Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Факултет по математика и информатика

Катедра: Обучение по математика и информатика

Специалност: Иновации и мултидисциплинарност в задължителната подготовка по математика, компютърно моделиране и информационни технологии

ДИПЛОМНА РАБОТА

за придобиване на образователно-квалификационна степен „магистър“

Тема на дипломната работа:

Евристични стратегии при решаване на задачи по математика, изискващи доказателство за съществуване

Дипломант: Мария Минчева Томова-Кортезова, *ф.н.* IMI3000038

Научен ръководител: проф. д-р Иван Тонов, доц. д-р Таня Тонова, *катедра* „Обучение по математика и информатика“

Съдържание

I. Анотация

Проблемът за съществуването заема централно място при изграждането на математическо доказателство. В училищния курс по математика и в извънкласната сфера се срещат редица задачи, чиято логическа структура изисква изграждане на доказателство за съществуване. Те са важен инструмент в процеса на обучение за формирането на аналитично и критично мислене, за разбирането на пълнотата на математическото доказателство, за развиването на умения за работа с модели и изграждане на явни и абстрактни конструкции. Така разглеждането на задачи, изискващи доказателство за съществуване, се явява средство за реализиране на ключови дългосрочни резултати от математическото обучение.

Настоящата дипломна работа се фокусира върху изследването на средствата и евристичните стратегии при решаване на задачи по математика, изискващи доказателство за съществуване и методическите подходи, с които учителят може да направлява учениците в евристичния процес и да фасилитира изследователската им дейност. Основните поставени цели са следните:

- Систематизиране на типовете задачи, които изискват доказателство за съществуване.
- Систематизиране и изследване на математическите средства и инструменти, които се използват в изграждането на доказателство за съществуване.
- Систематизиране и изследване на евристичните стратегии при изграждане на доказателство за съществуване и/или конструиране на пример.
- Структуриране на набор от задачи от училищния курс и извънкласната сфера, принадлежащи към следните области: Теория на числата, Комбинаторика, Геометрия, Алгебра и анализ, които изискват доказателство за съществуване.
- Изследване на математическите средства и евристичните стратегии, приложими при решаването на представените задачи и ролята им в учебния процес.

Съдържанието, представено в настоящата дипломна работа, може да бъде използвано от учители, които работят с ученици с изявен интерес към математиката и от ученици в прогимназиален и гимназиален курс, които се подготвят за явяване на математически състезания или имат интерес към изследователска дейност в областта на математиката. Тематиката, проблематизирана в настоящата разработка, може да бъде отправна точка за дискусия по отношение на целенасоченото интегриране на повече задачи, изискващи изграждане на доказателство за съществуване, от гледна точка на уменията за анализ, критичност, моделиране, рефлексия и аргументация, които решаването им развива.

II. Един анимационен сериал и няколко задачи

На 19.08.2010 г. е излъчен епизодът “The Prisoner of Benda” от американския анимационен сериал Futurama. Създател и продуцент на сериала е Matt Groening, а сценарист е Ken Keeler, който е възпитаник на Harvard University и University of Stanford и има докторска степен по Приложна математика от Harvard University. Сюжетната линия в епизода “The Prisoner of Benda” е свързана с машина за размяна на съзнания – когато две тела влязат в машината, съзнанията в тези тела се разменят помежду си. Двама от героите на сериала – Amy и Professor Farnsworth, влизат в машината и разменят съзнанията си. Недоволни от новите си тела, те влизат отново в машината в опит всеки да възстанови собственото си тяло, но се оказва, че след като машината е приложила размяна за една двойка тела, тя не може да приложи нова размяна върху същата двойка тела. Търсейки начин да се върнат в телата си, Amy и Professor Farnsworth въвличат и други персонажи в размените, в резултат на което съзнанията на голяма група герои се оказват в чуждо тяло. Отчаяна, Amy възкликва: „О, не! Възможно ли е всички да се върнат към нормалното?“, а Professor Farnsworth отговаря: „Не съм сигурен. Опасявам се, че ще трябва да използваме … математика!“.

Задача (Futurama’s Theorem): Машина може да разменя съзнания по следния начин: ако в машината влязат две тела, съзнанията в тези тела се разменят помежду си. Ако машината извърши размяна за дадена двойка тела, тя не може да извърши нова размяна за същата двойка тела. Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 2$, за група от n души, които са извършвали произволни размени с помощта на машината, е възможно всички съзнания да се върнат в правилните тела чрез използване на още двама допълнителни души, които не са участвали в предишни размени.

Решение: Доколкото всяка пермутация може да се представи като произведение на независими цикли, ще конструираме алгоритъм, който възстановява правилната принадлежност на съзнание към тяло за всички участници в един такъв цикъл от $k \leq n$ души. Нека за всяко $1 \leq i \leq k$ човекът с тяло B_i има съзнание m_i. Нека двамата допълнителни души, които не са участвали в размените, имат тела X и Y и съответно съзнания x и y. Подреждаме телата от цикъла $\left(B_1B_2...B_k\right)$, така че съзнанието m_k да е в тялото B_1, m_1 да е в B_2, m_2 да е в B_3, …, m_{k-1} да е в B_k. Сега поставяме в машината телата B_1 и X. След тази операция тялото X временно ще „съхранява" съзнанието m_k, а съзнанието x е в тялото B_1. Поставяме в машината телата Y и B_k, така че след операцията m_{k-1} вече е в Y, а y е в B_k. Поставяме в машината Y и B_{k-1}, така че след тази операция m_{k-1} вече е в B_{k-1} (с което тази двойка тяло-съзнание вече е възстановена), а в тялото Y вече е m_{k-2}. Сега поставяме в машината телата Y и B_{k-2}, така че след операцията ще възстановим двойката B_{k-2}, m_{k-2}, а в Y ще попадне съзнанието m_{k-3}. Продължавайки по аналогичен начин да поставяме в машината последователно телата B_{k-3}, B_{k-4}, …, B_1, всяко в двойка с Y, ще постигнем положение, при което във всяко от телата B_1, B_2, …, B_{k-1} е позиционирано правилното съзнание. При това, в тяло B_k е съзнанието y, а в тяло X е m_k. Поставяме в машината телата B_k и X и така вече съзнанието m_k е в тялото B_k, а y е в X. С това всички тела от този цикъл $\left(B_1B_2...B_k\right)$ вече са с правилното съзнание, а съзнанията на X и Y са разменени. Ако няма друг цикъл, разменяме X и Y и с това вече всяко съзнание е в правилното тяло. Ако пък има друг цикъл на разменени тела, прилагаме същата процедура за него, независимо че X и Y са с разменени съзнания. В края на прилагането на алгоритъма за този цикъл всички съзнания, включително x и y, вече ще са в правилните тела. Така прилагайки алгоритъма за всички цикли винаги ще получаваме конфигурация, в която съзнанията на хората от съответния цикъл са в правилните тела, а телата X и Y евентуално са с разменени помежду си съзнания – ако това се случи след последния цикъл, ги поставяме в машината и сме готови. Ще отбележим, че при приложения алгоритъм всяко тяло от първоначалното множество от n души влиза в машината или с X, или с Y и при това не влиза в машината два пъти с някое от тези тела, което гарантира, че всяка размяна може да бъде извършена. Ако се налага размяна между телата X и Y, я извършваме еднократно след завършване на алгоритъма за последния цикъл.

Сценаристът на сериала Ken Keeler създава теоремата, пишейки сценария за епизода "The Prisoner of Benda", за да гарантира, че за сложната логическа ситуация, породена от безразборната размяна на съзнания, съществува логически коректна развръзка. В свои интервюта той споделя, че се е погрижил за популяризацията на теоремата, за да провокира у младите хора интерес към математиката. За него като математик е било важно не просто да зададе в авторитарен стил щастлив завършек на епизода, възползвайки се от правото на сценариста да измисли дори развръзка, която противоречи на законите на логиката. Keeler е искал след като сюжетът възстановява оригиналната принадлежност на съзнание към тяло, това действително да се съгласува със законите на логиката и аксиоматиката, зададена чрез сюжета. Освен това е искал младите зрители на сериала да осъзнаят колко логически съществена е тази съгласуваност и че начинът да се гарантира исканото е да се приложи математическият апарат.

Описаната ситуация е свързана с проблема за съществуването, който е част от много математически задачи. В случая доказваме, че съществува алгоритъм, който може при всяко първоначално разположение на съзнанията в телата да постигне каноничното разположение, ако включим в конфигурацията още двама независими души. Как конструираме този алгоритъм? Как може задачи като тази да бъдат интегрирани в учебната дейност? Какви други въпроси и нови задачи поражда задачата?

Контекстът, свързан с популярен анимационен сериал, е достатъчно добра предпоставка за фокусиране вниманието на учениците по време на работата в разширената подготовка по математика. Дали обаче представеното по-горе доказателство е достъпно за всяка една аудитория? Разбира се, този въпрос е реторичен. Повечето ученици рязко биха изгубили внимание, ако се сблъскат директно с това абстрактно доказателство, а малкото, които биха могли да го възприемат, вероятно биха достигнали до него и сами. Епизодът “The Prisoner of Benda” задава проблемна ситуация, в която учениците лесно могат да бъдат въвлечени и оптимално от гледна точка на съхранението на интереса им е да бъдат поставени в ролята на изследователи, които трябва да намерят решение на проблема – да анализират, да експериментират с различни алгоритми, да търсят активно варианти самостоятелно да достигнат до алгоритъм. За ученици от прогимназиален етап това може да се реализира с разглеждане на частен случай за трима или четирима души, може да се разиграе дори като игра или да се търси друго съответствие (например размяната да е между ученици и имена и всеки да носи табелка с „новото“ си име за повече нагледност). Учениците на по-високо академично ниво могат да работят директно по търсене на алгоритъм в общия случай. Може да се работи в екипи, така че да се създаде творческа среда и в процеса на комуникация да се вербализират онези ключови въпроси, чиито отговори постепенно водят до решението. Тук учителят може да насочва, да подпомага, да фасилитира евристичния процес и накрая да обобщи резултата от работата. Може да се изработи и схема, демонстрираща работата на алгоритъма в конкретен частен случай, за да бъде той проследен и осмислен по-добре от всички. Следващата схема например показва стъпките при $n = 4$. На всяка стъпка на първия ред са телата, а на втория – съзнанията в съответните тела. В жълто са оцветени колонките за телата, на съзнанията в които предстои размяна в съответната стъпка. Двойките, за които правилното съответствие тяло-съзнание е възстановено, са оцветени в синьо.

стъпка 1:

B_1	B_2	B_3	B_4	X	Y
m_4	m_1	m_2	m_3	x	y

стъпка 2:

B_1	B_2	B_3	B_4	X	Y
x	m_1	m_2	m_3	m_4	y

стъпка 3:

B_1	B_2	B_3	B_4	X	Y
x	m_1	m_2	y	m_4	m_3

стъпка 4:

B_1	B_2	B_3	B_4	X	Y
x	m_1	m_3	y	m_4	m_2

стъпка 5:

B_1	B_2	B_3	B_4	X	Y
x	m_2	m_3	y	m_4	m_1

стъпка 6:

B_1	B_2	B_3	B_4	X	Y
m_1	m_2	m_3	y	m_4	x

стъпка 7:

B_1	B_2	B_3	B_4	X	Y

m_1	m_2	m_3	m_4	y	x

Съвсем естествено възниква въпросът необходими ли са външни помощници, за да се възстановят правилните съответствия. Така проблемът, зададен чрез Futurama Theorem, може да се анализира от гледна точка на оптимизиране броя на хората, които не са участвали в първоначалните размени, но са необходими, за да се гарантира възможността за възстановяване на правилните съответствия между тяло и съзнание.

Задача: Машина може да разменя съзнания по следния начин: ако в машината влязат две тела, съзнанията в тези тела се разменят помежду си. Ако машината извърши размяна за дадена двойка тела, тя не може да извърши нова размяна за същата двойка тела. Дадена е група от $n \geq 2$ души, които са извършвали произволни размени с помощта на машината. Какъв е най-малкият брой хора извън тази група, които са необходими, за да е сигурно, че има начин всички съзнания да се върнат в правилните тела?

Решение: Нека разгледаме група от двама души с тела B_1 и B_2 и съзнания съответно m_1 и m_2. Очевидно ако машината е разменила съзнанията им, първоначалното положение не може да се възстанови без помощта на друг човек. Да допуснем, че един човек с тяло X и съзнание x е достатъчен за размяната. Нека без ограничение на общността на първия ход X влиза в машината с B_1. Така след този ход съзнание m_2 вече е в тяло X, а съзнание x – в тяло B_1. Сега единственият възможен ход е между телата X и B_2 и след него съзнание m_2 ще е в тяло B_2, а съзнание m_1 – в тяло X. Тъй като всяка двойка тела вече е била в машината, няма други позволени ходове, а съзнанията на телата X и B_1 са разменени, така че един външен човек не е достатъчен, за да гарантира възможността за възстановяване на първоначалното положение. От доказателството на Futurama Theorem следва, че двама души винаги са достатъчни, така че това е и най-малкият брой външни хора, при който първоначалната конфигурация винаги може да бъде възстановена.

Поставяйки естествено възникващия въпрос за минималния необходим брой независими от първоначалните размени хора, горната задача изисква покриването на два логически компонента: доказателство, че даден брой хора (в случая двама) е винаги достатъчен и аргументация, че всеки по-малък брой хора не може да гарантира възстановяване на правилното съответствие между тела и съзнания. В случая първият компонент съвпада с доказателството на теоремата и се реализира чрез конструиране на алгоритъм, който винаги може да постигне желаната цел. За доказателството на втория използвахме контрапример, който чрез конкретен частен случай за брой хора с разменени съзнания демонстрира невъзможността за възстановяване на първоначалното положение без външни помощници или само с един такъв. Тази логическа структура на решението категоризира задачата като задача от типа „пример и оценка“ и по същество тя задава още една гледна точка към съществуването и възможните оптимизации на алгоритъма, свързан с проблема, върху който се базира Futurama Theorem.

В някои региони на България е популярно т. нар. „христосване“ – това е традиция, свързана с Великден, при която всеки от дадена група хора си избира различно оцветено великденско яйце. Хората в групата разменят яйцата си по двойки, като всеки двама души трябва да направят поне една размяна помежду си и накрая всеки трябва да върне обратно първоначално избраното си яйце. Традицията на христосването задава комбинаторна ситуация, която по същество много прилича на тази от епизода “The Prisoner of Benda” на сериала Futurama. Тук няма забрана за повторна размяна за една и съща двойка, но пък всички операции стават единствено в рамките на първоначалната общност от хора. От гледна точка на така въведените условия логичната оптимизация на процеса по възстановяване на първоначалните яйца е по отношение на броя размени, с които това се случва. Така естествено възниква следващата задача, която попада в категорията „пример и оценка“ от списанието Crux Mathematicorum (vol. 37, no.8, Problem 3689).

Задача: Нека $n \geq 2$ е естествено число. В група от n души, всеки има различно Великденско яйце. Казваме, че двама души от групата са извършили размяна, ако разменят помежду си яйцата, които имат в съответния момент. Намерете най-малкия възможен брой размени $E(n)$, при който е възможно всяка двойка хора да извърши поне една размяна и накрая всеки човек да финишира с първоначалното си яйце.

Решение: Ще означим хората с P_1, P_2, …, P_n и първоначалните им яйца съответно с e_1, e_2, …, e_n. Тъй като всяка двойка хора трябва да извърши поне една размяна, то броят размени е поне $\frac{n(n-1)}{2}$, колкото са и двойките. Ще докажем, че общият брой размени трябва да е четен. Ще наречем двойка яйца „инверсна“, ако яйцето с по-голям номер (спрямо другото яйце) е при човек с по-малък номер (спрямо човека, при когото е другото яйце). Означаваме с T броя на инверсните двойки яйца. В началото $T = 0$. Всяка размяна на яйцата на съседни по номер хора променя T с 1. Освен това всяка размяна е еквивалентна на нечетен брой размени между хора със съседни номера, така че всяка размяна променя четността на T. Тъй като в края условието изисква $T = 0$, то броят на всички размени трябва да е четен. Твърдим, че $E(n) = \frac{n(n-1)}{2}$, ако $\frac{n(n-1)}{2}$ е четно и $E(n) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, ако $\frac{n(n-1)}{2}$ е нечетно.

Очевидно при група от $n = 2$ души имаме $E(2) = 2$.

Нека сега $n = 3$. Можем да изпълним условието на задачата чрез 4 размени по следния начин:

първоначално:	P_1, e_1	P_2, e_2	P_3, e_3
след размяна 1:	P_1, e_2	P_2, e_1	P_3, e_3
след размяна 2:	P_1, e_3	P_2, e_1	P_3, e_2
след размяна 3:	P_1, e_3	P_2, e_2	P_3, e_1
след размяна 4:	P_1, e_1	P_2, e_2	P_3, e_3

Така наистина $E(3) = 4$.

Разглеждаме случая $n = 4$. Можем да изпълним условието с 6 размени по следния начин:

първоначално:	P_1, e_1	P_2, e_2	P_3, e_3	P_4, e_4
след размяна 1:	P_1, e_2	P_2, e_1	P_3, e_3	P_4, e_4
след размяна 2:	P_1, e_2	P_2, e_1	P_3, e_4	P_4, e_3
след размяна 3:	P_1, e_4	P_2, e_1	P_3, e_2	P_4, e_3
след размяна 4:	P_1, e_4	P_2, e_3	P_3, e_2	P_4, e_1
след размяна 5:	P_1, e_1	P_2, e_3	P_3, e_2	P_4, e_4
след размяна 6:	P_1, e_1	P_2, e_2	P_3, e_3	P_4, e_4

Така наистина $E(4)=6$.

Ще конструираме алгоритъм, използвайки индукция по броя на хората *n*.

Нека *n* е кратно на 4 и разполагаме с начин да изпълним условието на задачата с точно $E(n)=\frac{n(n-1)}{2}$ (което е четно число) размени. Тъй като това число съвпада с минималния брой размени, то при алгоритъма от индукционната хипотеза всеки извършва по точно една размяна с всеки от останалите. Нека добавим към групата нови двама души, *A* и *B*. За да докажем индукционното предположение в този случай, доколкото $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ е нечетно, е достатъчно да намерим алгоритъм, при който всеки от така получената група от $n+2$ -ма души извършва по една размяна с всеки и има още една допълнителна размяна. В алгоритъма от индукционното предположение за *n* души въвеждаме следните модификации:

- Ако *k* е нечетно, всяка размяна от вида P_kP_{k+1} се заменя с последователност от следните три размени: AP_k, P_kP_{k+1} и $P_{k+1}A$, която има същия ефект и в края на която *A* е със собственото си яйце.
- Ако *k* е четно, всяка размяна от вида P_kP_{k+1} се заменя с последователност от следните три размени: BP_k, P_kP_{k+1} и $P_{k+1}B$ (тук събирането е по модул *n*), която има същия ефект и в края на която *B* е със собственото си яйце.
- Накрая *A* и *B* извършват две последователни размени помежду си.

Така конструираме алгоритъм, базиран на този от индукционната хипотеза, при който всеки извършва размяна с всеки точно по един път, освен *A* и *B*, които извършват две размени помежду си. Така получаваме, че $E(n+2)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}+1$ за $n\equiv 0(\operatorname{mod}4)$.

Нека сега $n\equiv 2(\operatorname{mod}4)$. Според индукционното предположение целта може да бъде постигната с $\frac{n(n-1)}{2}+1$ по алгоритъм, при който всеки разменя с всеки по веднъж с изключение на двама души (нека са *A* и *B*), които извършват две размени помежду си и това са последните две размени от алгоритъма. Нека добавим към групата двама нови души – *C* и D. За новата група от $n+2$ -ма души прилагаме алгоритъма от индукционната хипотеза, въвеждайки следните модификации:

- Ако k е нечетно, всяка размяна от вида P_kP_{k+1} се заменя с последователност от следните три размени: CP_k, P_kP_{k+1} и $P_{k+1}C$, която има същия ефект и в края на която C е със собственото си яйце.
- Ако k е четно, всяка размяна от вида P_kP_{k+1} се заменя с последователност от следните три размени: DP_k, P_kP_{k+1} и $P_{k+1}D$ (тук събирането е по модул n), която има същия ефект и в края на която D е със собственото си яйце.
- Вместо извършването на две размени между A и B, извършваме последователността от 6 размени между хората A, B, C и D, използвана при разглеждането на случая $n=4$.

С това е конструиран алгоритъм, който реализира целта на задачата и $E(n+2)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ за всички $n\equiv 2(\bmod 4)$.

Нека сега n е четно и можем да постигнем целите на задачата с някой от описаните по-горе алгоритми. Добавяме допълнителен човек A към групата. Конструираме алгоритъм за новата група от $n+1$ души, модифицирайки алгоритъма за n души по следния начин: ако k е нечетно, всяка размяна от вида P_kP_{k+1} се заменя с последователност от следните три размени: AP_k, P_kP_{k+1} и $P_{k+1}A$, която има същия ефект и в края на която A е със собственото си яйце. Така накрая всеки е възстановил собственото си яйце и всеки е извършил по точно една размяна с всеки от останалите (с изключение на допълнителната размяна в случая $n\equiv 2(\bmod 4)$). Доколкото за четното n числата $\frac{n(n-1)}{2}$ и $\frac{(n+1)n}{2}$ са от една и съща четност, то за нечетното $n+1$ получаваме, че броят на необходимите размени е точно $\frac{(n+1)n}{2}$, ако това число е четно, и $\frac{(n+1)n}{2}+1$, ако $\frac{(n+1)n}{2}$ е нечетно. Така доказваме възможността за постигане на поставената в условието цел, конструирайки алгоритъм чрез прилагане на индукция.

Разгледаните задачи са свързани с въпроси, възникващи по естествен начин в рамките на конкретни ситуации – част от художествената или автентична реалност. Самото формулиране на тези въпроси е свързано със съмнението за възможността това, което искаме да постигнем, да се гарантира при определените параметри. Това е и основата на критичното мислене, формирането на което е една от основните дългосрочни цели на образователния процес. Първият етап от реализирането на тази цел е именно в изграждането на умение да се разпознават проблемите и да се формулират консистентни въпроси, които да ги адресират. Следващите етапи са свързани с формирането на умения да се намират отговорите на вече поставените въпроси и този процес изисква много повече време, работа и систематичност. Математическият апарат както в тези, така и в много други задачи, се оказва средството за достигане до отговора на въпроси, касаещи съществуването. Стратегиите за изграждане на доказателство за съществуване както от гледна точка на евристичния подход, така и на използвания теоретичен инструментариум и технически средства, могат да бъдат изключително разнообразни. Ефективната работа с тях изисква както наличие на конкретни знания и опит, така и на съобразителност и учебната работа по математика се стреми да развива паралелно и синергично тези направления – усвояване на теория и стандартни алгоритми, акумулиране на арсенал от средства и изграждане на умения за намиране на решения в нестандартна и непозната среда.

