план	25	x	$25x$
В действителност – първите 3 дни	25	3	75
В действителност – следващите дни	$25 + 20\% \cdot 25 = 30$	$x - 3$	$30(x - 3)$

$$30(x - 3) + 75 = 25x + 100$$

$$30x - 90 + 75 = 25x + 100$$

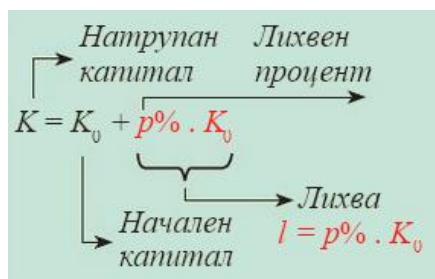
$$30x - 25x = 100 + 90 - 75$$

$$5x = 115$$

$x = 23$ дни е работила фирмата.

$25x + 100 = 25 \cdot 23 = 675$ чанти е произвела общо фирмата

VII. Задачи от капитал



1. Ива изтеглила заем от 3000 лева при годишна лихва 4,7%. Каква сума ще върне Ива на банката, след като го погаси след една година?

$K = x$ - общата сума, която ще плати Ива.

$$x = 3000 + 4,7\% \cdot 3000$$

$$x = 3000 \cdot \left(\frac{100}{100} + \frac{4,7}{100} \right)$$

$$x = 3000 \cdot \frac{104,7}{100}$$

$$x = 3141 \text{ лв.}$$

2. Мария внесла пари в банката при лихвен процент 2,5%. Каква сума е внесла Мария, ако след една година е имала 8200 лева?

Нека $K_0 = x$ - първоначалната сума, внесена в банката

$$8200 = x + 2,5\% \cdot x$$

$$8200 = x \left(1 + \frac{2,5}{100} \right)$$

$$8200 = x \cdot \frac{102,5}{100}$$

$$x = \frac{8200 \cdot 100}{102,5}$$

$x = 8000$ лв. е първоначалната сума, която Мария е внесла в банката.

3. Милена ще си купи лаптоп на изплащане. Ако лаптопът бъде платен в брой, цената му ще бъде 950,00 лв. Ако се вземе на изплащане, Мария ще трябва да внася една година по 95,00 лева. Какъв е процентът на оскъпяване при изплащане за една година?

12.95,00 = 1140,00 е общата сума, която Мария ще плати

$$1140 = 950 + \frac{p}{100} \cdot 950$$

$$\frac{p}{100} \cdot 950 = 190$$

$$p = 20$$

Лихвеният процент е 20%.

VIII. Задачи от смеси и сплави

При смесването на m_1 литра $p\%$ воден разтвор с m_2 литра $q\%$ воден разтвор се използват следните схеми за определяне на масата на сместа и масата на чистото вещество:

$$m_1 + m_2 = m$$

$$p\% \text{ от } m_1 + q\% \text{ от } m_2 = r\% \text{ от } m$$

1. Майката на Сашко приготвя шоколадова торта и разполага с два вида шоколад, в които съдържанието на какао е съответно 75% и 50%. Тя решила да смеси по 200 g от двата вида. Какво е процентното съдържание на какао в получения шоколад?

	Количество (g)	Процентно съдържание (%)	Чисто количество (g)
Шоколад 1	200	75%	$\frac{75}{100} \cdot 200 = 150$
Шоколад 2	200	50%	$\frac{50}{100} \cdot 200 = 100$
Смес	400	$x\%$	250

$$\frac{x}{100} \cdot 400 = 250$$

$$4x = 250$$

$$x = 62,50\%$$

Процентното съдържание на какао в получената смес ще е 62,50%

2. Колко литра чист спирт трябва да се добавят към 10 литра 44%-ов спиртен разтвор, за да се получи 60%-ов разтвор?

	Количество (L)	Процентно съдържание (%)	Чисто количество (L)
Спирт	10	44%	$\frac{44}{100} \cdot 10 = 4,4$
Чист спирт	x	100%	x
Смес	$10 + x$	60%	$\frac{60}{100} (10 + x)$

$$4,4 + x = \frac{60}{100} (10 + x)$$

$$4,4 + x = 0,6(10 + x)$$

$$4,4 + x = 6 + 0,6x$$

$$0,4x = 1,6$$

$x = 4$ L чист спирт трябва да се долеят, за да се получи 60%-ов спиртен разтвор

3. В златарско ателие разполагат с две сплави на злато и сребро. Първата сплав съдържа 60% злато и тежи 30 g. Втората сплав съдържа 70% сребро. Златарят

претопил двете сплави и получил трета сплав, която съдържа 40% злато. Намерете колко грама е получената сплав и по колко грама злато и сребро има в нея.

	Количество (g)	Процентно съдържание на злато(%)	Чисто количество (g)
Сплав 1	30	60%	$\frac{60}{100} \cdot 30 = 18$
Сплав 2	x	30%	$\frac{30}{100} x$
Нова сплав	$30 + x$	40%	$\frac{40}{100} (30 + x)$

$$\frac{30}{100} x + 18 = \frac{40}{100} (30 + x)$$

$$\frac{3}{10} x + 18 = \frac{4}{10} (30 + x) \quad | \cdot 10$$

$$3x + 180 = 4(30 + x)$$

$$3x + 180 = 120 + 4x$$

$$3x - 4x = 120 - 180$$

$$-x = -60$$

$x = 60$ g е втората сплав

Получената сплав е с тегло: $30 + x = 90$ g

$$\text{Злато: } \frac{40}{100} \cdot 90 = 36 \text{ g}$$

$$\text{Сребро: } 90 - 36 = 54 \text{ g}$$

IX. Задачи за самостоятелна работа:

1. Намерете сбора от корените на уравнението $(x - 7)(x + 3) = 0$

2. Решете уравнението:

a)
$$\frac{6 - \frac{x-1}{3}}{4} = 2$$

b)
$$1 - (2x - 3)^2 = (1 - 2x)(2x - 5)$$

с) $\frac{x+7}{2} + \frac{x-8}{3} = 6$

д) $|8x-4| - |5-10x| = -3$

е) $\left| \frac{x-5}{2} + \frac{2x+3}{-3} \right| = 2$

3. Трина работници могат да свършат определена работа съответно за 6, 8, 12 дни. За колко дни могат да свършат 75% от работата ако работят заедно?

4. Ванна може да се пълни от два крана. Ако е пуснат единият кран, то ваната ще се напълни за 10 минути, а ако е пуснат другият - за 15 минути. За колко минути може да се напълни $\frac{1}{3}$ от ваната, ако и двата крана работят едновременно?

5. Работник трябва да изработи поръчка от определен брой детайли, като изработва по 75 детайла дневно. Той увеличил производителността си с $33\frac{1}{3}\%$ и четири дни преди крайния срок произвел с 200 детайла повече. За колко детайла била поръчката и за колко дни е изпълнена? С колко процента трябва да увеличи производителността си работникът, за да изпълни поръчката за 20 дни?

6. Петя иска да приготви шоколадов сладкиш. Забелязва, че има два вида шоколад, с процентно съдържание на какао съответно 75% и 50%. В какво тегловно отношение трябва да се смесят първият и вторият шоколад, за да се получи шоколад с процентно съдържание на какао 67,5% ?

7. Разстоянието между градовете А и В е 243 km. От А към В тръгва лека кола, чиято скорост е 90 km/h, а в същото време от В за А (по същия път) тръгва камион, който се движи със скорост, с 20% по-ниска от тази на леката кола. Намерете след колко време двете превозни средства ще се срещнат. 1ч 24 мин

8. Разстоянието между Варна и Русе е 195 km. В 08:30 h от Варна за Русе тръгнала лека кола със скорост 90 km/h, а един час по-рано от Русе за Варна е тръгнал автобус. Леката кола срещнала автобуса в 09:24 h. Намерете средната скорост на автобуса. В колко часа разстоянието между двете превозни средства е било 35 km?

- 9.** В 08:00 h от пристанището в гр. *A* тръгва моторна лодка за град *B*, движейки се със скорост 30 km/h. В 12:00 пристига в град *B* и прави два часа почивка. След почивката моторната лодка потегля на обратно към град *A*, като едновременно с него от град *A* към град *B* потегля сал, който се движи със скорост 3 km/h. В колко часа моторната лодка и салът ще бъдат на 20 km един от друг преди да се срещнат?
- 10.** От всички лалета в един цветарски магазин, 70% са червени, а другите 45 лалета са жълти. Колко са всички лалета в магазина? – 150
- 11.** Ако смесим 4 литра 4%-ов спиртен разтвор и 5 литра 13%-ов спиртен разтвор, колко процента ще бъде чистият спирт в новия разтвор?
- 12.** Колко литра вода трябва да се добавят към 10 литра 44%-ов спиртен разтвор, за да се получи 20%-ов разтвор?
- 13.** От 6 L морска сол, съдържаща 4% сол, се изпарил 1 L вода. Какъв е процентът на солта в получения разтвор?

Решения на задачите за самостоятелна работа

от Работен лист № 2

Уравнения

1. Намерете сбора от корените на уравнението $(x-7)(x+3)=0$

$$x-7=0 \quad \text{или} \quad x+3=0$$

$$x_1=7 \quad x_2=-3$$

$$x_1+x_2=4$$

2. Решете уравнението:

a)
$$\frac{6-\frac{x-1}{3}}{4}=2$$

$$\frac{6-\frac{x-1}{3}}{4}=2 \quad | \cdot 4$$

$$6-\frac{x-1}{3}=8$$

$$\frac{x-1}{3}=-2 \quad | \cdot 3$$

$$x-1=-6$$

$$x=-5$$

b)
$$1-(2x-3)^2=(1-2x)(2x-5)$$

$$1-(4x^2-12x+9)=2x-5-4x^2+10x$$

$$1-4x^2+12x-9=2x-5-4x^2+10x$$

$$12x-2x-10x=-5+9-1$$

$$0x=3$$

$$\text{н.р.к.}$$

$$\frac{x+7}{2}+\frac{x-8}{3}=6 \quad | \cdot 6$$

$$3(x+7)+2(x-8)=36$$

c)
$$3x+21+2x-16=36$$

$$5x=31$$

$$x=6,2$$

d)
$$|8x-4|-|5-10x|=-3$$

$$|4(2x-1)|-|5(1-2x)|=-3$$

$$4|2x-1|-5|2x-1|=-3$$

$$-|2x-1|=-3 \quad | \cdot (-1)$$

$$2x-1=3 \quad \text{или} \quad 2x-1=-3$$

$$2x=4 \quad 2x=-2$$

$$x_1=2 \quad x_2=-1$$

e)
$$\left| \frac{x-5}{2} + \frac{2x+3}{-3} \right| = 2$$

$$\left| \frac{x-5}{2} - \frac{2x+3}{3} \right| = 2 \quad | \cdot 6$$

$$|3(x-5)-2(2x+3)|=12$$

$$|3x-15-4x-6|=12$$

$$|-x-21|=12$$

$$-x-21=12 \quad \text{или} \quad -x-21=-12$$

$$-x=33 \quad -x=9$$

$$x_1=-33 \quad x_2=-9$$

3. Трина работници могат да свършат определена работа съответно за 6, 8, 12 дни.

За колко дни могат да свършат 75% от работата ако работят заедно?

	Производителност P	Време t (дни)	Работа A
Работник 1	$\frac{1}{6}$	x	$\frac{1}{6}x$
Работник 2	$\frac{1}{8}$	x	$\frac{1}{8}x$
Работник 3	$\frac{1}{12}$	x	$\frac{1}{12}x$

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x = \frac{75}{100}$$

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x = \frac{3}{4} \quad | \cdot 24$$

$$4x + 3x + 2x = 18$$

$$9x = 18$$

$$x = 2$$

За 2 дни ще свършат 75% от работата, ако работят заедно

4. Вана може да се пълни от два крана. Ако е пуснат единият кран, то ваната ще се напълни за 10 минути, а ако е пуснат другият - за 15 минути. За колко минути

може да се напълни $\frac{2}{3}$ от ваната, ако и двата крана работят едновременно?

	Производителност P	Време t (минути)	Работа A
Кран 1	$\frac{1}{10}$	x	$\frac{1}{10}x$
Кран 2	$\frac{1}{15}$	x	$\frac{1}{15}x$

$$\frac{1}{10}x + \frac{1}{15}x = \frac{2}{3} \quad | \cdot 30$$

$$3x + 2x = 20$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

За 4 минути ще напълнят $\frac{2}{3}$ от ваната, ако са отворени и двата крана

5. Работник трябва да изработи поръчка от определен брой детайли, като изработва по 75 детайла дневно. Той увеличил производителността си с $33\frac{1}{3}\%$ и четири дни преди крайния срок произвел с 200 детайла повече. За колко детайла била поръчката и за колко дни е изпълнена? С колко процента трябва да увеличи производителността си работникът, за да изпълни поръчката за 20 дни?

	Норма N	Време t (дни)	Работа A
По план	75	x	$75x$
В действителност	100	$x - 4$	$100(x - 4)$

$$33\frac{1}{3}\%.75 = \frac{100}{3}.75 = \frac{100}{3.100}.75 = 25$$

С 25 детайла повече произвежда работникът в действителност.

$$100(x - 4) = 75x + 200$$

$$100x - 400 = 75x + 200$$

$$25x = 600$$

$$x = 24$$

Работникът е работил $x - 4 = 20$ дни.

Поръчката е била за: $75.24 = 1800$ детайла.

Поръчката от 1800 детайла е била изпълнена за: $1800:100 = 18$ дни.

	Норма N	Време t (дни)	Работа A
По план	75	24	1800
В действителност	x	20	$20x$

$$20x = 1800$$

$$x = 90$$

Работникът трябва да произвежда по 90 детайла на ден

$$90 = 75 + \frac{y}{100}.75$$

$$15 = \frac{y}{4}.3 \quad |.4$$

$$3y = 60$$

$$y = 20$$

С 20% трябва да увеличи производителността си, за да произведе 1800 детайла за 20 дни

6. Петя иска да приготви шоколадов сладкиш. Забелязва, че има два вида шоколад, с процентно съдържание на какао съответно 75% и 50%. В какво тегловно отношение трябва да се смесят първият и вторият шоколад, за да се получи шоколад с процентно съдържание на какао 67,5% ?

	Количество (g)	Процентно съдържание какао (%)	Чисто количество (g) какао
Шоколад 1	x	75%	$\frac{75}{100} \cdot x$
Шоколад 2	y	50%	$\frac{50}{100} \cdot y$
Смес	$x + y$	67,5%	$\frac{67,5}{100} \cdot (x + y)$

$$\frac{75}{100} \cdot x + \frac{50}{100} \cdot y = \frac{67,5}{100} \cdot (x + y) \quad | \cdot 100$$

$$75x + 50y = 67,5(x + y)$$

$$75x + 50y = 67,5x + 67,5y$$

$$75x - 67,5x = 67,5y - 50y$$

$$7,5x = 17,5y \quad | :y \neq 0$$

$$7,5 \frac{x}{y} = 17,5$$

$$\frac{x}{y} = \frac{17,5}{7,5}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{3}$$

Двата вида шоколад трябва да се смесят в тегловно отношение 7:3

7. Разстоянието между градовете А и В е 243 km. От А към В тръгва лека кола, чиято скорост е 90 km/h, а в същото време от В за А (по същия път) тръгва камион, който се движи със скорост, с 20% по-ниска от тази на леката кола. Намерете след колко време двете превозни средства ще се срещнат.

	V (km/h)	t (h)	S (km)
Лека кола	90	x	$90x$
Камион	72	x	$72x$

$$90 - \frac{20}{100} \cdot 90 = \frac{80}{100} \cdot 90 = 72 \text{ km/h е скоростта на камиона.}$$

$$90x + 72x = 243$$

$$162x = 243$$

$$x = 1,5 \text{ часа}$$

След 1,5 часа (1 час и 30 минути) камионът и колата ще се срещнат.

8. Разстоянието между Варна и Русе е 195 km. В 08:30 h от Варна за Русе тръгнала лека кола със скорост 90 km/h, а един час по-рано от Русе за Варна е тръгнал автобус. Леката кола срещнала автобуса в 09:24 h. Намерете средната скорост на автобуса. В колко часа разстоянието между двете превозни средства е било 35 km?

