



Софийски университет
„Свети Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика
Катедра „Обучение по математика и информатика“

Дипломна работа

За получаване на образователно-квалификационна степен „магистър“

Разработил:

Мария Ивайлова Годорова, ФН: 26257

Магистърска програма „Технологии на обучението по математика и информатика“

Тема: „Разработване и апробация на учебен модел по математика за профилирана подготовка в контекста на съвременните образователни тенденции и потребности“

Научен ръководил: проф. д-р Иван Тонов

Научен консултант: доц. д-р Таня Тонова

гр. София, 2025

Съдържание

Анотация	3
Увод	4
Представяне на българската учебна програма за профилирано обучение по математика	5
Сравнение с чуждестранни програми	8
Анкета и анализ на анкетата	13
Разработка към Модул 3, тема 1, „Приложение на математическия анализ“	17
Геометричен смисъл на понятието производна. Допирателни. Допирателни към криви от втора степен	18
Производни на функция от по-висок ред. Втора производна на функция	24
Механичен смисъл на понятието производна	27
Признаци за растеж и намаляване на функция	29
Критерии за монотонност.....	31
Най-голяма и най-малка стойност на функция.....	32
Изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Инфлексни точки	38
Асимптоти.....	40
Изследване на функции. Графика	43
Контролни работи и анализ.....	50
Заключение.....	59
Библиография.....	62
Приложение	64

Анотация

Представената дипломна работа е на тема „Разработване и апробация на учебен модел по математика за профилирана подготовка в контекста на съвременните образователни тенденции и потребности“. В нея се анализира въведената учебна програма за профилираното обучение през 2016 година. Представени са нейните предимства, недостатъци и как те се отразяват върху процеса на обучение на учениците, избрали профил математика.

За целта на изследването е разгледан и анализиран подробно новият учебен план за 11. и 12. клас профил математика. Учебната програма е сравнена с чуждестранни програми. Сред учители по математика е проведена анкета с мнението, нагласите и споделения им опит за работа по новата учебна програма. За проверка на ефективността на програмата е разработен Модул 3 (Приложение на математическия анализ) и апробиран в 2 групи профилирана подготовка от 91. НЕГ „Проф. Константин Гълъбов“, гр. София.

Увод

През 2016 г. е въведена промяна в организацията и съдържанието на обучението по математика в гимназиален етап. Той е разделен на два етапа – първи (задължителна подготовка от 8. до 10. клас) и втори (профилирана подготовка в 11. и 12. клас). Предвидени са 11 профила, като 1 от тях е математика. Материалът от профил математика е разделен на четири модула, обхващащи различна тематика [1]. Както всяка промяна и при тази има различни положителни и отрицателни страни както на учителите, така и на учениците.

Дипломната работа е фокусирана върху ползите, недостатъците и ефективността на българската учебна програма за профилирана подготовка по математика. Анализирани са и са сравнени с чуждестранни учебни програми. За по-добра обратна връзка е осъществена анкета сред различни учители по математика. Също така е разработен учебен модел за Модул 3 и е приложен в реална среда.

Целта на дипломната работа е да се представят положителните и отрицателните страни на новите учебни програми за втори гимназиален етап по математика и да се анализира ефективността на заложения учебен материал в профилираната подготовка.

Дипломната работа съдържа примерна разработка, която може да бъде използвана от учители, които преподават в профил математика. Тя съдържа теоретична част и съпътстващи задачи, както и съответни контролни работи.

Задачите, поставени за осъществяване на целта, са:

- Анализ на учебната програма за профилирана подготовка по математика. Изтъкване на плюсовете и минусите ѝ.
- Сравнение с чуждестранни учебни програми (Италия и Индия), за да покаже подходящ ли е избраният материал за съответната възрастова група.
- Провеждане на анкета сред учители по математика с различен стаж и подготовка, за придобиване на по-ясно мнение за положителните и отрицателните страни в реалното преподаване в профил математика по новата учебна програма.
- Разработване на Модул 3, Тема 1 (Практическа математика – Приложение на математическия анализ) чрез използването на различни източници.
- Аprobация на разработения модел и анализ на ефективността му.

Обекти на изследването са преподаването и изучаването на учебния материал във втори гимназиален етап, профил математика.

Предмети на изследването са:

- Нагласите и практиките на учителите по математика за профилираното обучение по новата учена програма.
- Процесът на изучаване на Модул 3 и резултатите от него на учениците от 12. клас, профил математика от 91. НЕГ „Проф. Константин Гълъбов“, гр. София.

В настоящата дипломна работа се разглежда хипотезата, че новата учебна програма по математика в профилирана подготовка има съществени ползи и е подходяща за целевата възрастова група. Промените в съдържанието са насочени към модернизиране на обучението, развиване на по-високи когнитивни умения и предоставяне на възможност учениците да избират профил в по-зряла възраст, като същевременно се фокусират върху предпочитани от тях предмети. Въпреки това реализацията на промяната среща затруднения. Освен че задължителният и профилираният материал се преподават успоредно, то понякога липсва и синхрон между тях. Също така част от учителите не разполагат с достатъчно ресурси и готовност за преподаване на новия заложен учебен материал. Това води до затруднения в преподаването и затормозява пълноценното усвояване на материала от учениците.

Представяне на българската учебна програма за профилирано обучение по математика

Целите на профилираното обучение по математика за 11. и 12. клас поставени от МОН са [1]:

- Да се формира представа за ролята на аксиоматиката при дедуктивното структуриране на теорията
- Да се формира понятийният апарат на съответната тема и да се формират умения за прилагане на определения и на теореми при обосноваване на изводи
- Да се формират умения за моделиране на различни ситуации (реални или теоретични), умение за изследване на модели и интерпретиране на получени резултати

- Да се формира представа за единността на математиката чрез геометризация на алгебрата и алгебризация на геометрията
- Да се формира представа за вероятностни модели, умения за прилагането им и представяне на вероятност на основата на комбинаторни съображения или на знания, извлечени от данните от наблюдения и експерименти
- Да се формират знания за разпределението на случайни величини и умения за използването им като модел на реални ситуации
- Да се формира умение за използване на подходящ софтуер за решаване на проблеми, свързани с изучената тематика

Учениците, които завършиха през учебната 2021/2022 година, са първите, при които бе реализирана промяната.

Обучението в профил математика се извършва в 4 задължителни модула: [2]

1. **МОДУЛ 1 – Геометрия** (предвиден за 11. клас; преди частично изучаван в 12. клас):
 - 1.1. Вектори
 - 1.2. Аналитична геометрия
 - 1.3. Стереометрия
2. **МОДУЛ 2 – Елементи на математическия анализ** (предвиден за 11. клас; преди изучаван в 12. клас):
 - 2.1. Полиноми на една променлива
 - 2.2. Числови редици
 - 2.3. Функции. Непрекъснатост и диференцируемост
3. **МОДУЛ 3 - Практическа математика** (предвиден за 12. клас; разширено, спрямо предишната учебна програма)
 - 3.1. Приложения на математическия анализ
 - 3.2. Геометрични модели
 - 3.3. Емпирични разпределения
 - 3.4. Комбинаторика
4. **МОДУЛ 4 – Вероятности и анализ на данни** (предвиден за 12. клас; разширено, спрямо предишната учебна програма)
 - 4.1. Вероятност
 - 4.2. Случайна величина

- 4.3. Биномно разпределение
- 4.4. Нормално разпределение
- 4.5. Статистически изводи
- 4.6. Линеен модел на корелационна зависимост

Изборът на профил се извършва вече в 10. клас, а не както преди в 8. Според мен е положителна промяна в българското образование, защото на тази възраст учениците са по-зрели и имат по-добра преценка за интересите си. Така те са по-мотивирани и осъзнати кой профил би им бил по-полезен за подготовка за кандидатстване в университет и развитие.

Друга положителна страна е, че се изучават главно профилираните предмети и общообразователните отпадат. По този начин учениците имат достатъчно време да се фокусират и усъвършенстват знанията си. Така имат възможност да завършват като добри специалисти и да са по-подготвени за материала в университета.

Учениците, избрали профил математика в 11. и 12. клас, изучават материала от задължителна подготовка по математика за конкретните класове и успоредно с това материала, предвиден за профилирана подготовка. Имат задължителна подготовка (ЗП) 2 учебни часа седмично [3] и профилирана подготовка (ПП) между 4 и 8 часа седмично [1]. Допълнителни часове по математика могат да се добавят с часове по избираем учебен час (ИУЧ) или факултативен учебен час (ФУЧ), но при тях може да се изучава материал, извън задължителния.

В 11. клас се разглежда учебното съдържание от Модул 1 (Геометрия) и Модул 2 (Елементи на математическия анализ) едновременно през цялата учебна година. Предвид и различната тематика на задължителния учебен материал, този начин на преподаване затруднява учениците. Често те се объркват и по-трудно усвояват предвидените теми.

В 12. клас разпределението е по-структурирано: през първия учебен срок изучават Модул 3 (Практическа математика), а през втория срок – Модул 4 (Вероятности и анализ на данни). Така учениците успяват по-лесно да разграничат различните тематик и да усвоят и упражнят пълноценно знанията си.

Проблем и в двата класа се наблюдава в несинхронизираните учебни програми за задължителна общообразователна подготовка по математика и профилираната. Нерядко при разглеждане на теми от профилираната подготовка са нужни предварителни знания,

които по програма все още не са разгледани в задължителната. Тази липса води до нарушаване на пълноценния учебен процес и доброто усвояване на материала.

Споделено общо мнение сред преподавателите в гимназиален курс е, че срещнат проблеми в подбора на учебниците и в разработката на учебни материали за профилирана подготовка. Учебниците бяха написани в кратки срокове. Това доведе до допуснати грешки както при теоретичната част, така и в условията и решенията на задачите. Освен с учебниците, учителите намират трудности и със самия учебен материал. Част от темите в Модул 1 и Модул 4, не са се изучавали в училище съгласно предходните учебни програми, а само във ВУ. От тук идва проблемът, че някои от учителите имат нужда от повече подготовка за адаптирано преподаване в профил „Математика“. Въпреки трудностите в началото, с времето и практиката по-голямата част от учителите, преподаващи в гимназиален етап, се справиха с трудностите и подготовката на пълноценни и полезни учебни материали.

Сравнение с чуждестранни програми

Като допълнение с цел сравнение за ефективност и подбор на учебната структура и теми за съответната възраст са разгледани учебните програми от Индия и Италия.

В Индия обучението в училище извършва по системата „10+2“, 10 години имат задължително обучение и 2 години в колеж, подобно на действащата система в България [4].



Education System in India

Education	School/Level	Grades	Age	Years	Notes
Primary	Elementary School	1-8	6-14	8	
Secondary	Secondary School	9-12	14-18	4	Includes Standards X and XII - Secondary School or Senior Secondary School

В XI клас учебният материал е разделен на 6 модула, а в XII клас – 5 [5] [6].

Теми в XI клас

1. Множества и функции:
 - Множества
 - Отношения и функции

- Тригонометрични функции
- 2. Алгебра:
 - Комплексни числа и квадратни уравнения
 - Линейни неравенства
 - Пермутации и комбинации
 - Нютонов бином
 - Редици и редове
- 3. Аналитична геометрия:
 - Уравнение на права
 - Разстояние между точка и права
 - Конични сечения: окръжност, елипса, парабола, хипербола
- 4. Математически анализ:
 - Граници
 - Производни
- 5. Статистика и вероятности:
 - Средна стойност, дисперсия, стандартно отклонение
 - Класическа вероятност

Теми в XII клас

1. Релации и функции:
 - Релации и функции
 - Обратни тригонометрични функции
2. Алгебра:
 - Матрици
 - Детерминанти
3. Математически анализ:
 - Непрекъснатост и диференцируемост
 - Приложения на производните
 - Интеграли
 - Диференциални уравнения
4. Аналитична геометрия в равнината и пространството
5. Линейно оптимиране
6. Вероятности

Както лесно може да се забележи материалът се припокрива и дори в Индия е надграден. Голяма част от него, който индийските колежани изучават, в България се разглежда в университета.

Разлика срещаме при натовареността на учениците. В Индия учениците в 11. и 12. клас учат математика до 8 часа седмично (часовете са с дължина 40 - 45 минути) като разглеждат само учебния материал по профилирана подготовка. Това помага на учениците да се съсредоточат по-добре върху обучението, упражнението и затвърждаването на материала по математика.

В Италия обучението, също както в Индия, е задължително от 6 до 16 годишна възраст включително. Следващите години могат да учат, в случай, че искат да кандидатстват в университет. [7]

Stage	Age range
Lower secondary (<i>scuola secondaria di primo grado</i>)	11-14
Upper secondary (<i>scuola secondaria di secondo grado</i>)	14-19

Във второто ниво на обучението си в гимназията учениците могат да избират между 5 направления: лицей, технологичен институт, художествен институт, програма за обучение на учители и професионални програми.