Доказателствата за съществуване са важен елемент от обучението по математика, тъй като те развиват разбирането на природата на математическото знание, стимулират аналитичното и творческо мислене, изграждат умения да се разсъждава не просто алгоритмично, а концептуално. Според изследователи като Schoenfeld и Mason, Burton & Stacey (2010) интегрирането на доказателства за съществуване в учебната работа развива метакогнитивните умения, защото поражда рефлексия върху собственото мислене. Процесът на разработване на доказателство за съществуване и конструиране на пример или контрапример следва етапите на изследователската дейност и развива епистемологично разбиране за това как математическият апарат създава ново знание (Hanna & de Villiers, 2012). Тези характеристики определят работата по разработване на доказателство за съществуване като потенциално средство за формиране на умения за анализ, аргументация, критичност и рефлексия, които са важни цели на образователния процес.

III. Типове задачи, стратегии и инструменти

Доказателството за съществуване заема централно място в математическите задачи. По същество то се свежда до аргументиране, че съществува поне един обект с даден набор от свойства. В зависимост от конкретната задача и особеностите на условието, този обект може да бъде експлицитно посочен или явно конструиран, но наличието му може да бъде доказано и неявно чрез прилагане на косвен подход. Courant и Robbins разграничават следните видове доказателства за съществуване:

- Конструктивни доказателства – доказателства, при които в явен вид се конструира експлицитен пример за обект с търсените свойства.
- Неконструктивни доказателства – доказателства, при които се аргументираме, че обектът трябва да съществува, без директно да го посочваме; пример за този вид доказателства е прилагането на логическа дихотомия.
- Доказателства чрез допускане на противното – при тях доказваме, че обектът съществува чрез косвен механизъм, намирайки логическо противоречие в хипотезата за противното, допускаща, че такъв не съществува.

Средствата за решаване на задача, чиято логическа структура изисква доказателство за съществуване, могат да се разделят в две основни направления – математически инструментариум и евристични стратегии. Умението да се решават задачи изисква опит и знания – познаване на теоретични факти, на класически задачи, на стандартни алгоритми и подходи, както и достатъчно добра техника, която да позволява тези знания да бъдат успешно имплементирани на конкретно ниво. Ключов при решаването на задачи е и евристичният феномен, свързан със самия процес на достигане до подходящите средства за изграждане на решение. Евристичният поглед към механизма на изграждане на математическо доказателство се фокусира върху „мисловните операции и стратегиите, които хората използват, когато търсят решение“ (Тонов).

В следващия списък представяме математически инструменти и стратегии, които често се прилагат в решаването на задачи, свързани с доказателство за съществуване от сферата на учебното съдържание и извънкласната работа и подготовката за състезания по математика в прогимназиална и гимназиална възраст. За да бъде изградено умението тези средства да бъдат прилагани с гъвкавост и творчество при преодоляването на евристичните бариери, те трябва да се овладеят до степен, в която са дълбоко интериоризирани като знания и е преодоляна индивидуалната стъпка от „знам“ до „мога“, която реализира и качествена разлика на познавателното равнище.

- Метод на математическата индукция.
- Допускане на противното.
- Създаване на явна конструкция.
- Пълно изчерпване на възможностите.
- Принцип на Дирихле.
- Принцип на крайния елемент.
- Инварианти и моноварианти.
- Прилагане на класически тъждества и неравенства.
- Прилагане на класически теореми.
- Прилагане свойствата на характерни геометрични конфигурации.
- Въвеждане на взаимноеднозначно съответствие.
- Комбинаторно броене.
- Оцветяване, блоково и модулно оцветяване.
- Модулна аритметика.

При създаване на доказателство за съществуване, процесът на анализиране на условието и търсене на подход за решаване обикновено започва с дефинирания като „позитивно мислене“ от Zeitz етап, при който си представяме, че сме намерили обект с търсените характеристики и анализираме свойствата му. Това по същество представлява достигане до набор от необходими условия за съществуването на търсения обект, които могат да функционират като средство за формулиране на хипотеза и евристичен избор на инструментариум за решаване на задачата. Следващият етап от решението е този на намирането на достатъчно условие за съществуване, който е и ядрото на логическата структура на решението. Ще изброим някои евристични техники, които често се явяват успешно средство за достигане до концепция за изграждане на решението.

- Експериментиране в частни случаи.

- Разглеждане на аналогична на поставената задача за по-малки (или по-удобни от определена гледна точка) стойности на параметрите в нея.
- Разглеждане на обобщена форма на задачата.
- Преформулиране на задачата.
- Анализиране на гранични случаи.
- Аналогия с позната задача.
- Използване на динамични геометрични системи.
- Използване на системи за компютърна алгебра.
- Метод на водещия въпрос.

Ще отделим специално внимание на последната евристична стратегия в така изложения списък - прилагане на метода на водещия въпрос („guiding question method"). В обучението по математика и решаването на задачи това е класически подход, при който не се представя директно решение на задача, а се използва последователност от насочващи въпроси, които да направляват учениците в изследователския процес и да ги подпомогнат да достигнат самостоятелно до решението. В контекста на проблемно-базираното обучение методът на водещия въпрос може да се прилага творчески и чрез импровизация с посочване на подходящи контрапримери, аналогии, чрез насочване към откриване на хипотези и модели. Когато учителят управлява синхронния учебен процес, той може да интегрира в работата си метода на водещия въпрос като начин да създаде диалогична среда, в която учениците, търсейки отговор на поставените от него въпроси и взаимодействайки помежду си на база даваните от тях отговори, да извършват дейности с изследователски характер и да достигат до решения на задачи, дори с висока степен на сложност. Изключително важна стъпка по пътя на развиването на умения за самостоятелно решаване на задачи, е изграждането на способността методът на водещия въпрос да се прилага на индивидуално ниво от самия ученик, като диалог със себе си. Формирането на усет да си задаваш правилните въпроси, е първата стъпка към намирането на отговорите им. Адекватният метакогнитивен поглед към процеса на решаване на задачи, изразяващ се в наличието на трезва преценка за качествата на изгражданото решение и умение да се откриват пропуски в него, е реализация на критичното мислене в работата по математика. Как се научаваме да прилагаме метода на водещия въпрос при решаването на задачи? Ако съществуваше еднозначно приложим алгоритъм за това, вероятно всички ученици щяха да са го усвоили. Учителят може да подпомогне учениците си в това отношение, интегрирайки този подход в работата си с тях и насърчавайки ги да го прилагат, когато работят в екипи. Тук ценна е и самостоятелната работа – трупането на опит както от решаване на задачи, така и от запознаване с авторови решения, формира база данни, взаимодействието с която при среща с нови задачи, генерира аналогии, въпроси, хипотези и индуцира продуктивен диалог със себе си.

Спектърът на математическите задачи, чието решение изисква доказателство за съществуване, е изключително широк. В следващия списък ще изброим някои категории задачи, чиято логическа структура изисква такова.

- Задачи за съществуване

Това са задачи, чието условие в явен вид изисква да се докаже, че даден обект съществува. Формулировката им може да използва конструкциите „докажете, че съществува…“, „намерете…“ или сходни. Логическата структура на тези задачи изисква посочване на поне един пример за обект с исканото свойство или косвено доказателство за наличието на такъв. Задачите, формулирани като въпрос „съществува ли …“, понякога също се свеждат до задачи за доказателство за съществуване. При решаването им обаче съществен е и евристичният момент за правилно формулиране на хипотеза относно това дали обектът съществува или не.

- Задачи за съществуване и единственост

Логическата структура на решението на задачите от тази категория изисква да се покрият два компонента – конструиране, явно или неявно, на обект с исканите свойства, и доказателство за единствеността му. Обикновено последното се реализира чрез допускане на противното. Учениците срещат доказателства за съществуване и единственост в някои от теоремите, изучавани в училищния курс.

- Задачи за намиране на всички обекти с дадено свойство

Решаването на задачи от тази категория изисква построяване на всички обекти, които притежават исканите свойства и доказателство, че няма други такива. В зависимост от конкретната задача, евристичният акцент може да пада върху самото конструиране на обектите или върху аргументацията, че не съществуват други, отговарящи на условията.

- Задачи от типа „пример и оценка“

Логическата структура, известна като пример и оценка, е свързана с широк кръг от задачи в математиката. По същество решаването им изисква покриването на два логически компонента – пример за конструкция, която отговаря на условията на задачата и оценка, т.е. доказателство, че тази конструкция не може да бъде подобрена по определен критерий, обикновено за екстремалност. Често при първите си срещи със задачи от тази категория учениците дори не осъзнават необходимостта от покриването и на двата компонента и ролята на учителя е да акцентира върху значението на всеки един от тях за достигането до логически пълно, завършено и консистентно решение. Често срещана грешка е да се построи пример, след което да се покаже, че параметрите на този пример не могат да се подобрят, и да се пропусне възможността да има примери, построени по друг метод, при които величината да бъде подобрена. Задачите за пример и оценка често са свързани с определена комбинаторна постановка, но технически могат да принадлежат към всяка една област. В някои от задачите доказателството на оценката може да бъде лесно, а конструирането на примера да е предизвикателство. В други е възможно примерът да е очевиден (с цялата субективност на това понятие), а аргументирането, че той не може да бъде подобрен, да е трудно. Понякога примерът може да насочи към път за оценката или обратното. Оттук произтича и една специфична евристична стратегия при решаване на задачи от категорията – използването на взаимодействието между примера и оценката. Тя се състои в това след като е преодолян по-лесния от двата основни компонента на решението (пример и оценка), той да бъде използван, за да се изгради концепция за справяне с другия.

- Задачи за намиране на контрапример

Когато формулировката на една задача съдържа конструкцията „винаги ли е изпълнено, че …“ или логически сходна, това очертава две хипотези за изграждане на решението. Ако посоченото твърдение е винаги вярно, трябва да го докажем. Ако пък то не е винаги изпълнено, е достатъчно да посочим частен случай, който го опровергава. Решението на задачите, които попадат във втората хипотеза, изисква конструиране на контрапример. Контрапримерите често се използват в учебната дейност за добро разбиране на необходимите и достатъчно условия. Когато учениците се запознават с нова теорема, най-илюстративният начин да им бъде демонстрирана значимостта на всички условия, които трябва да са налице, за да попаднем в хипотезата на съответната теорема, е да срещнат примери, в които някои от условията са нарушени и съответно твърдението на теоремата не е изпълнено. В зависимост от спецификите на аудиторията и съдържанието, тези примери могат да бъдат експлицитно посочено от учителя или учениците да бъдат оставени да достигнат до тях самостоятелно. Работата по търсене и конструиране на контрапримери изисква добро познаване на материята и развива метакогнитивното знание и критичното мислене. Изследователският ѝ характер я прави подходяща и за работа в екип и разработване на проекти.

В следващите глави ще представим задачи от училищния курс и състезанията по математика в ученическа възраст, чието решение изисква доказателство за съществуване. Всяка от задачите е придружена от коментарен текст, свързан с евристичните стратегии и математическите средства, приложени за достигане до решението.

IV. Теория на числата

Задача 1: Докажете, че съществуват безкрайно много прости числа.

Решение: Да допуснем, че съществуват краен брой прости числа; нека те са p_1, p_2, …, p_n за някое $n \in \mathbb{N}$. Разглеждаме числото $m = p_1 p_2 ... p_n + 1$. Тъй като m дава остатък 1 при деление на всяко от числата p_1, p_2, …, p_n, то m няма прост делител. Доколкото $m > p_i$ за всяко $i = 1,...,n$, то m е просто число, по-голямо от всяко от числата p_1, p_2, …, p_n. Противоречието доказва, че съществуват безкрайно много прости числа.

Коментар: Разгледаната задача е един от първите факти от теорията на числата, с които учениците могат да се запознаят веднага след като се срещнат с дефиницията за просто число. Въпросът „Колко са простите числа? Краен брой или безкрайно много?“ възниква съвсем естествено и провокира интерес, тъй като е свързан с проблема за безкрайността, който сам по себе си е достатъчно интригуващ. Тази класическа задача предоставя възможност още в прогимназиален курс учениците да се докоснат до концепцията за доказателство за съществуване чрез конструиране на пример и прилагане на техниката на допускане на противното. При това тук примерът е неявен и абстрактен и в същото време напълно достъпен в когнитивен план. Изследването на задачи като тази в учебната работа от една страна запознава учениците с важни математически концепции, а от друга изгражда в съзнанието им база данни от подходи и стратегии при решаване на задачи.

Класове, за които задачата е подходяща: 5, 6

Стратегии и инструменти, използвани в решението: допускане на противното

Задача 2: Докажете, че за всяко число $n \in \mathbb{N}$ съществува редица от n последователни естествени числа, сред които няма нито едно просто.

Решение: Нека $n \in \mathbb{N}$ е произволно естествено число. Нека $x = (n+1)! + 1$. Разглеждаме следната редица от n естествени числа: $x_1 = x + 1$, $x_2 = x + 2$, …, $x_n = x + n$. В нея имаме, че

$x_i = x + i = 1.2...(i+1)...(n+1)+i+1 = (i+1)(1.2....i.(i+2)...(n+1)+1)$, така че за всяко $i = 1,...,n$ е изпълнено, че $i+1/x_i$ и съответно никое от числата x_1, x_2, …, x_n не е просто.

Коментар: Решаването на задачата не изисква сериозно познаване на апарата на теорията на числата, но предполага находчивост при конструирането на редицата от последователни съставни числа. Учениците би следвало да работят самостоятелно по него. Пътят към достигане до примера минава през естествения въпрос: „Как да гарантираме, че всяко измежду фиксиран брой последователни числа не е просто?“ Тук последователността на числата е ключ към идеята за интегриране на факториел в дефиницията на членовете на редицата. След достигането до нея гарантирането на наличие на множител опира до алгебрична техника. Фактът, доказан чрез задачата, е важен и за разширяване на разбирането за прости числа, което е ключово при решаване на сложни задачи от сферата на теория на числата.

Класове, за които задачата е подходяща: 5, 6

Стратегии и инструменти, използвани в решението: явна конструкция

Задача 3: Съществуват ли четири различни естествени числа *a*, *b*, *c* и *d*, такива че да не съществува естествено число *n*, за което числата $a+n$, $b+n$, $c+n$ и $d+n$ да са две по две взаимнопрости?

Решение: Да разгледаме числата $a=1$, $b=2$, $c=3$ и $d=4$. Сега ако *n* е нечетно, то $a+n$ и $c+n$ ще са четни и следователно няма да са взаимнопрости. Ако пък *n* е четно, то числата $b+n$ и $d+n$ ще са четни и съответно няма да са взаимнопрости.

Коментар: Задачата е достатъчно лесна, за да бъде достъпна за ученици, които за първи път срещат понятието „взаимнопрости числа“. Работата по конструирането на подходяща четворка числа и доказателството, че тя удовлетворява условието за всяко *n*, е полезно упражнение както за изграждане на усет за логическа структура на решението, така и за вникване в базовите понятия от училищния курс по теория на числата.

Класове, за които задачата е подходяща: 5, 6

Стратегии и инструменти, използвани в решението: пълно изчерпване на възможности, работа с импликация

Задача 4 (Основна теорема на аритметиката): Всяко естествено число $n>1$ има единствено представяне като произведение на прости числа (редът на множителите не е важен).

Решение: Да допуснем, че твърдението не е вярно и съществуват естествени числа, които могат да се представят по повече от един начин като произведение на прости множители. Нека най-малкото от тях е m и нека $m=p_1p_2...p_l=q_1q_2...q_k$ са две негови различни представяния като произведение на прости множители. Твърдим, че в двете представяния не може да участва един и същ множител. Наистина, ако допуснем, че такъв има, след съкращаването му ще получим две представяния като произведение на прости множители на число, по-малко от m, което противоречи на минималността на m. Тогава $p_1 \neq q_1$ и нека $p_1 < q_1$. Разглеждаме числото $0 < m' = m - p_1q_2q_3...q_k < m$. Тъй като $m=p_1p_2...p_l=q_1q_2...q_k$, можем да представим това число по два начина:

(1) $m' = p_1p_2...p_l - p_1q_2...q_k = p_1\left(p_2...p_l - q_2...q_k\right)$ и

(2) $m' = q_1q_2...q_k - p_1q_2...q_k = \left(q_1 - p_1\right)q_2q_3...q_k$.

Доколкото $m' < m$, то m' има единствено представяне като произведение на прости числа, което означава, че $p_1 / q_1 - p_1$ и води до p_1 / q_1, което противоречи на това, че q_1 е просто.

Противоречието доказва, че допускането е погрешно и всяко естествено число, по-голямо от 1, има единствено представяне като произведение на прости множители.

Коментар: Разгледаната теорема илюстрира доказателство за единственост и е класически пример, чрез който учениците могат да бъдат запознати с фундаментално твърдение от сферата на теорията на числата и в същото време да видят образец на доказателство за единственост и основните стратегии, използвани в извършването му – косвен подход чрез допускане на противното и прилагане на принципа на крайния елемент.

Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на крайния елемент, допускане на противното

Задача 5 (ТГ 1999/2000): Докажете, че съществуват безкрайно много естествени числа *n*, за които числото $2^n + n$ е съставно.

Решение (I подход): Нека $n = 6m+1, m \in \mathbb{N}$. Тогава $2^n + n = 2^{6m+1} + 6m + 1 = \left(2^{6m+1} + 1\right) + 6m$. Сега доколкото $2^{6m+1} \equiv 2\left(\bmod 3\right)$, то $3 / 2^{6m+1} + 1$ и съответно $3 / \left(2^{6m+1} + 1\right) + 6m$, така че числото $2^n + n$ е съставно за всеки избор на $m \in \mathbb{N}$ и полагане $n = 6m+1$.

Решение (II подход): Нека разгледаме $n = \left(3m\right)^3, m \in \mathbb{N}$. Тогава имаме $2^n = \left(2^{9m^3}\right)^3$ и съответно $2^n + n = \left(2^{9m^3} + 3m\right)\left(2^{18m^3} - 3.2^{9m^3} m + 9m^2\right)$. Доколкото всеки от двата множителя очевидно е различен от 1, последното представяне доказва, че при всеки избор на $m \in \mathbb{N}$ и полагане $n = \left(3m\right)^3$ числото $2^n + n$ ще е съставно.

Коментар: Изборът на подходяща редица от стойности за *n*, за които редицата $2^n + n$ да съдържа безкрайно много съставни числа, изисква усет и опит при работата с делимост и остатъци, както и гъвкавост при алгебричните преобразувания. От методическа гледна точка е ценно да се използва възможността учениците да работят самостоятелно и независимо един от друг по търсенето на подходящ пример, след което да обсъдят различните варианти, до които са достигнали. Всяко различно решение задава различна перспектива към свойствата на разглеждания израз и е ценно учениците да споделят опита си, разширявайки не само собствените си наблюдения в хода на индивидуалното експериментиране, но и възприемайки гледните точки и на останалите в групата.

Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: алгебрични преобразувания; експериментиране с частни случаи

Задача 6: Да се докаже, че всяка редица от различни естествени числа $a_1, a_2, ..., a_n$ съдържа подредица, сумата на числата в която се дели на *n*.

Решение: Разглеждаме сумите $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2$, …, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Те са *n* на брой, колкото са и остатъците при деление на *n*. Ако някоя от тези суми се дели на *n*, то събираемите в нея генерират подредица с исканото свойство. Ако никоя от сумите не се дели на *n*, то съгласно принципа на Дирихле има поне две суми, които дават един и същ остатък по модул *n*. Следователно разликата им е кратна на *n*, а тя представлява точно сума на членовете на подредица на редицата $\{a_i\}_{i=1}^{n}$.

Коментар: Тази класическа задача използва принципа на Дирихле, за да конструира неявно подредица с исканото свойство. Разглеждането на задачата в извънкласната работа по математика е изключително важно, тъй като тя се появява в различни форми като фрагмент от много по-сложни задачи, а стратегията за решението ѝ е образец за широко използван подход.

Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле, допускане на противното, пълно изчерпване на възможности

Задача 7: Да се докаже, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува кратно на *n* число, чиито цифри са само 0 и/или 1.

Решение: Разглеждаме числата $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, …, $a_n = \underbrace{111...111}_{n}$, които са *n* на брой. Възможните остатъци при деление на *n* също са *n* на брой. Ако някое от изброените числа е кратно на *n*, то условието на задачата е изпълнено. Ако нито едно от числата $a_1, a_2, ..., a_n$ не е кратно на *n*, то съгласно принципа на Дирихле сред тях има поне две, сравними по модул *n*. Нека това са a_i и $a_j, i > j$. Тогава разликата им $a_i - a_j = \underbrace{11111}_{i-j}\underbrace{0000}_{j}$ е кратна на *n* и се записва само с цифрите 0 и 1.

Коментар: Това класическо решение на популярна задача използва принципа на Дирихле, за да докаже неявно съществуването на число с исканото свойство. В случая изборът на числата $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, …, $a_n = \underbrace{111...111}_{n}$ е целеви – от една страна да бъдат осигурени необходимите условия за прилагане на принципа на Дирихле, а от друга – да се гарантира, че ще може да бъде конструирано число от искания вид.

Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле

Задача 8: Да се докаже, че уравнението $x^2+x+1=py$ има решение в цели числа (x,y) за безкрайно много прости числа *p*.

Решение: Например при $p=3$ наредената двойка $(1,1)$ е решение на уравнението. Да допуснем, че уравнението има решения (x,y) само за краен брой прости числа *p* и нека тези числа са p_1, p_2, …, p_m. Полагаме $P=p_1p_2...p_m$. Тогава числото $P^2+P+1\equiv 1(\bmod p_i)$ за всяко $i=1,...,m$, така че то има прост делител *q*, различен от всяко от числата p_1, p_2, …, p_m. Така получаваме, че за простото число *q* уравнението $x^2+x+1=qy$ има целочислено решение $\left(P,\dfrac{P^2+P+1}{q}\right)$, което е противоречие с допускането. Следователно уравнението има решение за безкрайно много прости числа *p*.

Коментар: В решението на задачата се използва конструкция, сходна с тази в класическото доказателство на Евклид, че съществуват безкрайно много прости числа. Това я прави илюстративна за факта, че доказателствата на теоретичните факти са съществени не само като част от пълнотата на знанията, но и като част от евристичната база данни, от която могат да се черпят идеи и инструменти за решаване на задачи.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: аналогия с класически доказателства, допускане на противното

Задача 9: Докажете, че уравнението $x^2+y^3=z^5$ има безкрайно много решения в естествени числа.