	<i>V</i> (km/h)	<i>t</i> (h)	<i>S</i> (km)
Лека кола	90	0,9	81
Автобус	<i>x</i>	1,9	1,9 <i>x</i>

Колата е пътувала от 08:30 до 09:24, т.е. 54 минути.

$$54 \text{ min} = \frac{54}{60} = \frac{9}{10} \text{ h}$$

Камионът е тръгнал 1 час по-рано, $\Rightarrow$ е пътувал 1,9 h

$$1,9x + 81 = 195$$

$$1,9x = 114$$

$$x = 60$$

Средната скорост на автобуса е 60 km/h

	<i>V</i> (km/h)	<i>t</i> (h)	<i>S</i> (km)
Лека кола	90	<i>x</i>	90 <i>x</i>
Автобус	60	<i>x</i> + 1	60(<i>x</i> + 1)

1 случай: ако все още не са се срещнали:

$$90x + 60(x + 1) + 35 = 195$$

$$90x + 60x + 60 + 35 = 195$$

$$150x = 195 - 95$$

$$150x = 100$$

$$x = \frac{100}{150}$$

$$x = \frac{10}{15} \text{ часа}$$

$$\frac{10,4}{15,4} = \frac{40}{60} = 40 \text{ min е пътувала колата}$$

В 09:10 h разстоянието между колата и камиона е 35 km,
при положение, че не са се срещнали

II случай: ако са се разминали:

$$90x + 60(x + 1) - 35 = 195$$

$$90x + 60x + 60 - 35 = 195$$

$$150x = 195 - 25$$

$$150x = 170$$

$$x = \frac{170}{150}$$

$$x = 1\frac{2}{15} \text{ часа}$$

$$\frac{2.4}{15.4} = \frac{8}{60} = 8 \text{ min}$$

Колата е пътувала $1\frac{2}{15}$ часа, което е 1 h и 8 min

В 09:38 h разстоянието между колата и камиона е 35 km, при положение, че са се разминали.

9. В 08:00 h от пристанището в гр. А тръгва моторна лодка за град В. Скоростта на лодката в спокойна вода е 30 km/h. В 12:00 пристига в град В и прави два часа почивка. След почивката моторната лодка потегля на обратно към град А, като едновременно с него от град А към град В потегля сал, който се движи със скорост 3 km/h. В колко часа моторната лодка и салът ще бъдат на 20 km един от друг преди да се срещнат?

	V (km/h)	t (h)	S (km)
Моторна лодка A – B	33	4	132
Моторна лодка B – A	27	x	27x
Сал A – B	3	x	3x

Салът се движи по течението, следователно течението е от А към В.

Скоростта на лодката по течението е: $V_{\text{потеч.}} = 30 + 3 = 33 \text{ km/h}$

Разстоянието между градовете е 132 km.

Скоростта на лодката срещу течението е: $V_{\text{сртеч.}} = 30 - 3 = 27 \text{ km/h}$

$$27x + 3x + 20 = 132$$

$$30x = 112$$

$$x = \frac{112}{30} = 3\frac{22}{30}$$

$$\frac{22.2}{30.2} = \frac{44}{60} = 44 \text{ min}$$

Корабът и салът ще се срещнат след 3 часа и 44 минути. Това ще бъде в 17:44 h

10. От всички лалета в един цветарски магазин, 75% са червени, а другите 45 лалета са жълти. Колко са всички лалета в магазина?

Всички лалета - x бр.

червени - 75% от x

жълти - $(100\% - 75\%)$ от $x = 25\%$ от x

$$25\% \cdot x = 45$$

$$\frac{25}{100} x = 45$$

$$x = 180 \text{ лалета}$$

11. Ако смесим 4 литра 4%-ов спиртен разтвор и 5 литра 13%-ов спиртен разтвор, колко процента ще бъде чистият спирт в новия разтвор?

	Количество (L)	Процентно съдържание (%) спирт	Чисто количество (L) спирт
Спиртен разтвор 1	4	4%	$\frac{4}{100} \cdot 4 = \frac{16}{100}$
Спиртен разтвор 2	5	13%	$\frac{13}{100} \cdot 5 = \frac{65}{100}$
Нов спиртен разтвор	9	$x\%$	$\frac{81}{100}$

$$\frac{x}{100} \cdot 9 = \frac{81}{100}$$

$$x = 9$$

Новият спиртен разтвор ще бъде с 9% съдържание на чист спирт.

12. Колко литра вода трябва да се добавят към 10 литра 44%-ов спиртен разтвор, за да се получи 20%-ов разтвор?

	Количество (L)	Процентно съдържание (%) спирт	Чисто количество (L) спирт
Спиртен разтвор	10	44%	$\frac{44}{100} \cdot 10 = \frac{440}{100}$
Спиртен разтвор 2	x	0%	0x
Нов спиртен разтвор	10 + x	20%	$\frac{20}{100} (10 + x)$

$$\frac{440}{100} + 0x = \frac{20}{100} (10 + x)$$

$$200 + 20x = 440$$

$$20x = 240$$

$$x = 12$$

Трябва да се добави 12 L вода, за да се получи спиртен разтвор 20%.

13. От 6 L морска сол, съдържаща 4% сол, се изпари 1 L вода. Какъв е процентът на солта в получения разтвор?

	Количество (L)	Процентно съдържание (%) спирт	Чисто количество (L) спирт
Морска сол	6	4%	$\frac{4}{100} \cdot 6 = \frac{24}{100}$
Вода	1	0%	0
Нов спиртен разтвор	5	x%	$\frac{x}{100} \cdot 5 = \frac{5x}{100}$

$$24 = 5x$$

$$x = 4,8$$

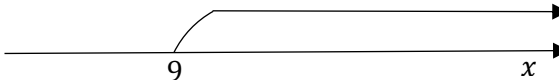
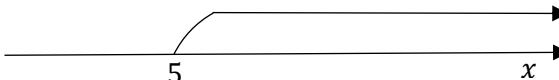
Процентът на солта в получения разтвор е 4,8%.

Работен лист № 3

Неравенства

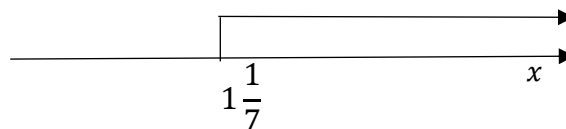
I. Линеини неравенства

Метод на решаване	Пример
• Всеки член (събираемо) на неравенството може да се прехвърли от другата страна на неравенството с противоположен знак. • Прехвърляме членовете, които съдържат x от лявата страна на неравенството, а свободните членове – от дясната. • Ако и двете страни на неравенството умножим/разделим с едно и също отрицателно число, то посоката на неравенството се сменя! • Делим двете страни на неравенството на коефициента пред x	$\begin{aligned}-4x + 16 &> 0 \\ -4x &> -16 \\ -4x &> -16 \quad \cdot (-1) \\ 4x &< 16 \\ x &< 4\end{aligned}$

1. $x - 6 > 3$
 $x > 3 + 6$
 $x > 9$
 $x \in (9; +\infty)$
- 
2. $3x + 2 < 4x - 3$
 $3x - 4x < -3 - 2$
 $-x < -5 \quad | \cdot (-1)$
 $x > 5$
 $x \in (5; +\infty)$
- 
3. $(x - 2)^2 - (x - 2)(x + 2) \leq 3x$
 $x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4 \leq 3x$
 $-4x - 3x \leq -8 \quad | \cdot (-1)$
 $7x \geq 8$
 $x \geq \frac{8}{7}$

$$x \geq 1\frac{1}{7}$$

$$x \in \left[1\frac{1}{7}; +\infty\right)$$



II. Неравенства, свеждащи се до линейни

$$\frac{x-1}{3} + 5 \geq 2 + \frac{3-x}{-2}$$

$$\frac{x-1}{3} + 5 \geq 2 - \frac{3-x}{2} \quad | \cdot 6$$

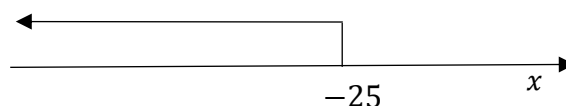
$$2x - 2 + 30 \geq 12 - 9 + 3x$$

$$1. \quad 2x - 3x \geq 3 - 28$$

$$-x \geq -25 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \leq 25$$

$$x \in (-\infty; 25]$$



$$\frac{x-4}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{3} - \frac{3x-2}{4} \right) \geq -2 - \frac{3-x}{-12}$$

$$\frac{x-4}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{3} - \frac{3x-2}{4} \right) \geq -2 + \frac{3-x}{12}$$

$$\frac{x-4}{2} - \frac{x+1}{6} + \frac{3x-2}{8} \geq -2 + \frac{3-x}{12} \quad | \cdot 24$$

$$12(x-4) - 4(x+1) + 3(3x-2) \geq 24 \cdot (-2) + 2(3-x)$$

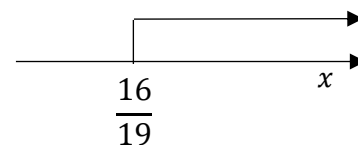
$$2. \quad 12x - 48 - 4x - 4 + 9x - 6 \geq -48 + 6 - 2x$$

$$12x - 4x + 9x + 2x \geq 6 + 4 + 6$$

$$19x \geq 16$$

$$x \geq \frac{16}{19}$$

$$x \in \left[\frac{16}{19}; +\infty\right)$$



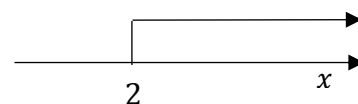
$$(6x-5)^2 - (5x-6)^2 \geq 9(x-1)(x+1) + x(2x-1)$$

$$36x^2 - 60x + 25 - 25x^2 + 60x - 36 \geq 9x^2 - 9 + 2x^2 - x$$

$$3. \quad 11x^2 - 11x^2 + x \geq -9 - 25 + 36$$

$$x \geq 2$$

$$x \in [2; +\infty)$$



III. Приложение на линейните неравенства

1. Една тръба пълни басейн за 12 часа, а втора тръба пълни същия басейн с 50% по-бързо. В 5:00 часа пуснали първата тръба, а един час след нея – и втората. В колко часа басейнът ще бъде пълен повече от 80%?

	Производителност P	Време t (h)	Работа A
Тръба 1	$\frac{1}{12}$	$x+1$	$\frac{1}{12}(x+1)$
Тръба 2	$\frac{1}{6}$	x	$\frac{1}{6}x$

$$12 - 50\% \cdot \frac{1}{12} = 6 \text{ h}$$

Втората тръба пълни басейна за 6 h.

$$\frac{1}{12}(x+1) + \frac{1}{6}x > \frac{80}{100}$$

$$\frac{1}{12}x + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}x > \frac{4}{5} \quad | \cdot 60$$

$$5x + 5 + 10x > 48$$

$$15x > 43$$

$$x > \frac{43}{15}$$

$$x > 2\frac{13}{15}$$

$$\frac{13}{15} \text{ h} = \frac{13.4}{15.4} \text{ h} = \frac{52}{60} \text{ h} = 52 \text{ min}$$

След 2 часа и 52 минути басейнът ще бъде пълен повече от 80%.

2. Фирма трябвало да прави по 20 чанти дневно, за да изпълни поръчка в определен срок. Фирмата обаче увеличила дневната си производителност и започнала да произвежда поне по 26 чанти на ден. С колко най-малко се е увеличила производителността на фирмата?

$$20 + 20 \cdot x\% \geq 26$$

$$20 \cdot \frac{x}{100} \geq 6$$

$$\frac{x}{5} \geq 6 \quad | \cdot 5$$

$$x \geq 30$$

Производителността се е увеличила с поне 30%.

3. Колко най-малко литра чист спирт трябва да се добавят към 10 литра 40%-ов спиртен разтвор, за да се получи 80%-ов разтвор?

	Количество (L)	Процентно съдържание спирт (%)	Чисто количество спирт (L)
Спирт	10	40%	$\frac{40}{100} \cdot 10 = 4$
Чист спирт	x	100%	x
Смес	$10 + x$	80%	$\frac{80}{100}(10 + x)$

$$4 + x \geq \frac{80}{100}(10 + x)$$

$$4 + x \geq 0,8(10 + x)$$

$$4 + x = 8 + 0,8x$$

$$0,2x \geq 4$$

$$x \geq 20 \text{ L}$$

Най-малко 20 L чист спирт трябва да се долеят, за да се получи 80%-ов спиртен разтвор

IV. Неравенства между страни и ъгли в триъгълника

В триъгълника срещу по-голям ъгъл лежи по-голяма страна.	
$\alpha > \beta > \gamma$	$\Rightarrow a > b > c$
В правоъгълния триъгълник хипотенузата е по-голяма от всеки катет.	

1. За ъглите на $\triangle ABC$ е дадено, че: $\angle A : \angle B = 6 : 7$ и $\angle C = 50^\circ$. Подредете страните на триъгълника по големина, като започнете от най-малката.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ (сбор от ъглите в триъгълник)}$$

$$\angle A + \angle B = 130^\circ$$

$$\frac{\angle A}{\angle B} = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow \angle A = 6x$$

$$\angle B = 7x$$

$$6x + 7x = 130^\circ$$

$$13x = 130$$

$$x = 10$$

$$\Rightarrow \angle A = 6 \cdot 10 = 60^\circ$$

$$\angle B = 7 \cdot 10 = 70^\circ$$

$$\angle C < \angle A < \angle B$$

$$\Rightarrow AB < BC < AC$$

2. За ъглите на $\triangle ABC$ е дадено, че: β е два пъти по-голям от γ и с 50° по-малък от α . Подредете страните на триъгълника по големина, като започнете от най-голямата.

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2}{1}$$

$$\beta = 2x$$

$$\gamma = x$$

$$\alpha = \beta + 50 = 2x + 50$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$2x + 50 + 2x + x = 180$$

$$5x = 130$$

$$x = 26$$

$$\beta = 52^\circ$$

$$\gamma = 26^\circ$$

$$\alpha = 102^\circ$$

$$BC > AC > AB$$

3. За ъглите на $\triangle ABC$ е дадено, че: $\alpha = 60^\circ$, β е 60% от α . Намерете γ и подредете страните на триъгълника по големина, като започнете от най-малката.

$$\beta = \frac{60}{100} \cdot 60 = 36^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$60 + 36 + \gamma = 180$$

$$\gamma = 84^\circ$$

$$AC < BC < AB$$

V. Неравенство на триъгълника

В всяка страна е по-малка от сбора на другите две страни.

1. Дължините на кои три отсечки в сантиметри може да са страни на триъгълник?

a) 2; 1; 1

b) 4; 3; 2,5

c) 3; 2,5; 0,5

d) 5; 2; 3

2. Даден е равнобедрен триъгълник, на който две от страните са 2 cm и 4 cm. Намерете третата страна.

I случай:

Нека бедрото е 2 cm, а основата – 4 cm.

$2 + 2 > 4$ - не е вярно, $\Rightarrow$ триъгълник с такива страни не съществува.

II случай:

Нека бедрото е 4 cm, а основата – 2 cm.

$4 + 4 > 2$ - вярно

$2 + 4 > 4$ - вярно

Третата страна е 4 cm.

3. Периметърът на равнобедрен триъгълник е 36 cm. Ако едната страна е с 6 cm по-голяма от другата, намерете страните на триъгълника.

I случай:

Нека основата е a , а бедрото - $a + 6$

$$P_{ABC} = a + 2(a + 6)$$

$$36 = a + 2a + 12 = 3a + 12$$

$$3a = 24$$

$a = 8$ cm е основата, а бедрото - $a + 6 = 14$ cm

Проверяваме дали такъв триъгълник съществува:

$14 + 14 > 8$ – вярно

$14 + 8 > 14$ – вярно.

Страните на триъгълника са: 8 cm, 14 cm, 14 cm

II случай:

Нека бедрото е a , а основата - $a + 6$

$$P_{ABC} = a + 6 + 2 \cdot a$$

$$36 = 3a + 6$$

$$3a = 30$$

$a = 10$ cm е бедрото, а основата - $a + 6 = 16$ cm

Проверяваме дали такъв триъгълник съществува:

$10 + 10 > 16$ – вярно; $10 + 16 > 10$ – вярно.

Страните на триъгълника са: 16 cm, 10 cm, 10 cm.

VI. Задачи за самостоятелна работа:

1. Решете неравенството:

a) $\frac{3x-2}{5} - \frac{x-3}{3} \geq \frac{1-4x}{-10}$

b) $\frac{x+3}{2} + \frac{3x-7}{-2} < 1$

c) $4x - 5(2x - 4) + 3(x + 4) > 0$

d) $\frac{8x-16}{2} + 2x < 3x - 6 + \frac{6x-3}{3}$

e) $\left(\frac{x+2}{-2}\right)^2 - \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x+6}{3} - \frac{x^2}{12} \geq 1$

2. Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството:

$$(2x-1)2x-5x > x(4x-1)+9$$

3. Трина работници могат да свършат определена работа съответно за 6, 8, 12 дни.