Главно профил математика се изучава в лицейте, като в последните две години от обучението си разглеждат следните теми: [8] [9] [10]

IV гимназиален курс (еквивалент на 11. клас)

1. Функции:

- Експоненциални функции – уравнения и неравенства
- Логаритмични функции – свойства, уравнения и неравенства
- Тригонометрични функции:
 - Функциите синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс
 - Тригонометрични тъждества
 - Обратни тригонометрични функции
 - Тригонометрични функции и геометрични трансформации

2. Тригонометрични уравнения и неравенства
 - Елементарни тригонометрични уравнения
 - Линейни уравнения със синус и косинус
 - Хомогенни уравнения от втора степен със синус и косинус
 - Системи тригонометрични уравнения
 - Тригонометрични неравенства
 - Параметрични тригонометрични уравнения
3. Тригонометрични зависимости в триъгълник
 - Правоъгълен триъгълник
 - Тригонометрични формули в правоъгълен триъгълник
 - Тригонометрични формули в произволен триъгълник
4. Комплексни числа
 - Операции с комплексни числа
 - Изрази с комплексни числа в тригонометрична форма
 - n -ти корен от единица и на комплексно число
 - Експоненциална форма на комплексно число
5. Вектори, матрици и детерминанти
6. Геометрични трансформации
7. Евклидова геометрия в пространството
 - Точки, прави, равнини в пространството
 - Перпендикулярност и успоредност
 - Разстояния и ъгли в пространството
 - Геометрични трансформации
 - Многогостени и ротационни тела
 - Лица и обеми на тела
8. Аналитична геометрия в пространството
 - Координати в пространството
 - Вектори в пространството
 - Права и уравнение на права
 - Права и уравнение на права
 - Взаимно положение на права и равнина
9. Комбинаторика и вероятности:
 - Пермутации, вариации, комбинации
 - Класическа и условна вероятност

- 1. Функции**
 - Реални функции
 - Свойства на функциите
 - Редици и прогресии
 - Принцип на математическата индукция
- 2. Граници**
 - Граници на редица
 - Граници на функция
 - Непрекъснати функции
 - Точки на прекъсване
 - Асимптоти
- 3. Производни**
 - Производна на функция
 - Операции с производни
 - Производна на обратна функция
 - Производни от по-висок ред
 - Производна и скорост на изменение
- 4. Основни теореми за диференциално смятане**
 - Теореми на Рол, Лагранж, Коши, Лопитал
 - Следствия от теоремата на Лагранж
- 5. Минимум, максимум на функция, монотонност**
- 6. Изпъкналост и вдлъбнатост, инфлексни точки**
- 7. Изследване на функция**
- 8. Неопределен интеграл**
- 9. Определен интеграл**
- 10. Диференциални уравнения от първи ред**

В сравнение с българската учебна програма за 11. и 12. клас учениците в Италия изучават тригонометрия, вектори, Евклидова геометрия и част от геометричните трансформации, които учениците в България разглеждат в първия гимназиален етап, с малки разлики.

За сметка на това разглеждат комплексни числа, матрици, детерминанти, диференциални уравнения, определени и неопределени интеграли, които при нас се изучават в университета.

И тук, както и при програмата в Индия, учениците изучават само материала по изборния от тях профил, като в Италия учениците имат по 4 или 5 часа седмично. Материалът е подреден последователно и постепенно се усложнява, което позволява на учениците да го упражнят и затвърдят по-лесно и ефективно.

Разгледаните учебни програми на Индия, която е многолюдна държава, известна със силно структурирана учебна програма, и Италия – европейска държава със задълбочена, но хуманитарно-балансирана програма, дават основание да оценим подбора на учебния материал за профил математика в България. Впечатление прави, че програмата у нас отговаря на международните стандарти и е подходяща за възрастовата група. Разлика намираме при натовареността на българските ученици в успоредното изучаване на задължителен и профилиращ учебен материал.

Анкета и анализ на анкетата

С цел допълнителна съпоставка с реалната практика, мнение и аргументация към заложените в дипломната работа задачи и хипотеза бе създадена анкета и попълнена от 73 учители по математика. Анкетата включва следните въпроси:

1. В кой обучителен етап преподавате?
2. Колко години стаж имате като учител по математика?
3. Съгласни ли сте с промяната на програмата и въвеждането на модули в профилираната подготовка по математика в гимназиален етап?
4. Какво, според Вас, трябва да се промени в учебната програма за паралелките с профил математика в гимназиален етап?
5. Преподавали ли сте по новия учебен план в паралелка/профил математика?

И за учителите, които са преподавали в XI и XII клас, като допълнителни въпроси са:

6. Чувствахте ли се подготвени за преподаването на учебния материал в XI и XII клас?
7. Изпитахте ли затруднения в преподаването по новата учебна програма?
8. Къде изпитахте затруднения?

9. Кой модул в XI и XII клас Ви бе най-труден за преподаване?
10. Смятате ли, че има достатъчно учебни материали и помагала?
11. Кои учебни материали и помагала използвахте?
12. Как учениците възприеха материала?
13. Кой модул в XI и XII клас бе най-лесен за учениците?
14. Кой модул в XI и XII клас бе най-труден за учениците?

Анкетата бе попълнена от 1 начален учител, 12 учители в прогимназия, 44 в гимназиален етап и 16 преподаващи в прогимназиален и гимназиален. От попълните 17 учители имат под 10 години стаж, 11 – между 10 и 20 години, 18 – между 21 и 30 и 27 – над 30 години стаж.

Двадесет и шест от анкетираните са съгласни с променената програма и въведените модули. Според тях чрез профилите учениците ще могат по-добре да се съсредоточат в материала и да вникнат в него. По този начин ще могат да имат по-добра подготовка за материала в университетите. Те споделиха:

- „Да, съгласна съм. По този начин учениците осъзнават, че математика е общо наименование и че има различни клонове на математиката, а с помощта на учител правят връзка между тях и прилагат комбинативно знанията си.”
- „Съгласна съм. Материалът в модулите, до голяма степен, в изучаван и преди в профилираната подготовка. Това дава възможност на учениците да вникнат в дълбочината на науката, което им помага и да разберат дали искат и могат да се занимава с тази дисциплина във висшето си образование и живота.“
- „Да! Възможността, да се съсредоточат върху материя която да усъвършенстват в университета е супер идея. Излишно е да се изучават общообразователни предмети след 10 клас.”

Двадесет и девет учители не са съгласни с промяната. Изразяват несъгласие към сложността на материала, към големия обем нови знания и малкото време за упражнения. Също така се опасават, че с нововъведената програма учениците губят мотивация и се отказват от математиката.

- „Тази учебна програма не е подходяща за учениците. Геометрията, в частност Стереометрията, много затруднява учениците, отчайва ги и отказва от математиката, да не говорим за модул 4. Старата учебна програма с профилирана математика беше много по-добре поднесена и разбираема.“

- „Не, старата учебна програма беше работеща. Доста тежка е за ученици, никакво време за упражнение и надграждане. Пълно разминаване с учебната програма за кандидатстване във ВУЗ.”
- „Не, не съм съгласна с програмата и модулите! Намали се броя часове ЗП, увеличи се обема на материала. И с въвеждане на профилирана подготовка учениците съвсем се отдръпнаха от математиката.”

Единадесет от анкетиранияте както са съгласни, така са и несъгласни с промените. Те споделиха: „Въвеждането на модулите не е лоша идея, но мисля, че учебната програма би трябвало да се съобрази с основата, която имат учениците. Не е логично учениците от математически гимназии и ученици напр. от езикова гимназия да покриват еднакви образователни стандарти в 11 и 12 клас, при драстичната разлика на часовете им по математика в първи гимназиален етап. За учениците изучавали математика с 2-3 часа седмично в 8, 9, 10 клас заложеното в сегашната учебна програма е много трудно и демотивиращо въпреки, че самостоятелно са избрали профил математика.“

Шестима от анкетиранияте споделиха, че не са запознати и нямат мнение по темата. Голяма част от анкетиранияте при отговора си към въпрос 4. предлагат като промяна да не се изучават в 11. клас успоредно Модул 1 и Модул 2, понеже това затруднява и обърква учениците. Също според тях Модул 4 е излишен и е по-добре да се замени с преговор и подготовка за ДЗИ или ако се изучава нов материал, да е интегрално смятане или матрици и детерминанти. Споделят, че това би било по-достъпно като тематика до учениците и ще е по-полезно за подготовката за университета. Предлагат и повече часове за упражнение, за да могат да усвоят учениците по-добре материала.

- „Трябва да се изучават повече функции и стереометрия.“
- „1) Модул 4 трябва да бъде изцяло премахнат. Безумно е преподаването на нов материал през втория срок на 12 клас, когато би следвало да е отреден изцяло за преговор. Вместо това се налага до края на март/началото на април /и то в най-добрия случай/ да предадем и без това безумния материал от Модул 4. Времето е малко, материалът е обемен, което пък неминуемо води до претрупване. 2) Избираемият модул да отпадне - нека се водят просто часове за упражнения към модула, който се преподава през съответния срок. 3) Никакво успоредно предаване на модулите в 11 клас. В главите на децата става пълна каша. Категорично не е добър вариант. По този начин нищо трайно

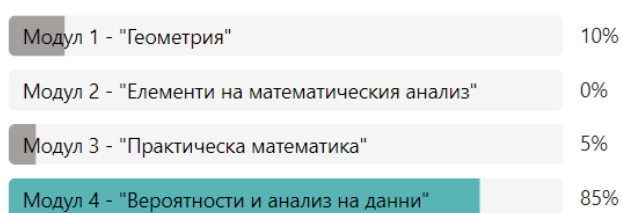
не им остава в главите. 1 срок 11 клас - Модул 1; 2ри срок 11 клас - Модул 2; 1ви срок 12 клас - Модул 3; 2ри срок 12 клас - само и единствено преговор.

4) Нормални учебници - да се напишат адекватни учебници по всеки един от модулите - може да е на едно единствено издателство и всички да учат по тях. “

- „Да се премахне модул 4 и да има повече часове за упражнение. По-добре да се изучава матрици и детерминанти, материал по-достъпен за учениците. В по-малките градове в паралелките с профил математика има деца които се записват заради информатиката.“
- „Да се увеличат часовете за упражнения. Иначе се препуска в материала, за да се вземат часовете и учениците нямат време да затвърдят научения материал.“
- „Да се наблегне на приложната математика, вместо на статистиката.“

От анкетираните 55% (40 учители) са преподавали до 12. клас. 77 % от тях са се чувствали средно подготвени за преподаването на материала, понеже е имало теми, които е трябвало да преговорят. По-голямата част от преподавалите в профил математика са изпитали минимални затруднения в процеса на работа.

Деветнадесет от анкетираните са изпитали най-големи затруднения при намирането на материали, 6 – при подготовката на часовете, а 10 – и при двете. Като други затруднения са представени малкото време за упражнения, както и нежеланието на учениците за учене. Най-големи затруднения при преподаването са изпитали при Модул 4.



По-голямата част е на мнение, че няма достатъчно адаптирани към новата програма учебни материали и пособия. Като източници са използвани най-често стари издания на учебници и сборници на различните издателства. Също така някои са прибягнали до университетски сборници и чуждестранни източници; 55% споделят, че учениците са се справили на средно ниво, някои са разбрали материала, но някои не са.

Според отзивите най-добре учениците се справят с Модул 2, а най-трудно – с Модул 1 и Модул 4.

13. Кой модул в XI и XII клас бе най-лесен за учениците?

Модул 1 - "Геометрия"	5%
Модул 2 - "Елементи на математическия анализ"	83%
Модул 3 - "Практическа математика"	5%
Модул 4 - "Вероятности и анализ на данни"	8%

14. Кой модул в XI и XII клас затрудни най-много учениците?

Модул 1 - "Геометрия"	33%
Модул 2 - "Елементи на математическия анализ"	0%
Модул 3 - "Практическа математика"	8%
Модул 4 - "Вероятности и анализ на данни"	60%

Разработка към Модул 3, тема 1, „Приложение на математическия анализ“

За да се провери в реална образователна среда ефективността на определени методически решения и съдържателни акценти, бе проведен експеримент, включващ Модул 3 и неговото преподаване 12. клас в 91. НЕГ „Проф. Константин Гълъбов“, гр. София в две профилирани групи: 1) Математика и физика; 2) Математика и география.

Проследяването на резултатите от обучението беше осъществено чрез три последователни контролни работи, разпределени на различни етапи от преподаването на съдържанието. Този подход бе избран с цел да се осигури динамична картина на усвояването на материала. По този начин се гарантира както обективност, така и проследимост на развитието на учениците във времето.

Получените данни служат като основа за анализ на ефективността на използваните методически решения, тяхната приложимост и потенциала им да допринасят за устойчиво усвояване на учебното съдържание.

По-долу е представена методическа разработка към Модул 3, тема 1, Приложение на математическия анализ, както и контролни работи, чрез които се проследи усвояването на съдържанието и се потвърди резултатността на експеримента.

Поставените цели на разгледаните задачи и теория са [1]:

- Да се формира представа за ролята на аксиоматиката при дедуктивното структуриране на теорията
- Да се формира понятийният апарат на съответната тема и да се формират умения за прилагане на определения и на теореми при обосноваване на изводи

- Да се формират умения за моделиране на различни ситуации (реални или теоретични), умение за изследване на модели и интерпретиране на получени резултати
- Да се формира представа за единността на математиката чрез геометризация на алгебрата и алгебризация на геометрията

Разработването на Модул 3 се основава на задълбочен анализ и инспирация от учебници от различни във времето учебни програми за гимназиален курс, от учебници и сборници по висша математика на различни университети, в частност специализирани помагала по математически анализ. Допълнително, процесът включва сътрудничество и обмен на добри практики с учители по математика от 91. НЕГ. Това даде възможност съдържанието да бъде съобразено както с теоретичните изисквания, така и с реалните потребности на учениците. [11] [12] [13] [14] [15] [16].