Решение: Ще докажем, че съществуват безкрайно много наредени тройки от степени на числото 2, които са решения на уравнението. Нека $x=2^k$, $y=2^m$ и $z=2^n$ за $x,y,z\in\mathbb{N}$. Уравнението придобива вида $2^{2k}+2^{3m}=2^{5n}$. Полагаме $k=3s$, $m=2s$ и получаваме $2^{6s}+2^{6s}=2^{5n}$ или еквивалентно $2^{6s+1}=2^{5n}$. Искаме $6s+1=5n$, така че ако положим $5n=30t+25$, то $s=5t+4$ и $n=6t+5,t\in\mathbb{N}$. Така за всяко $t\in\mathbb{N}$ наредената тройка $x=2^{15t+12},y=2^{10t+8},z=^{6t+5}$ е решение на уравнението.

Коментар: В решението на задачата прилагаме стандартен подход за доказателство, че съществуват безкрайно много решения на уравнение – конструираме решение, което е функция на параметър, който от своя страна може да приема безкрайно много стойности. Тук намирането на няколко конкретни решения води до достигане до идеята за конструиране на решения, които са степени на числото 2. Реализацията на пример, базиран на тази концепция, изисква само някои базови умения за работа с остатъци.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: параметризиране чрез свободен параметър; разглеждане на частни случаи

Задача 10: Ще наричаме едно число „триъгълно“, ако може да се представи във вида $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ за някое $n \in \mathbb{N}$. Докажете, че съществува безкрайна растяща редица от триъгълни числа, всеки два члена на която са взаимнопрости.

Решение: Първо ще докажем, че за всяка крайна растяща редица от две по две взаимнопрости триъгълни числа a_1, a_2, …, a_m съществува триъгълно число $t > a_m$, което е взаимнопросто с всяко от числата a_1, a_2, …, a_m. Разглеждаме числото $a = a_1 a_2 ... a_m$. Числата $a+1$ и $2a+1$ са взаимнопрости с *a*. Тогава числото $t = \dfrac{(2a+1)(2a+2)}{2} = (a+1)(2a+1)$ е триъгълно, по-голямо е от a_m и е взаимнопросто с всяко от числата a_1, a_2, …, a_m, така че можем да дефинираме $a_{m+1} = t$. Сега можем да изберем първите два члена на редицата да са $a_1 = 1$ и $a_2 = 3$, а всеки следващ да се генерира по показания по-горе начин.

Коментар: Идеята за конструиране на търсената редица е свързана с модела за дефиниране на всеки следващ член на редицата чрез преходните. Тук изборът на числата $a+1$ и $2a+1$ като ключови за конструкцията е свързан от една страна с това, че са взаимнопрости с всяко число от генерираната до момента редица, а от друга с възможността чрез тях да се получи триъгълно число.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: индуктивен подход за конструиране; аналогия с класически доказателства

Задача 11: Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува естествено число x, такова че всеки от членовете на безкрайната редица $x+1$, x^x+1, $x^{x^x}+1$, … е кратен на n.

Решение: За всяко $n \in \mathbb{N}$ избираме $x = 2n-1$. Тогава всяко от числата x, x^x, x^{x^x}, … е нечетно и следователно $x+1 = 2n$ е делител на всеки от членовете на редицата $x+1$, x^x+1, $x^{x^x}+1$, …, така че в частност всеки от тях е кратен на n.

Коментар: Решението на задачата предлага елегантна конструкция за x, при която простият факт, че всеки многочлен от вида x^k+1 за нечетно k се дели на $x+1$, гарантира исканото по условие свойство. Можем да достигнем до идеята за този пример именно отговаряйки на въпроса „Какъв делител могат да имат всички многочлени от зададената в условието редица?“.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: класически тъждества, метод на водещия въпрос

Задача 12: Да се докаже, че съществуват безкрайно много естествени числа n, такива че числото 2^n+1 се дели на n.

Решение: Ще докажем по индукция, че за всяко $k \in \mathbb{N}$ числото $n = 3^k$ има свойството $3^k / 2^{3^k}+1$. При $k=1$ имаме $n=3$ и $3/2^3+1=9$. Да допуснем, че за някое $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено, че $3^k / 2^{3^k}+1$. Ще докажем, че числото $n = 3^{k+1}$ е делител на $2^{3^{k+1}}+1$. В представянето $2^{3^{k+1}}+1 = \left(2^{3^k}+1\right)\left(2^{2.3^k}-2^{3^k}+1\right)$ първият множител е кратен на 3^k съгласно индукционното предположение. Вторият множител $2^{2.3^k}-2^{3^k}+1 = 4^{3^k}+2-\left(2^{3^k}+1\right)$ е кратен на 3, тъй като $4^{3^k} \equiv 1 \pmod{3}$, т.е. $4^{3^k}+2 \equiv 0 \pmod{3}$, а $2^{3^k}+1$ е кратно на 3 според индукционната хипотеза. Така получаваме, че наистина $n = 3^{k+1}$ е делител на $2^{3^{k+1}}+1$.

Коментар: В задачата използваме индукция за да конструираме числа с исканото свойство. Индукционният подход е логичен избор предвид потенциала му да генерира безкрайно много числа, удовлетворяващи дадено условие. Хипотеза за подходящ генеричен вид на числата n лесно може да се формулира на база наблюдения на конкретни фиксирани стойности.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция, модулна аритметика, изследване на частни случаи с цел забелязване на модел

Задача 13 (USAJMO 2011, Titu Andreescu): Докажете, че съществува единствено естествено число n, такова че числото $2^n + 12^n + 2011^n$ е точен квадрат.

Решение: При $n = 1$ имаме $2^1 + 12^1 + 2011^1 = 2025 = 45^2$. При нечетно $n > 2$ числото е сравнимо по модул 4 с 0+0+3=3 и не е точен квадрат, а при четно n е сравнимо по модул 3 с 1+0+1=2 и не е точен квадрат. Така единственото число n с търсеното свойство е $n = 1$.

Коментар: В разгледаната задача намирането на търсената стойност на n не е предизвикателство, но трудността произтича от доказателството за единствеността ѝ. За да се достигне до завършено решение е необходим опит с модулната аритметика и подбор на подходящи модули, по които да се достигне до противоречие. В задачите от теория на числата на това равнище ключов е именно усетът по отношение на работата с модули, който се изгражда в процеса на работа и решаване на задачи. Достигаме отново до твърдението на Polya, че „за да се научиш да решаваш задачи, трябва да решаваш задачи“.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: модулна аритметика

Задача 14 (Shortlist IMO 1988): Дадени са $2n$ кутии, номерирани с числата от 1 до $2n$. Във всяка кутия е записано различно число от 1 до $2n$ включително. За всяка кутия пресмятаме сбора на номера ѝ и числото, записано в нея. Да се докаже, че измежду записаните сборове има два, чиято разлика се дели на $2n$.

Решение: Трябва да докажем, че два от записаните сборове дават един и същ остатък при деление на $2n$. Ако броят на различните остатъци по модул $2n$ на записаните сборове е по-малък от $2n$, то тъй като сборовете са $2n$, от принципа на Дирихле следва, че сред тях има два, които дават един и същ остатък по модул $2n$. Нека сега допуснем, че броят на различните остатъци по модул $2n$ на сборовете е $2n$. Тогава тези остатъци са 0, 1, 2, …,

$2n-1$ в някакъв ред. Сумата на тези остатъци е $\frac{(2n-1)2n}{2} = 2n(n-1)+n$, което дава остатък n при деление на $2n$. От друга страна, в сумата на тези сборове всяко от числата от 1 до $2n$ участва по два пъти (веднъж като номер на кутия и веднъж като число, записано в кутия), така че сумата на всички сборове е $2(1+2+3+...+2n) = 2.\frac{2n(2n+1)}{2} = 2n(2n+1)$ и се дели на $2n$, което е противоречие. Следователно сред сборовете има два, които са равни по модул $2n$.

Коментар: При решаване на задачата използваме принцип на Дирихле и допускане на противното. Доказателството за съществуване на сборове, конгруентни по модул $2n$, се реализира косвено чрез аргументиране на невъзможността всички да са различни. При разглеждането на задачата естествено възникват въпросите „Защо броят на кутиите е четен?“ и „Какво би се случило, ако разгледаме аналогична ситуация за нечетен брой кутии?“. Оказва се, че в този случай твърдението не би било вярно – един (измежду много възможни) примери, които го доказват, е да запишем във всяка от общо k (където k е нечетно число) кутии числото, равно на номера ѝ. Тогава остатъците по модул k ще бъдат съответно 2, 4, 6, …, $k-1$, 1, 3, …, $k-2$, 0. Полезно е в хода на учебната работа да се разглеждат и такива въпроси, възникващи в контекста на задачите, за да се формира цялостна представа и постепенно да се придобие онзи поглед „отгоре“, който е ключов за намирането на подходящите асоциации и стратегии за решаване на задачи с висока степен на сложност.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле, допускане на противното

Задача 15 (LXVIII ММО): Съществуват ли 2005 различни естествени числа, такива, че сумата на всеки 2004 от тях се дели на оставащото число?

Решение: В множеството от три числа $\{1, 2, 3\}$ сборът на всеки две числа се дели на третото. Ако към множеството добавим като елемент числото 1+2+3=6, получаваме множеството $\{1, 2, 3, 6\}$ от четири числа, които изпълняват условието на задачата.

Да допуснем, че числата $a_1, a_2, ..., a_k$ са различни и сумата на всеки $k-1$ на брой от тях се дели на оставащото число. Твърдим, че сумата им $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$ се дели на всяко от тези числа. Наистина, за всяко $i = 1,...,k$ $S_k = (S_k - a_i) + a_i$ и съгласно индукционното предположение $a_i / S_k - a_i$, така че a_i / S_k. Да разгледаме множеството от $k+1$ различни числа $\{a_1, a_2, ..., a_k, S_k\}$. Очевидно $S_k / a_1 + a_2 + ... + a_k = S_k$ и за всяко $i = 1,...,k$ сборът на числата от множеството, различни от a_i, е равен на $2S_k - a_i$, така че доколкото a_i / S_k, то $a_i / 2S_k - a_i$. Така започвайки с множеството $\{1,2,3\}$ и прилагайки описаната процедура 2002 пъти, ще получим множеството $\{1,2,3,6,12,24,...,3.2^{2002}\}$, изпълняващо условието на задачата.

Коментар: В решението на задачата приложихме индуктивен подход за конструиране на търсеното множество от числа. Разглеждането на поставения въпрос за по-малък брой числа и търсенето на ефективен механизъм за генериране на множество, съдържащо едно число повече, е естествена стратегия за справяне със задачата.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: индуктивен подход за конструиране на пример, експериментиране в частни случаи

Задача 16 (Иван Тонов): Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува число, което се записва само с цифрите 1 и 2 и е кратно на 2^n.

Решение: Да разгледаме множеството A_n на n-цифрените естествени числа, които се записват само с цифрите 1 и 2. Тъй като за всяка от позициите в десетичното представяне на тези числа има по два варианта – цифрата на нея да бъде 1 или 2, тези числа са точно 2^n на брой. Разликата на кои са е две измежду числата от A_n съдържа не повече от n цифри и завършва на не повече от $n-1$ цифри 0. Последната ненулева цифра на тази разлика може да бъде само 1 или 9. Така разликата на всеки две числа от множеството A_n може да се представи във вида $(2m-1)10^{\alpha} = (2m-1)2^{\alpha}5^{\alpha}, m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}, 0 \le \alpha \le n-1$. Доколкото $(2m-1)5^{\alpha}$ е нечетно, то тя не се дели на 2^n.

Така получихме, че множеството A_n съдържа 2^n числа и никои две от тях нямат разлика, кратна на 2^n, т.е. никои две от тях не дават един и същ остатък по модул 2^n. Последното означава, че числата от множеството A_n образуват пълна система от остатъци по модул 2^n, така че сред тях има (при това точно едно), което е кратно на 2^n.

Коментар: В представеното решение конструираме множество от числа, за които можем да докажем, че образуват пълна система от остатъци по модул 2^n и имат искания вид, с цел да докажем, че сред тях съществува такова, което е кратно на 2^n. Това не е необичаен подход в сходни ситуации. В случая това, което може да ни насочи към него, е фактът, че е необходимо да се докаже делимост на 2^n, а числата в множеството A_n са точно толкова на брой. Познаването на понятието за пълна система от остатъци и уменията за оперативност в прилагането му изискват определена теоретична подготовка, която е неделима част от извънкласната работа по математика в гимназиалния курс.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11

Стратегии и инструменти, използвани в решението: неявна конструкция, пълна система от остатъци

Задача 17 (NMC 2022): Нека $n \geq 5$ е нечетно естествено число. Да означим множеството $M = \{1, 2, 3, ..., n-1\}$. Двама играчи A и B играят следната игра: в началото и двамата разполагат с празно множество и, редувайки се, като A е първи, избират по един елемент от M, премахват го от M и го добавят в своето множество. Когато M стане празно, A избира две числа x_1 и x_2 от своето множество и ги показва на B, след което B избира две числа y_1 и y_2 от своето множество. Играчът B печели тогава и само тогава, когато $\left(x_1x_2(x_1-y_1)(x_2-y_2)\right)^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod{n}$. Кой има печеливша стратегия в зависимост от n?

Решение: Ако числото n е съставно, то на първия си ход A избира произволен прост делител p на n и след това $x_1 = p$. Доколкото така лявата страна на сравнението става равна на 0 по модул p, тя няма как да е равна на 1 по модул n и с това A печели.

Нека сега n е просто. Твърдим, че B винаги може да спечели със следната стратегия: ако A избере число a, B на съответния си ход избира числото $n-a$. Ако накрая A избере от множеството си числата x_1 и x_2, B избира числата $y_1 \equiv -x_1 \pmod{n}$ и $y_2 \equiv -x_2 \pmod{n}$ от своето. Наистина, така лявата страна на сравнението придобива вида $\left((2x_1)^2(2x_2)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \equiv (4x_1x_2)^{n-1} \equiv 1(\operatorname{mod} n)$ теоремата на Ойлер-Ферма, доколкото всяко от числата 2, x_1 и x_2 е от интервала $[1, n-1]$ и следователно е взаимнопросто с n.

Коментар: Наблюдението, че при възможност A да добави в множеството си прост делител на n, води до очевидна печеливша стратегия за него, с основа за формулиране на хипотеза за критерия за n, който е определящ за това кой от играчите има сигурна печеливша стратегия. Конструирането на печеливша стратегия за B се базира на доброто познаване на свойствата на делимостта и асоциацията с теоремата на Ойлер-Ферма, но и преди всичко на правилно направеното предположение за изгодните за него стойности на n.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11

Стратегии и инструменти, използвани в решението: експериментиране в частни случаи, теорема на Ойлер-Ферма

Задача 18 (Иван Тонов): Да се намерят всички естествени числа $n > 1$, за които съществува пълна система $a_1, a_2, ..., a_n$ от остатъци по модул n, такава че редицата $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, ..., b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ също е пълна система от остатъци по модул n.

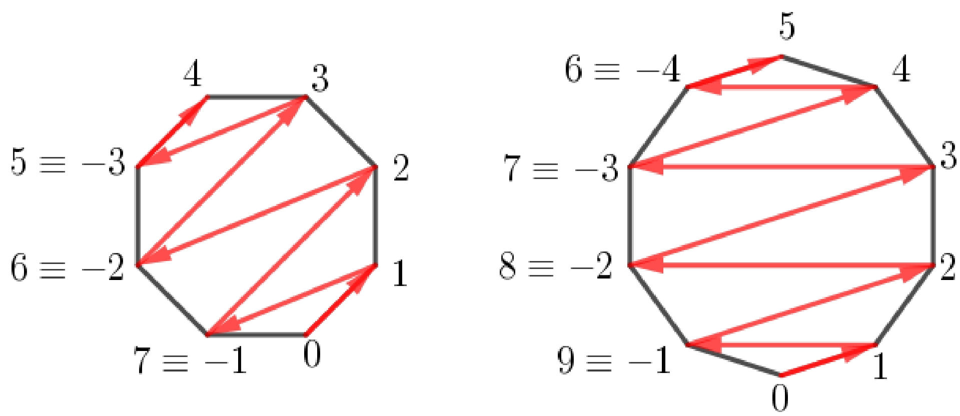
Решение: Нека n е число, изпълняващо условието на задачата. Тогава е необходимо $b_1 = a_1 \equiv 0(\operatorname{mod} n)$. Наистина, ако за някое $k \neq 1$ имаме, че $a_k \equiv 0(\operatorname{mod} n)$, то във втората редица членовете b_{k-1} и $b_k = b_{k-1} + a_k$ ще са конгруентни по модул n, така че не биха могли да образуват пълна система от остатъци по този модул.

Да допуснем, че n е нечетно число. Тогава $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \equiv 0 + 1 + ... + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$ и тъй като $n-1$ е четно, то n / b_n. Тогава обаче $b_1 \equiv b_n \equiv 0(\operatorname{mod} n)$, което изключва възможността редицата $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ да образува пълна система от остатъци по модул n.

Ще докажем, че всяко четно число n изпълнява условията на задачата. Определяме редицата $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ по следния начин: $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -2, ..., a_n = (-1)^n (n-1)$. Така $\{b_k\}_{k=1}^{n}$

придобива вида: $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = -1, b_4 = 2, b_5 = -2, \ldots, b_{n-2} = \frac{n}{2} - 1, b_{n-1} = -\left(\frac{n}{2} - 1\right), b_n = \frac{n}{2}$ и образува пълна система от остатъци по модул n.

Коментар: Естественият подход към решение на задачата от една страна включва анализ на необходимите свойства, които трябва притежава описаното естествено число n. От друга страна, в процеса на формулиране на хипотеза за отговора е логично да се експериментира с различни фиксирани стойности на n. В хода на изследването на частните случаи се генерират и идеи за конструиране на редиците $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{n}$, в което се състои и основното евристично предизвикателство в задачата. Представената идея за конструиране на пример може да бъде достигната и чрез моделирането на редицата $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ с n-ъгълник, върховете на който са обозначени с остатъците по модул n и трябва да бъдат обходени.



$n = 8$ $n = 10$

Следващото изображение визуализира тази аналогия в частните случаи за $n = 8$ и $n = 10$. Движението е по стрелките, като стартираме от $b_1 = 0$. Стрелките моделират членовете на редицата $\{a_k\}_{k=1}^{n}$: всяка стрелка съответства на разликата на числото в крайния връх и числото в началния по модул n; тази разлика е равна на броя страни на многоъгълника, попадащи в частта от него, отсечена от тази стрелка, която съдържа върха, означен с 0, като алтернативната смяна на посоките на стрелките се отразява в смяна на знаците на членовете. Учениците възприемат по-лесно визуалните модели, така че предложеният евристичен подход за намиране на конструкцията може да се окаже по-естествен и достъпен.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: допускане на противното, модулна аритметика, експериментиране в частни случаи, визуален модел

Задача 19 (Иван Тонов): Да се намерят всички естествени числа $n>1$, за които съществува пълна система $a_1,a_2,...,a_n$ от остатъци по модул *n*, такава че редицата $b_1=a_1, b_2=a_1a_2,...,b_n=a_1a_2...a_n$ също е пълна система от остатъци по модул *n*.

Решение: Ако предположим, че числото *n* изпълнява условието на задачата, то за редицата $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ трябва да е изпълнено, че по модул n $a_1=1$ и $a_n=0$. Наистина, ако допуснем, че $a_k=1$ за някое $k\neq 1$, то b_{k-1} и b_k ще са конгруентни по модул *n*, така че редицата $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ не би могла да образува пълна система от остатъци по модул *n*. Ако пък допуснем, че $a_k=0$ за някое $k\neq n$, то всички членове на $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ от b_k до последния ще са кратни на *n*.

Да допуснем, че числото *n* може да се представи като произведение на два различни множителя *p* и *q*, такива че $(p,q)=1$ и $p>q>1$. Тогава, доколкото $q<p<n=pq=a_n$, остатъците *p* и *q* ще фигурират в редицата $\{a_k\}_{k=1}^{n-1}$. Така когато вторият от тях се появи като множител в редицата $\{b_k\}_{k=1}^{n-1}$, съответният ѝ член ще стане кратен на *n*, което противоречи с факта, че само последният член на $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ е кратен на *n*.

Да допуснем, че числото $n=2^s, s\geq 3$. Тогава числата 2 и 2^{s-1} са различни остатъци по модул *n* и трябва да са членове на редицата $\{a_k\}_{k=1}^{n-1}$. Появата на втория от тях като множител в редицата $\{b_k\}_{k=1}^{n-1}$ ще доведе до противоречие като в предходния случай.

Да допуснем, че $n=p^s, s\geq 2$ за някое просто число $p\geq 3$. Тогава по аналогичен на горните два случая начин получаваме противоречие с остатъците *p* и $2p^{s-1}$, които трябва да са различни членове на редицата $\{a_k\}_{k=1}^{n-1}$ и чието произведение е кратно на *n*.

Ако $n=2$, то за $a_1=1$, $a_2=0$ получаваме $b_1=1$, $b_2=0$ и условието на задачата е изпълнено.

Ако $n=4$, то за пълната система от остатъци $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=2$, $a_4=0$ по модул 4 получаваме $b_1=1$, $b_2=3$, $a_3=2$, $a_4=0$, което пак е пълна система от остатъци.

Остана да разгледаме случая, в който *n* е нечетно просто число. Според Теоремата на Гаус за примитивните корени съществува примитивен корен *r* на *n*, такъв че числата r^0, r^1, …, r^{n-2} имат за стойности всички ненулеви остатъци по модул *n*. Освен това, числото $n-1$ е четно, така че за него можем да приложим предходната задача. Нека $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1}$ е пълната система от остатъци по модул $n-1$, за която редицата $\{\beta_k\}_{k=1}^{n-1}$, дефинирана по правилото $\beta_i=\sum_{j=1}^{i}\alpha_j$ за всяко $i=1,...,n-1$ също е пълна система от остатъци по модул $n-1$. Разглеждаме редицата $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ с членове $a_1=r^{\alpha_1}$, $a_2=r^{\alpha_2}$, …, $a_{n-1}=r^{\alpha_{n-1}}$, $a_n=0$, която образува пълна система от остатъци по модул *n*. Тогава от дефиницията на редицата $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ при $k<n$ имаме $b_k=b_{k-1}a_k=r^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{k-1}}r^{\alpha_k}=r^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{k-1}+\alpha_k}=r^{\beta_k}$ и тъй като $b_n=0$, $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ също образува пълна система от остатъци по модул *n*.

Така всички числа *n*, изпълняващи условието на задачата, са простите числа и числото 4.