За колко дни могат да свършат най-малко 75% от работата ако работят заедно?

4. Ванна може да се пълни от два крана. Ако е пуснат единият кран, то ваната ще се напълни за 10 минути, а ако е пуснат другият - за 15 минути. За колко минути

може да се напълни най-малко $\frac{1}{3}$ от ваната, ако и двата крана работят едновременно?

5. Колко най-малко литра вода трябва да се изпари от 10 литра 35% разтвор на натриев хлорид, за да се получи 50% разтвор?

6. Учител трябвало провери контролни работи за определен срок. Той трябвало да проверява по 50 контролни работи на ден. Той обаче проверявал с 12% по-малко контролни на ден и заради това след изтичане на срока му оставало да провери още 36 контролни. С колко процента най-малко трябва учителят да повиши производителността си, за да успее да провери всички контролни в срок?
7. Лек автомобил изминава поне 160 km с 15 литра бензин. Колко най-малко километра ще измине с 45 литра бензин?
8. Две от страните на триъгълник са 6 cm и 10 cm. Възможно ли е третата страна да е 4 cm? Обосновете отговора си.
9. За външните ъгли на $\triangle ABC$ е известно, че се отнасят един към друг така: $\alpha':\beta':\gamma' = 2:3:4$. Подредете страните на триъгълника по големина, като започнете от най-малката.
10. Отношението на ъглите в триъгълник е $\alpha:\beta:\gamma = 1:2:3$. Намерете отношението на най-късата към най-дългата страна.

Решения на задачите за самостоятелна работа

от Работен лист № 3

1. Решете неравенството:

a) $\frac{3x-2}{5} - \frac{x-3}{3} \geq \frac{1-4x}{-10}$

$$\frac{3x-2}{5} - \frac{x-3}{3} \geq -\frac{1-4x}{10}$$

$$\frac{3x-2}{5} - \frac{x-3}{3} \geq \frac{4x-1}{10} \quad | \cdot 30$$

$$6(3x-2) - 10(x-3) \geq 3(4x-1)$$

$$18x - 12 - 10x + 30 \geq 12x - 3$$

$$8x + 18 \geq 12x - 3$$

$$8x - 12x \geq -3 - 18$$

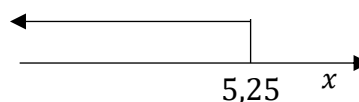
$$-4x \geq -21 \quad | \cdot (-1)$$

$$4x \leq 21$$

$$x \leq \frac{21}{4}$$

$$x \leq 5,25$$

$$x \in (-\infty; 5,25]$$



b) $\frac{x+3}{2} + \frac{3x-7}{-2} < 1$

$$\frac{x+3}{2} - \frac{3x-7}{2} < 1 \quad | \cdot 2$$

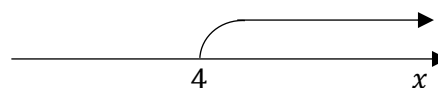
$$x + 3 - 3x + 7 < 2$$

$$-2x < -8 \quad | \cdot (-1)$$

$$2x > 8$$

$$x > 4$$

$$x \in (4; +\infty)$$



c) $4x - 5(2x - 4) + 3(x + 4) > 0$

$$4x - 5(2x - 4) + 3(x + 4) > 0$$

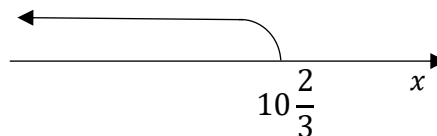
$$4x - 10x + 20 + 3x + 12 > 0$$

$$-3x > -32 \quad | \cdot (-1)$$

$$3x < 32$$

$$x < 10\frac{2}{3}$$

$$x \in (-\infty; 10\frac{2}{3})$$



d)
$$\frac{8x-16}{2} + 2x < 3x-6 + \frac{6x-3}{3}$$

$$\frac{8x-16}{2} + 2x < 3x-6 + \frac{6x-3}{3} \quad | \cdot 6$$

$$3(8x-16) + 12x < 18x-36 + 2(6x-3)$$

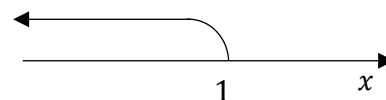
$$24x-48+12x < 18x-36+12x-6$$

$$36x-18x-12x < -42+48$$

$$6x < 6$$

$$x < 1$$

$$x \in (-\infty; 1)$$



e)
$$\left(\frac{x+2}{-2}\right)^2 - \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x+6}{3} - \frac{x^2}{12} \geq 1$$

$$\left(\frac{x+2}{-2}\right)^2 - \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x+6}{3} - \frac{x^2}{12} \geq 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{(-2)^2} - \frac{(x-2)(x+6)}{2 \cdot 3} - \frac{x^2}{12} \geq 1$$

$$\frac{x^2+4x+4}{4} - \frac{x^2+6x-2x-12}{6} - \frac{x^2}{12} \geq 1 \quad | \cdot 12$$

$$3x^2+12x+12-2x^2-8x+24-x^2 \geq 12$$

$$4x \geq 12-12-24$$

$$4x \geq -24$$

$$x \geq -6$$

$$x \in [-6; +\infty)$$

2. Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството:

$$(2x-1)2x-5x > x(4x-1)+9$$

$$(2x-1)2x-5x > x(4x-1)+9$$

$$4x^2-2x-5x > 4x^2-x+9$$

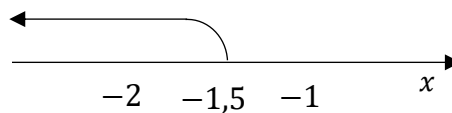
$$-6x > 9 \quad | \cdot (-1)$$

$$6x < -9$$

$$x < -1,5$$

$$x \in (-\infty; -1,5)$$

Най-голямото цяло число е -2



3. Трима работници могат да свършат определена работа съответно за 6, 8, 12 дни.

За колко дни могат да свършат най-малко 75% от работата ако работят заедно?

	Производителност P	Време t (дни)	Работа A
Работник 1	$\frac{1}{6}$	x	$\frac{1}{6}x$
Работник 2	$\frac{1}{8}$	x	$\frac{1}{8}x$
Работник 3	$\frac{1}{12}$	x	$\frac{1}{12}x$

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x \geq \frac{75}{100}$$

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x \geq \frac{3}{4} \quad | \cdot 24$$

$$4x + 3x + 2x \geq 18$$

$$9x \geq 18$$

$$x \geq 2$$

За 2 дни ще свършат поне 75% от работата, ако работят заедно

4. Ванна може да се пълни от два крана. Ако е пуснат единият кран, то ваната ще се напълни за 10 минути, а ако е пуснат другият - за 15 минути. За колко минути може да се напълни най-малко $\frac{1}{3}$ от ваната, ако и двата крана работят

едновременно?

	Производителност P	Време t (минути)	Работа A
Кран 1	$\frac{1}{10}$	x	$\frac{1}{10}x$
Кран 2	$\frac{1}{15}$	x	$\frac{1}{15}x$

$$\frac{1}{10}x + \frac{1}{15}x \geq \frac{2}{3} \quad | \cdot 30$$

$$3x + 2x \geq 20$$

$$5x \geq 20$$

$$x \geq 4$$

За 4 минути ще напълнят най-малко $\frac{2}{3}$ от ваната, ако са отворени и двата крана

5. Колко най-малко литра вода трябва да се изпари от 10 литра 35% разтвор на натриев хлорид, за да се получи 50% разтвор?

	Количество (L)	Процентно съдържание (%) спирт	Чисто количество (L) спирт
Разтвор на натриев хлорид	10	35%	$\frac{35}{100} \cdot 10 = \frac{350}{100}$
Вода	x	0%	$0x$
Нов разтвор	$10 - x$	50%	$\frac{50}{100}(10 - x)$

$$\frac{350}{100} + 0x = \frac{50}{100}(10 - x)$$

$$350 = 500 - 50x$$

$$50x = 150$$

$$x = 3$$

Трябва да се изпари поне 3 L вода, за да се получи нов 50% разтвор на NaCl

6. Учител трябвало провери контролни работи за определен срок. Той трябвало да проверява по 50 контролни работи на ден. Той обаче проверявал с 12% по-малко контролни на ден и заради това след изтичане на срока му оставало да провери още 36 контролни. С колко процента най-малко трябва учителят да повиши производителността си, за да успее да провери всички контролни в срок?

	Норма N	Време t (дни)	Работа A
По план	50	x	$50x$
В действителност	44	x	$44x$

$$50 - 12\% \cdot 50 = \frac{88}{100} \cdot 50 = 44$$

Учителят е проверявал по 44 контролни на ден.

$$6x = 36$$

$$x = 6$$

Срокът за проверка е бил 6 дена, а учителят е трябвало да провери

50.6 = 300 контролни общо.

$$44 + p\% \cdot 44 \geq 50$$

$$p\% \cdot 44 \geq 6$$

$$\frac{p}{100} \cdot 44 \geq 6$$

$$p \geq \frac{600}{44}$$

$$p \geq 13\frac{7}{11}$$

Учителят трябва да увеличи производителността си поне с $13\frac{7}{11}\%$,

за да провери всички контролни в срок.

7. Лек автомобил изминава поне 160 km с 15 литра бензин. Колко най-малко километра ще измине с 45 литра бензин?

15 L - 160 km

$$15x \geq 160$$

$$x \geq \frac{160}{15}$$

$$45 \cdot \frac{160}{15} = 3 \cdot 160 = 480$$

Най-малко 480 km ще измине автомобилът.

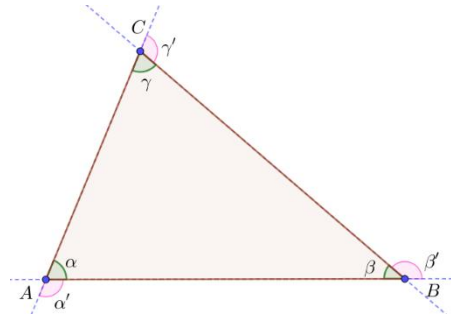
8. Две от страните на триъгълник са 6 cm и 10 cm. Възможно ли е третата страна да е 4 cm? Обосновете отговора си.

Не е възможно, защото ако третата страна е 4 cm, то тогава триъгълникът няма да отговаря на условието за неравенство в триъгълника:

$$4 + 6 > 10 \text{ – не е вярно.}$$

9. За външните ъгли на $\triangle ABC$ е известно, че се отнасят един към друг така: $\alpha':\beta':\gamma' = 2:3:4$. Подредете страните на триъгълника по големина, като започнете от най-малката.

$$\begin{aligned}
\alpha' &= 180^\circ - \alpha \text{ (съседни ъгли)} \\
\beta' &= 180^\circ - \beta \text{ (съседни ъгли)} \\
\gamma' &= 180^\circ - \gamma \text{ (съседни ъгли)} \\
\alpha' + \beta' + \gamma' &= 3 \cdot 180 - (\alpha + \beta + \gamma) = 540 - 180 = 360^\circ \\
\alpha' &= 2x \\
\beta' &= 3x \\
\gamma' &= 4x \\
2x + 3x + 4x &= 360 \\
9x &= 360 \\
x &= 40 \\
\Rightarrow \alpha' &= 80^\circ \\
\beta' &= 120^\circ \\
\gamma' &= 160^\circ \\
\Rightarrow \alpha &= 180 - 80 = 100^\circ \\
\beta &= 180 - 120 = 60^\circ \\
\gamma &= 180 - 160 = 20^\circ \\
\Rightarrow AB &< AC < BC
\end{aligned}$$



10. Отношението на ъглите в триъгълник е $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$. Намерете отношението на най-късата към най-дългата страна.

$$\begin{aligned}
\alpha &= x \\
\beta &= 2x \\
\gamma &= 3x \\
x + 2x + 3x &= 180 \\
6x &= 180 \\
x &= 30^\circ \\
\alpha &= 30^\circ \\
\beta &= 60^\circ \\
\gamma &= 90^\circ
\end{aligned}$$

Триъгълникът е правоъгълен с ъгъл, равен на 30° . Катетът срещу този ъгъл е най-малката страна в триъгълника (според неравенство между страните и ъглите в триъгълника).

$\Rightarrow BC$ е най-малката страна.

$$BC = \frac{1}{2} AB \text{ (катет срещу ъгъл } 30^\circ)$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$$

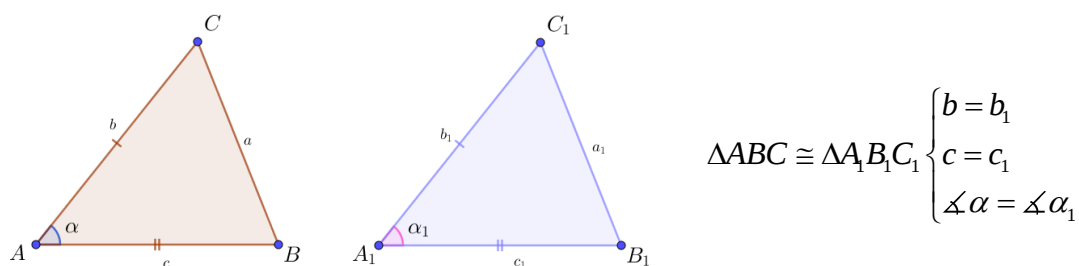
Работен лист № 4

Триъгълник. Еднакви триъгълници. Успоредни прави.

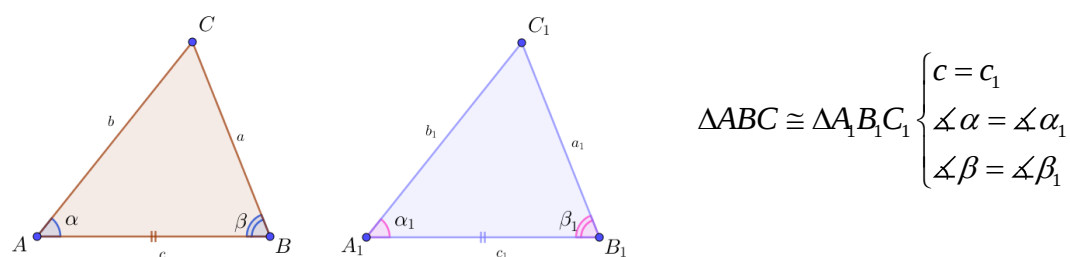
I. Основни теореми и понятия

Сборът от ъглите в триъгълник е 180°.	
Всеки външен ъгъл на триъгълника е равен на сбора на двата несъседни на него ъгъла на триъгълника.	
Равнобедрен триъгълник	- Ъглите при основата са равни - Две равни страни (бедрa) - Медиана, ъглополовяща и височина, построени от върха към основата, съвпадат.
Равностранен триъгълник	- Три равни страни - Ъглите му са равни на 60° - Медиана, ъглополовяща и височина, построени от всеки връх, съвпадат.
Правоъгълен триъгълник	- Катетът, лежащ срещу ъгъл от 30° в правоъгълен триъгълник, е равен на половината от хипотенузата. - Медианата към хипотенузата е равна на половината от хипотенузата
Ъглополовяща на ъгъл	- Лъч, който разделя ъгъла на два равни ъгъла - Всяка точка от ъглополовящата на всеки се намира на равни разстояния от раменете на този ъгъл.
Симетрала на отсечка	Правa, която минава през средата на отсечката и е перпендикулярна на нея.