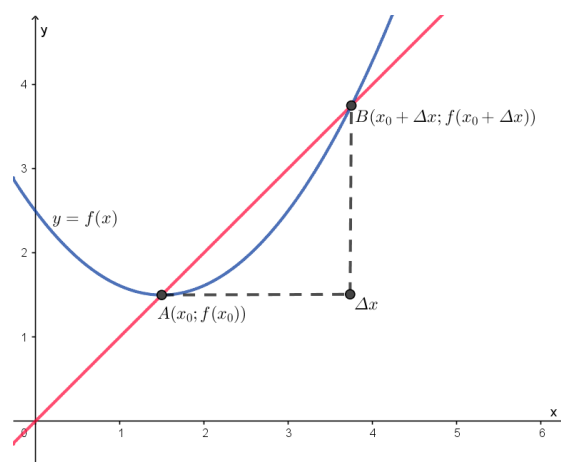
Геометричен смисъл на понятието производна. Допирателни.

Допирателни към криви от втора степен

Нека имаме графиката на функцията (Фигура 1) и от нея изберем две точки A и B , такива че A е с координата $(x_0, f(x_0))$, а

$B - (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Тогава ако използваме уравнението на правата през двете точки, за AB получаваме:

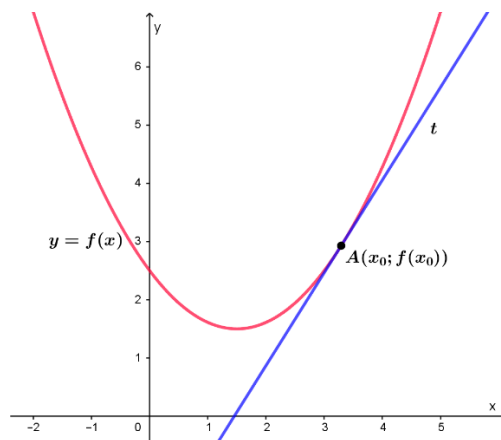
$$AB: f(x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$



Фигура 1: Права през две точки

Ако изберем т. В все по-близо и по-близо до т. А (Фигура 2), АВ ще се приближава към допирателната на $y = f(x)$ и графиката в т. А.

Нека допирателната в т. А е права t с уравнение $y = k(x - x_0) + f(x_0)$, където k е ъгловият коефициент и $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (ако границата съществува). Но чрез тази граница можем да дефинираме и производната на функцията $y = f(x)$ в т. x_0 . Следователно получаваме, че $k = f'(x_0)$.



Фигура 2: Допирателна

Правата с уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ се нарича допирателна към графиката на $y = f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$.

Определение за хоризонтална допирателна:

Ако $f'(x_0) = 0$, то допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$ е хоризонтална права с уравнение $y = f(x_0)$.

Определение за вертикална допирателна:

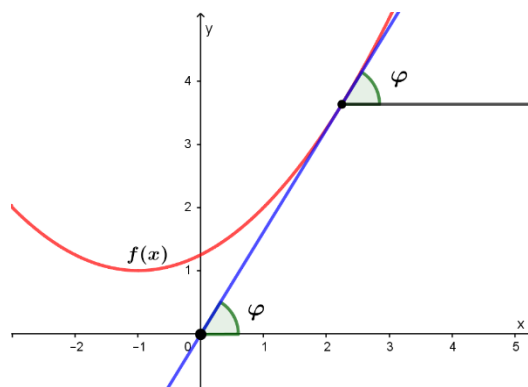
Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, то допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$ се нарича вертикална права с уравнение $x = x_0$.

Наклонът на права се определя от ъгловия коефициент $k = \operatorname{tg} \varphi$ (Фигура 3), където φ е ъгълът, който правата сключва с положителната посока на оста Ox .

Тъй като $k = \operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x_0)$, то получаваме следната теорема:

Геометричен смисъл на производната

Производната на функцията $y = f(x)$ в точката x_0 е равна на ъгловия коефициент, тоест на тангенса на ъгъла, който сключва положителната посока на абсцисната ос с допирателната към графиката в точката $(x_0, f(x_0))$.



Фигура 3: Ъглов коефициент

Задача 1.

Да се намери уравнението на допирателната на функцията $f(x) = x^2$ при $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и да се определи ъгълът φ , който тя сключва с положителната посока на абсцисната ос.

Решение:

Производната на функцията $f(x) = x^2$ е $f'(x) = 2x$. Тогава, ако приложим формулата за уравнение на допирателна, получаваме:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}$$

Получихме уравнението на допирателната към функцията $f(x) = x^2$ при $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

За да определим ъгъла φ , първо трябва да намерим тангенса на ъгъла, който е равен на производната на функцията в точката x_0 .

$$\operatorname{tg} \varphi = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \text{ то } \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Задача 2.

Намерете координатите на точката, в която допирателната към графиката на функцията $f(x) = x^2 - 2x + 3$ е успоредна на абсцисната ос.

Решение:

Производната на функцията $f(x) = x^2 - 2x + 3$ е $f'(x) = 2x - 2$. Щом търсим допирателна, която е успоредна на абсцисната ос, то търсим хоризонтална допирателна. От дефиницията за нея, знаем, че $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Заместяваме в $f(x) = x^2 - 2x + 3$ и получаваме: $f(1) = 2$.

Така получаваме, че координатите на търсената точка са $(1, 2)$.

Задача 3.

Намерете координатите на точките, в които допирателната към графиката на функцията $f(x) = \frac{2}{3} \sin x$ сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

От дефиницията за допирателна към функция, знаем, че $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi$. След като заместим получаваме:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cos x \Rightarrow \frac{2}{3} \cos x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

Заместваме във $f(x) = \frac{2}{3} \sin x$ и получаваме $f_1 = \frac{1}{3}$ и $f_2 = -\frac{1}{3}$.

Координатите на точките са:

- $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$, където x_1 удовлетворява равенствата $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\left(x_2, -\frac{1}{3}\right)$, където x_2 удовлетворява равенствата $\sin x = -\frac{1}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Задача 4.

Намерете ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията

$y = x^2 - 5x + 6$ в точките, в които тази функция пресича абсцисната ос.

Решение:

За да намерим точките, в които функцията пресича абсцисната ос, то първо трябва да я приравним на 0.

$$y = x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = 2$$

Получихме точките $(3, 0)$ и $(2, 0)$.

$$k = y' = 2x - 5 \Rightarrow k_1 = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \wedge k_2 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$$

Търсените ъглови коефициенти са 1 и -1.

Условие за допирателна към парабола:

Ако правата $y = a_1x + b_1$ е допирателна към параболата $y = ax^2 + bx + c$, то $(b - a_1)^2 - 4a(c - b_1) = 0$.

Доказателство:

Нека разгледаме системата
$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

Тя ще е изпълнена когато има единствено решение и $a_1x + b_1 = ax^2 + bx + c$. След преобразования получаваме квадратното уравнение $ax^2 + (b - a_1)x + c - b_1 = 0$. За да има то единствено решение, трябва $D = 0 \Rightarrow D = (b - a_1)^2 - 4a(c - b_1) = 0$, с което доказваме условието. ■

Забележка!

За някои криви е възможно допирателната към кривата в определена точка да има и други общи точки с нея освен допирната.

Задача 5. (Приложение на условието за допирателна)

Докажете, че правата $y = 4x - 1$ и параболата $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ се допират и намерете координатите на точката на допиране.

Решение:

Разглеждаме системата
$$\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

За да докажем, че правата и параболата се допират, то трябва да разгледаме стойността на $(2 - 4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - (-1)) = 4 - 4 = 0$.

От условието за допирателна на права и парабола, те се допират. За да намерим координатите на допирната точка трябва да намерим корените на уравнението

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \quad | \cdot 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Заместваме в едно от уравненията в системата и откриваме, че $y = 7$. Така получаваме, че координатите на точката, в която правата и параболата се допират са $(2, 7)$.

Задача 6.

Дадени са параболата $y = x^2 + 3x - 4$ и правата $g: y = -x + 5$. Намерете допирателната към параболата, която е успоредна на g .

Решение:

Нека t е правата успоредна на g , която се допира до параболата y . Ъгловият коефициент на g е -1 , следователно, за да са успоредни t и g , трябва и ъгловият коефициент на t да е -1 . Тогава правата t ще е от вида $t: y = -x + b$. Търсим точка, в която ъгловият коефициент на параболата също е -1 :

$$y' = 2x + 3 = -1 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 4 - 6 - 4 = -6$$

Търсената точка е $(-2, -6)$. Това е и точката, в която правата t и параболата y се допират. Заместваме с координатите в уравнението на t и получаваме, че $b = -8$. Следователно търсената права е $t: y = -x - 8$.

Задача 7.

Намерете параболата $y = ax^2 + bx + c$, която минава през точка $M(2, -3)$ и се допира до правите $g_1: y = -x$ и $g_2: y = 3x$.

Решение:

Щом параболата се допира до права, то има с нея единствена обща точка. Следователно, за да намерим параболата трябва да разгледаме равенствата

$$ax^2 + bx + c = -x \text{ и } ax^2 + bx + c = 3x.$$

След елементарни преобразования получаваме уравненията:

$$ax^2 + (b + 1)x + c = 0 \text{ и } ax^2 + (b - 3)x + c = 0.$$

От условието за допирателна на права и парабола и горепосочените уравнения следва системата:

$$\begin{cases} (b + 1)^2 - 4ac = 0 \\ (b - 3)^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

След приравняване на двете равенства получаваме $(b + 1)^2 = (b - 3)^2$, откъдето имаме $b = 1$. След като заместим в някое от равенствата, намираме, че $ac = 1$. (1)

От това, че параболата минава през точка $M(2, -3)$, заместваме с координатните стойности в уравнението на параболата и получаваме, че $4a + c = -5$.

Изразяваме $c = -4a - 5$. Заместваме в (1):

$$(1 + 1)^2 - 4a(-4a - 5) = 0 \Rightarrow 4a^2 + 5a + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1 \wedge a_2 = -\frac{1}{4}$$

Заместваме в $c = -4a - 5$ и получаваме $c_1 = -1$ или $c_2 = -4$. Търсената парабола е

$$y = -x^2 + x - 1 \text{ или } y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4.$$

Производни на функция от по-висок ред. Втора производна на функция

Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала $(a; b)$, т.е нейната първа производна $f'(x)$ е функция, дефинирана в този интервал.

Определение:

Ако $f'(x)$ е диференцируема в интервала $(a; b)$, то съществува нейна производна $f''(x)$, дефинирана в същия интервал. Тази производна наричаме втора производна на $f(x)$.

$$(f'(x))' = f''(x)$$

Задача 1.

Да се намери втората производна на функцията $f(x)$, ако:

а) $f(x) = x^2 + 2x$

Решение:

$$f'(x) = 2x + 2 \Leftrightarrow f''(x) = 2$$

б) $f(x) = (3x + 2)(2x^3 - 4)$

Решение:

I начин:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x + 2)'(2x^3 - 4) + (3x + 2)(2x^3 - 4)' = 3(2x^3 - 4) + (3x + 2) \cdot 6x^2 \\ &= 6x^3 - 12 + 18x^3 + 12x^2 = 24x^3 + 12x^2 - 12 \Rightarrow f''(x) = 72x^2 + 24x \end{aligned}$$

II начин (За по-лесно намиране на производна, можем първо да опростим функцията.):

$$f(x) = (3x + 2)(2x^3 - 4) = 6x^4 + 4x^3 - 12x - 8$$

$$f'(x) = 24x^3 + 12x^2 - 12$$

$$f''(x) = 72x^2 + 12$$

$$\text{в) } f(x) = \sin 2x + \cos 3x$$

Решение:

$$f'(x) = \cos 2x \cdot (2x)' - \sin 3x \cdot (3x)' = 2 \cos 2x - 3 \sin 3x$$

$$f''(x) = -4 \sin 2x - 9 \cos 3x.$$

Определение:

Ако $f''(x)$ е диференцируема в интервала $(a; b)$, то съществува нейна $f'''(x)$ – трета производна, дефинирана в същия интервал.

Следствие:

Аналогично съществуват $f^{IV}(x), f^V(x), \dots, f^{(n)}(x)$ производна.

Задача 2.

Да се намери петата производна на:

$$\text{а) } f(x) = x^7$$

Решение:

$$f'(x) = 7x^6$$

$$f''(x) = 42x^5$$

$$f'''(x) = 210x^4$$

$$f^{IV}(x) = 840x^3$$

$$f^V(x) = 2520x^2$$

$$\text{б) } f(x) = \cos x$$

Решение:

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{IV}(x) = \cos x$$

$$f^V(x) = -\sin x$$

Задача 3.

Да се намери формулата за n -тата производна на функцията $f(x) = \sin x$.

Решение:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

По получените резултати можем да предположим, че $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. Ще проверим предположението чрез метода на математическата индукция.

- 1) За $n = 1$ е вярно.
- 2) Нека приемем, че е вярно за $n = k$, т.е. $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.
- 3) Ще проверим за $n = k + 1$ като използваме индукционното допускане.

$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})' = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Правилото е изпълнено и за $n = k + 1$, което доказва верността на предположението и може да направим извода, че:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \text{ за } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Аналогично се доказва } f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Задача 4.

За кои стойности на x вторите производни на функциите $f(x) = 2x - 3$ и

$g(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ са равни.

Решение:

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2$$

$$g(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x \right) =$$

$$= 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$g'(x) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow g''(x) = -2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$g''(x) = f''(x) \Rightarrow -2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \Rightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -1 \Rightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -1$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \text{ за } \forall k \in \mathbb{Z}$$

Механичен смисъл на понятието производна

Нека разгледаме движението на материална точката M по траекторията L .

За начало избираме точката O и ще се движим по приетата за положителна посока. Положението на т. M върху L в момента t се определя от функцията $S(t)$ (Закон за движение).



Ако разгледаме движението на точката в интервала $[t_0; t]$, то ще е изминат път $\Delta S = S - S_0$ за време $\Delta t = t - t_0$. Тогава съгласно закона за движение ще имаме средна скорост $v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t - t_0}$.