Коментар: Още от първоначалния анализ на условието става ясно, че търсените числа *n* не могат да са „много“ съставни. Въпросът обаче е: „Колко точно съставно може да бъде *n*?“ Отговорът му е и ключ към декомпозирането на разглежданията на случаи, с които да се изключат големи класове от числа, без да се пропуска числото 4, което опровергава една разбираема възможна първоначална хипотеза по задачата, че *n* може да бъде само просто. При конструирането на примера за нечетно просто число използвахме предходната задача. Този факт задача още една перспектива към целесъобразността двете задачи да бъдат анализирани последователно в хода на учебната работа – освен очевидното сходство в условията им, примерът в едната е средство за конструиране на примера в другата. Така приликата на условията е не просто повърхностен белег на формулировките, а обстоятелство, което на база свойствата на степенуването насочва към достигането до доказателство за достатъчното условие.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: допускане на противното, пълна система от остатъци, примитивен корен по прост модул, модулна аритметика, експериментиране с частни случаи, метод на водещия въпрос

Задача 20 (Иван Тонов): Наричаме едно естествено число „репюнит“, ако в десетичния му запис участват само единици. Да се намерят всички естествени $n>1$, за които съществуват *n* репюнита, които образуват пълна система от остатъци по модул *n*.

Решение: Ще бележим с $a_k=\underbrace{111...111}_{k}$ репюнита, записващ се с *k* на брой единици. Ако n/a_k, то $a_{k+1}=10a_k+1\equiv 0+1\equiv 1(\bmod n)$, $a_{k+2}=100a_k+11\equiv 0+11\equiv 11(\bmod n)$, …, $a_{2k-1}=10^{k-1}a_k+\underbrace{111...111}_{k-1}\equiv 0+a_{k-1}\equiv a_{k-1}(\bmod n)$, т.е. редицата от остатъците по модул *n* на всички репюнити е периодична с период *k*. Така ако $k<n$, то някои от остатъците по модул *n* биха липсвали. Следователно ако *n* изпълнява условието, то n/a_k води до $k\ge n$.

Очевидно търсените числа *n* не могат да са четни или кратни на 5, така че $(n,10)=1$ и от теоремата на Ойлер-Ферма $10^{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod n)$, така че $n/\underbrace{999...999}_{\varphi(n)}$. Ако *n* не е кратно на 3, това води до $n/a_{\varphi(n)}$, а $\varphi(n)<n$: противоречие с горното наблюдение. Нека сега $n=3^\alpha m, \alpha\ge 1$ за $m>1, (m,3)=1$. Сега обаче $n/a_{3^\alpha\varphi(m)}$, т.е. *n* е делител на репюнит с по-малко от *n* единици, което води до противоречие.

Следователно ако съществуват числа с исканото свойство, то те са от вида 3^α. Ще докажем, че за всяко $\alpha\in\mathbb{N}$ числата $a_1, a_2, ..., a_{3^\alpha}$ образуват пълна система от остатъци по модул $n=3^\alpha$. Ако $\alpha=1$, то $n=3$ и наистина числата 1, 11 и 111, които са съответно 1, 2 и 0 по модул 3, образуват пълна система от остатъци по този модул. Да допуснем, че за някое $\alpha\ge 1$ числата $a_1, a_2, ..., a_{3^\alpha}$ образуват пълна система от остатъци по модул $n=3^\alpha$ и $a_{3^\alpha}\equiv 0(\bmod n)$. Означаваме $a_{3^\alpha}=3^\alpha t, t\in\mathbb{N}$. Разглеждаме числото $n=3^{\alpha+1}$. Доколкото съгласно предположението $a_1, a_2, ..., a_{3^\alpha}$ образуват пълна система от остатъци по модул 3^α, то те дават първите 3^α остатъка и по модул $3^{\alpha+1}$. От индукционното предположение числото

$a_{3^\alpha+1}=10a_{3^\alpha}+1=9a_{3^\alpha}+a_{3^\alpha}+1=9.3^\alpha t+3^\alpha t+1\equiv 3^\alpha+1\left(\bmod 3^{\alpha+1}\right)$. Аналогично числата $a_{3^\alpha+2},a_{3^\alpha+3},...,a_{3^{\alpha+1}}$ генерират останалите остатъци по модул $3^{\alpha+1}$. Съгласно принципа на математическата индукция доказахме, че всички числа от вида $n=3^\alpha$ изпълняват условието на задачата.

Коментар: Формулирането на хипотеза за природата на числата *n* е резултат от наблюдения на частни случаи. Изграждането на пълното доказателство изисква както знания от извънкласната сфера – модулна аритметика, теорема на Ойлер-Ферма, познаване на понятието пълна система от остатъци, така и умения за неконвенционално приложение на метода на математическата индукция. Разбира се, отговорът на въпроса „Как се досещаме за това решение?“ може да се изчерпа с думата „трудно“. Истината обаче е, че изучаването на такова решение, съдържащо различни подходи и гъвкави приложения на теорията, обогатява опита и инструментариума, с който учениците разполагат, и ги запознава с многообразие от идеи, които могат да са фундамент за изграждане на сложни решения на други нетривиални задачи.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция, пълна система от остатъци, модулна аритметика, експериментиране в частни случаи

Задача 21 (Иван Тонов): Числата, в десетичния запис на които участват само единици и нули, наричаме „двоични“. Да се намерят всички естествени числа $n>1$, за които съществуват *n* двоични числа, които образуват пълна система от остатъци по модул *n*.

Решение: Да допуснем, че съществува *n* с исканото свойство, което е кратно на 5. Доколкото двоичните числа завършват само на 0 или 1, то те няма как да дават например остатък 2 при деление на *n*.

Ще докажем, че за всяко *n*, което не се дели на 5, съществува пълна система от остатъци, в която всички числа са двоични. Нека $n=2^k m$, където $(m,10)=1$. Ще конструираме търсената пълна система от остатъци, използвайки индукция по степенния показател *k*.

Ако $k=0$, т.е. $n=m$ е нечетно число, което не е кратно на 5, то по теоремата на Ойлер-Ферма $10^{\varphi(m)}=1(\operatorname{mod} m)$. Сега за всяко $r=1,2,...,m-1,m$ определяме числото $a_r=10^{r\varphi(m)}+10^{(r-1)\varphi(m)}+...+10^{\varphi(m)}$. Числата a_r са двоични и тъй като всяко от събираемите в дефиницията им е сравнимо с 1 по модул *m*, то $a_r \equiv r(\operatorname{mod} m)$ за всяко $r=1,2,...,m-1,m$. Така те образуват пълна система от остатъци по модул $n=m$, съставена само от двоични числа.

Нека за някое $k \geq 1$ редицата $a_1,a_2,...,a_n$ е пълна система от остатъци по модул $n=2^k m$. Разглеждаме следната редица от $2n$ на брой числа: $\overline{a_1 0}$, $\overline{a_2 0}$, ..., $\overline{a_n 0}$, $\overline{a_1 1}$, $\overline{a_2 1}$, ..., $\overline{a_n 1}$. Ще докажем, че тя представлява пълна система от остатъци по модул $2^{k+1}m$. Всички числа в нея са двоични. Да допуснем, че две числа от редицата - $\overline{a_i\varepsilon_1}$ и $\overline{a_j\varepsilon_2}$, ε_1, $\varepsilon_2 \in \{0;1\}$, са сравними по модул $2^{k+1}m$. Тогава тъй като $2/\overline{a_i\varepsilon_1}-\overline{a_j\varepsilon_2}$, то $\varepsilon_1=\varepsilon_2$. Така получаваме, че разликата $\overline{a_i\varepsilon_1}-\overline{a_j\varepsilon_2}=10(a_i-a_j)$ е кратна на $2^{k+1}m$. Доколкото $(m,10)=1$, това води до $n=2^k m/a_i-a_j$ и е противоречие с факта, че $a_1,a_2,...,a_n$ е пълна система от остатъци по модул *n*. Противоречието доказва, че сред числата $\overline{a_1 0}$, $\overline{a_2 0}$, ..., $\overline{a_n 0}$, $\overline{a_1 1}$, $\overline{a_2 1}$, ..., $\overline{a_n 1}$ няма сравними по модул $2^{k+1}m$ и доколкото те са $2n$ на брой, образуват пълна система от остатъци по модул $2n$.

Коментар: Заключението за необходимостта *n* да не е кратно на 5 се прави лесно. За конструиране на пълната система от остатъци използваме индуктивен подход. Наблюденията, които можем да направим, търсейки пълни системи от остатъци от двоични числа в частни случаи за малки стойности на *n*, са ключови за избора на индукцията като стратегия за построяване на примера и формулиране на хипотеза как всяка следваща система от остатъци се получава от предходната. Тук сложността на решението е свързана и с обстоятелството, че индукцията не е по самото число *n*, а по степента на числото 2 в разлагането на *n* на прости множители. Задачата е илюстрация за случай, в който намирането на необходимо условие не представлява трудност, но достигането до достатъчно условие за съществуване е предизвикателство и изисква комплекс от опит, знания, съобразителност и умения за гъвкаво прилагане на евристични стратегии.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция, модулна аритметика, експериментиране в частни случаи

Задача 22 (AIME 1985): Редицата 101, 104, 109, 116, … има общ член $\alpha_n = 100 + n^2$. За всяко $n \in \mathbb{N}$ означаваме с d_n най-големия общ делител на числата α_n и α_{n+1}. Коя е най-голямата възможна стойност на числото d_n?

Решение: Ще решим по-обща задача: разглеждаме редицата $a_n = u + n^2$ за фиксираното число *u*. Имаме $a_{2u} = u + 4u^2 = u(4u+1)$ и $a_{2u+1} = u + (2u+1)^2 = (u+1)(4u+1)$. Доколкото числата u и $u+1$ са взаимнопрости, то $(a_{2u}, a_{2u+1}) = 4u+1$. Ще докажем, че това е най-голямата възможна стойност на най-голям общ делител на два последователни члена на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. За всяко фиксирано *n* означаваме $a = a_n$, $b = a_{n+1}$ и $g = (a, b)$. От $(3+2n)a + (1-2n)b = 4u+1$ следва $g / 4u+1$. Щом всеки най-голям общ делител на два последователни члена на редицата е делител на $4u+1$ и $(a_{2u}, a_{2u+1}) = 4u+1$, най-голямата възможна стойност за *g* е $4u+1$.

Редицата $\alpha_n = 100 + n^2$ е частен случай на $a_n = u + n^2$ при $u = 100$, така че съгласно доказаното най-голямата възможна стойност на d_n е 401.

Коментар: Задачата е свързана с логическата структура пример и оценка. За решаването ѝ е ключово дадената редица да се разгледа като частен случай на редицата $a_n = u + n^2$. Стратегията за субституция на конкретната стойност с параметър е стандартен подход, който позволява абстрахиране от числовите стойности и предоставя по-добри възможности за наблюдаване на модели и формулиране на хипотези. За доказателството за максималността на *g* използваме конструиране на линейна комбинация на *a* и *b*, равна на $4u+1$, което само по себе си изисква както добри технически умения, така и увереност в направената хипотеза. Логичен е въпросът: „Защо да въвеждаме параметър, а да не работим с конкретния частен случай на зададена редица?" Отговорът му, който може да бъде адекватен едва след решаване на задачата, е че наблюдението на членове на редицата от условието може да ни доведе до погрешната хипотеза, че всеки два последователни нейни члена са взаимнопрости. Числото 401 е просто и първите два последователни члена на редицата, които е кратни на него, са едва α_{200} и α_{201}. От тази гледна точка задачата е пример за това, че стратегията за наблюдение на конкретни частни случаи не винаги води до правилни предположения и хипотези. Това, разбира се, е напълно логично и всяка задача, която ни извежда от зоната на комфорт в навика да разчитаме на успешно проследяване на модели от частни случаи, е ценна и поучителна. В хода на обучението задачата може да се разгледа за различни конкретни стойности на *u* – такива, които позволяват формулиране на хипотеза чрез разглеждане на първите няколко (с цялата условност на това понятие) члена на редицата и такива, при които тази стратегия не би довела до успех. Разглеждането на редици за различни фиксирани стойности на *u*, разбира се, само по себе си насочва и към идеята за параметризиране и анализ на свойствата на целия клас редици.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: субституция на конкретна стойност с параметър, изразяване чрез линейна комбинация, метод на водещия въпрос

Задача 23 (ЕМТ 2023, Аделина Чопанова): За естествено число n са изпълнени следните свойства:

- числото $n+1$ се дели на 24
- сборът от квадратите на всички делители на n (включително 1 и самото n) се дели на 48

Колко най-малко делители може да има n?

Решение: Точните квадрати дават само остатък 0 или 1 при деление на 4; тук $n+1$ се дели на 4, така че n не е точен квадрат. Следователно n има четен брой делители, които могат да бъдат разделение на двойки с произведение n: $(a_0,b_0)=(1,n)$, (a_1,b_1), (a_2,b_2), …, (a_s,b_s), като при тези означения броят на делителите на n е $2(s+1)$. Тъй като 24 дели $n+1$, всички делители на n са нечетни и не се делят на 3. За всяко $i=0,1,\dots,s$ имаме: $a_i+b_i=a_i+\dfrac{n}{a_i}=\dfrac{a_i^2-1+n+1}{a_i}$. От това, че a_i е нечетно и не е кратно на 3 следва, че a_i^2-1 се дели на 24, така че $a_i + b_i$ се дели на 24. Сега от условието имаме, че $\sum_{i=0}^{s}\left(a_i^2 + b_i^2\right) = \sum_{i=0}^{s}\left(\left(a_i + b_i\right)^2 - 2a_ib_i\right) = \sum_{i=0}^{s}\left(a_i + b_i\right)^2 - 2n\left(s+1\right)$ се дели на 48. Тъй като 48 дели $\left(a_i + b_i\right)^2$ и *n* е нечетно, то 48 дели $2\left(s+1\right)$. Оттук следва, че *n* има поне 48 делители.

Числото $n = 23^{47}$ има исканите свойства, защото 24 дели $23^{47} + 1$ и сборът от квадратите на делителите му е $1 + 23^2 + 23^4 + ... + 23^{94}$. Последният се дели на 48, доколкото $23^{2k} \equiv 529^k \equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 48\right)$.

Коментар: Задачата е от категорията „пример и оценка“. Доказателството за екстремалност изисква гъвкавост в прилагането на свойствата на делимостта в контекста на условията за числото *n*. Примерът, чието конструиране не представлява такава сложност, може да бъде отправна точка за формулиране на хипотеза за отговора.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка

Задача 24 (ВОМ 1998, Гальперин, Г.): Съществуват ли 1998 различни естествени числа, такива че произведението на всеки две от тях е кратно на квадрата на разликата им?

Решение: Ще докажем, че за всяко $n \geq 2$ съществуват *n* числа с исканото свойство.

Ако $n = 2$, множеството $M_2 = \left\{1, 2\right\}$ очевидно изпълнява условието на задачата.

Да допуснем, че за някое $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ множеството $M_n = \left\{a_1, a_2, ..., a_n\right\}$ изпълнява условието. Тогава множеството $M_n' = \left\{b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}\right\}$, дефинирано по правилото $b_i = a_i$ за всяко $i = 1, ..., n$, $b_{n+1} = 0$ е множество от $n+1$ различни цели числа, такива че произведението на всеки две от тях е кратно на квадрата на разликата им. Твърдим, че множеството M_{n+1}, което се получава от M_n' като към всеки негов елемент прибавим числото $c = \prod_{i \neq j}\left(b_i - b_j\right)^2$ е множество от $n+1$ числа и изпълнява условието на задачата. Наистина, ако $c_i = b_i + c$ и $c_j = b_j + c$ са два произволни елемента на M_{n+1}, то $\left(c_i - c_j\right)^2 = \left(b_i - b_j\right)^2$ и произведението

$c_i c_j = (b_i + c)(b_j + c) = b_i b_j + c(b_i + b_j + c)$ е кратно на $(b_i - b_j)^2$ доколкото $(b_i - b_j)^2 / c$ и $(b_i - b_j)^2 / b_i b_j$ от свойствата на множеството $M_n^{'}$. Освен това, числата в M_{n+1} са различни, доколкото се получават от различните числа в $M_n^{'}$ чрез прибавяне на едно и също число.

Прилагайки описаната процедура многократно, за всяко $n \geq 2$ можем да получим множество с исканото свойство.

Коментар: Задачата демонстрира индуктивен подход в конструирането на пример, доказващ съществуването на множество с исканите свойства. Естествено е в хода на анализа да потърсим базов пример за множество с 2 елемента, отговарящо на условието. Той е тривиален. Сега логичният въпрос е: „Как от множеството с 2 елемента да получим множество с 3 елемента, унаследяващо исканите свойства?“ Тук добавянето на числото 0 като елемент идва като естествен отговор, но поставя и два нови въпроса – „Как да се справим с факта, че числото 0 не е естествено?“ и „Как да осигурим възможност да повтаряме тази процедура с още итерации, така че числата да са различни?“. Тези въпроси насочват към конструирането на коефициента *c*, който е ключов в решението и чието определяне е основна евристична бариера. При всички случаи, преодоляването ѝ изисква опитност и находчивост, но канализирането на тези качества в ефективно направление е свързано именно с формулирането на подходящите въпроси. При работата с ученици по задачата е важно да се акцентира както върху откривателския елемент в решението, така и върху базирането на индуктивния подход като ефективен механизъм за конструиране в сходни (и не само сходни) задачи.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: индуктивен подход в конструирането на пример, експериментиране в частни случаи

Задача 25 (ЕМТ 2024, Марин Христов): Да се намери най-малкото естествено число *n*, за което съществуват *n* две по две различни естествени числа $a_1, a_2, ..., a_n$, такива че стойността на израза $\dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 - 2025}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$ е естествено число.

Решение: Нека означим $S=\sum_{i=1}^{n}a_i; Q=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$. Тъй като a_i и a_i^2 са от еднаква четност, то S и Q също са от еднаква четност. Доколкото Q дели S^2-2025, S и Q са нечетни. Но тогава $S^2-2025=(S-45)(S+45)$ се дели на 8 и понеже Q е нечетно, получаваме $\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2-2025}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\geq 8$. От друга страна, от неравенството между средно аритметично и средно квадратично имаме $nQ\geq S^2>S^2-2025\geq 8Q$, следователно $n>8$, т.е. $n\geq 9$. Ще докажем, че за $n=9$ е възможно да удовлетворим условията.

Искаме да намерим решение на уравнението $S^2-2025=8Q$, тъй като знаем, че ако изразът има стойност, различна от 8, то $n>16$. Полагаме $(a_1,a_2,a_3)=(x-1,x,x+1)$, $(a_4,a_5,a_6)=(y-1,y,y+1)$ и $(a_7,a_8,a_9)=(z-1,z,z+1)$ за естествени числа *x*, *y* и *z*. Тогава можем да запишем уравнението $S^2-2025=8Q$ във вида $(3x+3y+3z)^2-2025=8(3x^2+3y^2+3z^2+6)$. Разделяйки на 3 и разлагайки лявата страна, получаваме $3(x+y+z+15)(x+y+z-15)=8(x^2+y^2+z^2+2)$. От съображения за делимост по модул 3 от дясната страна, точно едно от числата *x*, *y* и *z* не е кратно на 3. Нека $x=3u+1$, $y=3v, z=3w$ за $u,v,w\in\mathbb{N}$. След деление на 3 уравнението придобива вида $(3u+3v+3w-14)(3u+3v+3w+16)=8(3u^2+3v^2+3w^2+2u+1)$. Разглеждайки уравнението по модул 3 можем да забележим, че $u\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. При $u=2$ то е еквивалентно на $3(v-w)^2+\frac{1}{2}(2v-7)^2+\frac{1}{2}(2w-7)^2+55=0$. Последното уравнение няма решение, тъй като лявата му страна е положителна. При $u=5$ пък получаваме $v=7, w=10$, което води до примера $(a_1,a_2,...,a_9)=(15,16,17,20,21,22,29,30,31)$. С това решението е завършено.

Коментар: Както се вижда от решението на задачата, основната евристична бариера в него е свързана с конструиране на примера. В обучителна среда полезно би било същата задача да се разгледа без изискването числата $a_1,a_2,...,a_n$ да са различни две по две. Ако изобщо не се поставя условие за различност, то работещ пример е $a_i=15$ за всяко $i=1,...,9$ и той се намира с базови съображения, което значително понижава степента на сложност. Ако пък условието е числата $a_1, a_2, ..., a_n$ да са различни в съвкупност, а не непременно две по две, например при $a_1 = a_2 = ... = a_8 = 4.15$ и $a_9 = 9.15$ условието е изпълнено.

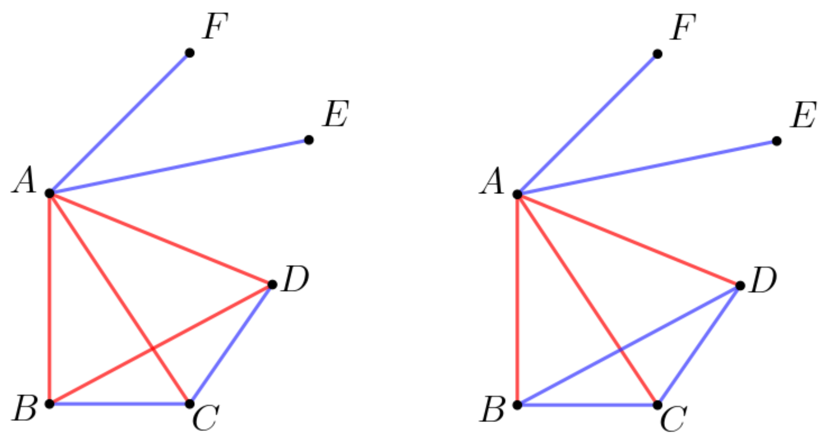
Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: неравенство на Коши, смяна на променливите, работа в частни случаи

V. Комбинаторика и теория на множествата

Задача 26 (F. Ramsey): Дадени са шест различни точки в общо положение в пространството и всеки две от тях са свързани с отсечка. Всяка от отсечките е оцветена в червено или синьо. Да се докаже, че при всяко оцветяване съществува триъгълник с едноцветни страни.

Решение: Нека означим точките с A, B, C, D, E и F и да разгледаме една от тях, например A. Тя участва в 5 отсечки и съгласно принципа на Дирихле поне 3 от тях са едноцветни, нека например това са AB, AC и AD и нека са червени. Ако някоя от отсечките BD, BC и CD е



червена, то получаваме триъгълник с червени страни. Ако пък допуснем, че всяка от отсечките BD, BC и CD е синя, то триъгълникът BCD е син.

Коментар: Тази класическа задача от теория на графите формулира базов факт, който учениците, развиващи обучението си по математика в извънкласната сфера, трябва да познават. Доказателството му от една страна е достъпно дори за ученици от начален етап, а от друга демонстрира неявна концепция за доказателство за съществуване – не можем в явен вид да посочим кой е едноцветният триъгълник или да го конструираме, но можем да се аргументираме, че е невъзможно да няма такъв. От тази гледна точка методически задачата функционира както като важен опорен факт, който учениците трябва да познават, така и като демонстрация на подход за доказателство, чрез който могат да генерират различни идеи за решение в широк набор от задачи.