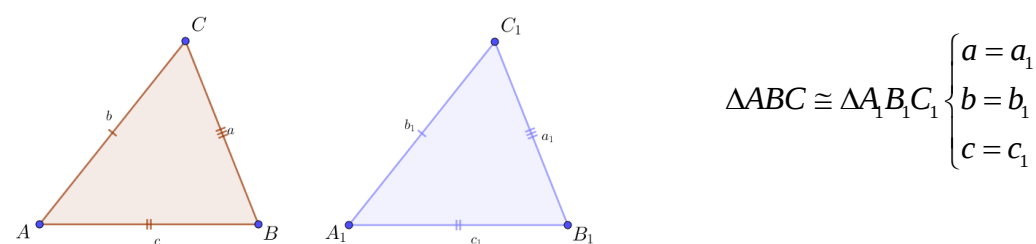
II. Първи признак за еднаквост на триъгълници



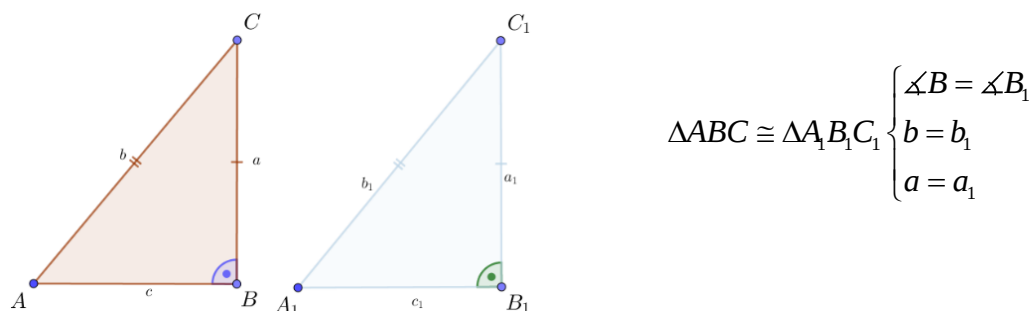
III. Втори признак за еднаквост на триъгълници



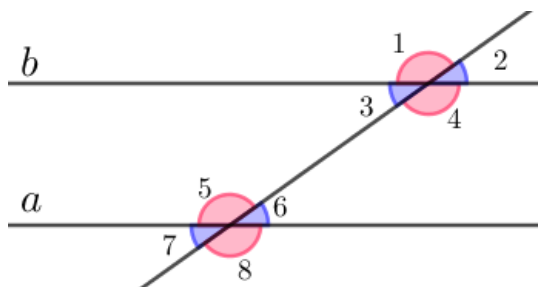
IV. Трети признак за еднаквост на триъгълници



V. Признак за еднаквост на правоъгълни триъгълници



VI. Ъгли, получени при пресичане на две успоредни прави с трета



- a) **Кръстни ъгли:** $\angle 3 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 5$; $\angle 1 = \angle 8$; $\angle 2 = \angle 7$
- b) **Съответни ъгли:** $\angle 1 = \angle 5$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 7$; $\angle 4 = \angle 8$
- c) **Противоположни (върхни) ъгли:** $\angle 1 = \angle 4$; $\angle 2 = \angle 3$; $\angle 5 = \angle 8$; $\angle 7 = \angle 6$
- d) **Прилежащи ъгли:** $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$; $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$; $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$; $\angle 2 + \angle 8 = 180^\circ$

VII. Примерни задачи

1. Ъглите на триъгълник се отнасят така, както 3:5:10. Намерете техните мерки.

Решение:

Нека ъглите на триъгълника са съответно α, β, γ .

$$\Rightarrow \alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 10$$

Нека x = една равна част.

$$\Rightarrow \alpha = 3x; \beta = 5x; \gamma = 10x$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ (сбор от ъглите в триъгълник)}$$

$$3x + 5x + 10x = 180$$

$$18x = 180$$

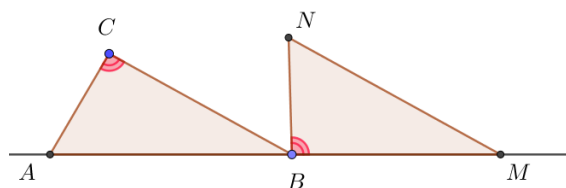
$$x = 10^\circ$$

$$\alpha = 3x = 30^\circ$$

$$\beta = 5x = 50^\circ$$

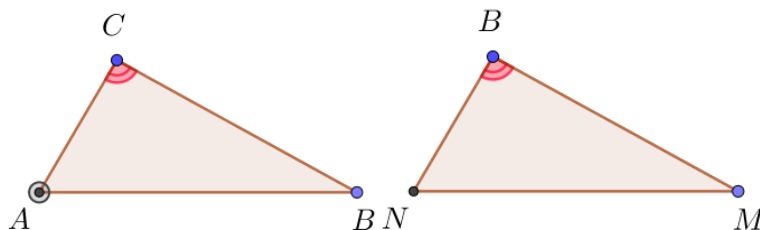
$$\gamma = 10x = 100^\circ$$

2. На чертежа $\triangle ABC \cong \triangle NMB$. Ако $AM = 7$ cm, а $BN = 3$ cm, намерете периметъра на $\triangle ABC$.



Решение:

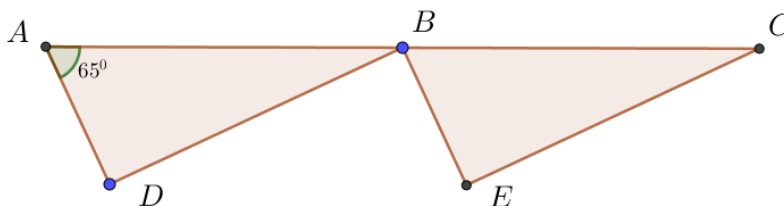
Правим отделен чертеж с еднаквите триъгълници, така че съответните им елементи да съвпадат.



$$\triangle ABC \cong \triangle NMB \Rightarrow AC = NB = 3 \text{ cm}; AB = NM; BC = MB$$

$$P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + MB + AC = AM + AC = 7 + 3 = 10 \text{ cm}$$

3. На чертежа $AB = BC$, $BD = CE$, $\angle ADB = \angle BEC = 90^\circ$ и $\angle DAB = 65^\circ$. Намерете $\angle DBE$.

**Решение:**

$$\triangle ABD \cong \triangle BCE \left\{ \begin{array}{l} AB = BC \text{ (по усл.)} \\ BD = CE \text{ (по усл.)} \\ \angle ADB = \angle BEC = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ по IV признак}$$

$$\Rightarrow \angle DAB = \angle EBC = 65^\circ$$

$$\angle ADB + \angle DAB + \angle ABD = 180^\circ \text{ (сбор от ъглите в триъгълника)}$$

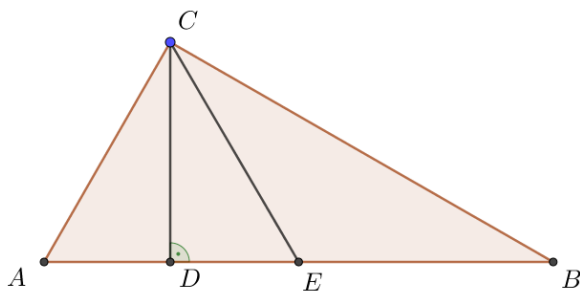
$$90 + 65 + \angle ABD = 180^\circ \Rightarrow \angle ABD = 25^\circ$$

$$\angle ABD + \angle DBE + \angle EBC = 180^\circ \text{ (съседни ъгли)}$$

$$25 + \angle DBE + 65 = 180 \Rightarrow \angle DBE = 90^\circ$$

4. На чертежа CD и CM са съответно височина и медиана в $\triangle ABC$ и го разделят на три равни части. Ако $AB = 20 \text{ cm}$, намерете:

- разстоянието от т. M до страната BC . Намерете ъглите на $\triangle ABC$
- ъглите на $\triangle ABC$
- дължината на медианата CE



Решение:

a) Нека $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = x$

AE – медиана $\Rightarrow AE = BE = \frac{1}{2} AB = 10 \text{ cm}$

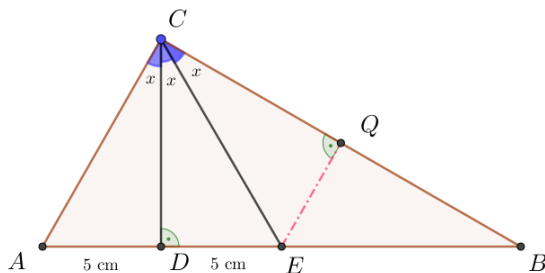
$\triangle ABC$: CD – височина;

$\angle ACD = \angle DCE$ (по условие)

$\Rightarrow CD$ е височина и ъглополовяща.

$\Rightarrow \triangle ABC$ е равнобедрен и CD е и медиана.

$\Rightarrow AD = DE = \frac{1}{2} AE = 5 \text{ cm}$



CE – ъглополовяща на $\angle DCB$ (по условие $\angle ACD = \angle DCE = \angle BCE = x$)

EQ – разстояние от т. E до BC . $\Rightarrow EQ \perp BC$

$\Rightarrow ED = EQ = 5 \text{ cm}$ (т. $E \in CE \Rightarrow$ се намира на равни разстояния от раменете на ъгъла)

b) $\angle EQB = 90^\circ \Rightarrow \triangle EQB$ е правоъгълен, в който EQ е катет, а EB е хипотенуза.
 $EQ = 5 \text{ cm}$, а $EB = 10 \text{ cm}$.

$\Rightarrow EQ = \frac{1}{2} EB \Rightarrow$ ъгълът срещу катета EQ е 30° .

$\Rightarrow \angle ABC = 30^\circ$

$\triangle DBC$: $CD \perp AB \Rightarrow \angle CDB = 90^\circ \Rightarrow \triangle DBC$ – правоъгълен.

$\angle CDB + \angle DBC + \angle DCB = 180^\circ$ (сбор от ъглите в триъгълник)

$$90 + 30 + \angle DCB = 180$$

$$\angle DCB = 60^\circ$$

$$\angle DCB = 2x$$

$$x = 30^\circ$$

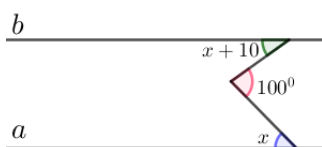
$$\angle ACB = 3x = 3 \cdot 30 = 90^\circ$$

с) $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ – правоъгълен.

$$CE = \frac{1}{2} AB \text{ (свойство на медианата към хипотенузата в правоъгълен триъгълник)}$$

$$CE = 10 \text{ cm}$$

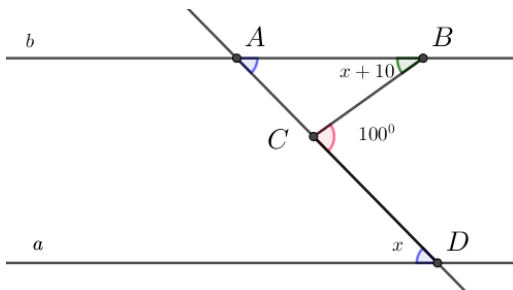
5. На чертежа правите a и b са успоредни. Намерете мярката на $\angle x$:



Решение:

$$a \parallel b$$

Правим нов чертеж, на който продължаваме една от отсечките и нанасяме пресечните точки за по-добра прегледност.



$\angle DAB = \angle x$ (кръстни ъгли, получени при пресичане на две успоредни прави с трета)

$$\angle ACB + \angle BCD = 180^\circ \text{ (съседни ъгли)}$$

$$\angle ACD = 180 - 100 = 80^\circ$$

$$\triangle ABC: \angle ACB + \angle CBA + \angle CAB = 180^\circ \text{ (сбор от ъглите в триъгълник)}$$

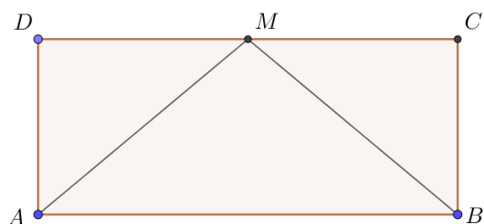
$$80 + x + 10 + x = 180$$

$$2x = 90$$

$$x = 45^\circ$$

6. Даден е правоъгълник $ABCD$ и т. M – среда на CD . Да се докаже, че $\triangle ABM$ е равнобедрен.

Решение:



$AD = BC$ (срещулежащи страни в правоъгълник)

$AB = CD$ (срещулежащи страни в правоъгълник)

$DM = CM$ (т. M – среда на CD по условие)

$DM = CM$

$AD = BC$

$\angle ADM = \angle BCM = 90^\circ$ (ъгли в правоъгълник)

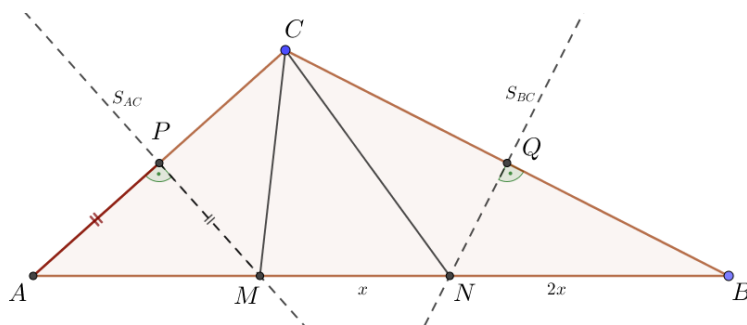
$\left. \begin{array}{l} DM = CM \\ AD = BC \\ \angle ADM = \angle BCM = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle AMD \cong \triangle BMC \text{ по I признак}$

$AM = BM$

$\Rightarrow \triangle ABM$ е равнобедрен

7. В $\triangle ABC$ е построена симетралата на страната AC , която пресича страната AC в т. P , а страната AB в т. M така, че $AP = PM$. Симетралата на страната BC пресича страната BC в т. Q , а страната AB в т. N така, че $BN:NM = 2:1$ (т. N се намира между M и B). Намерете мярката на $\angle ABC$.

Решение:



$S_{AC}: AP = PC$ (т. P – среда на AC) $\Rightarrow AP = PM = CP$

$S_{AC} \perp AC \Rightarrow \angle APM = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AMP$ е правоъгълен и равнобедрен.

$\Rightarrow \angle PAM + \angle AMP + 90 = 180$ (сбор на ъглите в триъгълник)

$\angle PAM = \angle AMP = 45^\circ$

Аналогично $\triangle CMP$ е правоъгълен и равнобедрен.

$$\angle PMC = \angle PCM = 45^\circ$$

$MA = MC$ (т. $M \in S_{AC}$) $\Rightarrow \triangle CAM$ е равнобедрен.

$$\angle AMC = 180 - 2 \cdot 45 = 90^\circ$$

$$\angle CMB = 90^\circ \text{ (съседен на } \angle AMC)$$

$$BN:NM = 2:1$$

Нека x – една равна част $\Rightarrow BN = 2x; NM = x$

$$\text{т. } N \in S_{BC} \Rightarrow NB = NC = 2x$$

$$\triangle NMC \text{ – правоъгълен: } CN = 2x; MN = x \Rightarrow CM = 2 \cdot MN$$

$\Rightarrow \angle MCN = 30^\circ$ (катет, равен на половината от хипотенузата, лежи срещу ъгъл, равен на 30°)

$$\angle MCN + \angle CMN + \angle MNC = 180^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$\angle MNC = 60^\circ$$

$$\angle CNB = 180 - \angle MNC = 120^\circ \text{ (съседни ъгли)}$$

$$\triangle NBC \text{ – равнобедрен } (NB = NC = 2x)$$

$$\Rightarrow \angle NCB = \angle NBC$$

$$\angle NCB + \angle NBC + \angle CNB = 180^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$\angle NBC = 30^\circ$$

$$\angle ABC = \angle NBC = 30^\circ$$

8. В $\triangle ABC$ мярката на външния ъгъл при върха C е 100° . Ако ъглополовящите при върховете A и B се пресичат в т. O , намерете мярката на $\angle AOB$.

Решение:

$$\text{Нека } \angle ACB = \gamma; \angle CAB = \alpha; \angle ABC = \beta;$$

$$\angle AOB = x$$

AL – ъглополовяща на $\angle CAB$

$$\Rightarrow \angle CAL = \angle BAL = \alpha/2$$

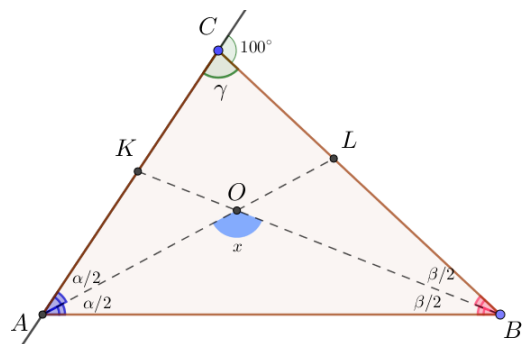
BK – ъглополовяща на $\angle ABC \Rightarrow \angle ABK =$

$$\angle CBK = \beta/2$$

$$\alpha + \beta = 100^\circ \text{ (външен ъгъл)}$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 50^\circ$$

$$\triangle ABO: \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + x = 180^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

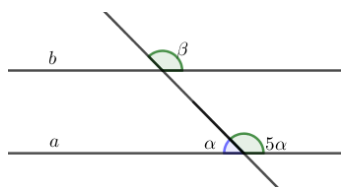


$$50 + x = 180$$

$$x = 130^\circ$$

VIII. Задачи за самостоятелна работа:

1. В триъгълник ъглите се отнасят така, както 2:3:4. Намерете мерките на ъглите на триъгълника.
2. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с дължина на основата $AB = 5$ cm и периметър 25 cm. Симетралата на бедрото BC пресича другото бедро в т. P . Намерете периметъра на $\triangle ABP$.
3. Даден е $\triangle ABC$, на който височините AP и BQ се пресичат в т. H . Ако $AH = BH$ и $\angle BAH = 20^\circ$, намерете мярката на $\angle ACB$.
4. На чертежа правите a и b са успоредни. Намерете мярката на $\angle \beta$.



5. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) ъгълът между бедрата е 120° . Построени са височината AH и медианата CM . Ако $CM = 3$ cm, намерете дължината на отсечката CH .
6. В $\triangle ABC$ ъглополовящите AN и CL се пресичат в т. O . Ако $\angle AOL = 60^\circ$, намерете мярката на $\angle ABC$. (Упътване: виж зад.8)
7. В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$) са построени височината CH и медианата CM . Ако $\angle ACM = 30^\circ$ и $BH = 3$ cm, намерете дължината на отсечката AH .
8. Мярката на външния ъгъл при върха C на равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) е 80° . Точка P лежи на страната BC и е такава, че $\angle PAB = 20^\circ$. Намерете мярката на $\angle APC$.
9. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$ и $AC = BC$). Правата a минава през върха C на триъгълника, а точките M и N са петите на перпендикулярите, построени съответно от върховете A и B към правата a . Ако $\angle ACM : \angle BCN = 1:2$, докажете, че $AM = CN$.

Решения на задачите за самостоятелна работа

от Работен лист № 4

1. В триъгълник ъглите се отнасят така, както 2:3:4. Намерете мерките на ъглите на триъгълника.

Решение:

Нека ъглите на триъгълника са съответно α, β, γ .

$$\Rightarrow \alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$$

Нека x = една равна част.

$$\Rightarrow \alpha = 2x; \beta = 3x; \gamma = 4x$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ (сбор от ъглите в триъгълник)}$$

$$2x + 3x + 4x = 180$$

$$9x = 180$$

$$x = 20^\circ$$

$$\alpha = 2x = 40^\circ$$

$$\beta = 3x = 60^\circ$$

$$\gamma = 4x = 80^\circ$$

2. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с дължина на основата $AB = 5$ cm и периметър 25 cm. Симетралата на бедрото BC пресича другото бедро в т. P . Намерете периметъра на $\triangle ABP$.

Решение:

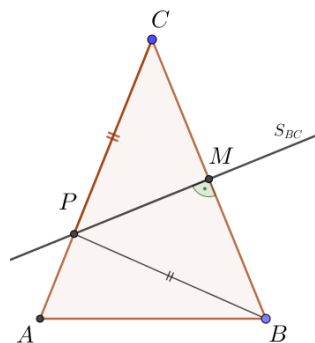
$$P_{ABC} = AB + BC + AC = 5 + 2 \cdot AC$$

$$P_{ABC} = 5 + 2 \cdot AC$$

$$AC = 10 \text{ cm}$$

$$S_{BC} : PB = PC \text{ (т. } P \in S_{BC} \text{)}$$

$$P_{ABP} = AB + BP + AP = 5 + PC + AP = 5 + AC = 5 + 10 = 15 \text{ cm}$$



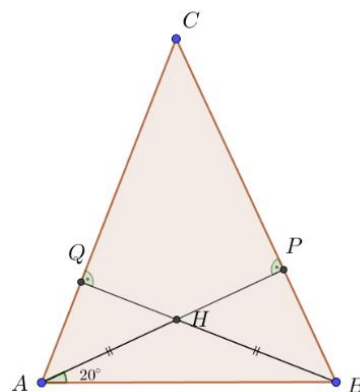
3. Даден е $\triangle ABC$, на който височините AP и BQ се пресичат в т. H . Ако $AH = BH$ и $\angle BAN = 20^\circ$, намерете мярката на $\angle ACB$.

Решение:

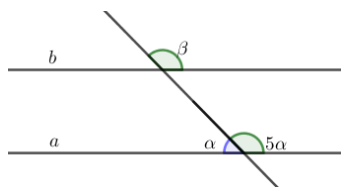
$$AH = BH \Rightarrow \triangle ABH \text{ е равнобедрен} \Rightarrow \angle BAN = \angle ABH = 20^\circ$$

$$\angle ANB + \angle BAN + \angle ABH = 180^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$\begin{aligned}\angle AHB &= 180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ \\ \angle ANH &= 180^\circ - \angle AHB = 40^\circ \text{ (съседни ъгли)} \\ \triangle ANH: \angle HAN + \angle ANH + \angle AHN &= 180^\circ \\ \angle AHN &= 90^\circ \text{ (BQ – височина)} \\ \angle HAN &= 180 - 90 - 40 = 50^\circ \\ \triangle APC: \angle APC + \angle ACP + \angle PAC &= 180^\circ \\ \angle APC &= 90^\circ \text{ (AP – височина)} \\ \angle ACP &= 180 - 90 - 50 = 40^\circ \\ \angle ACB &= \angle ACP = 40^\circ\end{aligned}$$



4. На чертежа правите a и b са успоредни. Намерете мярката на $\angle \beta$.

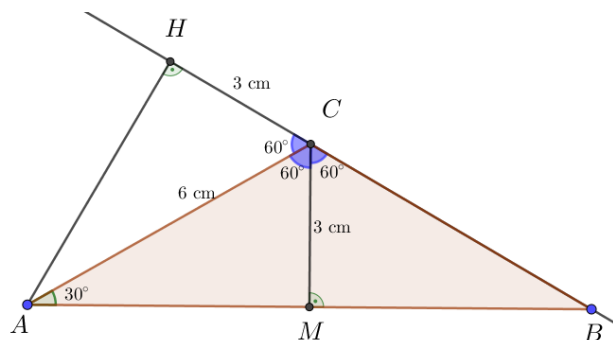


Решение:

$$\begin{aligned}\alpha + 5\alpha &= 180^\circ \text{ (съседни ъгли)} \\ 6\alpha &= 180 \\ \alpha &= 30^\circ \\ 5\alpha &= 5 \cdot 30 = 150^\circ \\ \beta &= 5\alpha = 150^\circ \text{ (съответни ъгли при пресичане на 2 успоредни прави с трета)}\end{aligned}$$

5. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) ъгълът между бедрата е 120° . Построени са височината AH и медианата CM . Ако $CM = 3$ cm, намерете дължината на отсечката CH .

Решение:



$\triangle ABC$ – равнобедрен

CM – медиана $\Rightarrow$ височина и ъглополовяща

$$\angle AMC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACM = \angle BCM = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle ACH = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ (съседни ъгли)}$$

$$\angle AMC : MAC = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$CM = \frac{1}{2} \cdot AC \text{ (катет срещу ъгъл } 30^\circ)$$

$$CM = 6 \text{ cm}$$

$\triangle AHC$ – правоъгълен ($AN \perp BH$)

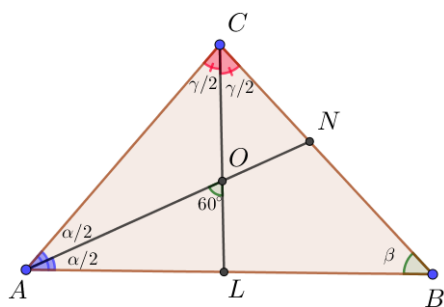
$$\angle CAH = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$CH = \frac{1}{2} \cdot AC \text{ (катет срещу ъгъл } 30^\circ)$$

$$CH = 3 \text{ cm}$$

6. В $\triangle ABC$ ъглополовящите AN и CL се пресичат в т. O . Ако $\angle AOL = 60^\circ$, намерете мярката на $\angle ABC$. (Упътване: виж зад.8)

Решение:



$$\angle NAB = \angle NAC = \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle ACL = \angle BCL = \frac{\chi}{2}$$

$$\angle AOC = 180^\circ - \angle AOL = 180 - 60 = 120^\circ$$

$$\triangle AOC : \frac{\alpha}{2} + \frac{\chi}{2} + \angle AOC = 180^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\chi}{2} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \chi = 120^\circ$$

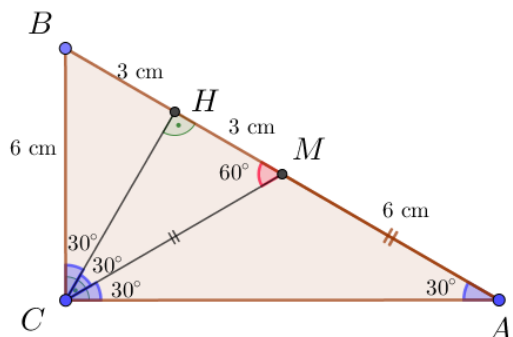
$$\triangle ABC : \alpha + \beta + \chi = 180^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$\beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle ABC = \beta = 60^\circ$$

7. В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$) са построени височината CH и медианата CM . Ако $\angle ACM = 30^\circ$ и $BH = 3$ cm, намерете дължината на отсечката AH .

Решение:



CM - медиана в правоъг. триъгълник $\Rightarrow CM = AM = BM$

$\triangle CAM$ - равнобедрен $\Rightarrow \angle ACM = \angle CAM = 30^\circ$

$$\angle AMC + \angle ACM + \angle CAM = 180^\circ$$

$$\angle AMC = 180 - 2 \cdot 30 = 120^\circ$$

$$\angle CMH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ (съседни ъгли)}$$

$$\angle HCM = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\angle HCB = \angle ACB - \angle HCM - \angle AMC = 90 - 30 - 30 = 30^\circ$$

$\triangle HCB$ - правоъгълен

$$\Rightarrow BH = \frac{1}{2} \cdot BC \text{ (катет срещу ъгъл } = 30^\circ)$$

$$BC = 6 \text{ cm}$$

$$\triangle MCB: \angle CMB = 180 - \angle CMB - \angle MCB = 180 - 60 - 2 \cdot 30 = 60^\circ$$

$\triangle MCB$ - равностранен $\Rightarrow BC = BM = CM = 6 \text{ cm}$

$$CM = AM = 6 \text{ cm}$$

$$HM = BM - BH = 3 \text{ cm}$$

$$AH = AM + HM = 9 \text{ cm}$$

8. Мярката на външния ъгъл при върха C на равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) е 80° . Точка P лежи на страната BC и е такава, че $\angle PAB = 20^\circ$. Намерете мярката на $\angle APC$.

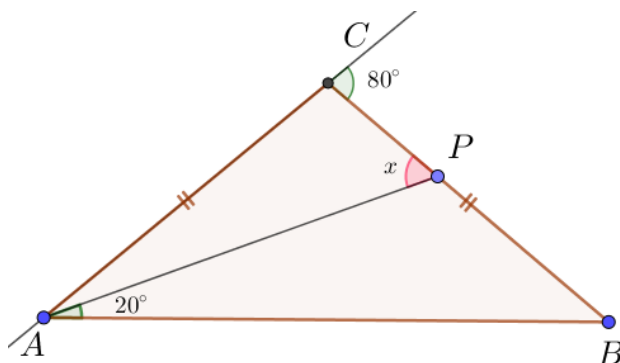
Решение:

$$\angle APC = x$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \text{ (съседни ъгли)}$$

$$\triangle ABC - \text{равнобедрен} \Rightarrow \angle BAC = \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$$

$$\angle CAP = \angle CAB - \angle PAB = 20^\circ$$

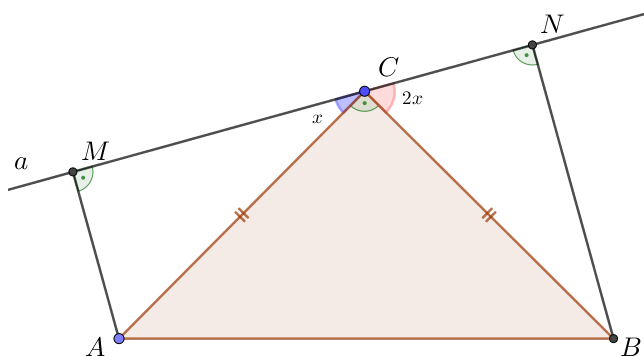


$$\triangle APC : x + \angle ACP + \angle CAP = 180^\circ$$

$$x = 180 - 100 - 20 = 60^\circ$$

9. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$ и $AC = BC$). Правата a минава през върха C на триъгълника, а точките M и N са петите на перпендикулярите, построени съответно от върховете A и B към правата a . Ако $\angle ACM : \angle BCN = 1:2$, докажете, че $AM = CN$.

Решение:



$$\angle ACM : \angle BCN = 1:2$$

$$x - \text{една равна част} \Rightarrow \angle ACM = x; \angle BCN = 2x$$

$$x + 2x + \angle ACB = 180^\circ \text{ (сбор от ъглите в триъгълник)}$$

$$3x + 90 = 180$$

$$x = 30^\circ$$

$$\angle ACM = x = 30^\circ$$

$$\angle BCN = 2x = 60^\circ$$

$$AM \perp a \Rightarrow \angle AMC = 90^\circ$$

$$BN \perp a \Rightarrow \angle BNC = 90^\circ$$

$$\triangle ACM : \angle MAC = 180 - \angle AMC - x = 60^\circ$$

$$\triangle BCN : \angle CBN = 180 - \angle BNC - 2x = 30^\circ$$

$$\triangle CMA \cong \triangle BNC \text{ (II признак)} \left\{ \begin{array}{l} CA = BC \\ \angle MAC = \angle NCB = 60^\circ \\ \angle ACM = \angle CBN = 30^\circ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow AM = CN$$

Работен лист № 5

Успоредник.

I. Основни теореми и понятия

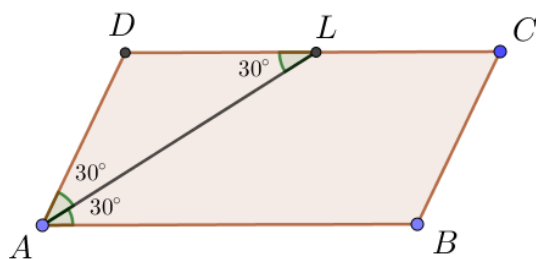
• Успоредник	• Двойките срещуположни страни са успоредни • Двойките срещуположни страни са равни • Диагоналите взаимно се разполовяват • Срещуположните ъгли са равни • Сборът на прилежащите на всяка страна ъгли е 180°
• Правоъгълник	• Успоредник с прав ъгъл • Всички свойства на успоредника са в сила • Диагоналите са равни • Двойките срещуположни страни са успоредни • Двойките срещуположни страни са равни • Срещуположните ъгли са равни
• Ромб	• Всички свойства на успоредника са в сила • Равни страни • Диагоналите са взаимноперпендикулярни • Диагоналите са ъглополовящи на ъглите на успоредника • Всички страни са равни • Сборът на прилежащите на всяка страна ъгли е 180° • Срещуположните ъгли са равни • Двойките срещуположни страни са успоредни • Двойките срещуположни страни са равни
• Квадрат	• Всички свойства на ромба са в сила • Равни съседни страни • Всички ъгли са прави • Диагоналите взаимно се разполовяват • Диагоналите са взаимноперпендикулярни • Диагоналите са ъглополовящи на ъглите на квадрата

- | | |
|--|--|
| | <ul style="list-style-type: none"> • Двойките срещуположни страни са успоредни • Двойките срещуположни страни са равни |
|--|--|

II. Примерни задачи

1. В успоредник $ABCD$ е построена ъглополовящата AL , като $\angle ALD = 30^\circ$. Намерете ъглите на успоредника. Ако $CL = 5$ cm, а $AD = 6$ cm, намерете периметъра на успоредника.