Определение:

Величината $v_{\text{ср.}}(t) = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$ се нарича средна скорост на движение в интервала $[t_0; t]$.

Нека вземем интервала от време да е възможно най-малък, т.е $\Delta t \rightarrow 0$. Тогава средната скорост ще се приближава до реалната скорост в момента t_0 . Тази скорост се нарича моментна и се дефинира с:

Определение:

Границата на средната скорост при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

се нарича моментна скорост в t_0 .

От определението за производна следва, че $S'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$.

Понеже $S'(t_0) = v(t_0)$ за всяко t_0 , следователно $S'(t) = v(t)$.

Нека точката M се движи неравномерно. Тогава с течение на времето скоростта ѝ ще се променя. Това изменение се нарича ускорение и се бележи с $a(t)$. Ускорението ѝ се намира като

$$a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t) = (S'(t))' = S''(t)$$

Задача 1.

Нека материална точка се движи по закона $f(t) = S(t)$ (в метри). Да се намерят средната скорост и ускорението в произволен момент t (в секунди) и да се изчислят за $t = 2$ s, ако:

а) $S(t) = \sqrt{2t+5}$

Решение:

$$v(t) = S'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2t+5}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2t+5}} > 0 \Rightarrow \text{точката се движи по посока на движението.}$$

$$v(2) = S'(2) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 + 5}} = \frac{1}{3} \text{ m/s}$$

$$a(t) = S''(t) = -\frac{1}{(2t+5)^{\frac{3}{2}}} < 0 \Rightarrow \text{ускорението е с посока, обратна на посоката на движение.}$$

$$a(2) = |S''(2)| = \left| -\frac{1}{(2 \cdot 2 + 5)^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| -\frac{1}{27} \right| = \frac{1}{27} \text{ m/s}^2$$

б) $S(t) = 2t + 5$

Решение:

$$v(t) = S'(t) = 2 \text{ m/s, т.е. точката се движи с постоянна скорост.}$$

$$a(t) = S''(t) = 0 \text{ m/s}^2, \text{ следователно точката се движи равномерно.}$$

Задача 2.

Нека материална точка се движи праволинейно по закона $S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5$, където времето е в секунди, а изминатият път е в метри. Намерете:

- а) Моментата t , при който ускорението на точката е 0;
- б) Скоростта на движение в намерения момент от а).

Решение:

а) $S'(t) = -t^2 + 6t$
 $S''(t) = -2t + 6.$

Искаме $a(t) = 0$, т.е. $S''(t) = 0 \Rightarrow -2t + 6 = 0$, откъдето получаваме $t = 3$ s.

б) $v(3) = S'(3) = -9 + 18 = 9$ m/s

Признаци за растене и намаляване на функция

Въвеждаме на допълнителни определения, които са ни нужни за доказването на теоремите, за монотонност на функция.

Определение:

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в D . Ако съществува $\delta > 0$ такава, че за всяко $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$:

- казваме, че имаме локален минимум $f(x_0)$, ако $f(x) \geq f(x_0)$;
- казваме, че имаме локален максимум $f(x_0)$, ако $f(x) \leq f(x_0)$.

Забележка!

Ако функцията $f(x)$ има локален екстремум в дадена точка x_0 , то стойността на $f(x_0)$ е максимална или минимална в сравнение със стойностите на точките в околност на x_0 , но не и в сравнение с всички нейни функционални стойности.

Теорема на Ферма (Необходимо условие за съществуване на локален екстремум):

Ако функцията $f(x)$ има локален екстремум в x_0 и е диференцируема в същата точка, то $f'(x_0) = 0$.

Доказателство:

Нека $x = x_0$ и $f(x)$ има локален максимум $f(x_0)$. От дефиницията за производна знаем, че $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Следователно съществува лява граница $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ и тя е равна на $f'(x_0)$. Понеже $f(x_0)$ е локален максимум, следователно $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Ако $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$. Откъдето получаваме, че $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$. (1)

Аналогично, ако разгледаме дясната граница, то $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ и $f'(x_0) \leq 0$. (2)

От (1) и (2) следва, че $f'(x_0) = 0$.

Ако приемем, че $f(x_0)$ е локален минимум, се доказва по аналогичен начин. ■

Теорема на Рол:

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a; b]$, диференцируема в отворения интервал $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува такава точка $c \in (a; b)$, че $f'(c) = 0$.

Теорема на Лагранж (Теорема за крайните нараствания):

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a; b]$ и диференцируема в $(a; b)$, то съществува точка $c \in (a; b)$, за която е изпълнено $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказателство:

Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a; b]$ и диференцируема в $(a; b)$. Разглеждаме функцията $g(x) = f(x) - kx$, където $k = \text{const}$ и е такова число, че $g(a) = f(a) - ka = f(b) - bx = g(b)$. Ако разгледаме средните две равенства $f(a) - ka = f(b) - bx$, получаваме, че $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Имаме, че $g(a) = g(b)$ и от теоремата на Рол следва, че съществува точка $c \in (a; b)$ такава, че $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - k = 0 \Rightarrow f'(c) = k \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Критерии за монотонност

Теорема за растене и намаляване на функция:

Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала $(a; b)$ и непрекъсната в $[a; b]$.

Тогава:

- 1) Ако $f'(x) < 0$ за $\forall x \in (a; b)$, то $f(x)$ е строго намаляваща в $(a; b)$;
- 2) Ако $f'(x) = 0$ за $\forall x \in (a; b)$, то $f(x) = \text{const}$ в $(a; b)$;
- 3) Ако $f'(x) > 0$ за $\forall x \in (a; b)$, то $f(x)$ е строго растяща в $(a; b)$;

Доказателство:

- 1) Нека x_1 и x_2 са в интервала $(a; b)$, $x_1 < x_2$ и $f'(x) < 0$ за $\forall x \in (a; b)$. Ако $c \in (x_1; x_2)$, то от теоремата на Лагранж получаваме $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f(x)$ е строго намаляваща в $(a; b)$;
- 2) Ако $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{const}$, поради табличните производни;
- 3) Нека x_1 и x_2 са в интервала $(a; b)$, $x_1 < x_2$ и $f'(x) > 0$ за $\forall x \in (a; b)$. Ако $c \in (x_1; x_2)$, то от теоремата на Лагранж получаваме $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x)$ е строго растяща в $(a; b)$

Задача 1.

Намерете интервалите на монотонност на функциите:

а) $y = 2x - 3$

Решение:

$$y' = 2 > 0 \Rightarrow \text{функцията е растяща за } \forall x$$

б) $y = -x^2 - 2x + 35$

Решение:

$$y' = -2x - 2$$

$$-2x - 2 = 0$$

$$x = -1$$

Тогава функцията е растяща за $x \in (-\infty; -1)$ и намаляваща за $x \in (-1; +\infty)$.

в) $y = \frac{x}{x+1}$

Решение:

$$y' = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ за } \forall x \neq -1$$

Тогава функцията е растяща за $\forall x \in \text{ДМ}$.

г) $y = \frac{4}{x^2+1}$

Решение:

$$y' = \frac{-2x \cdot 4}{(x^2+1)^2} = -\frac{8x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow -\frac{8x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

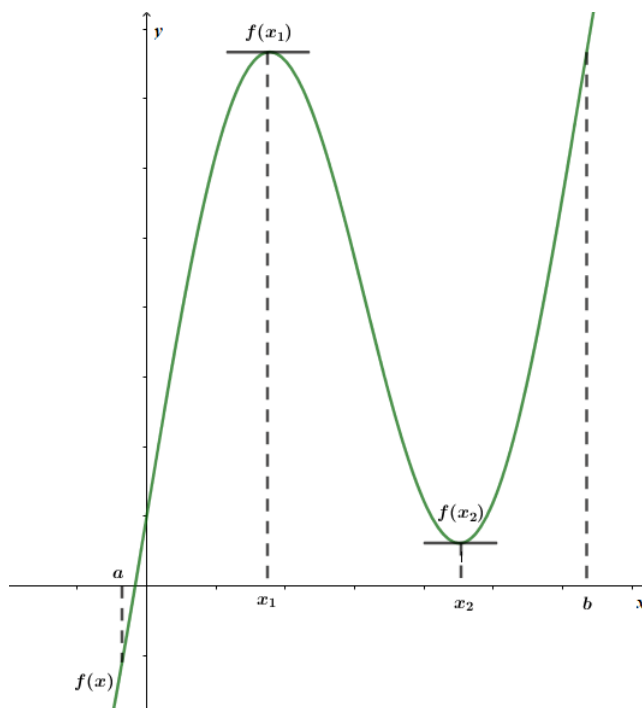
Тогава функцията е растяща за $x \in (-\infty; 0)$ и намаляваща за $x \in (0; +\infty)$.

Най-голяма и най-малка стойност на функция

Едно от приложенията на производните е, че чрез тях се определят точките (Фигура 4), в които дадена функция минава от растяща към намаляваща $(x_1, f(x_1))$ и обратното $(x_2, f(x_2))$. Точките, в които функцията променя монотонността си, се наричат точки на екстремум, а стойностите на функцията в тези точки – екстремални стойности на функцията.

От теоремата на Ферма се стига до извода, че ако $f(x)$ има локален екстремум при $x = x_0$, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не съществува. Точките, в които

$f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не съществува се наричат критични. Казваме, че теоремата е необходимо условие, защото не винаги в критичните точки имаме екстремум.

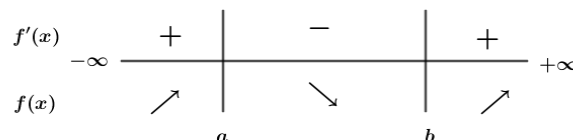


Фигура 4

Пример е $f(x) = x^3$. Първата производна е $f'(x) = 3x^2$. Тогава имаме $f'(0) = 0$ и $x = 0$ е критична точка. Но $f(0)$ не е локален екстремум, защото колкото и малка околност на тази точка да вземем, винаги ще има $x < 0, f(x) < 0$ и $x > 0, f(x) > 0$.

Друг пример за дефиницията е $f(x) = |x|$. Функцията няма производна при $x = 0$, но има локален минимум там.

Оттук можем да направим извода, че за определяне на локалните екстремуми и интервалите на монотонност, е важно да разгледаме знака на производната и къде той се променя. За целта използваме метода на



Пример с $f(x) = |x|$: $\text{sign} f'(x)$ $\begin{matrix} - & + \\ -\infty & +\infty \end{matrix}$

От тези разсъждения стигаме до теоремата за съществуване на екстремум.

Теорема:

Ако x_0 е критична точка на непрекъснатата функция $f(x)$ и съществува интервал $[a; b]$ съдържащ x_0 такъв, че:

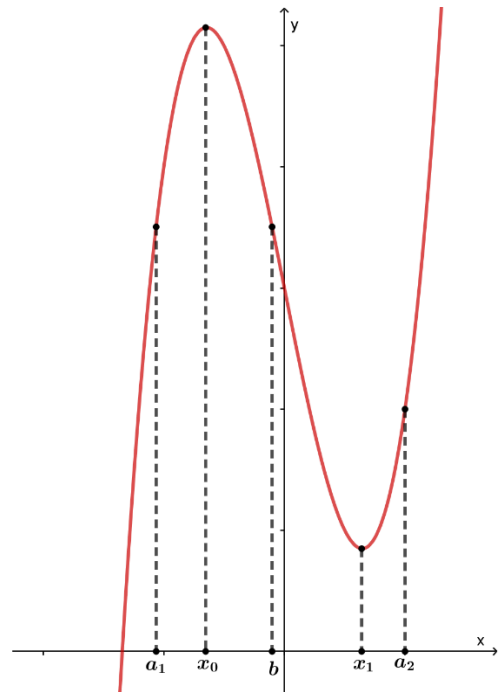
- 1) $f'(x) > 0$ при $a \leq x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x \leq b$, то в x_0 функцията има локален максимум;
- 2) $f'(x) < 0$ при $a \leq x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x \leq b$, то в x_0 функцията има локален минимум;

Доказателство:

Нека разгледаме графиката на функцията от Фигура 5.

Видно е, че $x_0 \in (a_1; b_1)$ е критична за $f(x)$, която е растяща в $[a_1; x_0)$ и намаляваща в $(x_0; b_1]$. Тогава от $a_1 \leq x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ и $x_0 \leq x \leq b_1 \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$. Следователно за всяко $x \in [a_1; b_1]$ получаваме $f(x) \leq f(x_0)$, което означава, че в точката x_0 имаме локален максимум. **(1)**

Аналогично ако разгледаме критичната точка x_1 , за която $f(x)$ е намаляваща в $[b_1; x_1)$ и растяща в $(x_1; a_2]$, то в точката x_1 имаме локален минимум. **(2)**



Фигура 5

Задача 1.

Да се намерят локалните екстремуми на функциите:

а) $f(x) = x^3 - 3x$

Решение:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ или } x_2 = -1$$

		<i>max</i>		<i>min</i>		
<i>sign f'(x)</i>	+	+	-	-	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	
		-1		1		

Имаме локален максимум $f(-1) = 2$ и локален минимум $f(1) = -2$.

б) $f(x) = x^3 + x$

Решение:

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \Rightarrow \text{няма локален екстремум.}$$

в) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$

Изследвайте знаците на първата производна на дадената функция. Анализирайте поведението на функцията в точката $x = 0$, където първата производна не е дефинирана, и направете изводи относно нейната монотонност и възможни екстремуми.

Теорема (Достатъчно условие за съществуване на локален екстремум):

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a; b)$ и x_0 принадлежи на този интервал.