Класове, за които задачата е подходяща: 5, 6

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле, пълно изчерпване на възможности

Задача 27: Дадени са шест различни точки в общо положение в пространството и всеки две от тях са свързани с отсечка. Всяка от отсечките е оцветена в червено или синьо. Да се намери най-малкият възможен брой едноцветни триъгълници.

Решение: Ако от някоя точка излизат x сини и $5-x$ червени отсечки, то тя е връх на $x(5-x)\leq 6$ разноцветни триъгълника (неравенството може да се обоснове дори с пълно изчерпване на възможностите). Прилагайки това за всяка от шестте точки и отчитайки, че всеки разноцветен триъгълник ще бъде отчетен по този начин от точно два от върховете си, заключаваме, че броят разноцветни триъгълници е не по-голям от $(6.6):2=18$. Но 6 точки са върхове на $\dfrac{6.5.4}{3!}=20$ триъгълника, така че поне $20-18=2$ от тях ще имат три страни в еднакъв цвят. Като пример можем да разгледаме конфигурацията, в която всички отсечки са сини, с изключение на страните на два червени триъгълника без общи върхове.

Коментар: Тук представяме различна гледна точка към проблема, с който е свързана предходната задача през оптиката на логическата конструкция „пример и оценка“. Подходът към решението е различен и е свързан с формулиране на хипотеза на база на практика тривиалния пример и моделиране с неравенства и комбинаторно броене за достигане до доказателството за екстремалност.

Класове, за които задачата е подходяща: 5, 6

Стратегии и инструменти, използвани в решението: комбинаторно броене, взаимодействие между пример и оценка

Задача 28: Във всяко от полетата на таблица 9×9 има по една бълха. Когато извикаме „Скок!“, всяка бълха скача в съседно по страна на своето поле. Казваме „Скок!“ един път. Какъв е най-малкият възможен брой полета, на които няма да има бълха след това?

Решение: Разглеждаме шахматно оцветяване на дъската, при което ъгловите полета са черни. Така черните полета са с 1 повече от белите. При изпълнение на командата всяка бълха скача на поле с цвят, различен от този на полето, на което е била първоначално. Тъй като в началото бълхите на бели полета са 40 и след изпълнение на командата само те ще бъдат на черни полета, то на дъската ще има поне едно празно черно поле.

Възможно е празното поле след изпълнение на командата да е единствено. Наистина, отделяме ъгловото поле в горния ляв ъгъл, покриваме останалата част на първия стълб с вертикални правоъгълници 2×1 и останалата част на дъската (която е 8×8) с хоризонтални правоъгълници 1×2. Сега бълхата в отделеното поле скача на кое да е съседно, а бълхите в двете полета на всеки правоъгълник си разменят местата. По този начин след изпълнение на командата на дъската ще има точно едно празно поле (отделеното).

Коментар: Тази класическа задача попада в категорията „пример и оценка“. Тук оценката извършваме чрез въвеждане на шахматно оцветяване на дъската – подход, който е стандартно средство за доказателство на екстремалност в таблица. Евристиката в намирането на решението е свързана с избора на правилния тип оцветяване. Как определяме какво оцветяване да използваме? При придвижването си бълхите заменят текущото си поле със съседно по страна такова, така че е необходимо оцветяване, което да разграничи именно разположените съседно едно спрямо друго полета.

Класове, за които задачата е подходяща: 5, 6

Стратегии и инструменти, използвани в решението: оцветяване

Задача 29 (Грибалко, А.): Възможно ли е във всяка от клетките на таблица 40×41 да се запише по едно число, така че числото във всяка клетка да е равно на броя на съседните ѝ по страна клетки, в които е записано същото число?

Решение: Оцветяваме първия, четвъртия, …, 41-вия ред на таблицата, както и третата, шестата, …, 39-тата ѝ колона. Така таблицата се разделя на квадрати 2×2, квадрати 1×1 и домино - 1×2 или 2×1. Във всеки от квадратите 1×1 записваме числото 0, във всяка от клетките на квадратите 2×2 – числото 2, а във всяка от клетките на всяко домино – числото 1. При така полученото попълване на клетките на таблицата условието е изпълнено.

1	1	0	1	1	0	…	…	…	1	1
2	2	1	2	2	1	…	…	…	2	2
2	2	1	2	2	1	…	…	…	2	2
1	1	0	1	1	0	…	…	…	1	1
2	2	1	2	2	1	…	…	…	2	2

2	2	1	2	2	1	…	…	…	2	2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	1	0	1	1	0	…	…	…	1	1

Коментар: При конструиране на примера се използва една от основните техники в комбинаторните задачи, свързани с таблици – оцветяване. Съществуват и други примери, които доказват съществуването на попълване на таблицата, съгласуващо се с условието. Характерно за посочения е, че той е приложим за всяка таблица $m \times n$ (с евентуална необходимост от промяна на редуването на оцветени и неоцветени редове/колони). При самостоятелна работа по задачата е очаквано учениците да достигнат до различни валидни решения. Целесъобразно е те да се коментират и съпоставят, включително от гледна точка на приложимостта им за таблица с произволни размери.

Класове, за които задачата е подходяща: 5, 6

Стратегии и инструменти, използвани в решението: оцветяване, метод на водещия въпрос

Задача 30 (ММО 2017, Френкин, Б.Р.): По окръжност са записани 100 ненулеви числа. Между всеки две съседни числа записали произведението им, след което изтрили първоначално написаните 100 числа. Оказало се, че броят на положителните числа по окръжността не се е променил. Колко най-малко могат да са били положителните числа сред първоначално записаните по окръжността?

Решение: Да допуснем, че положителните числа са били не повече от 33; тогава отрицателните са били поне 67. За да генерира отрицателно произведение, едно отрицателно число трябва да бъде съседно с положително. Освен това, всяко число участва в точно две произведения. Така дори всички положителни числа да участват в произведения само с отрицателни, получените отрицателни произведения биха били най-много $2.33 = 66 < 67$, което е противоречие. Последното доказва, че положителните числа са били поне 34.

Пример за точно 34 положителни числа можем да направим по следния начин: записвайки числата по часовниковата стрелка, записваме последователно едно положително и след това 33 групи от вида (положително, отрицателно, отрицателно). Така очевидно положителните числа в началната конфигурация са 34. Положителни произведения ще се получат само от двойката съседни положителни числа и от всичките 33 двойки съседни отрицателни числа, така че положителните числа след произведенията също са 34.

Коментар: Задачата е от типа „пример и оценка“. Основното при решаване на задачата е намирането на условие за баланс между минимализиране на броя положителни числа в началната конфигурация и гарантиране на запазване на броя на положителните произведения. Отговорът на въпроса „Какво генерично редуване на положителни и отрицателни числа би запазило броя положителни числа сред произведенията?“ води до концепция за конструкцията на примера, а оттам оценката следва съвсем естествено. Задачата демонстрира случай, в който пътят към примера ни води към стратегията за доказване на оценката, чието следване пък намира търсената гранична стойност.

Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка, разглеждане на аналогична задача за по-малка стойност на броя числа, метод на водещия въпрос

Задача 31: Какъв е най-големият възможен брой царе, които могат да се поставят на шахматна дъска 8×8, така че никой от тях да не бие никой от останалите?

Решение: Във всеки квадрат 2×2 може да се постави най-много един цар. Непресичащите се квадрати 2×2 на шахматната дъска са 16, така че максималният възможен брой царе с исканото свойство не може да е по-голям от 16. Можем да разположим точно 16 царе като например във всеки от 16-те непресичащи се квадрати 2×2 поставим по един цар в горния му ляв ъгъл.

Ц		Ц		Ц		Ц	
Ц		Ц		Ц		Ц	
Ц		Ц		Ц		Ц	
Ц		Ц		Ц		Ц	

Коментар: Задачата изисква доказателство за екстремалност и посочване на пример за реализация, което я причислява към категорията „пример и оценка“. В случая както за извършване на доказателството за максималност, така и за конструиране на примера, използваме блоково оцветяване – често прилагана стратегия в комбинаторните задачи за таблици.

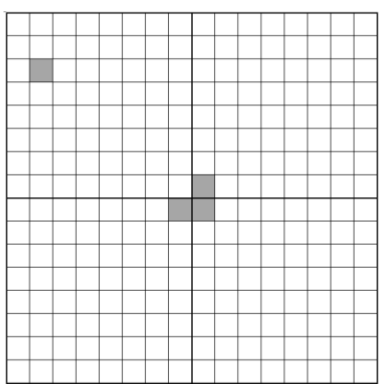
Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: блоково оцветяване

Задача 32: Докажете, че за всяко естествено число *n* квадратна дъска $2^n \times 2^n$, от която е отстранено едно произволно избрано поле, може да бъде покрита с „ъгълчета“, съставени от три единични квадратчета.

Решение: Ще използваме индукция по *n*. При $n=1$ дъската е с размер 2×2 и покритието винаги е възможно, независимо от избора на отстраненото поле: 

Да допуснем, че за някое $n=k$ покриването е възможно, независимо от избора на отстранено поле и да разгледаме случая $n=k+1$ и съответно дъска



$2^{k+1} \times 2^{k+1}$, от която е отстранено произволно поле. Тя е съставена от 4 дъски $2^k \times 2^k$, от точно една от които е отстраненото поле. За нейното покритие можем да приложим индукционната хипотеза. Сега поставяме едно „ъгълче“, така че по едно негово поле да попада във всяка от другите три дъски $2^k \times 2^k$. Ако мислено отстраним покритото от него поле от всяка от тези дъски, за нея можем също да приложим индукционната хипотеза и да завършим покритието, с което доказателството е завършено.

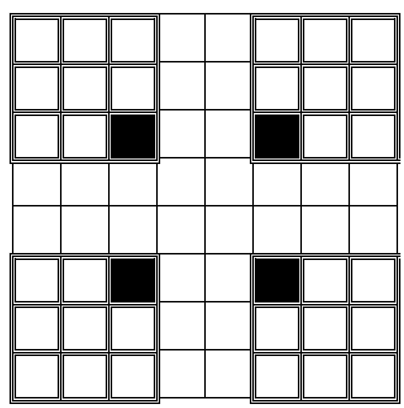
Коментар: Тази класическа задача използва индуктивен подход за доказване съществуването на покритие. Идеята за него идва като естествено следствие от експериментирането с изследване и търсене на покритие за няколко последователни стойности на *n*. От методическа гледна точка характерното тук е, че задачата може да бъде използвана като средство ученици от ранния прогимназиален (и дори от началния етап) да бъдат запознати с логическата структура на математическата индукция. Традиционно индукцията се въвежда с типични алгебрични задачи, което обаче създава възрастова бариера, свързана с владеенето на определен алгебричен апарат. Задачи като разгледаната предоставят възможност учениците да осмислят идеята на индукцията на значително по-ранна възраст и да свикнат да я прилагат в комбинаторен (а и не само) контекст. Нещо повече: за много ученици такова визуално-обвързано и нагледно въвеждане на индукцията би довело до по-дълбоко разбиране и интериоризиране от стандартния подход, който често първоначално остава само формално възприет и механично възпроизвеждан.

Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция, метод на водещия въпрос

Задача 33 (SAJMO 2018): Дадена е таблица 8×8. Всяка нейна клетка е оцветена в черно или бяло, така че във всеки квадрат 3×3 броят на белите клетки е четен. Какъв е най-малкият възможен брой на черните клетки?

Решение: Нека разгледаме квадратите 3×3, позиционирани съответно в горния и долния ляв и горния и долния десен ъгъл на таблицата. Във всеки от тях трябва да има поне по една черна клетка, тъй като в противен случай биха съдържали 9, т.е. нечетен брой бели клетки. Така броят на черните клетки в таблицата е поне 4. Този брой е достатъчен, доколкото ако оцветим например посочените на чертежа клетки в черно, всеки квадрат 3×3 от таблицата ще съдържа точно една от тях, така че съответно ще съдържа точно 8 бели клетки.



Коментар: Задачата е от типа „пример и оценка“. Оценката извършваме, избирайки пример за непресичащи се квадрати 3×3, които, оставени изцяло бели, биха довели до противоречие с условието. За конструиране на примера също използваме намиране на подходяща позиция за черните клетки в рамките на тези бели квадрати. Така решаването на задачата се свежда до отговора на въпроса „Кои са тези квадрати 3×3, чието взаимно позициониране пречи да е изпълнено изискването при максимален брой бели клетки?“.

Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка, метод на водещия въпрос

Задача 34 (ВОМ 1961): Дадена е правоъгълна таблица $m\times n$, във всяка от клетките на която е записано реално число. На всеки ход се избира произволен ред или колона и всички числа в избрания ред (колона) се заменят с техните противоположни. Да се докаже, че чрез краен брой такива ходове можем да получим таблица, за която е изпълнено, че сборът на числата във всеки ред и във всяка колона е неотрицателен.

Решение: Ще наричаме всеки ред и всяка колона „линия“ в таблицата. Тъй като всяко от mn-те числа може да промени единствен знака си, таблицата може да изглежда по най-много 2^{mn}, т.е. краен брой различни начини. Оттук следва, че има и краен брой варианти за сбора S на всички числа в таблицата.

Ако в началната конфигурация всяка линия има неотрицателен сбор, то целта е постигната. Да допуснем, че има линия с отрицателен сбор. Правим ход, заменяйки всяко число от нея с неговото противоположно и така сборът на числата в линията се заменя с неговия противоположен, който е положителен. Твърдим, че с това общият сбор S на числата в таблицата нараства. Наистина, ако разгледаме този сбор като сбор на всички линии, успоредни на разглежданата, останалите са запазили сбора си, а сборът в нея се е увеличил, така че и сборът на всички числа в таблицата е нараснал. Така при всеки ход (приложен за линия с отрицателен сбор) S ще нараства и тъй като има краен брой варианти за него, процесът по прилагане на ходове за линии с отрицателен сбор не може да продължи безкрайно и ще настъпи момент, в който сборът по всяка линия ще бъде неотрицателен.

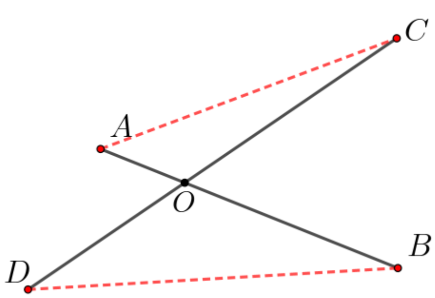
Коментар: В конструирането на алгоритъма се базираме на моновариантността, свързана с монотонното нарастване на сбора S на всички числа в таблицата при прилагането на ход върху линия с отрицателен сбор на числата в нея. Това е средство, което винаги трябва да се има предвид, когато е необходимо да се докаже, че алгоритъм, състоящ се от нефиксиран брой еднотипни итерации, е краен. Решението може да се базира и на принципа на крайния елемент: сред крайния брой възможни таблици избираме такава с максимален сбор на елементите. Тя отговаря на условието, понеже ако в нея имаше линия с отрицателен сбор, щяхме да можем да извършим ход с нея и да увеличим сбора в таблицата, получавайки противоречие с максималността.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: моновариант, пълно изчерпване на възможностите, принцип на крайния елемент

Задача 35: В равнината са дадени $2n$ различни точки. Да се докаже, че те могат да се свържат по двойки с n отсечки, никои две от които нямат обща точка.

Решение: За всяко построяване на n отсечки с краища измежду дадените точки означаваме с S сбора от дължините им. Тъй като има краен брой начини за свързване, S може да приема краен брой стойности. Разглеждаме произволно свързване. Ако в него отсечките нямат общи точки, целта е постигната. Нека в свързването има двойка отсечки AB и CD, които имат обща точка. Тази точка не може да е край на отсечка, тъй като точките A, B, C и D са различни. Нека $AB \cap CD = O$. От неравенството за триъгълниците AOC и BOD имаме, че $AB + CD = AO + OC + DO + OB > AC + BD$, така че ако заменим AB и CD с AC и BD, ще получим свързване на точките, при което сборът от дължините на всички отсечки S е по-малък. На всеки ход прилагаме описаната процедура за двойка отсечки, които имат обща точка, намалявайки S. Тъй като има краен брой варианти за стойността на S, този процес не може да продължи безкрайно. Но той не може и да приключи докато все още има отсечки с общи точки, защото бихме могли да ги заменим с други по описания начин и да намалим S. Това доказва, че след краен брой прилагания на процедурата ще получим конфигурация с непресичащи се отсечки.



Коментар: В доказателството използвахме подхода да изберем произволна конфигурация и да въведем в нея алгоритъм, състоящ се от итеративно повторение на една и съща операция, при който всяка итерация подобрява първоначалното разположение по отношение на крайната цел. За да можем да докажем крайността на този алгоритъм, използвахме моновариантността на S спрямо него и наличието на краен брой стойности за S. Тук също можем да базираме решението на принципа на крайния елемент: сред крайния брой възможни свързвания избираме такова с минимален сбор на дължините на отсечките. То отговаря на условието, понеже ако в нея имаше две пресичащи се отсечки AB и CD, щяхме да ги заменим с AC и BD и да намалим сбора, получавайки противоречие с минималността.

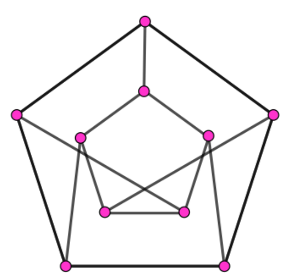
Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: моновариант, принцип на крайния елемент

Задача 36 (ВОМ 1970): В една държава системата на авиолиниите е устроена така, че всеки град е свързан с директен двупосочен полет с не повече от три други града, но от всеки град може да се достигне с полети до всеки друг с най-много едно прекачване. Колко най-много могат да бъдат градовете в тази държава?

Решение: Да разгледаме фиксиран град A. От него може да има директен полет към най-много три други града, а от всеки от тях може да има директни полети към най-много два други града (тъй като от тези градове има полет към A). Дотук имаме най-много $1+3+3.2=10$ града. Ако допуснем, че има и град извън изброените, то той не може да се достигне с полет (и най-много едно прекачване) от A, което противоречи на условието, така че градовете в тази държава не са повече от 10.

Следващият пример доказва, че е възможно градовете в държавата да са точно 10.



Коментар: Дадената задача е от категорията „пример и оценка“ и достигането до хипотезата за максималният възможен брой градове не представлява трудност – то е резултат на внимателно проследяване на условието. Конструкцията, доказваща съществуването, е класически пример от теорията на графите – граф на Петерсен (Petersen graph). Така познаването му, което е функция на опита, и съобразителността да се направи аналогия между комбинаторните конфигурации, се оказват ключови за бързо достигане до работещ пример в решението на задачата.

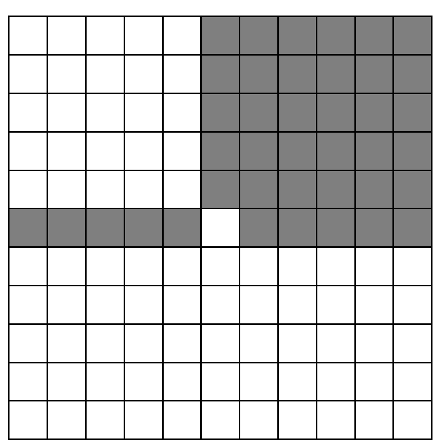
Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: граф на Петерсен, взаимодействие между пример и оценка

Задача 37 (Shortlist JBMO 2023): Всяка от клетките на квадратна таблица 11×11 е оцветена в бяло или черно, така че има точно 6 реда, в които черните клетки са повече от белите, и точно 6 колони, в които белите клетки са повече от черните. Каква е най-голямата възможна дължина на страна на едноцветен квадрат, съставен от клетки на таблицата?

Решение: Да допуснем, че в таблицата има едноцветен квадрат със страна, която е по-голяма или равна на 6. Ако той е изцяло бял, то трябва да има поне 6 реда, в които има поне по 6 бели клетки, т.е. в които белите клетки са повече от черните, а по условие има точно 5 реда с това свойство. Ако пък този квадрат е изцяло черен, то трябва да има поне 6 колони, в които да има поне по 6 черни клетки, т. е. в които черните клетки са да повече от белите, а по условие има точно 5 колони с това свойство. Противоречието доказва, че страната на едноцветен квадрат в таблицата не може да е по-голяма от 5.

При оцветяването от дадения по-долу пример е изпълнено, че само на първите 6 реда черните клетки са повече от белите и само в първите 6 колони белите клетки са повече от черните. От друга страна, при така направеното оцветяване има едноцветни квадрати със страна 5 – например този в сечението на първите 5 реда и първите 5 колони.



Коментар: Задачата е от категорията „пример и оценка“, като за извършване на оценката в посоченото решение използваме допускане на противното. Достигането до подходящ пример при правилно формулирана хипотеза за отговора може да се извърши като мислено в таблицата заделим място за едноцветен (например бял) квадрат, след което търсим конфигурация на черните клетки, при която условието е изпълнено.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: допускане на противното, взаимодействие между пример и оценка

Задача 38 (фолклор около Теоремата на Мирски; вж. напр. SAJMO 2019): Нека n е естествено число. Разполагаме с n на брой цвята. Всяко от числата 1, 2, 3, …, 1000 трябва да бъде оцветено в един от тези цветове, като за всеки две различни числа да е изпълнено, че ако едното е кратно на другото, те са оцветени различно. Каква е най-малката възможна стойност на n?

Решение: Числата $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, …, $2^9=512$ трябва да бъдат различно оцветени, така че са необходими поне 10 цвята. Оцветяване с точно 10 цвята е възможно, ако използваме по един цвят за числата във всяко от множествата: $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{4,5,6,7\}$, $\{2^k,2^k+1,...,2^{k+1}-1\}$ (k=3, 4, …, 8), $\{512,513,...,1000\}$.

Коментар: Задачата е от типа „пример и оценка“. Тук оценката се реализира чрез пример за набор от числа, които задължително трябва да бъдат различно оцветени, а конструкцията на множествата еднакво оцветени числа се базира на същия пример. Взаимодействието между примера и оценката в задачите от тази категория често се изразява в наличие на евристични препратки от доказателството на оценката към конструиране на примера и/или обратното и учениците трябва да развият умения да ги търсят целенасочено. Разсъждаването по задача с аналогично условие, поставено за по-малък набор от числа, насочва към наблюдението, че определящи за броя цветове са именно степените на двойката.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка, разглеждане на аналогична задача за по-малки параметри

Задача 39 (Богданов, И.): Дадени са 15 две по две различни цели числа. Петя пресмята и записва на дъската всички възможни сборове на 7 измежду тези числа, а Вася – всички възможни сборове на 8 измежду тези числа. Възможно ли е сборовете, записани от Петя, да са същите като сборовете, записани от Вася? (Ако един сбор се повтаря няколко пъти при Вася, той трябва да се среща същия брой пъти при Петя и обратното.)