Решение:



$AB \parallel CD$ (срещуположни страни на успоредник)

$\angle ALD = \angle LAB$ (кръстни ъгли при пресичане на 2 успоредни прави с трета)

AL - ъглополовяща

$\Rightarrow \angle DAL = \angle LAB$

$\Rightarrow \angle DAL = \angle ALD \Rightarrow \triangle ALD$ - равнобедрен

$AD = LD = 6$ cm

$\angle BAD = \angle DAL + \angle LAB = 60^\circ$

$\angle BCD = \angle BAD = 60^\circ$ (срещуположни ъгли на успоредника)

$\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ (прилежащи ъгли на страна на успоредника)

$\angle ABC = 180 - 60 = 120^\circ$

$\angle ADC = 120^\circ$ (срещуположни ъгли на успоредника)

$CD = DL + CL = 6 + 5 = 11$ cm

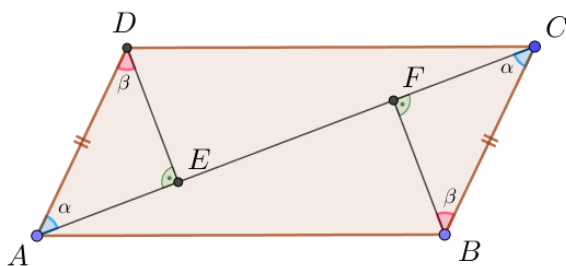
$AB = CD = 11$ cm (срещуположни страни на успоредника)

$AD = BC = 6$ cm (срещуположни страни на успоредника)

$P_{ABCD} = 2 \cdot AB + 2 \cdot BC = 2 \cdot 11 + 2 \cdot 6 = 34$ cm

2. Даден е успоредник $ABCD$. Докажете, че разстоянията от върховете B и D до диагонала AC са равни.

Решение:



$AD = BC$ (срещуположни страни на успоредник)

$AD \parallel BC$ (срещуположни страни на успоредник)

$\Rightarrow \angle DAC = \angle ACB = \alpha$ (кръстни ъгли при пресичане на 2 успоредни прави с трета)

$DE \perp AC$

$BF \perp AC$

$\triangle AED : \angle ADE = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha = \beta$

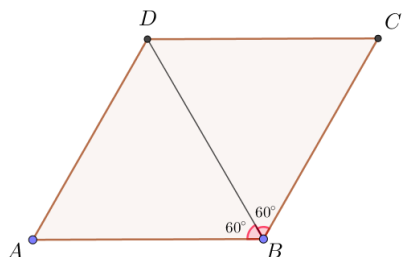
$\triangle BFC : \angle FBC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha = \beta$

$$\triangle AED \cong \triangle CFB \text{ (II пр.)} \left\{ \begin{array}{l} AD = BC \\ \angle DAC = \angle ACB = \alpha \\ \angle ADE = \angle FBC = \beta \end{array} \right.$$

$\Rightarrow DE = BF$

3. В ромб $ABCD$ диагональът $BD = 4$ cm, а $\angle ABC = 120^\circ$. Намерете периметъра на ромба.

Решение:



$\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$ (срещуположни ъгли в ромб)

BD - ъглополовяща на $\angle ABC$ и $\angle ADC$ (диагонал в ромб)

$\Rightarrow \angle ABD = \angle ADB = 60^\circ$

$\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC$ (прилежащи ъгли на страна в ромб)

$\angle BAD = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABD$ - равностранен

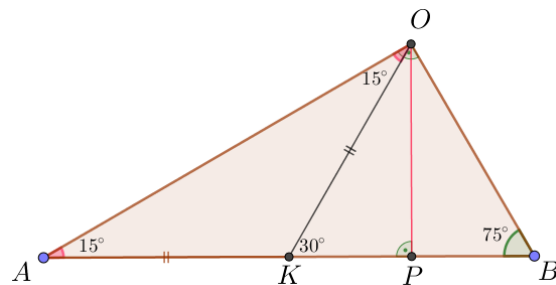
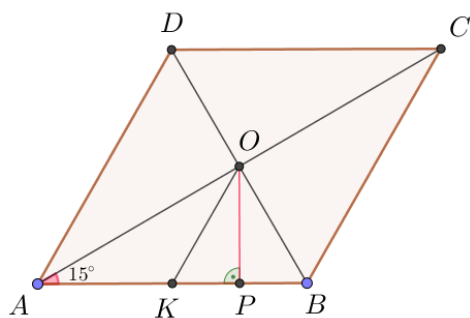
$\Rightarrow AB = BD = AD = 4$ cm

$P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 4 = 16$ cm

4. Периметърът на ромб $ABCD$ е 40 cm, а $\angle BAD = 30^\circ$. Ако т. K е средата на страната AB , намерете отсечката, която свързва пресечната точка на диагоналите с

т. K . Намерете разстоянието от пресечната точка на диагоналите до страните на ромба.

Решение:



$AC \perp BD$ (диагонали в ромб)

$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$

$\triangle AOB$ - правоъгълен

т. K - среда на AB

OK - медиана $\Rightarrow OK = AK = BK$ (медиана в правоъг. $\triangle$)

$\triangle OAK$: равнобедрен

$\Rightarrow \angle OAB = \angle AOK = 15^\circ$

$\angle OKP = \angle OAB + \angle AOK = 30^\circ$ (външен ъгъл за $\triangle OAK$)

$OP \perp AB \Rightarrow \angle OPA = 90^\circ$

$\triangle OPK$ - правоъгълен

$\Rightarrow OP = \frac{1}{2} OK$ (катет срещу ъгъл $= 30^\circ$)

$OP = \frac{1}{2} AK = \frac{1}{4} AB$ (**Основна задача)

$P_{ABCD} = 40 = 4 \cdot AB$

$AB = 10$ cm

$\Rightarrow OP = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2,5$ cm

$OK = AK = \frac{1}{2} AB = 5$ cm

5. Диагоналът BD на правоъгълника $ABCD$ е 13 cm, а страната $BC = 5$ cm. Ако диагоналите на правоъгълника се пресичат в т. O , намерете обиколката на $\triangle AOB$.

Решение:

$AC \cap BD = O$

$AC = BD$ (диагонали в правоъгълник)

$AO = BO = CO = DO = \frac{1}{2} BD = 6,5$ cm (диагоналите взаимно се разполовяват)

$\angle ABC = 90^\circ$ (ъгъл в правоъгълник)

$\triangle ABC$ - правоъгълен

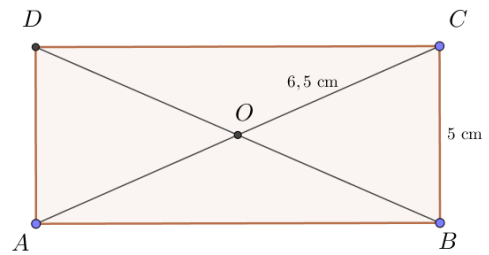
$AB^2 + BC^2 = AC^2$ (питагорова теорема)

$$AB^2 + 25 = 169$$

$$AB^2 = 144$$

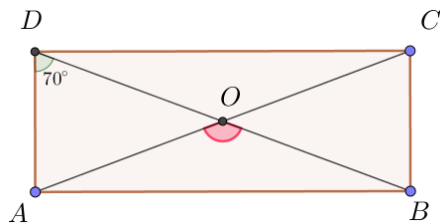
$$AB = 12 \text{ cm}$$

$$P_{AOB} = OA + OB + AB = 6,5 + 6,5 + 12 = 25 \text{ cm}$$



6. Диагоналите на правоъгълника $ABCD$ се пресичат в т. O . Ако $\angle ADB = 70^\circ$, намерете мярката на $\angle AOB$.

Решение:



$AC = BD$ (диагонали в правоъгълник)

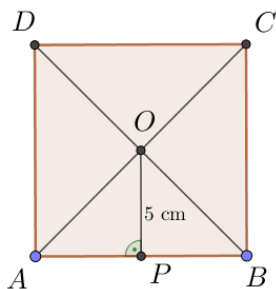
$AO = CO = BO = DO$ (диагоналите в правоъгълника взаимно се разполовяват)

$\triangle AOD$ - равнобедрен $\Rightarrow \angle OAD = \angle ADO = 70^\circ$

$\angle AOB = \angle ADO + \angle OAD = 2 \cdot 70 = 140^\circ$ (външен ъгъл за $\triangle AOD$)

7. Диагоналите на квадрата $ABCD$ се пресичат в т. O . Ако разстоянието от т. O до страната AB е 5 cm, намерете обиколката на квадрата.

Решение:



$AC = BD$ (диагонали в квадрат)

$AO = BO = CO = DO$ (диагоналите в квадрата взаимно се разполовяват)

AC - ъглополовяща на $\angle BAD$ (свойство на диагоналите в квадрат)

$\angle BAD = 90^\circ$ (ъглите в квадрата са прави)

$$\angle BAC = \angle DAC = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ$$

$AC \perp BD$ (диагоналите са взаимно перпендикулярни)

$$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

$\triangle AOB: AO = BO \Rightarrow$ равнобедрен и правоъгълен.

$OP \perp AB \Rightarrow OP$ е височина, медиана и ъглополовяща

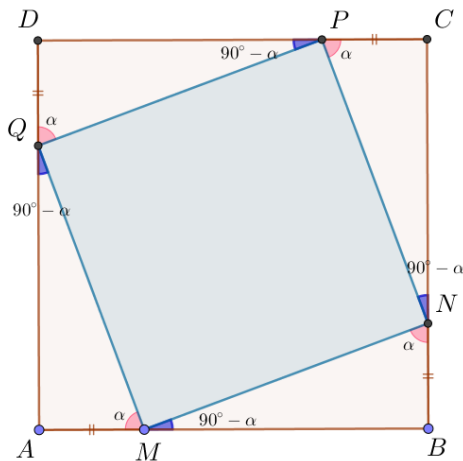
$$OP = \frac{1}{2} AB \text{ (медиана към хипотенузата)}$$

$$AB = 10 \text{ cm}$$

$$P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 40 \text{ cm}$$

8. Даден е квадрат $ABCD$. Върху страните му са взети точките M, N, P, Q така, че $AM = BN = CP = DQ$. Да се докаже, че четириъгълникът $MNPQ$ е квадрат.

Решение:



$$\angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ \text{ (ъгли в квадрат)}$$

$$\text{Нека } AM = BN = CP = DQ = x$$

$$AB = BC = CD = AD = a \text{ (страни в квадрат)}$$

$$MB = NC = PD = AQ = a - x$$

$$\triangle AMQ \cong \triangle BNM \cong \triangle CPN \cong \triangle DQP \text{ (I пр)} \begin{cases} AM = BN = CP = DQ = x \\ MB = NC = PD = AQ = a - x \\ \angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle AMQ = \angle BNM = \angle CPN = \angle DQP = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle AQM = \angle BMN = \angle CNP = \angle DPQ = \beta$$

$$\Rightarrow QM = MN = NP = PQ$$

$\triangle AMQ$: правоъгълен

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha \text{ (сбор на ъглите в } \triangle)$$

$$\angle MQP = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$$

$$\text{Аналогично: } \angle QMN = \angle MNP = \angle NPQ = 90^\circ$$

$\Rightarrow MNPQ$ е правоъгълник с равни съседни страни

$\Rightarrow MNPQ$ е квадрат.

III. Задачи за самостоятелна работа:

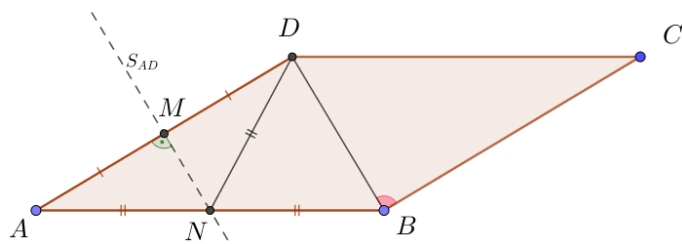
1. В успоредника $ABCD$ е построена симетралата на страната AD . Тя пресича страната AB в средата ѝ. Намерете мярката на $\angle DBC$.
2. В успоредника $ABCD$ AL е ъглополовяща на $\angle BAD$. Ако $CD = 10$ cm, $AL = 8$ cm и мерките на ъглите, прилежащи на страната AB , се отнасят така, както 1:2, намерете лицето на успоредника.
3. В ромба $ABCD$ DM е ъглополовяща на $\angle ADB$, а BN е ъглополовяща на $\angle DBC$. Ако $\angle CBN = 15^\circ$, намерете мярката на $\angle DMB$.
4. Един от ъглите на ромб е 5 пъти по-голям от друг негов ъгъл. Ако разстоянието от пресечната точка на диагоналите до страните на ромба е 12 cm, намерете лицето на ромба.
5. В правоъгълник $ABCD$ диагоналите се пресичат в т. O и $\angle AOB$ е четири пъти по-голям от $\angle OAB$. Ако страната $AD = 4$ cm, намерете разстоянието от т. O до страната AB .
6. В правоъгълник $ABCD$ върху страната AB е взета т. P така, че $CP = CD$. Ако $\angle BCP = 20^\circ$, намерете мярката на $\angle APD$.
7. Диагоналът AC на квадрата $ABCD$ е 12 cm. Намерете лицето на квадрата.
8. Даден е квадрат $ABCD$. Върху страната CD е взета т. P такава, че разстоянието от върха D до отсечката AP е 5 cm, а $\angle DAP = 15^\circ$. Намерете разстоянието от т. P до диагонала AC .

Решения на задачите за самостоятелна работа

от Работен лист № 5

1. В успоредника $ABCD$ е построена симетралата на страната AD . Тя пресича страната AB в средата ѝ. Намерете мярката на $\angle DBC$.

Решение:



$S_{AD} : S_{AD} \perp AD$ (св-во на симетралата)

$S_{AD} : AM = DM$ (св-во на симетралата)

т. $N \in S_{AD} \Rightarrow NA = ND$

т. N - среда на $AB \Rightarrow AN = NB = ND$

$\triangle ABD : ND$ - медиана и $ND = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow \triangle ABD$ е правоъгълен и $\angle ADB = 90^\circ$

$AD \parallel BC$ ($ABCD$ е успоредник)

$\angle DBC = \angle ADB$ (кръстни ъгли при пресичане на 2 усп. прави с трета)

$\Rightarrow \angle DBC = 90^\circ$

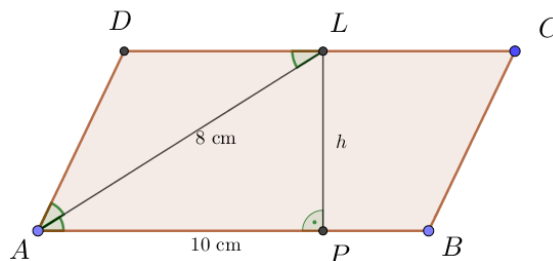
2. В успоредника $ABCD$ AL е ъглополовяща на $\angle BAD$. Ако $CD = 10$ cm, $AL = 8$ cm и мерките на ъглите, прилежащи на страната AB , се отнасят така, както 1:2, намерете лицето на успоредника.

Решение:

$\angle BAD : \angle ABC = 1 : 2$

Нека x = една равна част

$\Rightarrow \angle BAD = x; \angle ABC = 2x$



$\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ (прилежащи ъгли на страна в успоредник)

$$x + 2x = 180^\circ$$

$$3x = 180^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

$$\angle BAD = 60^\circ$$

$$\angle ABC = 120^\circ$$

AL - ъглополовяща на $\angle BAD$

$$\Rightarrow \angle DAL = \angle LAP = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$$

$$LP \perp AB; LP = h$$

$\triangle APL$ - правоъгълен

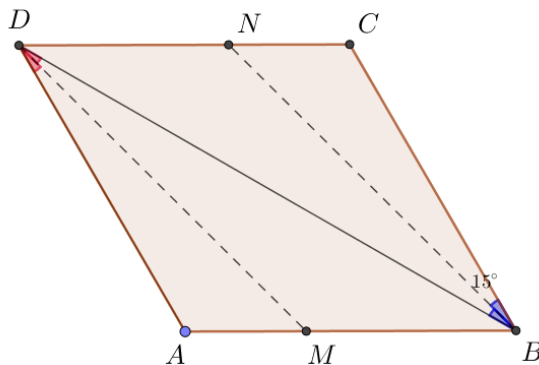
$$h = \frac{1}{2} AL = 4 \text{ cm (катет срещу ъгъл } 30^\circ)$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot h = 10 \cdot 4 = 40 \text{ cm}^2$$

3. В ромба $ABCD$ DM е ъглополовяща на $\angle ADB$, а BN е ъглополовяща на $\angle DBC$.

Ако $\angle CBN = 15^\circ$, намерете мярката на $\angle DMB$.