Нека $f'(x)$ и $f''(x)$ съществуват в дадения интервал и $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0 .

Тогава:

- Ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то функцията $f(x)$ има локален максимум в точката x_0 ;
- Ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то функцията $f(x)$ има локален минимум в точката x_0 .

Задача 2.

Определете локалните екстремуми на функцията:

а) $y = x\sqrt{x+3}$

Решение:

ДМ: $x \geq -3$

$$y' = \sqrt{x+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}} = 0 \Rightarrow 3x+6=0 \Rightarrow x=-2$$

$$y'' = \frac{3x+12}{4(x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y''(-2) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \text{в т. } x = -2 \text{ имаме локален минимум.}$$

б) $y = \sin x + \cos x, x \in (0; 2\pi)$

Решение:

$$y' = \cos x - \sin x = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ и } x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$y'' = -\sin x - \cos x$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \text{в т. } x = \frac{\pi}{4} \text{ имаме локален максимум.}$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \text{в т. } x = \frac{5\pi}{4} \text{ имаме локален минимум.}$$

Когато определяме свойствата на дадена функция в даден интервал или в дефиниционната ѝ област, използваме локални и абсолютни екстремуми.

Определение:

Нека $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a; b)$ и точката x_0 принадлежи на този интервал.

- То ако $f(x_0) \leq f(x)$ за $\forall x \in (a; b)$, то се казва, че $f(x_0)$ е абсолютен минимум на $f(x)$ в $(a; b)$;
- То ако $f(x_0) \geq f(x)$ за $\forall x \in (a; b)$, то се казва, че $f(x_0)$ е абсолютен максимум на $f(x)$ в $(a; b)$.

Бележка!

Дефинирана и непрекъсната функция в затворен интервал има точно един абсолютен минимум и максимум, но всеки от тях може да се достига за повече от една стойност на x .

Задача 3.

Намерете положителните числа x и y , за които $x + 2y = 24$ и произведението им xy е максимално.

Решение:

От равенството $x + 2y = 24$ можем да изразим $x = 24 - 2y$. Заместваме в произведението им и получаваме $xy = (24 - 2y)y = 24y - 2y^2$.

$$(24y - y^2)' = 24 - 4y = 0 \Rightarrow y = 6$$

$(24y - y^2)'' = -4 < 0 \Rightarrow$ при $y = 6$ имаме максимум. Заместваме, за да намерим стойността на $x = 24 - 2 \cdot 6 = 12$. Така получава, че при $x = 12$ и $y = 6$ произведението им xy е максимално.

Задача 4. [17]

В $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ и $AB = 15$. Вписаната в триъгълника окръжност се допира до страната AB в точка M , като $AM = x$. За коя от стойностите на x лицето на $\triangle ABC$ е най-голямо?

Решение:

Нека P и N са допирните точки на окръжността съответно до AC и BC . Следователно $AM = AP = x$, $BM = BN = 15 - x$ и $CN = CP = y$.

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} (x + y)(15 - x + y)$$

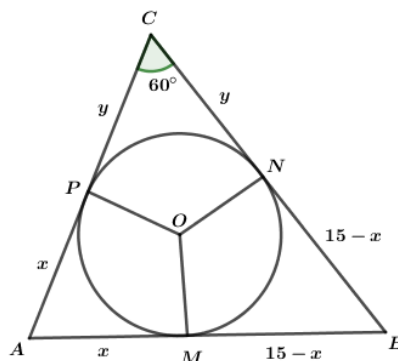
Нека приемем, че y е число и търсим производната на S спрямо x .

$$S'_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (15 - x + y) - \frac{\sqrt{3}}{4} (x + y) = 0$$

$$15 - 2x = 0 \Rightarrow x = 7,5$$

$$S''_{ABC} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

При $x = 7,5$ имаме максимум. Получихме, че при $x = 7,5$ $\triangle ABC$ има максимално лице.



Задача 5.

Дадено е уравнението $x^2 - 2(p + 1)x + p^2 - 4 = 0$, където p е реален параметър. Ако x_1 и x_2 са реални корени на уравнението, намерете най-малката стойност на $S = x_1^3 + x_2^3$.

Решение:

За да има уравнението реални корени, то

$$D = (p + 1)^2 - (p^2 - 4) \Leftrightarrow 2p + 5 \geq 0 \Leftrightarrow p \geq -2,5$$

От формулите на Виет получаваме, че $x_1 + x_2 = 2(p + 1)$ и $x_1 x_2 = p^2 - 4$. С помощта на формулите за съкратено умножение получаваме:

$$S = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2].$$

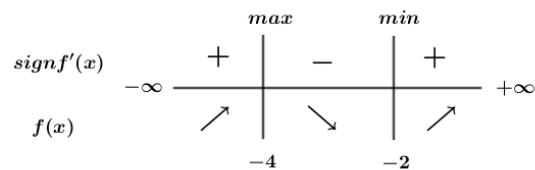
След което замествахме със стойностите получени от формулите на Виет:

$$S = 2(p + 1) \left[(2(p + 1))^2 - 3(p^2 - 4) \right] = (2p + 2)(p^2 + 8p + 16)$$

$$S' = 2(p^2 + 8p + 16) + (2p + 2)(2p + 8) = 6p^2 + 36p + 48$$

Искаме $6p^2 + 36p + 48 = 0 \Leftrightarrow p^2 + 6p + 8 = 0 \Leftrightarrow (p + 2)(p + 4) = 0, p \geq -2,5$

$$S_{min} = S(-2) = -8.$$



Изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Инфлексни точки

Нека функцията $f(x)$ е диференцируема във вътрешна точка x_0 от дефиниционната си област. Разглеждаме допирателната към графиката на функцията в точката $(x_0, f(x_0))$.

Определение:

Нека имаме функция $f(x)$ и точка x_0 . Ако съществува околност $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ и частта от графиката на $f(x)$ за всяко x от тази околност лежи:

- над допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$, то казваме, че $f(x)$ е изпъкнала в x_0 ;
- под допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$, то казваме, че $f(x)$ е вдлъбната в x_0 .

Теорема (Условие за изпъкналост):

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и има втора производна навсякъде в $[a; b]$, то:

- $f(x)$ е изпъкнала в $[a; b]$ ако $f''(x) > 0$ за $\forall x \in [a; b]$;
- $f(x)$ е вдлъбната в $[a; b]$ ако $f''(x) < 0$ за $\forall x \in [a; b]$;

Доказателство:

Нека $f''(x) > 0$ за $\forall x \in [a; b]$ и $x_1 < x_2$ са от $[a; b]$. Нека означим с $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2) - 2f(x_0)}{2} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2} + \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2} \quad (1)$$

От теоремата на Лагранж съществуват точки a_1 и a_2 такива, че $x_1 < a_1 < x_0 < a_2 < x_2$

и $f'(a_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$ и $f'(a_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$. Заместваме в (1) и получаваме, че:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= \frac{1}{2}f'(a_1)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f'(a_2)(x_2 - x_0) = \\ &= \frac{1}{2}\left[f'(a_1)\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f'(a_2)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} [f'(a_1)(x_1 - x_2) + f'(a_2)(x_2 - x_1)] = \frac{x_1 - x_2}{4} [f'(a_1) - f'(a_2)]$$

От $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ е растяща $\Rightarrow f'(a_1) < f'(a_2) \Rightarrow f'(a_1) - f'(a_2) < 0$.

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0 \Rightarrow f(x)$ е изпъкнала в $[a; b]$.

Аналогично доказваме, че при $f''(x) < 0$ функцията е вдлъбната. ■

Ако искаме да определим в кои интервали $f(x)$ е изпъкнала или вдлъбната, използваме корените на уравнението $f''(x) = 0$. Чрез тях разделяме $[a; b]$ на подинтервали, в които $f''(x)$ има постоянен знак. Точките, в които една функция преминава от изпъкнала (вдлъбната) във вдлъбната (изпъкнала), се наричат инфлексни точки.

Определение:

Инфлексна точка или още наричана точка на прегъване за функцията $f(x)$ наричаме точката, в която функцията преминава от изпъкнала във вдлъбната или обратното.

Теорема (Необходимо условие за инфлексна точка):

Нека $f(x)$ е непрекъсната в точката $x_0 \in (a; b)$ и е два пъти диференцируема в същия интервал. Ако $f''(x_0) = 0$ и $\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ при } x \in (a; x_0) \\ f''(x) < 0 \text{ при } x \in (x_0; b) \end{cases}$ или обратното, то при $x = x_0$ функцията $f(x)$ има инфлексна точка.

Забележка!

За да имаме инфлексна точка, не е нужно задължително да съществува втора производна.

Задача 1.

Да се определят интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост и да се намерят инфлексните точки на функцията $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Решение:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$sign f''(x)$	$ \begin{array}{c} - \quad \quad \quad + \\ \hline -\infty \quad \quad \quad +\infty \end{array} $
$f(x)$	$ \begin{array}{c} \text{вдлъбната} \quad \quad \text{изпъкнала} \\ \hline 1 \end{array} $

Функцията $f(x)$ е вдлъбната в интервала $(-\infty; 1)$ и изпъкнала в $(1; +\infty)$.

$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, следователно инфлексната точка е $(1, 0)$.

Задача 2.

Определете стойностите на параметъра a , за които функцията $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 6x^2 + 1$ е изпъкнала за всяко x .

Решение:

$$f'(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12ax + 12$$

За да е изпъкнала функцията за всяка стойност на x , то трябва $f''(x) > 0$ за всяко x .

$$f''(x) > 0$$

$$12x^2 + 12ax + 12 > 0$$

$$x^2 + ax + 1 > 0$$

$$D = a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2) < 0$$

Стигаме до извода, че за $a \in (-2; 2)$ функцията $f(x)$ е изпъкнала за всяка стойност на x .

Асимптоти

Дотук изследвахме поведението на една функция в затворен интервал, кога тя е диференцируема, непрекъсната и т.н. Ако функцията е дефинирана в R , то поведението ѝ при $x \rightarrow \pm\infty$ се определя от $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Нека имаме права $y = kx + n$.

Определение:

Хоризонтална асимптота на функцията $y = f(x)$ наричаме права с уравнение $y = n$ при

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = n \text{ или } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = n.$$

Определение:

Вертикална асимптота на функцията $y = f(x)$ се нарича права $x = a$, ако е изпълнено поне едно от условията:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty ; 2) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty ; 3) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty ; 4) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$

Определение:

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана при $x > a$ ($x < a$). Правата с уравнение $y = kx + n$ се нарича асимптота за графиката на функцията $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), ако $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + n)) = 0$. При $k \neq 0$ тази асимптота се нарича наклонена.

Теорема:

Правата с уравнение $y = kx + n$ е асимптота на функцията $y = f(x)$ тогава и само тогава, когато $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = n$.

Доказателство ($\Rightarrow$):

Ще разгледаме при $x \rightarrow +\infty$. Ако права с уравнение $y = kx + n$ е асимптота на $f(x)$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + n)) = 0$. Следователно $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = n$. Оттук получаваме, че

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - kx}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = n \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

Доказателство ($\Leftarrow$):

Нека съществуват границите $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = n$. Тогава

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - n) = 0$. Следователно права с уравнение $y = kx + n$ е асимптота на функцията $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Аналогично се доказва при $x \rightarrow -\infty$. ■

Задача 1.

Намерете асимптотите на функциите:

а) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Решение:

ДМ: $x \neq 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x(1-\frac{1}{x})} = 1 \Rightarrow y = 1$ е хоризонтална асимптота.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{x-1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{x-1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ е вертикална асимптота.}$$

б) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

Решение:

ДМ: $x \neq 2$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(1-\frac{2}{x})} = \pm\infty \Rightarrow$ функцията няма хоризонтална асимптота.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2}{x-2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x^2 \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = 4 \cdot (-\infty) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2}{x-2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x^2 \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = 4 \cdot (+\infty) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ е вертикална асимптота.}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2(1-\frac{2}{x})} = 1 \text{ (1)}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x(1-\frac{2}{x})} = 2 \text{ (2)}$$

От (1) и (2) следва, че $y = x + 2$ е наклонена асимптота за функцията $f(x)$.

Изследване на функции. Графика

Чрез разгледаната терминология от предходните теми вече лесно може да се изследва поведението на функция. За целта се използва следният алгоритъм, с който успяваме да открием нужната информация за построяване на графиката на функцията:

1. Определяне на дефиниционната област на функцията. Установяване на общи свойства на функцията (четност/нечетност, периодичност);
2. Определяне на поведението на функцията в краищата на дефиниционната област. Намиране на асимптоти;
3. Изследване на монотонност и намиране на локални екстремуми;
4. Изследване на интервали на вдлъбнатост и изпъкналост. Определяне на инфлексни точки;
5. Намиране на допълнителни точки, ако е нужно;
6. Попълване на таблица;

x	Записват се „интересните“ намерени стойности за x .
$f(x)$	Стойностите на функцията, за съответната променлива.
$f'(x)$	Записват се знаците на първата производна и се означава къде е растяща/намаляваща.
$f''(x)$	Записват се знаците на втората производна и се означава къде е изпъкнала/вдлъбната.

7. Чертане на графика.

Задача 1.