Решение: Нека 15-те дадени числа са 7 различни естествени числа, техните противоположни и числото 0. Разглеждаме сбора $S = a_1 + a_2 + ... + a_7$ на някои седем от тези числа. Сборът на 15-те числа е 0, така че сборът на останалите осем е $a_8 + a_9 + ... + a_{15} = -S$. Следователно сборът на осемте числа $-a_8$, $-a_9$, …, $-a_{15}$, които са част от 15-те дадени числа, е S. Съответствието между седморките $\{a_1, a_2, ..., a_7\}$ и $\{-a_8, -a_9, ..., -a_{15}\}$ е взаимноеднозначно, така че наборът от сборове, записани от Петя, ще съвпадне с този на записаните от Вася.

Коментар: Решението на задачата се състои в конструирането на подходящ набор за първоначалното множество от числа. Тук в основата на подбора на първоначални числа стои идеята за използване на взаимноеднозначно съответствие между седморки и осморки числа. То пък е естествено, тъй като $C_{15}^7 = C_{15}^8$. Задачата не изисква използването на тежък математически апарат и е достъпна за ученици от прогимназиалния курс, а същевременно с това е средство те да се запознаят с концепцията за биективно съответствие и да придобият поне периферна представа за потенциала, който тя носи. Конструктивните доказателства чрез взаимноеднозначни съответствия имат изключително важно място в математиката и е целесъобразно учениците да бъдат въведени в тях на оперативно ниво възможно по-рано, за да свикнат със самата им философия.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимноеднозначни съответствия, метод на водещия въпрос

Задача 40 (Марин Христов): Във всеки от върховете на правилен 100-ъгълник е записано естествено число, по-малко от 50. Да се докаже, че съществува правоъгълник *ABCD* с върхове измежду тези на 100-ъгълника, такъв че сборът на числото в A и числото в B е равен на сбора на числото в C и числото в D.

Решение: Достатъчно е да докажем, че сред върховете на многоъгълника има две двойки диаметрално противоположни точки с еднакви разлики на числата в тях. Наистина, ако двойките точки са (A,C) и (B,D), като числата в A, B, C и D са съответно a,b,c и d, то $a-c=d-b$ е еквивалентно на $a+b=c+d$. Освен това, ако O е център на 100-ъгълника, то O е пресечна точка на диагоналите на $ABCD$ и $OA=OB=OC=OD$, което гарантира, че $ABCD$ е правоъгълник.

В 100-ъгълника има 50 двойки диаметрално противоположни върхове, а възможните стойности на неотрицателните разлики на числата в тези двойки са числата от 0 до 48 (доколкото числата във върховете по условие не надминават 49). Тъй като двойките са 50, а възможните разлики са 49, то от принципа на Дирихле следва, че има две двойки с равни разлики на числата в тях, които според доказаното са върхове на правоъгълник с исканото свойство.

Коментар: Задачата илюстрира приложение на принципа на Дирихле в комбинаториката. Важно елемент от стратегията при решаването ѝ е условието за равенство на сборовете да се замени с алгебрично еквивалентното условие за равенство на разликите. Тази промяна е съществена, тъй като броят на възможните сборове надвишава броя на двойките точки и за него не може да бъде приложен принципа на Дирихле. От тази гледна точка задачата демонстрира ситуация, при която тривиално алгебрично преобразование, заменящо едно равенство с еквивалентно на него, представлява ключова стъпка към решението.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле

Задача 41: Докажете, че съществува единствено множество A, такова, че за всяко множество B е изпълнено, че $A\cup B=B$.

Решение: Нека $A=\varnothing$. Тогава за всяко множество B имаме, че $A\cup B=\varnothing\cup B=B$.

Да допуснем, че съществуват различни множества A и A_1, такива, че за всяко множество B е в сила (1) $A\cup B=B$ и (2) $A_1\cup B=B$. Тогава в частност (1) е в сила ако поставим A_1 в ролята на B, така че $A\cup A_1=A_1$. Ако в (2) поставим A на мястото на B, получаваме, че $A_1 \cup A = A$. Но от комутативността $A \cup A_1 = A_1 \cup A$, така че $A \equiv A_1$ и това доказва единствеността на множеството A.

Тъй като празното множество изпълнява условието на задачата и доказахме, че множеството с исканото свойство е единствено, то $A = \varnothing$.

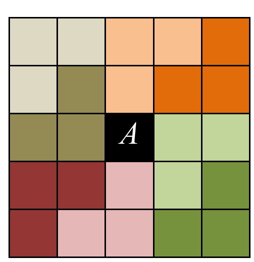
Коментар: Задачата представлява базов факт от теорията на множествата. Разглеждането ѝ в работата с ученици е целесъобразно, тъй като тя илюстрира в изчистена форма конструкцията на доказателство за съществуване и единственост – намирането на търсения обект и достигане до извод за единствеността му чрез допускане на противното. В случая досещането кое е търсеното множество не е предизвикателство, но е важно да се осъзнае механизмът на доказване на единствеността му.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: допускане на противното, аналогия с класически доказателства

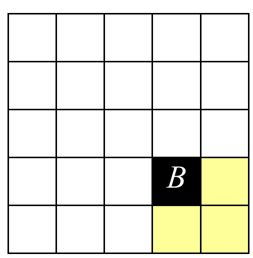
Задача 42 (JBMO 2015): Квадрат 2×2, от който е премахнато единично квадратче, ще наричаме *L*-фигура. Дадена е бяла таблица 5×5 и естествено число *k*. Двама играчи *A* и *B* играят, като *A* играе пръв и на всеки свой ход съответният играч избира бяло квадратче от дъската и го оцветява в черно. Играта приключва, когато точно *k* квадратчета на дъската станат черни. Накрая се проверява дали е възможно белите квадратчета на дъската, освен най-много две от тях, да се покрият с *L*-фигури, така че никое черно квадратче да не бъде покрито. Ако това е възможно, печели *A*. Ако не е възможно, печели *B*. Коя е най-малката стойност на *k*, за която *B* има печеливша стратегия?

Решение: Ще докажем, че за всяко $k \le 3$ A има печеливша стратегия. На първия си ход той оцветява централното квадратче. Сега може мислено да покрием остатъка от таблицата с *L*-фигури (например чрез разделяне на всеки от правоъгълниците 3×2, заобикалящи централното квадратче, на по две *L*-фигури).



Очевидно това е печеливша стратегия за A при $k=1$. При $k=2$ могат да се използват всички L-фигури без тази с оцветеното от B черно поле и така всички бели полета без 2 ще бъдат покрити, с което печели A. Ако пък $k=3$, което и поле да оцвети в черно B, стратегията на A е да оцвети в черно друго поле, попадащо в същата L-фигура при мисленото разделяне. Така ще могат да се използват всички мислени L-фигури, без тази с двете черни полета и така ще остане точно едно непокрито бяло поле, с което A печели.

Ще докажем, че при $k=4$ B има печеливша стратегия. Тъй като броят на белите квадратчета в края на играта ще бъде 21, което е кратно на 3, то за да спечели, A ще трябва да ги покрие всичките с L-фигури. За определеност (след евентуално завъртане на таблицата) можем да считаме, че при първия си ход A не оцветява квадратче от последните два реда. На първия си ход B оцветява в черно квадратчето от четвъртата колона на четвъртия ред. Сега ако на втория си ход A не оцвети никое от квадратчетата под, вдясно или по диагонал долу-вдясно от оцветеното от B (оцветени в жълто на долния чертеж), B на своя ход оцветява в черно квадратчето от четвъртата колона на петия ред. Така той печели, защото останалите жълти квадратчета не могат да бъдат покрити от L-фигура. Ако пък на втория си ход A оцвети квадратчето точно под това на B или квадратчето вдясно от това на B, то B оцветява другото от тези две квадратчета и така ъгловото квадратче долу вдясно не може да бъде покрито. Последно, ако A на втория си ход оцвети квадратчето в долния десен ъгъл, то B оцветява квадратчето в третата колона на петия ред и така квадратчето в четвъртата колона на петия ред остава непокрито.



Това доказва, че най-малката стойност на k, при която B има печеливша стратегия, е $k=4$.

Коментар: Както оценката, така и примерът в тази задача, се реализират чрез конструиране на примери. За да докажем, че при $k<4$ B няма печеливша стратегия, посочваме печелившите стратегии на A във всеки от случаите за стойността на k. За аргументацията, че при $k=4$ B има печеливша стратегия, конструираме алгоритъм за ходовете му, следването на който му гарантира победа. Как достигаме до хипотезата, че именно $k = 4$ е най-малката стойност на *k*, за която *B* има печеливша стратегия? Логично е, че за *B* е най-лесно да затрудни *A* за онези стойности на *k*, за които оставащият след играта брой бели квадратчета е кратен на 3, тъй като според условието за победа това би задължило *A* да покрие всички бели квадратчета. В тези случаи е най-лесно да конструираме печеливша стратегия за *B*, тъй като би било достатъчно да посочим дори само едно квадратче, което *A* няма да може да покрие. Тъй като при $k = 1$ (и съответно 24 бели квадратчета) *A* има печеливша стратегия, следващият кандидат за верен отговор на задачата е именно $k = 4$.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: контрапример, пълно изчерпване на възможности, метод на водещия въпрос

Задача 43 (JBMO 2021): Колко най-много измежду естествените числа от 1 до 2021 можем да изберем така, че които и три числа *a*, *b* и *c* измежду избраните да вземем (възможно е едно и също число да бъде взето повече от един път), да бъде изпълнено неравенството $|a+b-c| > 10$?

Решение (Иван Тагарев): Нека избраните числа определят множеството *M*, т.е. търсим възможно най-голямата мощност на *M*. Нека *k* е най-малкият елемент на *M*. Тогава съгласно условието е необходимо $|k+k-k| > 10$, така че $k \geq 11$. Нека $m \leq 2021$ е най-големият елемент на *M*. Разглеждаме числата *t* от вида $1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{m-10}{2} \right\rfloor$. Да допуснем, че числата $10+t$ и $m-t$ са едновременно в *M*. Тогава при избор на $a = 10+t$, $b = m-t$ и $c = m$ бихме получили $|a+b-c| = 10$, което противоречи на условието. Така получаваме, че *M* съдържа най-много $\left\lfloor \frac{m-10}{2} \right\rfloor \leq 1005$ числа, различни от *m*, т.е. общо не повече от 1006 числа.

Сега разглеждаме множеството от 1006 числа $M = \{1016, 1017, ..., 2021\}$. За всеки три числа от него е изпълнено, че $|a+b-c| \geq 1016+1016-2021 = 11$, така че то изпълнява условието на задачата.

Коментар: В тази задача от типа „пример и оценка“ конструирането на примера не представлява трудност и той може да бъде насочващ за подхода към доказателството, че M не може да съдържа повече от 1006 елемента. Показаното решение използва принципа на крайния елемент, чието приложение води до кратко и елегантно доказателство на оценката.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на крайния елемент, взаимодействие между пример и оценка

Задача 44: В шахматен турнир всеки участник е изиграл по една партия с всеки от останалите. Докажете, че участниците могат да бъдат номерирани по такъв начин, че никой участник да не е загубил от този непосредствено след него.

Решение: Ще използваме индукция по броя n на участниците в турнира. При $n = 2$ в случай на неравен резултат поставяме победителя под номер 1, а победения под номер 2, а при реми ги подреждаме произволно. Да допуснем, че съществува подреждане с исканото свойство за n участници и да разгледаме турнир с $n+1$ участници. Отделяме произволен от тях; нека го означим с C. Партиите между останалите участници определят турнир с n участници и според индукционното предположение можем да ги подредим по искания начин в редица $A_1, A_2, ..., A_n$. Ако C не е загубил от A_1, го поставяме на първо място. Ако C е загубил от всички, го поставяме на последно място в редицата. Нека m е най-големият индекс, за който участник C е загубил от $A_1, A_2, ..., A_m$, $0 < m < n$. Тогава C не е загубил от A_{m+1} и можем да го поставим непосредствено преди него, получавайки редицата $A_1, A_2, ..., A_m, C, A_{m+1}, ..., A_n$, която удовлетворява условието.

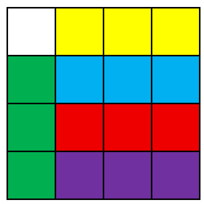
Коментар: Задачата демонстрира възможността за интегриране на индуктивен подход за доказване на съществуване в проблеми с комбинаторен характер. Тук идеята за прилагане на индукция произлиза както от експериментирането в търсене на подредба за малки стойности на n, така и в простотата на концепцията за търсене на подредба чрез позициониране само на един допълнителен участник във вече подредена редица.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

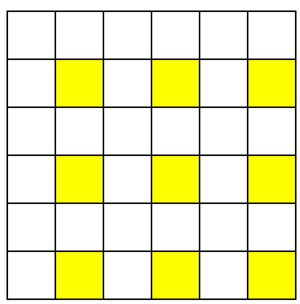
Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция, експериментиране в частни случаи

Задача 45 (Shortlist JBMO 2022): Дадено е естествено число n. Колко най-много правоъгълника със страни 1 и $n+1$ могат да бъдат изрязани от квадрат със страна $2n$ чрез разрези, успоредни на страните на квадрата?

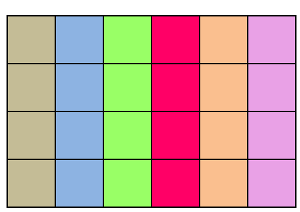
Решение: При $n=1$ правоъгълниците очевидно са най-много 2. При $n=2$ квадратът е с лице $S_2=16$, а всеки от правоъгълниците е с лице $1.3=3$, така че доколкото $\left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor = 5$, могат да бъдат изрязани не повече от 5 правоъгълника 1×3. Това може да стане например така:

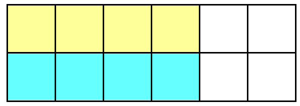


Нека $n=3$. Тогава лицето на квадратът е $S=36$, а на всеки правоъгълник е $1.4=4$, така че броят на изрязаните правоъгълници 1×4 не е по-голям от 9. Да допуснем, че е възможно разрязване на 9 правоъгълника и да разгледаме квадрата, мислено разделен на единични квадратчета. При оцветяване в жълто на квадратчетата в четен ред и колона, жълтите квадратчета ще са 9, а останалите 27 ще останат бели.



Всеки правоъгълник 1×4 съдържа точно 0 или 2 жълти квадратчета, така че общият брой жълти квадратчета в изрязаните правоъгълници ще е четен. Тъй като обаче жълтите квадратчета са 9, то поне едно от тях не може да бъде покрито от правоъгълник 1×4 и съответно е невъзможно разрязването да е без остатък. Изрязване на 8 правоъгълника е възможно например така:





Нека сега $n \geq 4$. Лицето на квадрата е $S_n = 4n^2$, а на всеки правоъгълник е $n+1$, така че доколкото $\dfrac{4n^2}{n+1} = 4n - 4 + \dfrac{4}{n+1}$ и $0 < \dfrac{4}{n+1} < 1$, не е възможно изрязване на повече от $4n-4$ правоъгълника. Изрязване на точно $4n-4$ правоъгълника е възможно например по следния начин: отделяме централния квадрат 2×2, след което го ограждаме с четири правоъгълника $(n+1)\times(n-1)$ и от всеки от тях изрязваме по $n-1$ правоъгълника със страни $1\times(n+1)$.

Коментар: Задачата е от типа „пример и оценка“ и демонстрира разнообразие от техники при аргументирането на оценката и конструиране на примера в различните случаи. В случая $n=3$ невъзможността за пълно разрязване не може да бъде аргументирана чрез оценка на лицата и прилагаме оцветяване, за да я докажем. В случая $n \geq 4$ пък оценката се генерира само на база анализ на стойностите на лицата, но построяването на примера изисква повече съобразителност. Отговорът на въпроса „Как да получим отсечка с дължина $n+1$?“ е водещ при намиране на подходяща конструкция.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: оцветяване, доказателство чрез неравенства, отделяне на цяла част, метод на водещия въпрос

Задача 46 (ВОМ 2008-2009, Берлов, С.): В някои от полетата на шахматно оцветена дъска 10×10 са поставени общо k топа (по един в поле), след което са отбелязани всички полета, които са атакувани от поне един топ (топът атакува и клетката, в която се намира). Каква е най-голямата възможна стойност на k, за която при премахване на който и да е топ от дъската поне едно отбелязано поле ще остане извън обхвата на атака?

Решение: Да разгледаме подредба на k топа, която удовлетворява условието на задачата.

<u>Първи случай:</u> Ако във всяка колона има топ, то всички полета от дъската са атакувани. Ако в някоя колона има повече от един топ, след премахване на топа от нея няма да настъпи промяна в броя на атакуваните полета. Следователно $k \leq 10$.

<u>Втори случай:</u> Ако във всеки ред има топ, то аналогично $k \leq 10$.

<u>Трети случай:</u> Нека има празен ред и празна колона. Всеки топ трябва да е единствен или в своя ред, или в своята колона, защото в противен случай би могъл да бъде премахнат, без да се промени броя атакувани полета. За всеки топ ще отбележим реда и/или колоната, в която той е единствен. Ако са отбелязани не повече от 8 реда и не повече от 8 колони, то общият брой топове е не повече от 16. Ако има девет отбелязани колони (или реда), то за да бъде всеки топ единствен в своята колона (ред), топовете са само 9, тъй като в разглеждания случай има поне една празна колона.

Така получаваме, че $k \le 16$. Следващият пример демонстрира как могат да се подредят точно 16 топа; за всеки топ неговата клетка е оцветена в същия цвят, в който е оцветена и клетката, която би спряла да бъде атакувана при премахването му.

Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т		
									Т
									Т
									Т
									Т
									Т
									Т
									Т
									Т

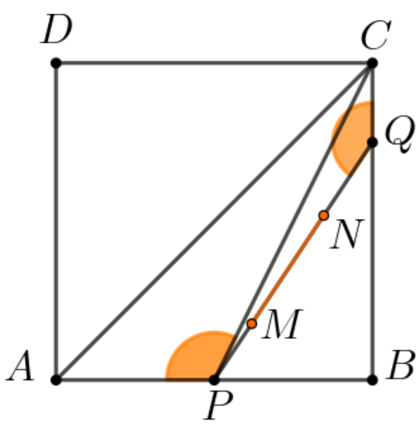
Коментар: Задачата е от категорията „пример и оценка“ и както в други задачи от този тип, взаимодействието между търсенето на примера и разсъжденията, обслужващи доказването на екстремалността, е водещо за откриване на съществените стъпки към решението. В анализа е важно да се разграничат случаите на наличие на топ във всяка колона и наличие на колони, в които няма топ. Фокусирането само в първия рискува да бъде пропусната възможност за увеличаване на броя разположени топове. От тази гледна точка задачата е добро припомняне на факта, че това, което на пръв поглед изглежда оптимално, не винаги е в действителност такова.

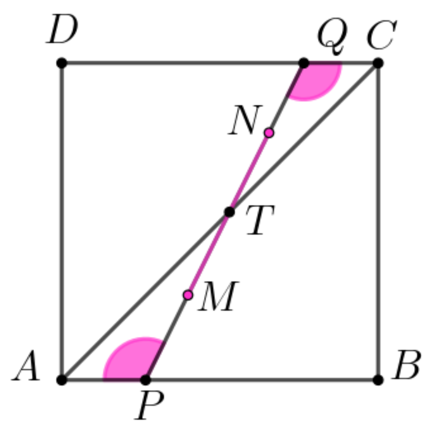
Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка, пълно изчерпване на възможностите

Задача 47 (ТГ 2016): Даден е квадрат с дължина на диагонала 3. Да се намери най-малкото естествено число k със следното свойство: които и k точки да изберем от вътрешността и по периметъра на квадрата, измежду тях ще има две на разстояние, ненадминаващо 1.

Решение: Ще докажем, че най-голямото възможно разстояние между две точки от вътрешността или по периметъра на квадрат е равно на диагонала му. Нека M и N са точки по периметъра или от вътрешността на квадрат $ABCD$ и правата MN пресича две негови страни в точки P и Q. Очевидно $MN \le PQ$. Възможно е точките P и Q да са на една страна на квадрата, на две съседни или от две срещуположни страни.

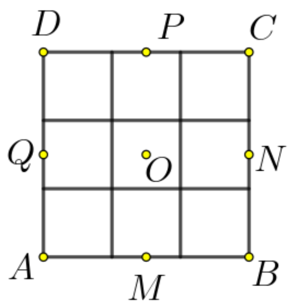




В първия случай твърдението е очевидно, а ако точките P и Q са от две съседни страни, нека без ограничение на общността те са съответно AB и BC. От външни ъгли $\measuredangle APC \ge \measuredangle PQC \ge \measuredangle ABC = 90^\circ$ (с равенство при съвпадение на точки), така че от триъгълниците APC и PCQ имаме $AC \ge CP \ge PQ$, което води до $AC \ge MN$.

Нека сега точките P и Q са от две срещуположни страни на квадрата; нека без ограничение на общността те да са съответно AB и CD. Нека за определеност $\measuredangle APQ = \measuredangle PQC \ge 90^\circ$ и нека означим $AC \cap PQ = T$. От триъгълниците APT и TCQ имаме съответно $PT \le AT$ и $TQ \le TC$ (с равенство при съвпадение на точки), така че $PQ = PT + TQ \le AT + TC = AC$, така че и в този случай $AC \ge MN$.

Разделяме дадения квадрат на 9 еднакви квадратчета, всяко с диагонал 1. От принципа на Дирихле при $k \geq 10$ съществува двойка точки, които попадат в едно от тези квадратчета и така от доказаното разстоянието между тях няма да надвишава 1.



При $k = 9$ можем да изберем следните точки: върховете на квадрата, средите на страните му и центъра му. Така най-малкото разстояние между две измежду точките ще е $\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$.

Така най-малкото число k с исканото свойство е 10.

Коментар: В решението на задачата чрез контрапример за $k = 9$ доказваме, че най-малката възможна стойност за k е 10. Тази логическа структура на решението се съгласува точно със структурата на условието – трябва да докажем, че при стойност на k, която е по-малка от търсената, може да се конструира разположение на точките, при което условието да е нарушено. Така стратегията за рамката на решението се очертава при внимателен анализ на условието. Достигането до числото 10 пък е логично при прилагане на принципа на Дирихле, който е основна теоретична база в задачи като дадената, в които трябва да се докаже, че при надхвърляне на определен брой точки, независимо от разположението им поне две ще бъдат разположени достатъчно близко.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: контрапример, принцип на Дирихле, взаимодействие между пример и оценка, метод на водещия въпрос

Задача 48 (ВОМ 1973): В квадрат $m \times m$, разделен на единични квадратчета, са отбелязани k на брой центрове на единични квадратчета така, че никои четири отбелязани точки не са върхове на правоъгълник със страни, успоредни на страните на квадрата. Каква е най-голямата възможна стойност на k, ако:

а) $m = 7$; б) $m = 13$?

Решение: Нека означим с x_i броят на отбелязаните точки в i-тия ред. Тогава $k = \sum_{i=1}^{m} x_i$.