Решение:



BN - ъглополовяща на $\angle DBC$

$$\Rightarrow \angle DBN = \angle CBN = 15^\circ$$

$$\angle DBC = 2 \cdot \angle DBN = 30^\circ$$

DB - диагонал на ромба

$\Rightarrow DB$ - ъглополовяща на $\angle ABC$ и $\angle ADC$ (диагоналите в ромба са ъглополовящи)

$$\Rightarrow \angle ABD = \angle DBC = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle ADC = 60^\circ \text{ (срещуположни ъгли)}$$

$$\angle ADB = \angle BDC = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$$

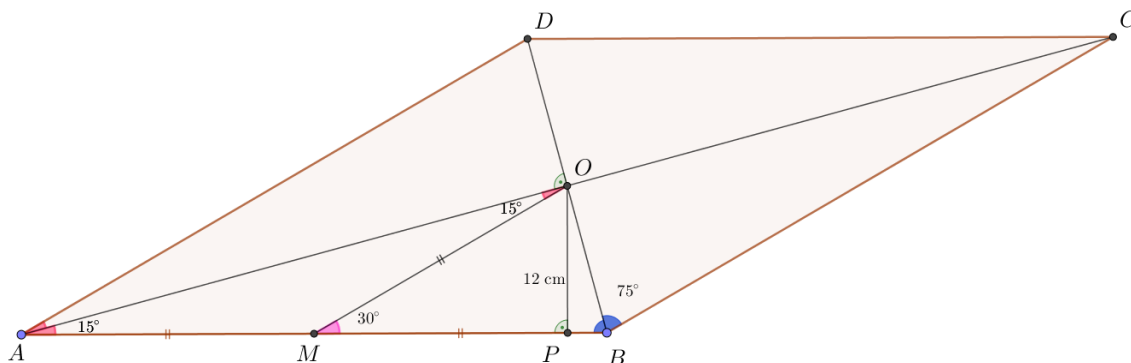
DM - ъглополовяща на $\angle ADC$

$$\Rightarrow \angle ADM = \angle MDB = 15^\circ$$

$\triangle ABD$: $\angle MBD = 180^\circ - \angle MDB - \angle ABD$ (сбор на ъглите в $\triangle$)

$$\angle MBD = 180 - 15 - 30 = 135^\circ$$

Решение:



$\triangle AOB$ - правоъгълен

т. M – среда на AB

$$OM - \text{медиана към хипотенузата} \Rightarrow OM = \frac{1}{2} AB$$
$$OM = AM = MB$$

$\triangle AOM$ - равнобедрен

$$\angle MAO = \angle MOA = 15^\circ$$
$$\angle OMB = \angle MAO + \angle MOA = 30^\circ$$
$$OP \perp AB \Rightarrow \angle APO = 90^\circ$$

$\triangle APO$ - правоъгълен

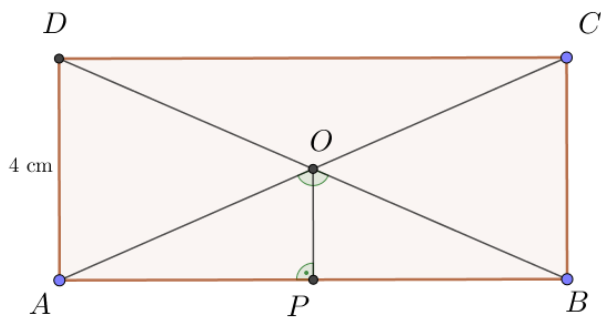
$$OP = \frac{1}{2} OM \Rightarrow (\text{катет срещу ъгъл}=30^\circ)$$
$$OM = 24 \text{ cm}$$
$$AB = 2.24 = 48 \text{ cm}$$
$$h_g = 2.OP = 24 \text{ cm}$$
$$S_{ABCD} = AB.h_a = 48.24 = 1152 \text{ cm}^2$$

Решение:

$$AC = BD \text{ (диагонали в право̀г̀ълник)}$$

$AO = CO = BO = DO$ (диагоналите в правоъгълник взаимно се разполовяват)

$$\Rightarrow_{\Delta} AOB - \text{равнобедрен}$$
$$\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA = x$$



$$\angle AOB = 4x$$

$$\triangle AOB : 2x + 4x = 180^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$x = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 4 \cdot 30 = 120^\circ$$

$$\angle OAP = x = 30^\circ$$

$$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ \text{ (съседни ъгли)}$$

$\triangle AOD$ - равнобедрен

$$\angle OAD = \angle ODA$$

$$2 \cdot \angle OAD + \angle AOD = 180^\circ \text{ (сбор на ъглите в триъгълник)}$$

$$2 \cdot \angle OAD = 180 - 60$$

$$\angle OAD = \angle ODA = 60^\circ$$

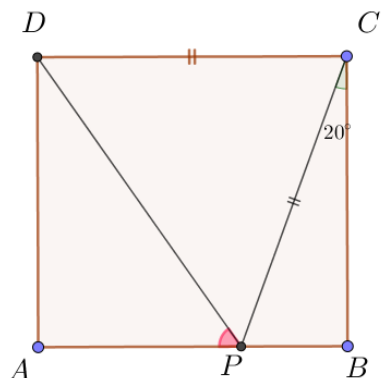
$$\triangle AOD - \text{равностранен} \Rightarrow OA = OD = AD = 4 \text{ cm}$$

$$\triangle OP \perp AB \Rightarrow \triangle AOP - \text{правоъгълен}$$

$$OP = \frac{1}{2} OA = 2 \text{ cm (катет срещу ъгъл } 30^\circ)$$

6. В правоъгълник $ABCD$ върху страната AB е взета т. P така, че $CP = CD$. Ако $\angle BCP = 20^\circ$, намерете мярката на $\angle APD$.

Решение:



$$\angle BCD = \angle ABC = 90^\circ \text{ (} ABCD \text{ – квадрат)}$$

$$CD = CP \Rightarrow \triangle PCD - \text{равнобедрен}$$

$$\Rightarrow \angle CPD = \angle CDP$$

$$2 \cdot \angle CPD + \angle PCD = 180^\circ$$

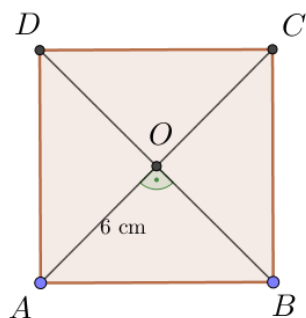
$$2. \angle PCD = 110^\circ$$

$$\angle PCD = 55^\circ$$

$$\angle APD = \angle PCD = 55^\circ \text{ (кръстни ъгли при пресичане на 2 успоредни прави с трета)}$$

7. Диагоналът AC на квадрата $ABCD$ е 12 cm. Намерете лицето на квадрата.

Решение:



$AC = BD$ (диагонали на квадрат)

$$AO = BO = CO = DO = \frac{1}{2} AC = 6 \text{ cm (диагоналите в кв. взаимно се разполовяват)}$$

$AC \perp BD$ (диагонали на квадрат)

$\Rightarrow \triangle AOB$ - правоъгълен

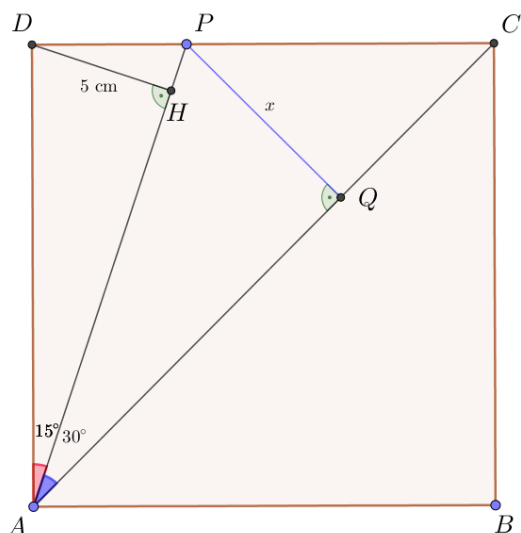
$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 18 \text{ cm}^2$$

$$\text{Аналогично: } S_{BOC} = S_{COD} = S_{AOD} = 18 \text{ cm}^2$$

$$S_{ABCD} = 4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}^2$$

8. Даден е квадрат $ABCD$. Върху страната CD е взета т. P такава, че разстоянието от върха D до отсечката AP е 5 cm, а $\angle DAP = 15^\circ$. Намерете разстоянието от т. P до диагонала AC .

Решение:



$\angle ADC = 90^\circ$ (ъглите на квадрат са прави)

$DH \perp AP$; $DH = 5$ cm (по условие)

$\angle DAP = 15^\circ$ (по условие)

Аналогично на решението в задача 4:

$$DH = \frac{1}{4} AP \Rightarrow AP = 20 \text{ cm}$$

AC - ъглополовяща на $\angle DAB$ (диагоналите в квадрата са ъглополюваща)

$\angle CAD = 45^\circ$

$\angle PAC = \angle CAD - \angle DAP = 45 - 15 = 30^\circ$

$PQ \perp AC$; $PQ = x$

$\triangle AQP$ - правоъгълен

$$PQ = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ cm (катет срещу ъгъл } 30^\circ)$$

Тестове за определяне на входното равнище

8. клас**Входно ниво****Билет № 1****Задача 1:** Приведете изразите в нормален вид:

а) $(2x-3)^2$ б) $(x^2+4)(x^2-4)$ в) $(-x-5)^2$ г) $(-x-1)^3$

Задача 2. Разложете на множители:

а) $8x^4 - 27x$ б) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4$ в) $x^2 + 6x + 8$

г) $(x-1)(x^2 - y^2) - (x-y)(x^2 - 1)$

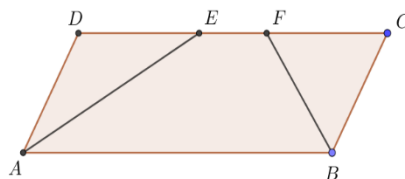
Задача 3. Решете уравнението:

а) $\frac{x-2}{2} + 1 = \frac{3x-1}{3}$ б) $|2x+1| - 3 = 0$

Задача 4. Решете неравенството и представете решенията графично и като интервал:

$$\frac{2-x}{3} - \frac{1}{2} < 1$$

Задача 5. На чертежа AF и BE са ъглополовящи съответно на ъглите $\angle BAD$ и $\angle ABC$ на успоредника $ABCD$. Ако $AD = 6$ cm и $EF = 2$ cm, намерете периметъра на успоредника.



Задача 6. Разстоянието между градовете A и B е 270 km. В 8 h 30 min от град A за град B тръгва автомобил, който се движи със скорост 75 km/h. Един час по-късно от град B към град A тръгва мотоциклетист, който се движи със скорост с 20% по-малка от скоростта на автомобила. В колко часа двамата се намират на разстояние 19,5 km преди да се срещнат?

Входно ниво					
Задача 1	а	б	в	г	<u>Оценяване:</u>
5 точки	1 точка	1 точка	1 точка	2 точки	От 0 до 7 точки – Слаб (2)
___ точки					От 8 до 11 точки – Среден (3)
Задача 2	а	б	в	г	От 12 до 19 точки – Добър (4)
9 точки	2 точка	2 точка	2 точка	3 точки	От 20 до 27 точки – Много добър (5)
___ точки					От 28 до 32 точки – Отличен (6)
Задача 3	а	б	Задача 4		Общ брой точки: 32
4 точки	2 точка	2 точка	3 точки		
___ точки			___ точки		
Задача 5		Задача 6			Общ брой точки на ученика: _____ точки
5 точки		6 точки			
___ точки		___ точки			

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	1	6
Точки	5	

Съдържателна област	Числа. Алгебра.
Познавателна област	Едностъпкови задачи
Време за решаване	5 мин.

Условие на задачата:	
Приведете изразите в нормален вид: А) $(2x - 3)^2$ Б) $(x^2 + 4)(x^2 - 4)$ В) $(-x - 5)^2$ Г) $(-x - 1)^3$	
Решение на задачата:	Точки
А) $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x + 2^2 = 4x^2 - 12x + 9$	1 т.
Б) $(x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2)^2 - 4^2 = x^4 - 16$	1 т.
В) $(-x - 5)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot (-5) + (-5)^2 = x^2 + 10x + 25$	1 т.
$(-x - 1)^3 =$ Г) $= (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-x) \cdot (-1)^2 + (-1)^3 =$ $= -x^3 - 3x^2 - 3x - 1$	1 т. – за знаците; 1 т. – за формулата

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	2	6
Точки	9	

Съдържателна област	Числа. Алгебра.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	9 мин.

Условие на задачата:	
Разложете на множители:	
А) $8x^4 - 27x$	
Б) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4$	
В) $x^2 + 6x + 8$	
Г) $(x-1)(x^2 - y^2) - (x-y)(x^2 - 1)$	
Решение на задачата:	Точки
А) $8x^4 - 27x =$	
$= x(8x^3 - 27) =$	1 т.
$= x((2x)^3 - 3^3) =$	1 т.
$= x(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$	
Б) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4 =$	
$= (x^2 - 6xy + 9y^2) - 4 =$	1 т.
$= (x - 3y)^2 - 2^2 =$	1 т.
$= (x - 3y - 2)(x - 3y + 2)$	
В) $x^2 + 6x + 8$	
І начин: чрез групиране:	
Търсим числата u , v ,	
такива, че: $u \cdot v = 8$, а $u + v = 6$.	
Възможните варианти са: 1 и 8, 2 и 4,	
като в конкретния случай 2 и 4 са търсените числа.	
Ще представим $6x = 4x + 2x$	

$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 =$	1 т.
$= (x^2 + 4x) + (2x + 8) =$	
$= x(x + 4) + 2(x + 4) =$	1 т.
$(x + 4)(x + 2)$	
II начин: чрез допълване до точен квадрат: $x^2 + 6x + 8 =$ $= x^2 + 2 \cdot 3x + 8$ За да използваме формула за съкратено умножение, трябва да добавим 3^2 и след това да го извадим:	
$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2 \cdot 3x + 8 =$	
$= x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 + 8 =$	1 т.
$= (x^2 + 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 8 =$	
$= (x + 3)^2 - 1 = (x + 3)^2 - 1^2 =$	1 т.
$= (x + 3 - 1)(x + 3 + 1) =$	
$= (x + 2)(x + 4)$	
Г) $(x - 1)(x^2 - y^2) - (x - y)(x^2 - 1) =$	
$= (x - 1)(x - y)(x + y) - (x - y)(x - 1)(x + 1) =$	по 1 т. за всяка формула
$= (x - 1)(x - y)(x + y - x - 1) =$	1 т.
$= (x - 1)(x - y)(y - 1)$	

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	3	6
Точки	4	

Съдържателна област	Уравнения.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	8 мин.

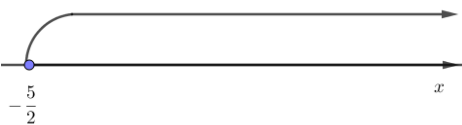
Условие на задачата:		
Решете уравнението: А) $\frac{x-2}{2} + 1 = \frac{3x-1}{3}$ Б) $ 2x+1 - 3 = 0$		
Решение на задачата:	Точки	
А) $\frac{x-2}{2} + 1 = \frac{3x-1}{3}$		
$\frac{x-2}{2} + 1 = \frac{3x-1}{3} \quad \cdot 6$	0,5 т.	
$3(x-2) + 6 \cdot 1 = 2(3x-1)$	0,5 т.	
$3x - 6 + 6 = 6x - 2$		
$3x - 6x = -2$		
$-3x = -2$ $x = \frac{2}{3}$	1 т.	
Б) $ 2x+1 - 3 = 0$		
$ 2x+1 = 3$	0,5 т.	
$2x+1 = 3$ или $2x+1 = -3$	0,5 т.	
$2x = 3-1$ $2x = 2$ $x_1 = 1$	$2x = -3-1$ $2x = -4$ $x_2 = -2$	по 0,5 т. за всяко уравнение

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	4	6
Точки	3	

Съдържателна област	Неравенства.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	5 мин.