Да се изследва функцията и да се начертае графиката, ако:

а) $f(x) = x^3 - 12x$

Решение:

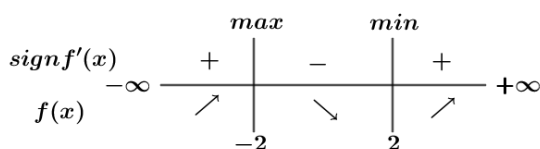
1. ДМ: $x \in (-\infty; +\infty)$

$$f(-x) = -x^3 + 12x = -(x^3 - 12x) = -f(x) \Rightarrow \text{функцията е нечетна.}$$

2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 12x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{12}{x^2}\right) = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 12x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left(1 - \frac{12}{x}\right) = +\infty \Rightarrow \text{функцията няма асимптоти.}$$

$$3. \quad f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$



$$f_{\min} = f(2) = -16$$

$$f_{\max} = f(-2) = 16$$

$$4. \quad f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ е инфлексна точка.



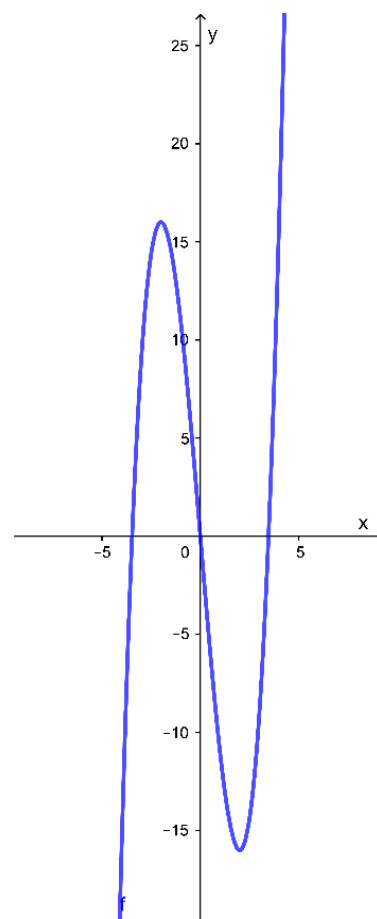
5. Няма нужда от допълнителни точки.

6. Таблица:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$								
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \nearrow 16 \searrow$	$0 \searrow -16 \nearrow \nearrow$	$+\infty$									
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

7. Графика

Графиката на функцията е симетрична спрямо началото на координатната система, което съответства и онагледява доказаната в началото нечетност.



б) $f(x) = 1 - x^3$

Решение:

1. ДМ: $x \in (-\infty; +\infty)$, не е нито четна, нито нечетна

2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 - x^3 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right) = \mp\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right) = +\infty \Rightarrow$ функцията няма асимптоти.

3. $f'(x) = -3x^2$

$sign f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$\searrow$
		0	
		$+$	$+\infty$

При $x = 0$ функцията се нулира, но в тази точка нямаме екстремум, защото производната не си сменя знака в нея.

4. $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$ е инфлексна точка.

$sign f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	изпъкнала	вдлъбната
		0	$+\infty$

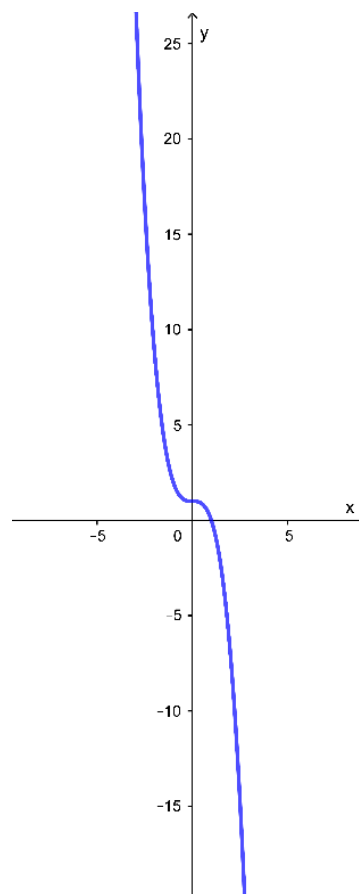
5. Допълнителни точки:

$f(1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow (1, 0)$

6. Таблица:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1 \searrow$		0	$\searrow$	$-\infty$
$f'(x)$	-----						
$f''(x)$	+++++0-----						

7. Графика



В) $f(x) = \frac{4-x}{1-4x}$

Решение:

1. ДМ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; Функцията не е нито четна, нито нечетна

2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4-x}{1-4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x\left(\frac{4}{x}-1\right)}{x\left(\frac{1}{x}-4\right)} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$ е хоризонтална асимптота

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{4}}} \frac{4-x}{1-4x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} (4-x) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1}{1-4x} = \frac{15}{4} \cdot (+\infty) = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x > \frac{1}{4}}} \frac{4-x}{1-4x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} (4-x) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1}{1-4x} = \frac{15}{4} \cdot (-\infty) = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ е вертикална асимптота.}$$

3. $f'(x) = \frac{15}{(1-4x)^2} > 0 \Rightarrow$ функцията няма екстремуми и е растяща за всяко $x \in \text{ДМ}$.

4. $f''(x) = \frac{120}{(1-4x)^3} \neq 0 \Rightarrow$ функцията няма инфлексни точки.

5. Допълнителни точки:

$$f(4) = \frac{4-4}{1-4 \cdot 4} = 0 \Rightarrow (4, 0)$$

$$f(1) = \frac{4-1}{1-4 \cdot 1} = -1 \Rightarrow (1, -1)$$

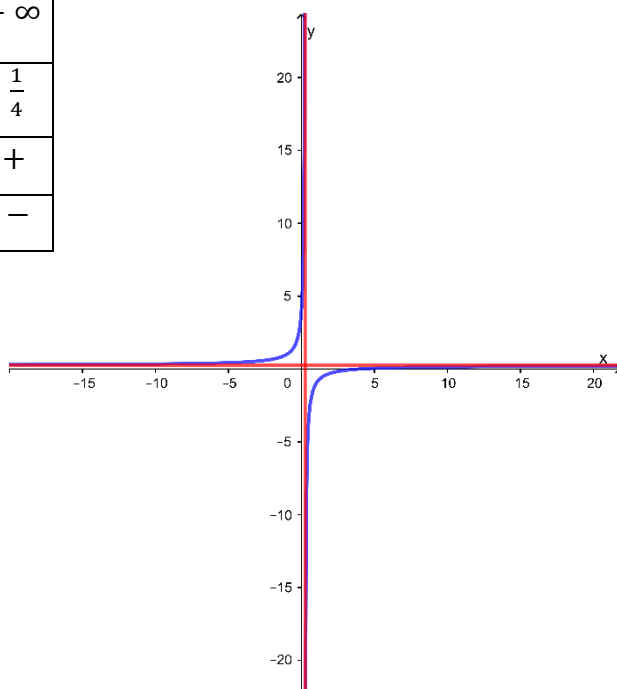
$$f(0) = \frac{4-0}{1-4 \cdot 0} = 1 \Rightarrow (0, 4)$$

$$f(-4) = \frac{4+4}{1+4 \cdot 4} = \frac{8}{17} \Rightarrow \left(-4, \frac{8}{17}\right)$$

6. Таблица:

x	$-\infty$	-4	-1	0	$\frac{1}{4}$	4	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{8}{17}$	$\nearrow$	$1 \nearrow 4$	$ \nearrow 0$	$\nearrow \frac{1}{4}$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	+	+	+	+	-	-

7. Графика:



$$г) f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Решение:

1. ДМ: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; Функцията не е нито четна, нито нечетна.

2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(1 + \frac{3}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{x})} = \pm\infty \Rightarrow$ няма хоризонтална асимптота.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(1 + \frac{3}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x})} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3 - x^2 + x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = 1$$

Получихме, че правата $y = x + 1$ е наклонена асимптота.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + 3}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 + 3) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x - 1} = 4 \cdot (-\infty) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + 3}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 + 3) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x - 1} = 4 \cdot (+\infty) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ е вертикална асимптота.}$$

$$3. f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2}; f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ и } x_2 = -1$$

$$\begin{array}{c} \text{sign } f'(x) \quad \begin{array}{c} \text{max} \quad \text{min} \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ -\infty \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad +\infty \\ \quad \quad -1 \quad \quad 3 \end{array} \end{array}$$

$$f_{\max} = f(-1) = \frac{4}{-2} = -2$$

$$f_{\min} = f(3) = \frac{12}{2} = 6$$

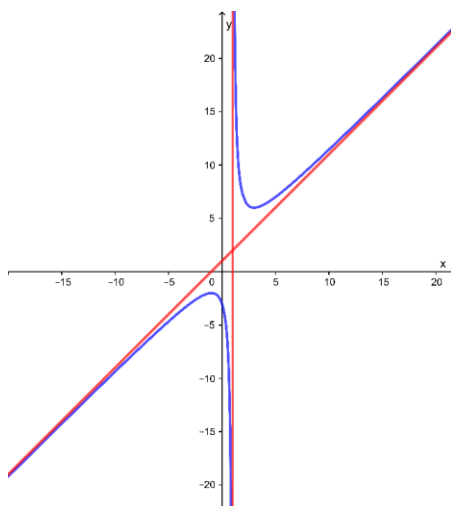
$$4. f''(x) = \frac{8}{(x - 1)^3} \neq 0 \Rightarrow \text{функцията няма инфлексни точки}$$

5. Няма нужда от допълнителни точки.

6. Таблица:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$1 \nearrow \nearrow \nearrow$	$-2 \searrow$	$ \searrow \searrow \searrow$	$6 \nearrow \nearrow \nearrow$	1
$f'(x)$	$+++$	$0--$	$---$	$+0++$	$++$
$f''(x)$	$-----$	$++++$	$++++$	$++++$	$++$

7. Графика



Задача 2.

Определете броя на решенията на уравнението:

а) $x^3 - x = 1$

Решение:

Нека $f(x) = x^3 - x$ и $g(x) = 1$. За да открием броя на общите решения на функциите, трябва да намерим пресечните точки на техните графики.

Функцията $f(x) = x^3 - x$ е дефинирана за всяко x и е нечетна. Решаваме уравнението $x^3 - x = 0$ и намираме пресечните точки с абсцисната ос: $(0, 0)$, $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f_{\max} = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$f_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

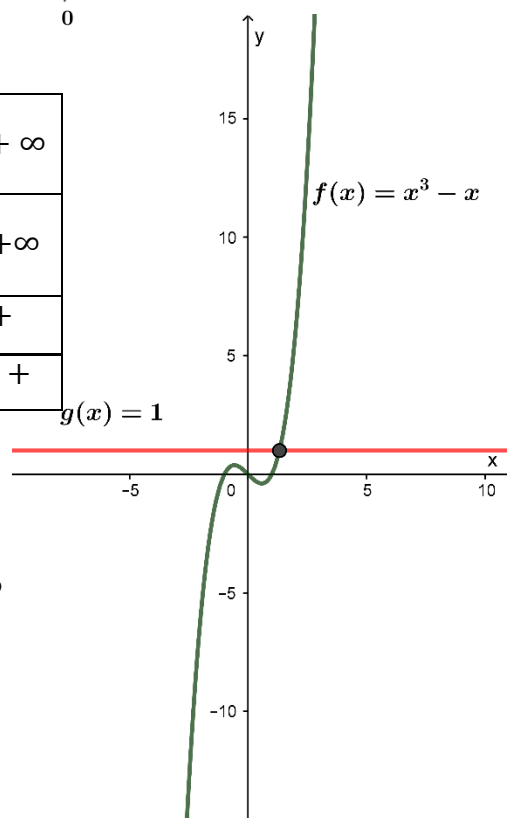
$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ е инфлексна точка.

$$\begin{array}{c} \text{sign } f'(x) \quad \begin{array}{c|c|c} \text{max} & & \text{min} \\ + & - & + \\ \hline \nearrow & \searrow & \nearrow \\ x_2 & & x_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} -\infty \\ +\infty \end{array} \\ f(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sign } f'' \quad \begin{array}{c|c} - & + \\ \hline \text{вдлъбната} & \text{изпъкнала} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} -\infty \\ +\infty \end{array} \\ f(x) \end{array}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow \frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow 0$	$\searrow 0$	$\searrow 0$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow +\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$



След като начертаем графиките на двете функции

се вижда, че имат 1 общо решение, т. е уравнението

$$x^3 - x = 1 \text{ има едно решение.}$$

$$б) x^4 + 3x^3 - 5x - 6 = a$$

Решение:

Нека $f_1(x) = x^4 + 3x^3 - 5x - 6$ и $f_2(x) = a$. За да открием броя на общите решения на функциите, трябва да намерим пресечните точки на техните графики.

Функцията $f_1(x) = x^4 + 3x^3 - 5x - 6$ е дефинирана за всяко x и е нито четна, нито нечетна. Ще изследваме функцията и графиката ѝ само до първата производна.

$$f_1'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{105}}{8}, x_3 = -\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{105}}{8}$$

$$f_{1_{min}} = f_1\left(-\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{105}}{8}\right) = \frac{3}{512}(35\sqrt{105} - 1049)$$

$$f_{1_{max}} = f_1(-1) = -3$$

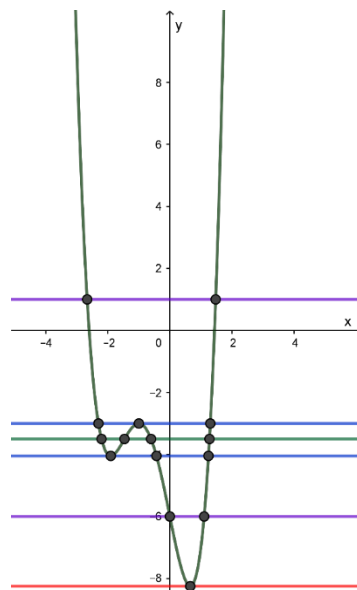
$$f_{1_{min}} = f_1\left(-\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{105}}{8}\right) = -\frac{3}{512}(35\sqrt{105} + 1049)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & min & max & min & \\ sign f'(x) & - & + & - & + \\ f(x) & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \end{array} \\ -\infty \quad x_2 \quad x_1 \quad x_3 \quad +\infty \end{array}$$

След като вече имаме графиките, то стигаме до следния извод за решенията на уравнението:

$$x^4 + 3x^3 - 5x - 6 = a$$

- При $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{512}(35\sqrt{105} + 1049)\right)$ няма решение
- При $a = -\frac{3}{512}(35\sqrt{105} + 1049)$ има едно решение
- При $a \in \left(-\frac{3}{512}(35\sqrt{105} + 1049); \frac{3}{512}(35\sqrt{105} - 1049)\right) \cup (-3; +\infty)$ има две решения
- При $a = \frac{3}{512}(35\sqrt{105} - 1049)$ и $a = -3$ има три решения
- При $a \in \left(\frac{3}{512}(35\sqrt{105} - 1049); -3\right)$ има четири решения



Контролни работи и анализ

За да се оцени ефективността на разработката, постигнатите цели и усвояването на знанията от учениците, бяха проведени три контролни работи:

- първата в началото на срока (началото на октомври)
- втората в средата на срока (края на ноември)
- третата в края на срока (средата на януари)

Всяка от контролните работи обхваща различни теми от разгледания трети модул.