Съгласно условието, ако в някой ред е отбелязана дадена двойка точки, но в никой друг ред не може да бъде отбелязана двойката точки, които се намират в същата двойка колони. Във всеки ред са отбелязани $\dfrac{x_i\left(x_i-1\right)}{2}$ двойки точки и тъй като за всяка двойка колони можем да отбележим съответните точки на най-много един ред, то $\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{x_i\left(x_i-1\right)}{2}\le\dfrac{m\left(m-1\right)}{2}$.

Последното води до $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2\le m\left(m-1\right)+\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=m\left(m-1\right)+k$. Сега доколкото от неравенството на Коши $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2\ge\dfrac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)^2}{m}=\dfrac{k^2}{m}$, то $\dfrac{k^2}{m}\le m\left(m-1\right)+k$ или $k\le\dfrac{m+m\sqrt{4m-3}}{2}$.

а) От доказаното при $m=7$ получаваме, че $k\le 21$. Следващият пример показва как е възможно да бъдат отбелязани центровете на точно 21 единични квадратчета.

	×	×	×			
×	×					×
×		×			×	
×			×	×		
			×		×	×
		×		×		×
	×			×	×	

б) От доказаното при $m=13$ получаваме, че $k\le 52$. Следващият пример показва как е възможно да бъдат отбелязани центровете на точно 52 единични квадратчета.

×							×	×	×			
					×	×	×					×
				×		×		×			×	
				×	×				×	×		
		×	×	×			×					
	×		×		×			×				
	×	×				×			×			
×	×			×								×
×		×			×						×	
×			×			×				×		
			×						×		×	×
		×						×		×		×
	×						×			×	×	

Коментар: Предизвикателството при решаване на задачата е свързано най-вече с конструирането на пример, особено в случая $m = 13$. Предлагаме примери, доказващи съществуването в двете подусловия, които не съвпадат с тези от авторовото решение. Стратегията за конструирането им е свързана с моделиране на първия ред на таблицата с линия на Голомб с 3 (съответно 4 за второто подусловие) деления и циклично възпроизвеждане на същата подредба и на останалите редове с отместване една позиция вдясно на всеки следващ ред.

×	×		×			
	×	×		×		
		×	×		×	
			×	×		×
×				×	×	
	×				×	×
×		×				×

×		×	×				×					
	×		×	×				×				
		×		×	×				×			
			×		×	×				×		
				×		×	×				×	
					×		×	×				×
×						×		×	×			
	×						×		×	×		
		×						×		×	×	
			×						×		×	×
×				×						×		×
×	×				×						×	
	×	×				×						×

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: комбинаторно броене, неравенства, линийка на Голомб

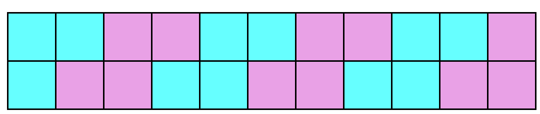
Задача 49 (WLPMC 2016): Нека $m \geq 4$ и $n \geq 4$ са естествени числа. Правоъгълник $(2m-1)\times(2n-1)$ трябва да бъде покрит с копия на следните фигури:

- Г-тримино, което се получава като премахнем едно от квадратчетата на квадрат 2×2;
- Z-тетрамино, която се получава като премахнем две срещуположни ъглови квадратчета от правоъгълник 2×3.

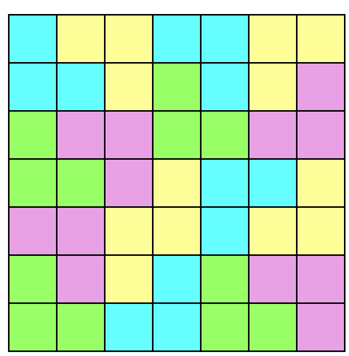
Колко най-малко фигури са необходими за целта?

Решение: Твърдим, че необходимите фигури са поне mn на брой. Наистина, нека мислено разграфим правоъгълника на единични квадратчета и оцветим в черно само тези от тях, които са в нечетен ред и колона, а останалите оставим бели. Сега всяка фигурите (Г-тримино и Z-тетрамино) покрива най-много едно черно квадратче. От друга страна, броят на всички черни квадратчета е $\frac{(2m-1)+1}{2}.\frac{(2n-1)+1}{2}=mn$, така че са необходими поне mn фигури, за да бъдат покрити всички черни квадратчета.

Ще докажем, че за всеки правоъгълник $(2m-1)\times(2n-1)$ съществува покритие с точно mn на брой фигури. Първо, за всяко $k \geq 3$ правоъгълниците $2\times(2k-1)$ могат да бъдат покрити с точно k фигури – по едно Г-тримино в двата края и $k-2$ броя Z-тетрамино между тях:



Можем да покрием квадрат 7×7 с 16 фигури например по следния начин:



Сега разглеждаме покритие на правоъгълник $(2m-1)\times(2n-1)$ по следния начин: в долния ляв ъгъл покриваме квадрат 7×7 с 16 фигури; вдясно от него разполагаме $m-4$ правоъгълника 2×7 (всеки от които покрит с по 4 фигури); над квадрата и правоъгълниците разполагаме $n-4$ правоъгълника $(2m-1)\times 2$ (всеки от които покрит с по m фигури). Така броят на използваните фигури е точно $16+(m-4).4+(n-4).m=mn$.

Коментар: Тук за доказателството на оценката за минималния брой използвани фигури прилагаме оцветяване, чиято цел е демонстрира, че за всяко оцветено квадратче е необходима поне една фигура. Идеята за оцветяването може да се търси по две направления – от една страна вида на използваните в покритието фигури и от друга наблюденията, натрупани при разглеждането на конкретни частни случаи и базираната на тях хипотеза. В конструирането на подходящ пример за покритие прилагаме модулен принцип на покритие с по-големи правоъгълници и квадрати, за всеки от които предварително сме изследвали броя необходими фигури.

При обсъждане на тази задача с учениците е добре да се дискутира въпросът доколко изискванията $m\geq 4$ и $n\geq 4$ са съществени. За да отговорим на този въпрос, нека първо обмислим какво би се случило, ако нарушим минимално едно от тези изисквания, избирайки m=3, n=4, т.е. получавайки правоъгълник 5×7. В случая споменатите черни полета са $3.4=12$, така че необходимите фигури трябва да имат поне $12.3=36$ полета, докато фигурата разполага само с 35, т.е. покритието е неосъществимо. В общия случай черните полета са mn и използваните фигури имат поне $3mn$ полета. Следователно

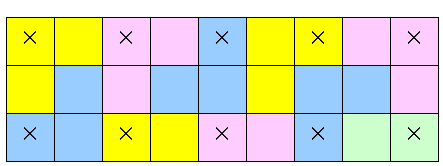
$$(2m-1)(2n-1)\geq 3mn$$

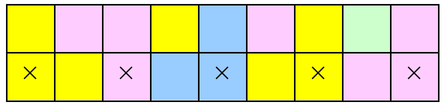
$$4mn-2m-2n+1\geq 3mn$$

$$mn-2m-2n+4\geq 3$$

$$(m-2)(n-2)\geq 3$$

Имаме естественото изискване $m\geq 2$, $n\geq 2$, но от горното става ясно, че трябва $m\geq 3$, $n\geq 3$. Ако m=3, то горното неравенство налага $n\geq 5$. При m=3, n=5 черните полета са общо 15, така че фигурките имат общо поне 45 полета. Тъй като това са всичките полета, с които разполагаме, трябва да работим само с г-тримино и при това всяко от тях трябва да покрива по едно черно поле (тези полета с отбелязани с × в долния чертеж). Спазвайки тези правила, построяваме пример без особени затруднения:





При $m=3$, $n\geq 6$ получаваме съответните примери с добавяне на правоъгълници 2×5, които се покриват по начина, описан в даденото по-горе решение.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: оцветяване, модулно покритие

Задача 50 (Невена Събева): В град има градина с формата на квадратна таблица 5×5, разделена на единични квадратчета. В този град има 25-ма хобити, като всеки от тях е враг с най-много трима други. Вражеските отношения са взаимни, т.е. ако A е враг на B, то и B е враг на A. Да се докаже, че е възможно да поставим по един хобит във всяко единично квадратно поле на градината, така че да няма двама съседи (по обща страна), които са врагове.

Решение: Ако двама хобити не са врагове, условно ще ги наричаме „приятели“ (тъй като вражеските отношения са взаимни, то очевидно приятелските също са такива). Разпределяме хобитите по произволен начин в единичните полета. Ще елиминираме вражеските съседства едно по едно. Нека при това произволно разпределяне хобитът X е във вражески отношения със съседа си Y. Сред приятелите на Y ще потърсим хобит Z, който може да размени мястото си с X, като не породи ново вражеско съседство и по този начин намали броя на вражеските съседства с поне 1. Хобитът X има най-много четирима съседи, които имат общо най-много 12 врагове (един от които е X). За да не създадем ново вражеско съседство, Z не трябва да е измежду тези 12 хобити. X има най-много трима врагове в града, всеки от които има най-много по четирима съседи, така че броят на съседите на врагове на X е най-много 12 и един от тях е X. Очевидно Z не бива да е измежду тези 12 хобита, за да не се създаде ново вражеско съседство. Така Z не трябва да е измежду най-много $2.12-1=23$ хобита (изваждаме 1, тъй като X е броен два пъти) и Z не може да съвпада с Y, но дори в този случай остава един хобит, който може да приеме ролята на Z и да се размени с X, намалявайки броя вражески съседства с поне 1. Така с най-много 12 замени всички вражески съседства ще бъдат елиминирани и всеки хобит ще има за съседи само приятели.

Коментар: Решението на задачата представлява конструиране на алгоритъм, състоящ се от еднотипни итерации, като на всяка итеративна стъпка се елиминира поне едно вражеско съседство. Така тази моновариантност на итерациите относно броя вражески съседства в текущата конфигурация гарантира, че след краен брой стъпки желаното разположение ще бъде постигнато. Стратегията да се изработи алгоритъм за елиминация на едно вражеско съседство е логична, тъй като многократното ѝ възпроизвеждане би премахнало всички вражески съседства. Разбира се, важно е да се погрижим алгоритъмът да не поражда нови вражески съседства.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: моновариант

Задача 51 (ЗМС 2023): В една държава има n града. Между някои градове са построени еднопосочни пътища, като между два града може да има няколко пътища в различни посоки. Знаем, че за всеки два града A и B може да се стигне или от A до B, или от B до A, или и двете. Колко най-малко пътя трябва да построим допълнително, за да гарантираме, че от всеки град може да се стигне до всеки друг?

Решение: Разглеждаме частния случай, в който при номериране на градовете от 1 до n от всеки град с номер $i < n$ излиза път към града с номер $i+1$. Условието на задачата е изпълнено и е необходимо да построим поне 1 път, така че да можем от град номер n да стигнем до град номер 1. Така отговорът на задачата е поне 1.

Ще докажем, че има град F, който стига до всички останали градове. Да допуснем, че няма такъв и нека разгледаме града A, от който се стига до най-много градове. Съгласно допускането съществува град B, до който не се стига от A. Но тогава според условието от B може да се стигне до A, но оттам и до всеки град, до който се стига от A. Последното води до противоречие с максималността на A. Следователно допускането е грешно и съществува град F, който стига до всички градове.

Аналогично съществува и град L, такъв че от всеки град може да се стигне до него.

Следователно можем да построим реброто от L до F и сега за произволни два града A и B имаме например пътя: $\{A \to L\} \cup \{L \to F\} \cup \{F \to B\}$.

Доколкото доказахме, че е необходимо да се построи поне един нов път и конструирахме пример, че винаги един път е достатъчен, то отговорът на задачата е 1.

Коментар: В разгледаната задача за да докажем съществуването на примера използваме две основни стратегии – допускане на противното и принцип на крайния елемент. Характерно за нея е, че извършването на оценката се реализира чрез пример, който доказва, че е необходимо да се построи поне един нов път. Освен това, конструкцията на примера е силно абстрактна и се базира на доказателство за съществуване на градовете F и L като универсални съответно начална и крайна точка. От определена перспектива в случая примерът „прилича“ на оценка, а оценката – на пример.
Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10
Стратегии и инструменти, използвани в решението: допускане на противното, принцип на крайния елемент, контрапример

Задача 52 (IZhO 2019): Да се докаже, че съществуват поне 100! начина да представим числото 100! като сума на събираеми, всяко от които е 1!, 2!, 3!, …, 98! или 99!. Събираемите в една и съща сума могат да се повтарят; редът на събираемите няма значение.
Решение: Ще докажем по индукция, че за всяко $n \geq 4$ има поне $n!$ начина числото $n!$ да се представи като сума на събираеми, всяко от които е 1!, 2!, 3!, …, $(n-1)!$.

Разглеждаме $n=4$ и съответно числото $4!=24$. Възможни са следните представяния:

- $3!+3!+3!+3!$ (1 възможност)
- $3!+3!+3!+6$, като тук можем да представим $6=a.2!+2.(3-a).1!$ за $a=0,1,2,3$, като коефициентът пред 2! и 1! показва колко пъти трябва да се запише съответното събираемо в сбора (4 възможности)
- $3!+3!+12$, като тук можем да представим $12=a.2!+2.(6-a).1!$ за $a=0,1,...,6$, като коефициентът пред 2! и 1! показва колко пъти трябва да се запише съответното събираемо в сбора (7 възможности)
- $3!+18$, като тук можем да представим $18=a.2!+2.(9-a).1!$ за $a=0,1,...,9$, като коефициентът пред 2! и 1! показва колко пъти трябва да се запише съответното събираемо в сбора (10 възможности)

- $24 = a.2! + 2.(12-a).1!$ за $a = 0,1,...,12$, като коефициентът пред 2! и 1! показва колко пъти трябва да се запише съответното събираемо в сбора (13 възможности)

Така получаваме общо 35 начина за представяне в искания вид на числото $4! = 24$ и съответно твърдението е изпълнено за $n = 4$.

Да допуснем, че при $n = k$ има поне $k!$ представяния на числото $k!$ като сума на събираеми от вида 1!, 2!, 3!, …, $(k-1)!$.

Нека сега $n = k+1$. За представянето на $(k+1)!$ като сума можем да използваме събираемото $k!$ между 0 и k пъти, тъй като очевидно $k.k! < (k+1)!$. Разглеждаме представяне на $(k+1)!$, в което събираемото $k!$ участва *t* пъти, $0 \le t \le k$. За да получим сбор $(k+1)!$, трябва да добавим още $(k+1)! - t.k! = (k+1)k! - t.k! = (k+1-t)k!$. Съгласно индукционното предположение имаме поне $k!$ за $k!$, което означава, че имаме поне толкова представяния и за $(k+1-t)k!$ (можем да ги получим например като повторим по $k+1-t$ пъти всяко събираемо от съответното представяне на $k!$. Сега тъй като има и $k+1$ варианта за избор на *t*, получаваме поне $(k+1)k! = (k+1)!$ варианта за представяне на $(k+1)!$ като сума от искания вид.

Коментар: Тук прилагаме метода на математическата индукция, за да докажем съществуването на искания брой представяния за всяко *n* от известно място нататък, включително за целевото в условието на задачата $n = 100$. Съществен момент тук е базата на индукцията – твърдението може да се докаже за $n \ge 4$, тъй като то не е изпълнено например за $n = 3$. От тази гледна точка поучително в коментара на приложената към задачата стратегия за решаване е, че индуктивният подход не трябва автоматично да се отхвърля в случаите, в които твърдението не е изпълнено за някои фиксирани стойности на променливата. След избора на индукцията като средство за решаване, решението върви сравнително лесно и индукционната стъпка изисква прилагане на съвсем проста идея за конструиране на суми. Така в случая водещ е правилният избор на стратегия към задачата.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция

Задача 53 (IMO 1964): В стая има 17 души; всеки двама говорят помежду си на един от три възможни езика. Да се докаже, че в стаята има трима души, всеки двама от които говорят помежду си на един и същ език.

Решение: Да означим езиците с L_1, L_2 и L_3, а хората с $A_1, A_2, ..., A_{17}$. Разглеждаме човека A_1, който си говори с 16 други. Съгласно принципа на Дирихле има поне $\left\lceil \frac{16}{3} \right\rceil = 6$ души, с които A_1 разговаря на един и същ език (в противен случай той би могъл да разговаря с най-много 3.5=15 души). Нека за определеност езикът е L_1, а шестимата души са $A_2, A_3, ..., A_7$. Ако някои двама измежду $A_2, A_3, ..., A_7$ си говорят на езика L_1, то те с A_1 образуват конфигурация от трима, сред които всеки двама разговарят на един и същ език. Ако пък допуснем, че никои двама измежду $A_2, A_3, ..., A_7$ не си говорят на езика L_1, то всяка от определените от тях двойки говори или на L_2, или на L_3. Така за тези шестима души и тези два езика можем да приложим задачата на Ramsey, която гарантира наличие на трима, изпълняващи условието.

Коментар: Разгледаната задача демонстрира неявен подход при доказателство за съществуване и реализира връзка със задачата на Ramsey, която е базов факт от теорията на графите. За успешно реализиране на решението тук е важно не само познаването на факта, но и на аргументирането му, тъй като свеждането на задачата до него изисква разсъждения, сходни с тези в доказателството на задачата на Ramsey.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле, факти от теория на графите

Задача 54 (IMO 1985, Mongolia, Gonchigdorj, R.): Дадени са 1985 различни естествени числа, никое от които няма прост делител, по-голям от 26. Да се докаже, че измежду числата има четири, чието произведение е точна четвърта степен на естествено число.

Решение: Ще докажем, че измежду всеки $m \geq 513$ естествени числа със свойството от условието на задачата има поне две, чието произведение е точен квадрат. Всяко от числата може да се представи във вида $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}7^{\alpha_4}11^{\alpha_5}13^{\alpha_6}17^{\alpha_7}19^{\alpha_8}23^{\alpha_9}$, където $\alpha_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 0$ за всяко

$i = 1, 2, ..., 9$. За всяко от числата α_i има по две възможности за четността му, така че за множеството от четности на набора от степенните показатели $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_9)$ има $2^9 = 512$ възможности. Оттук по принципа на Дирихле сред разглежданите $m \geq 513$ числа има поне две с набор от степенни показатели съответно $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_9)$ и $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_9)$, че за всяко $i = 1, 2, ..., 9$ α_i и β_i са от една и съща четност. Тогава всички сборове $\alpha_i + \beta_i$ са четни и произведението на двете числа е точен квадрат на естествено число.

Сега разглеждаме дадените по условие 1985 числа. От доказаното сред тях има две, чието произведение е точен квадрат. Поставяме числото m_1^2, равно на произведението им, в една кутия. Сред останалите 1983 отново има две, чието произведение е точен квадрат. Добавяме произведението им m_2^2 в същата кутия. Повтаряме тази процедура 513 пъти, докато получим кутия с 513 точни квадрата $m_1^2, m_2^2, ..., m_{513}^2$. Това наистина е възможно, тъй като последното прилагане на процедурата е за $1985 - 512.2 = 961 > 513$ числа. Сега ако приложим доказаното за числата $m_1, m_2, m_3, ..., m_{513}$, ще получим, че сред тях има две – m_i и m_j, чието произведение е точен квадрат на естествено число. Нека $m_i m_j = k^2, k \in \mathbb{N}$. Така числото $m_i^2 m_j^2 = k^4$ е произведение на 4 измежду дадените 1985 числа и е точна четвърта степен на естествено число.

Коментар: В задачата като теоретична опора на доказателството за съществуване функционира принципът на Дирихле. Разбира се, логично е да си зададем въпроса как се досещаме за числото 513 като отправна точка при прилагането му. Достигането до него е логично следствие от намиране на броя варианти за четността на набора от степенни показатели на разглежданите числа и съображението, че намирането на две числа с еднаква четност на набора от степенни показатели в каноничното си разлагане е достатъчно условие за генерирането на произведение, което да е точен квадрат. В рамките на учебната работа може да се коментира и въпросът каква е точната долна граница за броя числа *m*, при която условието ѝ ще бъде изпълнено. Това реално би преформулирало задачата като задача за пример и оценка и би изисквало и доказателство чрез контрапример, че за всеки по-малък от тази граница брой числа наличието на четири, чието произведение е точна четвърта степен, не винаги е изпълнено.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле

Задача 55 (НОМ 2017): Дадени са числата 2, 3, 4, …, 2017 и естествено число $n \le 2014$. Иван и Петър играят следната еднoходова игра: Иван избира *n* числа от дадените, след което Петър избира 2 числа измежду останалите и накрая $(n+2)$-те избрани числа се подреждат по големина: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} < a_{n+2}$. Ако има поне едно $1 \le i \le n+1$, за което a_i е делител на a_{i+1}, то печели Петър; в противен случай печели Иван. Да се намерят всички стойности на *n*, за които Иван има печеливша стратегия.

Решение: Ще докажем, че Иван има печеливша стратегия точно тогава, когато $n \ge 10$.

Нека $n \ge 10$ и Иван избере числата $2^1+1, 2^2+1, \ldots, 2^{10}+1$ и кои да е други $n-10$ числа. Тогава които и две числа да избере Петър, отношението на всеки две последователни числа от редицата $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} < a_{n+2}$ ще е по-малко от 2, така че ще е невъзможно a_i да е делител на a_{i+1} за никое $1 \le i \le n+1$.

Нека сега $n \le 9$ и да разгледаме интервалите $[2;3]$, $[4;7]$, $[8;15]$, …, $\left[2^k; 2^{k+1}-1\right]$, …, $[1024; 2017]$. Те са 10 на брой и доколкото $n \le 9$, от принципа на Дирихле има поне един интервал, в който не попада число на Иван. Ако този интервал не е последният, а е $\left[2^k; 2^{k+1}-1\right]$ за някое $1 \le k \le 9$, то Петър печели, избирайки числата 2^k и 2^{k+1} (или произволно число от последния интервал, ако 2^{k+1} е сред избраните от Иван числа). Остава да разгледаме случая, в който $n = 9$ и във всички интервали освен последния има по едно число на Иван. Ако 3 не е сред избраните от Иван числа, то Петър ще спечели, избирайки числата 2 и 4. Така 3 трябва да е след избраните от Иван числа. Сега ако Иван не е избрал числото 5, то Петър би спечелил, избирайки 3 и 6 или 4 и 8. Аналогично продължавайки по същия начин получаваме, че Иван трябва да е избрал числата $2^{k+1}+1$ за всяко $1 \le k \le 9$. Сега при избор на кои да е две числа с цяло частно от интервала $[514; 2017]$(например 514 и 1028), Петър печели играта.