Условие на задачата:	
Решете неравенството и представете решенията графично и като интервал: $\frac{2-x}{3} - \frac{1}{2} < 1$	
Решение на задачата:	Точки
$\frac{2-x}{3} - \frac{1}{2} < 1 \quad \cdot 6$	0,5 т.
$2(2-x) - 3 \cdot 1 < 6$	0,5 т.
$4 - 2x - 3 < 6$	
$1 - 2x < 6$	
$-2x < 6 - 1$	0,5 т.
$-2x < 5 \quad \cdot (-1)$	0,5 т.
$2x > -5$	
$x > -\frac{5}{2}$	1 т.
$x \in \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$	
	

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

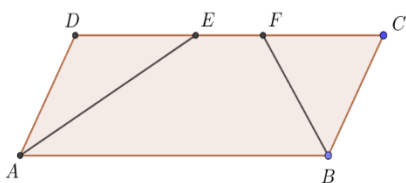
Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	5	6
Точки	5	

Съдържателна област	Основни геометрични фигури. Успоредник.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	8 мин.

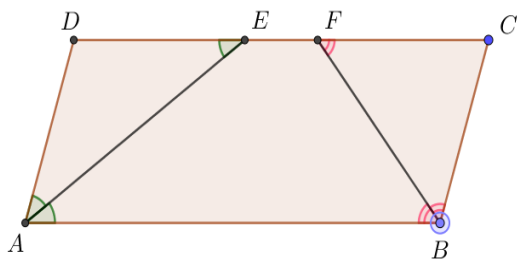
Условие на задачата:

На чертежа AF и BE са ъглополовящи съответно на ъглите $\angle BAD$ и $\angle ABC$ на успоредника $ABCD$. Ако $AD = 6$ cm и $EF = 2$ cm, намерете периметъра на успоредника.



Решение на задачата:

Точки



$\angle DAE = \angle EAB$ (AE – ъглополовяща на $\angle DAB$, по условие)

$AB \parallel CD$ ($ABCD$ – успоредник)

$\Rightarrow \angle DEA = \angle EAB$ (кръстни ъгли, получени при пресичане на 2 успоредни права с трета)

$\Rightarrow \angle DEA = \angle DAE$

1 т.

От това следва, че $\triangle AED$ – равнобедрен и $AD = ED = 6$ cm.

0,5 т.

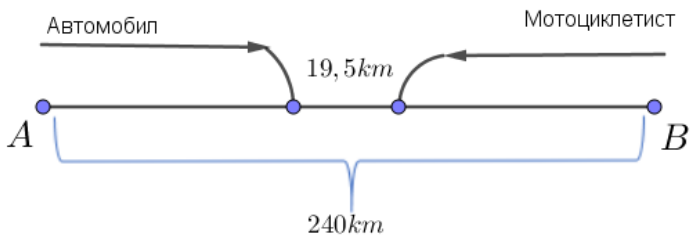
Аналогично: $\angle ABF = \angle FBC$ (BF – ъглополовяща на $\angle ABC$, по условие) $AB \parallel CD$ ($ABCD$ – успоредник) $\Rightarrow \angle ABF = \angle BFC$ (кръстни ъгли, получени при пресичане на 2 успоредни права с трета) $\Rightarrow \angle BFC = \angle FBC$	1 т.
От това следва, че $\triangle BFC$ – равнобедрен и $BC = FC$	1 т.
$ABCD$ – успоредник, $\Rightarrow AB = CD, AD = BC$ $\Rightarrow BC = 6 \text{ cm}$	0,5 т.
$CD = DE + EF + FC = 6 + 2 + 6 = 14 \text{ cm}$	0,5 т.
$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(14 + 6) = 40 \text{ cm}^2$	0,5 т.

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	6	6
Точки	6	

Съдържателна област	Уравнения.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	10 мин.

Условие на задачата: Разстоянието между градовете <i>A</i> и <i>B</i> е 270 km. В 8 h 30 min от град <i>A</i> за град <i>B</i> тръгва автомобил, който се движи със скорост 75 km/h. Един час по-късно от град <i>B</i> към град <i>A</i> тръгва мотоциклетист, който се движи със скорост с 20% по-малка от скоростта на автомобила. В колко часа двамата се намират на разстояние 19,5 km преди да се срещнат?				
Решение на задачата:				Точки
				0,5 т.
	V (km)	t (h)	S (km/h)	1 т.
Автомобил	75	x	$75x$	
Мотоциклетист	60	$x-1$	$60(x-1)$	
$V_m = V_a - 20\%.V_a = 75 - \frac{20}{100} \cdot 75 = 60 \text{ km/h}$				1 т.
$75x + 60(x-1) + 19,5 = 240$ $75x + 60x - 60 + 19,5 = 240$ $135x = 310,5$ $x = 2,3 \text{ h} - \text{времето на автомобила}$				2 т.

$0,3 \text{ h} = \frac{3.6}{10.6} \text{ h} = \frac{18}{60} \text{ h} = 18 \text{ min}$	1 т.
⇒ Времето на автомобила е 2 часа и 18 минути, а той е тръгнал в 8:00 h. Следователно автомобилът и мотоциклетистът ще се срещнат в 10:18 h.	0,5 т.

Задача 1: Приведете изразите в нормален вид:

а) $(3x - 4)^2$ б) $(x^2 + 3)(x^2 - 3)$ в) $(-x + 2)^2$ г) $(-2 - x)^3$

Задача 2. Разложете на множители:

а) $x^4 - 8x$ б) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9$ в) $x^2 - 2x - 8$

г) $(x + 1)(x^2 - y^2) - (x + y)(x^2 - 1)$

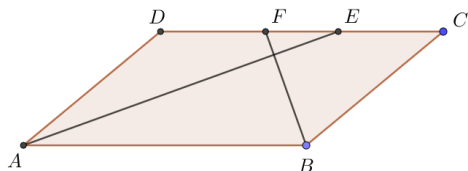
Задача 3. Решете уравнението:

а) $\frac{1 + 2x}{3} - 2 = \frac{3x - 2}{2}$ б) $|x + 2| - 4 = 0$

Задача 4. Решете неравенството и представете решенията графично и като интервал:

а) $\frac{4 - x}{3} - \frac{1}{4} < 3$

Задача 5. На чертежа AF и BE са ъглополовящи съответно на ъглите $\angle BAD$ и $\angle ABC$ на успоредника $ABCD$. Ако $AD = 6$ cm и $EF = 2$ cm, намерете периметъра на успоредника.



Задача 6. Разстоянието между градовете A и B е 240 km. В 8 h от град A за град B тръгва камион, който се движи със скорост 85 km/h. 1 h и 30 min по-късно от град B към град A тръгва автомобил, който се движи със скорост с 20% по-голяма от скоростта на камиона. В колко часа двамата се намират на разстояние 50,7 km след като се разминат?

Входно ниво					
Задача 1	а	б	в	г	<u>Оценяване:</u>
5 точки	1 точка	1 точка	1 точка	2 точки	От 0 до 7 точки – Слаб (2)
___ точки					От 8 до 11 точки – Среден (3)
Задача 2	а	б	в	г	От 12 до 19 точки – Добър (4)
9 точки	2 точка	2 точка	2 точка	3 точки	От 20 до 27 точки – Много добър (5)
___ точки					От 28 до 32 точки – Отличен (6)
Задача 3	а	б	Задача 4		Общ брой точки: 32
4 точки	2 точка	2 точка	3 точки		
___ точки			___ точки		
Задача 5		Задача 6			Общ брой точки на ученика: _____ точки
5 точки		6 точки			
___ точки		___ точки			

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	1	6
Точки	5	

Съдържателна област	Числа. Алгебра.
Познавателна област	Едностъпкови задачи
Време за решаване	5 мин.

Условие на задачата:	
Приведете изразите в нормален вид: А) $(3x - 4)^2$ Б) $(x^2 + 3)(x^2 - 3)$ В) $(-x + 2)^2$ Г) $(-2 - x)^3$	
Решение на задачата:	Точки
А) $(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$	1 т.
Б) $(x^2 + 3)(x^2 - 3) = (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9$	1 т.
В) $(-x + 2)^2 = (2 - x)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + x^2 = 4 - 4x + x^2$	1 т.
$(-2 - x)^3 =$ Г) $= (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 \cdot (-x) + 3 \cdot (-2) \cdot (-x)^2 + (-x)^3 =$ $= -8 - 12x - 6x^2 - x^3$	1 т. – за знаците; 1 т. – за формулата

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	2	6
Точки	9	

Съдържателна област	Числа. Алгебра.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	9 мин.

Условие на задачата:	
Разложете на множители:	
А) $x^4 - 8x$	
Б) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9$	
В) $x^2 - 2x - 8$	
Г) $(x+1)(x^2 - y^2) - (x+y)(x^2 - 1)$	
Решение на задачата:	Точки
А) $x^4 - 8x =$	
$= x(x^3 - 8) =$	1 т.
$= x(x^3 - 2^3) =$	1 т.
$= x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$	
Б) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9 =$	
$= (x^2 - 4xy + 4y^2) - 9 =$	1 т.
$= (x - 2y)^2 - 3^2 =$	1 т.
$= (x - 2y - 3)(x - 2y + 3)$	
В) $x^2 - 2x - 8$	
І начин: чрез групиране	
Търсим числата u, v ,	
такива, че: $u \cdot v = -8$, а $u + v = -2$.	
Възможните варианти са: -1 и 8, 1 и -8, 2 и -4, -2 и 4	
като в конкретния случай 2 и -4 са търсените числа.	

Ще представим $-2x = -4x + 2x$	
$x^2 - 2x - 8 =$	
$= x^2 - 4x + 2x - 8 =$	1 т.
$= (x^2 - 4x) + (2x - 8) =$	
$= x(x - 4) + 2(x - 4) =$	1 т.
$= (x - 4)(x + 2)$	
II начин: чрез допълване до точен квадрат: $x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 - 8$ За да използваме формула за съкратено умножение, трябва да добавим 1^2 и след това да го извадим:	
$x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 - 8 =$	1 т.
$= x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 - 1^2 - 8 =$	
$(x^2 - 2 \cdot x + 1) - 1 - 8 =$	
$= (x - 1)^2 - 9 =$	
$= (x - 1)^2 - 3^2 =$	1 т.
$= (x - 1 - 3)(x - 1 + 3) =$	
$= (x - 4)(x + 2)$	
Г) $(x + 1)(x^2 - y^2) - (x + y)(x^2 - 1) =$	
$= (x + 1)(x - y)(x + y) - (x + y)(x - 1)(x + 1) =$	по 1 т. за всяка формула
$= (x + 1)(x + y)(x - y - x + 1) =$	1 т.
$= (x + 1)(x + y)(1 - y)$	

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	3	6
Точки	4	

Съдържателна област	Уравнения.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	8 мин.

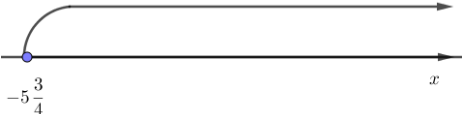
Условие на задачата:		
Решете уравнението:		
А) $\frac{1+2x}{3} - 2 = \frac{3x-2}{2}$		
Б) $ x+2 - 4 = 0$		
Решение на задачата:	Точки	
А)		
$\frac{1+2x}{3} - 2 = \frac{3x-2}{2}$		
$\frac{1+2x}{3} - 2 = \frac{3x-2}{2} \quad \cdot 6$	0,5 т.	
$2(1+2x) - 2 \cdot 6 = 3(3x-2)$	0,5 т.	
$2+4x-12=9x-6$		
$4x-10=9x-6$		
$4x-9x=-6+10$	1 т.	
$-5x=4$		
$x=-\frac{4}{5}$	0,5 т.	
Б)		
$ x+2 - 4 = 0$		
$ x+2 = 4$	0,5 т.	
$x+2=4$ или $x+2=-4$	по 0,5 т. за всяко уравнение	
$x=4-2$ $x_1=2$		
$x=-4-2$ $x_2=-6$		

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	4	6
Точки	3	

Съдържателна област	Неравенства.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	5 мин.

Условие на задачата:	
Решете неравенството и представете решенията графично и като интервал: $\frac{4-x}{3} - \frac{1}{4} < 3$	
Решение на задачата:	Точки
$\frac{4-x}{3} - \frac{1}{4} < 3 \quad \cdot 12$	0,5 т.
$4(4-x) - 3 < 3 \cdot 12$	0,5 т.
$16 - 4x - 3 < 36$	
$13 - 4x < 36$	
$-4x < 36 - 13$	0,5 т.
$-4x < 23 \quad \cdot (-1)$	0,5 т.
$4x > -23$	
$x > -\frac{23}{4}$	1 т.
$x > -5\frac{3}{4}$	
$x \in \left(-5\frac{3}{4}; +\infty\right)$	
	

КАРТА НА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

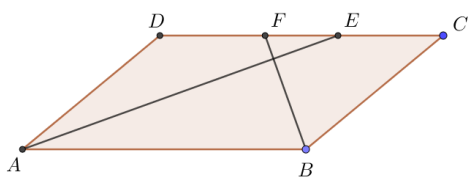
Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	5	6
Точки	5	

Съдържателна област	Основни геометрични фигури. Успоредник.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	8 мин.

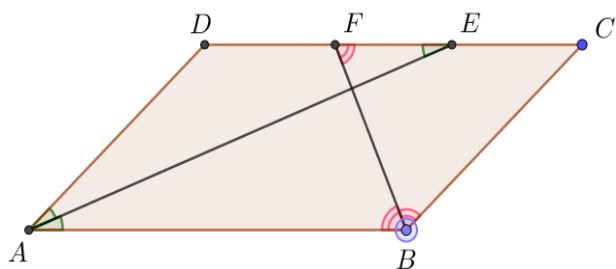
Условие на задачата:

На чертежа AF и BE са ъглополовящи съответно на ъглите $\angle BAD$ и $\angle ABC$ на успоредника $ABCD$. Ако $AD = 6$ cm и $EF = 2$ cm, намерете периметъра на успоредника.



Решение на задачата:

Точки



$\angle DAE = \angle EAB$ (AE – ъглополовяща на $\angle DAB$, по условие)
 $AB \parallel CD$ ($ABCD$ – успоредник)
 $\Rightarrow \angle DEA = \angle EAB$ (кръстни ъгли, получени при пресичане на 2 успоредни права с трета)
 $\Rightarrow \angle DEA = \angle DAE$

1 т.

От това следва, че $\triangle AED$ – равнобедрен и $AD = ED = 6$ cm.

0,5 т.

Аналогично: $\angle ABD = \angle FBC$ (BF – ъглополовяща на $\angle ABC$, по условие) $AB \parallel CD$ ($ABCD$ – успоредник) $\Rightarrow \angle ABF = \angle BFC$ (кръстни ъгли, получени при пресичане на 2 успоредни права с трета) $\Rightarrow \angle BFC = \angle FBC$	1 т.
От това следва, че $\triangle BFC$ – равнобедрен и $BC = FC$	1 т.
$ABCD$ – успоредник, $\Rightarrow AB = CD, AD = BC$ $\Rightarrow BC = 6 \text{ cm}$	0,5 т.
$CD = DE + FC - FE = 6 + 6 - 2 = 10 \text{ cm}$	0,5 т.
$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(10 + 6) = 32 \text{ cm}^2$	0,5 т.

КАРТА НА ТЕСТОВА ЗАДАЧА ЗА ПЪЛНО РЕШЕНИЕ

Предмет	Математика
Клас	8

Задача №	6	6
Точки	6	

Съдържателна област	Уравнения.
Познавателна област	Многостъпкови задачи
Време за решаване	10 мин.

Условие на задачата: Разстоянието между градовете A и B е 240 km. В 8 h от град A за град B тръгва камион, който се движи със скорост 85 km/h. 1 h и 30 min по-късно от град B към град A тръгва автомобил, който се движи със скорост с 20% по-голяма от скоростта на камиона. В колко часа двамата се намират на разстояние $50,7\text{ km}$ след като се разминат?				
Решение на задачата:				Точки
				0,5 т.
	$V\text{ (km)}$	$t\text{ (h)}$	$S\text{ (km/h)}$	1 т.
Автомобил	85	x	$85x$	
Мотоциклетист	102	$x-1$	$102(x-1)$	
$V_m = V_k + 20\%.V_a = 85 + \frac{20}{100} \cdot 85 = 102\text{ km/h}$				1 т.
$85x + 102(x-1) - 50,7 = 240$ $85x + 102x - 102 - 50,7 = 240$ $187x = 392,7$ $x = 2,1\text{ h} - \text{времето на камиона}$				2 т.
$0,1\text{ h} = \frac{1,6}{10,6}\text{ h} = \frac{6}{60}\text{ h} = 6\text{ min}$				1 т.

⇒ Времето на камиона е 2 часа и 6 минути, а той е тръгнал в 8:00 h. Следователно камионът и автомобилът ще се срещнат в 10:06 h.	0,5 т.
--	---------------