Контролна работа №1: Вариант 1

1. Задача (2т.) Намерете производната на функцията в множеството от допустимите ѝ стойности:

$$f(x) = \frac{3}{x^2} \cdot e^{\sin^4 3x}$$

2. Задача (4т.) В кои точки от ДМ е прекъсната и в кои непрекъсната функцията:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}, & x < 0; \\ \frac{6(\sqrt{4-x} - 1)}{2x^2 - 7x + 3}, & 0 \leq x < 3, \quad x \neq \frac{1}{2}; \\ \frac{3(2-x)}{2x-1}, & x \geq 3. \end{cases}$$

3. Задача Дадена е функцията:

а) **(2т.)** $f(x) = x^2 - 2x + 5$. Намерете уравнение на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката с абсциса $x = 2$ и определете вида на ъгъла, който тя сключва с положителната посока на абсцисната ос;

б) **(2т.)** $g(x) = \frac{x^2}{2x+1}$. Намерете координатите на точките от графиката на функцията $g(x)$, за които допирателната е успоредна на абсцисната ос и уравнения на тези допирателни;

в) **(2т.)** $q(x) = \ln(x+3)$. Намерете координатите на точката от графиката на функцията $q(x)$, за която допирателната е успоредна на правата с уравнение $y = x + 6$ и уравнението на тази допирателна;

(За бонус точки направете примерен чертеж)

Контролна работа №1: Вариант 2

1. **Задача (2т.)** Намерете производната на функцията в множеството от допустимите ѝ стойности:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{e^{x^2}}{x}}$$

2. **Задача (4т.)** В кои точки от ДМ е прекъсната и в кои непрекъсната функцията:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2}, & x < 0; \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{1 - x}, & 0 \leq x < 1; \\ \frac{1 - 7x^2}{x - 3}, & x \geq 1, \quad x \neq 3. \end{cases}$$

3. **Задача** Дадена е функцията:

- а) (2т.) $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Намерете уравнения на допирателните към графиката на функцията $f(x)$ в точките, в които тя пресича абсцисната ос;
- б) (2т.) $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$. Намерете координатите на точките от графиката на функцията $g(x)$, за които допирателната е успоредна на абсцисната ос и уравнения на тези допирателни;
- в) (2т.) $q(x) = \sqrt{2x - 4}$. Намерете уравнение на допирателната към графиката на функцията $q(x)$, която сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл 45° ;
(За бонус точки направете примерен чертеж)

Контролна работа №1: Вариант 3

1. **Задача (2т.)** Намерете производната на функцията в множеството от допустимите ѝ стойности:

$$f(x) = \frac{\log_3(x^2 + 1)}{2e^{\sqrt{x}}}$$

2. **Задача (4т.)** В кои точки от ДМ е прекъсната и в кои непрекъсната функцията:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}, & x < 0; \\ \frac{6(\sqrt{4-x}-1)}{2x^2 - 7x + 3}, & 0 \leq x < 3, \quad x \neq \frac{1}{2}; \\ \frac{3(2-x)}{2x-1}, & x \geq 3. \end{cases}$$

3. **Задача** Дадена е функцията:

- а) (2т.) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Намерете уравнения на допирателните към графиката на функцията $f(x)$ в пресечните ѝ точки с правата $= 2x - \frac{3}{2}$;
- б) (2т.) $g(x) = e^{(x+1)^2}$. Намерете координатите на точките от графиката на функцията $g(x)$, за които допирателната е успоредна на абсцисната ос и уравнения на тези допирателни;
- в) (2т.) $q(x) = 2x^2 - x + 4$. Намерете уравнение на допирателната към графиката на функцията $q(x)$, която сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл 135° ; (За бонус точки направете примерен чертеж)

Контролна работа №1: Вариант 4

1. **Задача (2т.)** Намерете производната на функцията в множеството от допустимите ѝ стойности:

$$f(x) = \log_6 \sqrt{\sin^3 2x}$$

2. **Задача (6т.)** В кои точки от ДМ е прекъсната и в кои непрекъсната функцията:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2}, & x < 0; \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{1-x}, & 0 \leq x < 1; \\ \frac{1 - 7x^2}{x-3}, & x \geq 1, \quad x \neq 3. \end{cases}$$

3. Задача Дадена е функцията:

- а) (2т.) $f(x) = \frac{1}{3x+1}$. Намерете уравнение на допирателната към графиката на функцията в точката с абсциса $x = 2$ и определете вида на ъгъла, който тя съдържа с положителната посока на абсцисната ос;
- б) (2т.) $g(x) = x + \frac{1}{x+1}$. Намерете координатите на точките от графиката на функцията $g(x)$, за които допирателната е успоредна на абсцисната ос и уравненията на тези допирателни;
- в) (2т.) $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$. Намерете координатите на точката от графиката на функцията $q(x)$, за която допирателната е успоредна на правата с уравнение $y = 3x + 5$ и уравнението на тази допирателна;
(За бонус точки направете примерен чертеж)

Контролната работа включва три задачи:

- Задачи 1 и 2 – свързани с материал от Модул 2, изучаван в 11. клас и надграден в 12. клас.
- Задача 3 – върху темата „Геометричен смисъл на понятието производна. Допирателни. Допирателни към криви от втора степен“.

Учениците разполагат с 40 минути за работа. Оценяването се извършва по формулата:

$$2 + \frac{\text{бр. точки}}{3}$$

Целта на контролната работа е да се провери подготовката на учениците по основни знания и умения, необходими за пълноценното усвояване на съдържанието от Модул 3.

Резултати:

Учениците показаха много добри постижения.

- Най-големи затруднения възникнаха при Задача 1, свързана с намиране на производна от вида $f(g(x))'$. Това показва необходимост от допълнително затвърждаване на уменията за прилагане на правилото за диференциране на сложна функция.
- Най-добри резултати бяха отчетени при Задача 2, където се изисква определяне на непрекъснатост на функция и намиране на граница на функция. Това демонстрира добра подготовка по фундаментални понятия от математическия анализ.

Анализът на резултатите от проведената контролна работа показва, че тя успешно изпълнява своята диагностична функция, като позволява да се очертаят както силните страни в подготовката на учениците, така и конкретните области, в които се наблюдават дефицити. От една страна, постигнатите резултати свидетелстват за наличие на стабилни знания и умения по основни теми, което представлява предпоставка за ефективно надграждане на учебното съдържание. В същото време контролното оценяване очертава области, в които учениците биха имали полза от допълнителна педагогическа подкрепа и методическо насочване.

По-специално, резултатите показват затруднения при усвояването и коректното прилагане на правилото за производна на сложна функция. Този пропуск следва да бъде разглеждан като критичен, тъй като овладяването на посоченото правило представлява фундаментална предпоставка за адекватното решаване на задачи, свързани с производни, и за успешното усвояване на по-сложните концепции, заложи в рамките на Модул 3. В този смисъл акцентът върху задълбочаването на знанията и уменията в тази област може да бъде разглеждан като необходима стъпка за постигането на устойчиви учебни резултати и за подпомагане на последващото развитие на математическата компетентност на учениците.

Контролна работа №2: Вариант 1

- 1. Задача (2т.)** Определете интервалите на монотонност, локалните екстремуми и вида им, най-голямата и най-малката стойност на функцията:

$$g(x) = \sin 3x - \frac{3\sqrt{3}}{2}x, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$$

- 2. Задача (2т.)** Определете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост и инфлексните точки на функцията:

$$f(x) = \ln(x - 1) - x$$

- 3. Задача (2т.)** Да се направи пълно изследване на функцията, резултатите да се обобщят в таблица и да се начертае графиката на функцията и нейните асимптоти:

$$f(x) = \frac{5 + 3x}{2 - 4x}$$

4. Задача (2т.) Дадена е функцията

$$f(x) = x^3 - px^2 + \frac{3p+10}{3}x + 1, \text{ където } p \text{ е параметър.}$$

Да се намерят стойностите на p , за които функцията има локален минимум и максимум. Да се построи графиката на функцията при $p = 3$.

Контролна работа №2: Вариант 2

1. Задача (2т.) Определете интервалите на монотонност, локалните екстремуми и вида им, най-голямата и най-малката стойност на функцията:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}}$$

2. Задача (2т.) Определете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост и инфлексните точки на функцията:

$$f(x) = \ln(x^2 - x)$$

3. Задача (2т.) Да се направи пълно изследване на функцията, резултатите да се обобщят в таблица и да се начертае графиката на функцията и нейните асимптоти:

$$f(x) = \frac{4-x}{1-4x}$$

4. Задача (2т.) Дадена е функцията $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (m-6)x + m^3 + m^2 - 9m$, където m е реален параметър. Да се намерят стойностите на m , за които функцията има локален минимум и максимум. Да се построи графиката на функцията при $m = 1$.

Контролната работа включва четири задачи, които са обвързани с материала от Тема 1 „Приложение на математическия анализ“ от материала в Модул 3. Учениците разполагат с 80 минути за работа. Оценяването се извършва по формулата: $2 + \frac{\text{бр. т.}}{2}$

Целта на контролната работа е да провери постигнати ли са основните заложи теми в учебната програма:

- Да се формира представа за ролята на аксиоматиката при дедуктивното структуриране на теорията
- Да се формира понятийният апарат на съответната тема и да се формират умения за прилагане на определения и на теореми при обосноваване на изводи

- Да се формират умения за моделиране на различни ситуации (реални или теоретични), умение за изследване на модели и интерпретиране на получени резултати
- Да се формира представа за единността на математиката чрез геометризация на алгебрата и алгебризация на геометрията

Учениците показаха отлични резултати. Описанията и решенията на задачите бяха структурирани и подредени. По-голямата част от учениците без затруднения изследваха функция и демонстрираха умения за намиране на локалните екстремуми, изследване непрекъснатост и монотонност, структурирано обобщаване на данни и чертаене на графика на функция. Най-добри резултати показаха при зад. 3, а най-слаби – при зад. 4. Повечето ученици бяха преодолели пропуските при намиране на производна на сложна функция.

В обобщение, може да се заключи, че контролната работа изпълни своята цел – тя показва добро ниво на подготовка и потвърди, че учениците притежават необходимите знания и умения за пълноценното усвояване на тема 1 от Модул 3 и продължаване към работата със следващите теми.

Контролна работа №3: Вариант 1

- 1. Задача (1,5т.)** Околен ръб на правилна триъгълна пирамида има дължина b и съдържа ъгъл α с равнината на основата. Определете α така, че обемът на пирамидата да е най-голям.
- 2. Задача (1,5т.)** $\triangle ABC$ е правоъгълен с катети $AC = 4$ и $BC = 3$. Намерете повърхнината и обема на тялото, получено при завъртането на триъгълника около права, през точка A , перпендикулярна на хипотенузата.
- 3. Задача (1т.)** Всички ръбове на правилна триъгълна призма са равни на a . Да се намери обемът на описаното около призмата кълбо.

Контролна работа №3: Вариант 2

- 1. Задача (1,5т.)** Правилна триъгълна призма има обем V . Намерете дължината на основния ръб, при която лицето на пълната повърхнина на призмата е възможно най-малко.
- 2. Задача (1т.)** Успоредник със страни 5 cm и 7 cm и остър ъгъл 30° се върти около голямата си страна. Намерете лицето на повърхнината и обема на полученото тяло.

3. **Задача (1,5т.)** Намерете радиуса на описаната около правилна четириъгълна пирамида сфера, ако основният ръб е a , а двустенният ъгъл при основата е α .

Контролна работа №3: Вариант 3

1. **Задача (1,5т.)** Околната стена на правилна четириъгълна пирамида има лице 2 cm^2 и сключва с равнината на основата ъгъл α . Определете α така, че обемът на пирамидата да е най-голям.
2. **Задача (1,5т.)** Тъпоъгълен $\triangle ABC$ с тъп ъгъл при върха B има страни $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$ и височина $AA_1 = 2\text{ cm}$. Намерете лицето на повърхнината и обема на тялото, получено при завъртането на триъгълника около права през страната BC .
3. **Задача (1т.)** Около права триъгълна призма с основни ръбове 3 cm , 4 cm и 5 cm и обем 18 cm^3 е описана сфера. Намерете радиуса на сферата.

Контролна работа №3: Вариант 4

1. **Задача (1,5т.)** Околната повърхнина на правилна четириъгълна пирамида е 2 cm^2 и основният ъгъл е α . Намерете стойността на α , за която обемът на пирамидата е максимален.
2. **Задача (1,5т.)** Ромб със страна 2 cm и остър ъгъл 60° е завъртян около права минаваща през връх на остър ъгъл и перпендикулярна на страна. Намерете лицето на повърхнината и обема на полученото тяло.
3. **Задача (1т.)** В сфера е вписан правоъгълен паралелепипед с измерения 4 cm , 8 cm и 12 cm . Намерете радиуса на сферата.

Контролната работа включва три задачи, които са обвързани с материала от Тема 2 – „Геометрични модели“ от материала в Модул 3. Времето за работа е 40 минути. Оценяването се извършва по формулата „2 + броя точки“.

Резултатите от проведената контролна работа показваха, че значителна част от учениците постигнаха заложените в учебната програма на МОН цели и демонстрираха висока степен на усвояване на съответното учебно съдържание. В началото се наблюдаваха определени затруднения, свързани с решаването на екстремални задачи в равнината. Постепенно, в резултат на системните упражнения и целенасочената методическа подкрепа, тези трудности бяха преодоляни и учениците успяха без

съществени проблеми да направят преход към решаването на аналогични задачи в пространството.

Анализът на резултатите от контролната работа потвърди, че по-голямата част от учениците са усвоили в значителна степен съдържанието на Тема 2, като показват стабилно развитие на своите геометрични умения. В същото време бе установено, че стереометрията остава област, в която са необходими допълнителни упражнения и целенасочена работа за постигане на още по-висока степен на усвояване и увереност при решаване на задачи.

Обобщавайки резултатите от експерименталното изследване, може да се заключи, че съдържанието на Модул 3 е адекватно избрано за обучението в 12. клас в профилираната подготовка. Учениците не само усвояват успешно материала, но и демонстрират способност за аргументирано разсъждение върху различни типове задачи, като прилагат разнообразни стратегии за решаване. Учебното съдържание е в пълно съответствие с изискванията и целите на МОН. Създават се предпоставки за разработване на проекти с използване на съвременни софтуерни приложения за анализ на функции и за практическо прилагане на инструментите на математическия анализ.

Заклучение

Промяната в организацията и съдържанието на обучението по математика от 2016 г., която въведе двуетапна структура и профилирана подготовка чрез четири модула в 11. и 12. клас, както и нейното влияние върху учениците и учителите, са разгледани в настоящата дипломна работа.

След проведеното изследване, може да се твърди, че предварително зададената хипотеза е потвърдена. Възможността за съсредоточаване върху профилиращите предмети в по-осъзнат етап от развитието на учениците създава условия за по-добра мотивация и по-пълноценно учене. Поставените теми отговарят на съвременните тенденции в математическото образование и дават възможност на учениците да развиват както чисто предметни знания, така и широк спектър от когнитивни и приложни умения. Направената промяна е полезна и целесъобразна за учениците от втори гимназиален етап, обучаващи се в профил математика. В процеса на реализиране на учебната програма на практика среща определени трудности, свързани със структурата на преподаване и с подбора на учебни материали.

Чрез изпълнението на поставените задачи бе постигната и целта – да се покажат положителните и отрицателните страни на новата учебна програма за профилираща подготовка по математика:

- Положителни страни:
 - Учениците избират профилиращ модул в по-зряла възраст
 - Учениците изучават главно предмети по избраните от тях профилиращи и се специализират по-добре в тях
 - Учебната програма за профил математика е съпоставима с програмите в чуждестранните училища
- Отрицателни страни:
 - Изучават се успоредно задължителният и профилиращият материал, но липсва синхрон между тях
 - Изучават се Модул 1 и Модул 2 в 11. клас паралелно, което затруднява пълноценното им усвояване
 - Част от учителите нямат необходимата професионална подготовка за преподаване, което адаптирано към училищното ниво, на учебното

съдържание от профилираната подготовка, понеже материалът застъпва университетските курсове

- Отбелязва се липса на подходящи учебни материали, чрез които да се осъществи обучението

Също така на практика бе анализирана и ефективността на Модул 3 „Приложение на математическия анализ“ от профилираната подготовка по математика. Разработеният учебен материал отговаря на изискванията на МОН, усвоява се успешно от учениците, развива умения за разсъждение и разнообразни решения и позволява интегриране на учебни проекти и софтуерни приложения в процеса на обучение.

Сравнението с учебните програми на Индия и Италия показва, че подобреният учебен материал е напълно съпоставим със съдържанието, използвано в чуждестранните училища. Включените теми са близки по сложност и значимост до тези, които се разглеждат в престижни гимназии и училища в чужбина, което е свидетелство, че българската програма подготвя учениците на конкурентоспособно ниво. Разлика се открива при реализиране на програмите и насочеността им.

За подобряване на учебната програма и реализирането ѝ биха били от полза следните промени:

1. Да се синхронизира задължителният и профилираният учебен материал в 11. и 12. клас.
2. Модул 1 и Модул 2 да не се изучават успоредно, а всеки модул в отделен срок и самостоятелно.
3. Модул 4 може да бъде заменен с по-достъпно за учениците съдържание, което да улесни обучението през втория срок на 12. клас. Подходящи алтернативи са линейното оптимизиране или основи на неопределените интегрални, които намират широко приложение във висшето образование.
4. Да се организират допълнителни обучения за учители по математика, които преподават в профил математика, с цел методически насоки и подходи за преподаване на съответния материал в гимназиален курс.
5. Да се изготвят учебници и учебни помагала със задачи с нарастваща трудност, които да се апробиран ефективно преди да бъдат публикувани за масово използване от учителите.

6. Да се изготви система за обмяна на добри практики, които да са в полза както за действащите учители, така и за бъдещи такива.

В перспектива се очертава необходимостта от системно разработване и апробиране и на останалите три модула, заложи в профилираното обучение по математика. Подобен подход би позволил да се създаде цялостна и последователна методическа рамка, която да обхваща целия учебен цикъл и да осигури условия за надеждна проверка на ефективността на програмата в нейната пълнота. В съчетание с вече проведеното експериментално изследване върху Модул 3, бъдещите апробации ще предоставят възможност за по-обективна и комплексна оценка на съдържателните и методическите акценти в програмата, както и за идентифициране на нейните силни страни и потенциални зони за оптимизация.

Получената емпирична база би могла да послужи като основа за формулиране на конкретни предложения за усъвършенстване както на учебното съдържание, така и на методическите подходи за неговото преподаване. В резултат ще се създадат по-благоприятни условия за надграждане на знанията и уменията на учениците в дългосрочен план, като се гарантира тяхното постепенно и устойчиво развитие. По този начин профилът „Математика“ ще изпълни в по-голяма степен своята цел – да подпомогне формирането на задълбочено теоретично мислене, в съчетание с приложно-аналитични компетентности, които са ключови както за успешното продължаване на обучението във висшето образование, така и за реализацията в съвременната научна и професионална среда.

Библиография

- [1] МОН, „Регионално управление на образованието - София-град,“ 11 8 2016. [Онлайн]. Available: https://ruo-sofia-grad.com/wp-content/uploads/2021/10/4_0-1.pdf. [Отваряно на 2023].
- [2] Министерство на образованието и науката (МОН), „Министерство на образованието и науката - учебни програми за профилирана подготовка,“ 2018. [Онлайн]. Available: <https://www.mon.bg/nfs/2018/12/profil-math.pdf>. [Отваряно на 2021].
- [3] МОН, „РУО София,“ 30 11 2015. [Онлайн]. Available: https://ruo-sofia-grad.com/wp-content/uploads/2023/11/5_0.pdf. [Отваряно на 2025].
- [4] „Shcolaro database,“ [Онлайн]. Available: <https://www.scholaro.com/db/countries/india/education-system>. [Отваряно на 2023].
- [5] Autonomous organisation under the MoE, „Central Board of secondary school,“ [Онлайн]. Available: https://cbseacademic.nic.in/web_material/CurriculumMain26/SrSec/Maths_SrSec_2025-26.pdf. [Отваряно на 2025].
- [6] MoE of India, „NCERT Official Syllabus Portal,“ [Онлайн]. Available: <https://ncert.nic.in/>. [Отваряно на 2025].
- [7] M. Valentine, „Expatica for internationals - The education system in Italy,“ [Онлайн]. Available: <https://www.expatica.com/it/education/children-education/the-education-system-in-italy-79700/#secondary-italy>. [Отваряно на 2023].
- [8] M. Bergamini, G. Barozzi и A. Trifone, Matematica. blu 2.0, Zanichelli Editore, 2020.
- [9] Liceo “Marconi” Colferro, „Educazion and Scuola,“ [Онлайн]. Available: https://www.marconicolferro.edu.it/wp-content/uploads/2021/12/MATEMATICA_SCIENTIFICO_4_anno.pdf?utm_source=chatgpt.com. [Отваряно на 2025].

- [10] M. d. e. d. Merito, „Liceo Scientifico “Einstein” Rimini,“ [Онлайн]. Available: <https://www.einsteinrimini.edu.it/wp-content/uploads/2024/12/PROGRAMMAZIONE-MATEMATICA-2024-2025.pdf>. [Отваряно на 2025].
- [11] Д. Гълъбова и М. Сидерова, Математика 12. клас профилирана подготовка, издателство ВЕДИ, 2021.
- [12] П. Джаков, Р. Малеев, Р. Леви и С. Троянски, Диференциално и интегрално смятане. Функции на една променлива, София: изд. Транспринт, 2017.
- [13] Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски и Е. Стоименова, Математика 12. клас профилирана подготовка, издателска къща "Анубис", 2002.
- [14] Г. Паскалев и З. Паскалева, Математика 12. клас - Профилирана подготовка, София: Архимед - ПП, 2002.
- [15] И. Тонов, И. Шаркова, М. Христова, В. Златилов и Е. Каращранова, Математика 12. клас профилирана подготовка; Практическа математика, издателство "Регалия 6", 2021.
- [16] Шуменски университет, „Шуменски университет "Епископ Константин Преславски" - ФМИ,“ [Онлайн]. Available: http://info.fmi.shu-bg.net/skin/tfiles/vm2_008.pdf. [Отваряно на 2023].
- [17] ФМИ, „Факултет по математика и информатика,“ 2019. [Онлайн]. Available: <https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/FNkuooiZMMVquor>. [Отваряно на 2023].
- [18] Министерство на образованието и науката, „РУО София - профилирана подготовка,“ 26 08 2016. [Онлайн]. Available: https://ruo-sofia-grad.com/wp-content/uploads/2021/10/4_0-1.pdf. [Отваряно на 2025].

Приложение

Анкета за въвеждането на модули по математика

Здравейте, колеги,

Анкетата е относно въвеждането на модули в профилираното обучение в XI и XII клас. Анкетата е анонимна и е с цел намиране на допълнителна информация за разработка на дипломна работа.

* Required

1. В кой обучителен етап преподавате? *

- ☐ Начален етап
- ☐ Прогимназиален етап
- ☐ Гимназиален етап

2. Колко години стаж имате като учител по математика? *

- ☐ под 10 години
- ☐ между 10 и 20 години
- ☐ между 21 и 30 години
- ☐ над 30 години

3. Съгласни ли сте с промяната на програмата и въвеждането на модули в профилираната подготовка по математика в гимназиален етап? Моля обосновайте отговора си. *

4. Какво, според вас, трябва да се промени в учебната програма за паралелките с профил математика в гимназиален етап? *

5. Преподавали ли сте по новия учебен план в паралелка математика? *

- ☐ Да, преподавал съм до XII клас
- ☐ Да, но все още не съм преподавал в XI и XII клас
- ☐ Не

6. Чувствахте ли се подготвени за преподаването на учебния материал в XI и XII клас? *

- ☐ Да, напълно подготвен се чувствах
- ☐ Средно, имаше материал, които се наложи да преговоря
- ☐ Не, изпитах големи затруднения с материала

7. Изпитахте ли затруднения в преподаването по новата учебна програма? *

- ☐ Да, изпитах големи затруднения
- ☐ Да, но минимални
- ☐ Не изпитах затруднения

8. Къде изпитахте затруднения? *

- ☐ Намиране на учебни материали и помагала
- ☐ Подготовката за часовете
- ☐ Other

9. Кой модул в XI и XII клас Ви бе най-труден за преподаване? *

- ☐ Модул 1 - "Геометрия"
- ☐ Модул 2 - "Елементи на математическия анализ"
- ☐ Модул 3 - "Практическа математика"
- ☐ Модул 4 - "Вероятности и анализ на данни"

10. Смятате ли, че има достатъчно учебни материали и помагала? *

- ☐ Да
- ☐ Не

11. Какви и кои учебни материали и помагала използвахте? *

12. Как учениците възприеха материала? *

- ☐ Беше им лесно.
- ☐ В началото трудно, но с повече упражнения се справиха.
- ☐ Средно, имаше ученици, които се справиха и такива, които не се.
- ☐ Много им беше трудно да усвоят материала.

13. Кой модул в XI и XII клас бе най-лесен за учениците? *

- ☐ Модул 1 - "Геометрия"
- ☐ Модул 2 - "Елементи на математическия анализ"
- ☐ Модул 3 - "Практическа математика"
- ☐ Модул 4 - "Вероятности и анализ на данни"

14. Кой модул в XI и XII клас затрудни най-много учениците? *

- ☐ Модул 1 - "Геометрия"
- ☐ Модул 2 - "Елементи на математическия анализ"
- ☐ Модул 3 - "Практическа математика"
- ☐ Модул 4 - "Вероятности и анализ на данни"

This content is neither created nor endorsed by Microsoft. The data you submit will be sent to the form owner.