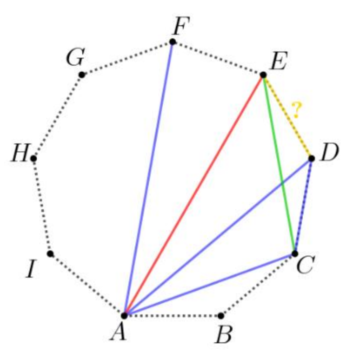
Коментар: В разгледаната задача фундамент на стратегията е изборът за работа с интервали от вида $\left[2^k; 2^{k+1}-1\right]$. Това не е необичайно, тъй като принадлежността на две числа в един такъв интервал задава достатъчно условие, че никое число от него не е кратно на друго число от него. От тази гледна точка, разглеждането на тези интервали идва като отговор на въпроса „Кое условие, гарантиращо, че едно число не е кратно на друго, е удобно да се приложи в контекста на конкретната задача?“. В доказателството приложихме и принципа на Дирихле. За логическата пълнота на решението е важно както да се конструира стратегия за Иван, с която той винаги може да спечели при съответните стойности на n, така и стратегия за Петър, с която той винаги може да спечели в останалите случаи.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле

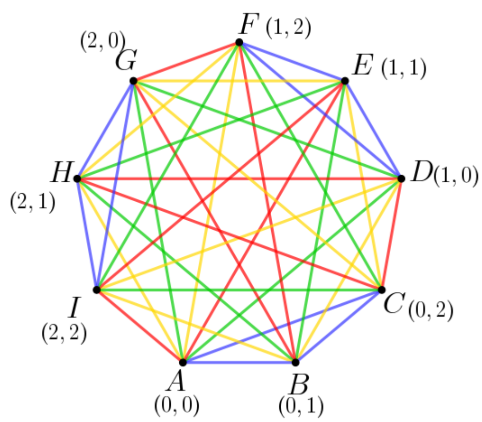
Задача 56 (EGMO 2014): В правилен деветоъгълник са построени всички страни и диагонали. Всяка от начертаните отсечки е оцветена в един от $k \geq 2$ цвята, така че всеки триъгълник да е или едноцветен (т.е. трите му страни да са в един и същ цвят), или трицветен (т.е. трите му страни са в три различни цвята). Коя е най-малката възможна стойност на k?

Решение: Разглеждаме правилен деветоъгълник $ABCDEFGHI$. Да допуснем, че е възможно оцветяване с $k \leq 3$ цвята. Твърдим, че многоъгълникът има връх, от който излизат отсечки в поне 2 различни цвята. Наистина, да допуснем, че от всички върхове излизат само едноцветни отсечки и нека например от върха A излизат само сини отсечки. Тъй като всеки от другите върхове споделя обща отсечка с A, т.е. от всеки от другите върхове излиза синя отсечка, би трябвало всички отсечки да са сини, които противоречи на условието $k \geq 2$. Нека сега A е връх, от който излизат отсечки в поне 2 различни цвята. Доколкото A участва в 8 отсечки, от допускането $k \leq 3$ следва, че има поне 3 едноцветни отсечки с край A; нека без ограничение на общността това са AC, AD и AF. Нека например отсечката AE е червена. Сега от условието за триъгълник ACD следва, че CD е синя, а от триъгълник ACE следва, че CE трябва да е в цвят, различен от син и червен.



Нека CE е зелена. Разглеждаме отсечката ED. Тъй като тя е страна в триъгълника CDE, то цветът ѝ не може да е син или зелен. Тя обаче е страна и в триъгълник ADE, така че цветът ѝ не може да е и червен. Така за ED е необходим четвърти цвят и съответно стойността на k не може да бъде по-малка от 4.

Следващият пример показва оцветяване с 4 цвята. Означаваме поред върховете на многоъгълника с наредените двойки $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$ и $(2,2)$, т.е. номерираме в троична бройна система.



Оцветяваме отсечката с краища (a,b) и (c,d) в:

- ✓ синьо, ако $a=c$;
- ✓ зелено, ако $b=d$;
- ✓ червено, ако $a-c\equiv b-d \pmod 3$;
- ✓ жълто, ако $a+c\equiv b+d \pmod 3$.

Нека първо отбележим, че ако:

$$a\neq c, \text{ то } a\equiv c+1 \pmod 3 \text{ или } a\equiv c-1 \pmod 3;$$

$$b\neq d, \text{ то } b\equiv d+1 \pmod 3 \text{ или } b\equiv d-1 \pmod 3;$$

следователно дадените правила еднозначно определят цвета на отсечката между всеки два различни върха: ако той не е син или зелен и верните твърдения в двата реда са едно под друго, то цветът е червен, а ако са по диагонал едно от друго – жълт. При така направеното оцветяване условието на задачата е изпълнено. Наистина, ако две от страните на един триъгълник са сини, то $a=c$ за трите върха на този триъгълник и съответно третата му страна също е синя. Същото важи за зелените страни. Ако пък две от страните са червени, то $a-c\equiv b-d \pmod 3$ за трите върха, така че и третата страна е червена; аналогично разсъждаваме и за жълтите страни.

Коментар: Задачата е от категорията „пример и оценка“ и интерес в решението ѝ представлява най-вече конструирането на примера. Тук моделът на оцветяване е въведен чрез съответствие между върховете на многоъгълника и наредените двойки от вида $\{(a,b)|a,b\in\{0,1,2\}\}$ – подход, който при първата среща с него може да изглежда необичаен, но всъщност е логичен от гледна точка на броя върхове на многоъгълника и условието, въведено за триъгълниците.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: допускане на противното, пълно изчерпване на възможности, въвеждане на взаимноеднозначно съответствие

Задача 57 (USAMO 2002): Нека S е множество с 2002 елемента и N е цяло число със свойството $0 \le N \le 2^{2002}$. Докажете, че съществува оцветяване на подмножествата на S в черно или бяло, при което:

(1) има точно N бели подмножества;

(2) обединението на всеки две бели подмножества е бяло;

(3) обединението на всеки две черни подмножества е черно.

Решение: За да докажем твърдението за $n = |S| = 2002$, ще използваме индукция по броя n на елементите в множеството S. Ако $n = 1$, то подмножествата на S са само празното множество $\varnothing$ и самото S, така че за $N = 0$ и двете ще бъдат черни, за $N = 1$ точно едно (без значение кое) ще е бяло, а за $N = 2$ и двете ще са бели.

Да допуснем, че твърдението е изпълнено за $n = k$ и да разгледаме случая $n = k + 1$. Ако числото $N \le 2^k$, то съгласно индукционната хипотеза съществува оцветяване с точно N на брой бели подмножества на множеството, определено от някои (произволно фиксирани) k елемента на S. Използваме това оцветяване за подмножествата на S, които не съдържат $k+1$-вия му елемент, а всички негови подмножества, които съдържат този елемент, оцветяваме в черно. Това оцветяване изпълнява условието на задачата, доколкото не променя броя на белите подмножества и обединението на две множества, съдържащи $k+1$-вия елемент, е множество, съдържащо $k+1$-вия елемент. Ако $N > 2^k$, то разглеждаме числото $N_1 = 2^{k+1} - N < 2^k$ и прилагаме оцветяването от индукционната хипотеза за числото N_1 по същия начин, разменяйки черния и белия цвят. Така ще получим оцветяване с точно N_1 бели подмножества и N черни подмножества и при още една смяна на цветовете ще получим оцветяване от искания вид.

Коментар: При все че формулировката изисква доказателство за множество с конкретна мощност, тук индуктивният подход за конструиране на стратегия за оцветяване се оказва подходящо средство за решение. Идеята за тази стратегия е логичен извод от разглеждането на аналогичен въпрос, поставен за множество с по-малка мощност и фокусиране върху въпроса „Можем ли от оцветяването за това множество лесно да генерираме оцветяване за множество, съдържащо един елемент повече?“. Важен момент е и идеята за смяна на цветовете при последната стъпка от решението – семпла, но ключова за лесното преодоляване на променената горна граница за числото N при прилагане на индукционната хипотеза.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция

Задача 58 (IMO Shortlist 2005): Една къща има краен брой стаи. В стаите има общо четен брой лампи и във всяка стая има поне по 3 лампи. Всяка лампа споделя ключ с точно една друга лампа, която не е непременно да е от същата стая. Всяка промяна в положението на ключа, споделен от две лампи, води до едновременна промяна в състоянието и на двете лампи. Докажете, че за всяко начално състояние на лампите съществува поредица от промени в някои от ключовете, в края на която всяка стая съдържа и включени, и изключени лампи.

Решение: Наричаме една стая „лоша“, ако всички нейни лампи са в едно и също състояние и „добра“ в противен случай. Целта е всички стаи да станат добри. Нека в първоначалната конфигурация има $k \geq 1$ лоши стаи. Ще докажем, че съществува алгоритъм A, с който чрез крайна редица от промени на ключове да се достигне до нова конфигурация с най-много $k-1$ лоши стаи. Така при най-много k-кратно итеративно прилагане на този алгоритъм ще получим конфигурация, в която всички стаи са добри.

Наричаме две лампи „свързани“, ако споделят общ ключ. Избираме лоша стая R_1 и променяме положението на ключ на една от лампите в нея. Ако свързаната с тази лампа също е в R_1, то доколкото във всяка стая има поне 3 лампи, R_1 вече е добра и алгоритъмът A приключва. Ако свързаната с тази лампа е в стая R_2 и R_2 не стане лоша, алгоритъмът A приключва. Разглеждаме случая, в който R_2 е станала лоша, т.е. лошите стаи в текущата конфигурация отново са k на брой. Тогава повтаряме процедурата с евентуален риск някоя друга стая R_3 да стане лоша. Продължавайки по този начин, ако в някакъв момент успеем да направим поредната разглеждана стая добра, без да правим друга лоша, алгоритъмът приключва. В противен случай, тъй като стаите са краен брой, рано или късно ще стигнем до стая, която вече сме разглеждали и преди. Нека за първи път това се случва при стаята R_m, съвпадаща с R_n, $m > n$. При промяната на лампа в R_n, тя е станала добра в смисъла на алгоритъма. Когато стигнем отново до R_m, не може да сме превключили същата лампа, защото предния път превключената лампа е била свързана с лампа в стая R_{n-1}, а сега – с лампа в стая R_{m-1} и това са две различни стаи (доколкото $R_n = R_m$ е първата стая, в която се връщаме повторно). Така две различни лампи са били превключени в R_m и тя остава добра, доколкото в стаята има поне 3 лампи, поне една от които не е била превключвана и първоначално стаята е била лоша, т.е. всички нейни лампи са били в едно и също състояние. Това гарантира, че последното превключване е направило R_{m-1} добра, без да направи R_m лоша. Следователно във всички разгледани случаи броят на лошите стаи намалява поне с 1 и след краен брой итерации на алгоритъма A всички стаи ще бъдат добри.

Коментар: Решението на задачата прилага рекурсивен подход за конструиране на метод за постигане на целевото положение. Създадохме алгоритъм, гарантиращ намаляване на общия брой лоши стаи поне с една, така че след неколкократно прилагане на този алгоритъм процесът да бъде завършен. Основното в процеса на решаване е да достигнем до концепцията за итеративно прилагане на една и съща процедура, оптимизираща текущото състояние, и последващо фокусиране върху тази процедура. Стратегията е свързана и с декомпозиране на поставената задача – „Нека първо да разрешим проблема за една стая, а след това по същия начин да го направим и за останалите.“. Това е разумна посока на разсъждение. Изключително важно е и когато се конструират рекурсивни алгоритми да проследим дали можем да гарантираме, че ще бъдат крайни. В конкретната задача това се постига от една страна благодарение на крайния брой стаи в условието и от друга чрез доказателството, че повторното връщане към вече разглеждана стая няма да доведе до безкраен цикъл.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: рекурсивен подход, метод на водещия въпрос

Задача 59 (CGMO 2011): В редица са подредени *n* кутии $B_1, B_2, ..., B_n$. В тях са разпределени *n* топки, не непременно поравно. Ако в B_1 има поне една топка, можем да преместим една топка от B_1 в B_2. Ако в B_n има поне една топка, можем да преместим една топка от B_n в B_{n-1}. За всяко $2 \le k \le n-1$, ако има поне две топки в B_k, можем да преместим две топки от B_k – една в B_{k+1} и една в B_{k-1}. Покажете, че при всяко начално разпределение на топките можем с такива ходове да направим така, че във всяка кутия да има точно една топка.

Решение: Ще използваме индукция по броя на кутиите *n*. При $n=1$ твърдението задължително е изпълнено, с при $n=2$ или е изпълнено, или двете топки са в една и съща кутия, при което можем да преместим една топка от пълната в празната кутия, използвайки първата или втората допустима операция. Да допуснем, че съществува алгоритъм A_{n-1}, който може да представи всяка редица от $n-1$ кутии в искания вид. Ще конструираме алгоритъм A_n за n кутии в две стъпки: първата ще осигури поне една топка в B_n, а втората ще използва индукционното предположение.

<u>Стъпка първа:</u> Ако B_n съдържа поне една топка, пропускаме тази стъпка и преминаваме към втората. Нека B_n не съдържа никакви топки. Тогава първите $n-1$ кутии съдържат всички *n* топки. Извършваме първата и третата операция, премествайки топки от кутиите с номера $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$, докато това е възможно. Твърдим, че този процес е краен. Наистина, нека *k*-тата кутия придава на всяка от топките в нея тегло 2^k за всяко *k*. При прилагане на първата операция топка с тегло 2 се заменя с топка с тегло 2^2. При прилагане на третата операция, от две топки с тегла по 2^k (и общо тегло $2.2^k = 2^{k+1}$) получаваме топка с тегло 2^{k+1} и топка с тегло 2^{k-1}. Оттук следва, че при всяка операция общото тегло на топките нараства. От друга страна, общото тегло на всички топки е ограничено отгоре от $n.2^n$, което доказва, че процесът е краен. Той може да приключи само тогава, когато кутия B_1 е празна, кутиите $B_2, ..., B_{n-1}$ съдържат по точно една топка, а кутия B_n съдържа две топки.

<u>Стъпка втора:</u> Ако в B_n има $t>1$ топки, използвайки втората операция $t-1$ пъти достигаме положение, в което в кутия B_n има точно една топка (нека тя е синя), а в кутиите $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$ има общо $n-1$ топки (нека те са червени). Прилагаме алгоритъма A_{n-1} от индукционното предположение за кутиите $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$. Проблем при прилагането му може да възникне само при прилагане на ход от кутия B_{n-1} (тъй като спрямо алгоритъма A_{n-1} той би бил извършен с приложение на втората операция и при наличие на поне една топка, а в случая трябва да го извършим при условията на третата операция и съответно при наличие на поне две топки). Коригираме това по следния начин: ако A_{n-1} изиска да преместим топка от B_{n-1}, първо преместваме синята топка от B_n в B_{n-1}, а след това преместваме червената от B_{n-1} в B_{n-2} и в рамките на същата операция връщаме синята топка от B_{n-1} в B_n. С това доказателството е завършено.

Коментар: Задачата е свързана с доказателство за съществуване на алгоритъм, реализиращ определена крайна цел при разпределянето на топките в кутиите. В решението прилагаме индуктивен подход, който изисква известна гъвкавост и съобразителност: от една страна, първата стъпка е необходима, за да осигурим условия за прилагане на индукционната хипотеза и тя изисква независимо намиране на работещ механизъм. От друга, при прилагането на индукционната стъпка трябва да гарантираме осигуряването на необходимите условия за правилно прилагане на операцията за кутия B_{n-1}. Допълнително евристично предизвикателство при решаване на задачата е доказателството, че процедурата от първата стъпка е с краен характер.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: индуктивен подход, въвеждане на тегла с цел доказване на крайния характер на алгоритъм

Задача 60 (RMM 2021): Нека $n \geq 2$ е естествено число. На дъската са записани естествените числа от 1 до *n*. За един ход избираме две числа *a* и *b*, изтриваме ги, на тяхно място записваме $a+b$ и $|a-b|$ и ако някои числа на дъската се повтарят, то изтриваме повторенията, докато всички числа на дъската станат различни. Например, ако на дъската са написани 2, 5, 7 и 8 и изберем 5 и 7, след като изпълним хода числата на дъската ще бъдат 2, 8 и 12. Да се докаже, че е възможно след краен брой ходове на дъската да останат само две различни числа.

Решение (Ангел Райчев): Ще докажем, че съществува алгоритъм, който, приложен за три различни числа на дъската, с краен брой ходове ги трансформира в две различни числа. Така след всяко прилагане на алгоритъма числата на дъската ще намаляват с 1 и след краен брой итерации на дъската ще останат две различни числа.

Нека разгледаме трите различни числа на дъската a,b и c. Ще използваме индукция по сумата им $a+b+c$. Ако $a+b+c=6$, то единственият вариант е числата a,b и c да бъдат 1, 2 и 3 (в някакъв ред). Прилагайки операцията за 1 и 2, получаваме базата на индукцията: $(\underline{1},\underline{2},3)\to(3,1,3)\to(1,3)$. Да допуснем, че за всяка сума $a+b+c$ от 6 до $k-1$ включително твърдението е изпълнено и да разгледаме сумата $a+b+c=k$. Ако a, b и c имат общ делител $d>1$, то можем да приложим индукционното предположение за числата $\frac{a}{d},\frac{b}{d}$ и $\frac{c}{d}$, чиято сума е $\frac{k}{d}<k$. За да получим исканото, във всяка от прилаганите операции умножаваме всяко число с d. Нека сега a, b и c нямат общ делител. Можем да считаме, че без ограничение на общността b и c са с еднаква четност. Ако b и c са четни, то можем да приложим следното: $(\underline{a},\underline{b},c)\to\left(\underline{|a-b|},\underline{a+b},c\right)\to(2a,2b,c)\to\left(a,b,\frac{c}{2}\right)$, като на последната стъпка използваме, че числата $(2a,2b,c)$ имат общ делител $d=2$ и прилагаме горната част от алгоритъма, свързана с тройки числа, които имат общ делител, различен от 1. Сега доколкото $a+b+\frac{c}{2}<a+b+c$, съгласно индукционното предположение в този случай чрез операции в нея тройката на числата a, b и c може да се сведе до две числа. Ако b и c са нечетни, но a е четно, то прилагаме следното: $(a,\underline{b},\underline{c})\to(a,|b-c|,b+c)\to\left(\frac{a}{2},\frac{|b-c|}{2},\frac{b+c}{2}\right)$, като на последната стъпка използваме общия делител $d=2$ и горната част на алгоритъма. Тъй като $\frac{a}{2}+\frac{|b-c|}{2}+\frac{b+c}{2}<\frac{a}{2}+b+c<a+b+c$, съгласно индукционното предположение в този

случай тройката числа също може да се сведе до две различни числа. Остава да разгледаме случая, в който a, b и c са нечетни. Извършваме последователно следните ходове: $(a,\underline{b},\underline{c}) \to$

$$(a,\underline{|b-c|},\underline{b+c}) \to (\underline{a},2b,\underline{2c}) \to (\underline{|a-2c|},2b,\underline{a+2c}) \to (2a,2b,4c) \to (\underline{a},\underline{b},2c) \to (|a-b|,a+b,2c) \to$$

$\to \left(\dfrac{|a-b|}{2},\dfrac{a+b}{2},c\right)$, като тук прилагаме двукратно процедурата при $d=2$. Тъй като $\dfrac{|a-b|}{2}+\dfrac{a+b}{2}+c<a+b+c$, то съгласно индукционното предположение и в този случай тройката числа може да се сведе до две числа, с което доказателството е завършено.

Коментар: Решението на задачата предлага неконвенционално приложение на метода на математическата индукция. Концепцията за свеждане на произволно избрана тройка числа до две различни числа е логичен подход, целящ конструиране на алгоритъм, който на всяка своя итерация да намалява броя числа на дъската. Находчивостта тук е свързана с идеята индукцията да се провежда по стойността на сумата на трите числа. Тук ще отбележим, че авторовото решение на задачата също използва необичайно приложение на метода на математическата индукция.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция

Задача 61 (Shortlist IMO 1998): Нека $n \geq 5$ е естествено число и карти с номера от 1 до n са подредени в редица в произволен ред. При един ход може да се избере произволен блок от последователни карти, чиито номера са във възходящ или низходящ ред, и да се обърне блокът. Например, при $n=9$ и редица 91<u>653</u>2748 чрез прилагане на ход за блока 653, можем да получим редицата 91<u>356</u>2748. Да се докаже, че с най-много $2n-6$ хода за всяка първоначална подредба на n карти може да се достигне до подредба, в които номерата на картите са в низходящ ред, или до подредба, в която те са във възходящ ред.

Коментар: Ще конструираме рекурсивен алгоритъм, свеждащ решаването на задачата за редица от n карти с това за редица от $n-1$ карти. Нека $f(n)$ е минималният брой ходове, необходими за гарантирано „монотонизиране" на редица от n карти. Разглеждаме редица от n карти с начална карта k. С $f(n-1)$ хода можем да монотонизираме редицата, определена от останалите $n-1$ карти, получавайки или редицата $(k,1,2,...,k-1,k+1,...,n)$, или редицата $(k,n,n-1,...,k+1,k-1,...,2,1)$. В първия случай с един ход за блока $1,2,...,k-1$ можем да получим редицата $(k,k-1,k-2,...,2,1,k+1,k+2,...,n)$ и с още един ход, приложен за блока $k,k-1,k-2,...,2,1$ да достигнем до възходящата редица $(1,2,...,n)$. Във втория случай с един ход достигаме до редицата $(k,k+1,k+2,...,n-1,n,k-1,k-2,...,2,1)$ и с втори – до низходящата редица $(n,n-1,...,2,1)$. Така доказахме, че с най-много 2 хода можем да получим от решение за редица с $n-1$ карти решение за редица с n карти, т.е. $f(n) \le f(n-1)+2$. За да докажем исканата граница поради условието $n \ge 5$ е достатъчно да докажем, че $f(5) \le 4$. Съгласно доказаното неравенство по индукция това би довело до $f(n) \le 4+(n-5).2 = 2n-6$, което трябва да се докаже.

Ако $n=3$, то възможните първоначални подреждания са $(1,2,3)$, $(1,\underline{3,2})$, $(\underline{2,1},3)$, $(\underline{2,3},1)$, $(3,2,1)$ и $(3,\underline{1,2})$ и с най-много един ход (за подчертания в съответната пермутация блок) произволна редица може да се монотонизира, така че $f(3)=1$.

Нека $n=4$. Твърдим, че с най-много 3 хода можем да подредим пермутация на 4 карти в нарастващ ред. Ако картата с номер 1 е на първо място, то с един ход подреждаме останалите 3 карти и евентуално с още един ход ги обръщаме. Ако картата с номер 1 е на второ място, то с един ход свеждаме този случай до предходния, така че получаваме общо най-много 3 хода. Ако картата с номер 1 е на четвърто място, то с един ход нареждаме предните 3 карти, при нужда с един ход ги обръщаме и с един ход обръщаме четирите карти. По симетричен начин отработваме конфигурациите, в които картата с номер 4 е на първо, трето или четвърто място. Остава да разгледаме само следните конфигурации: $(2,\underline{4,1},3) \to (\underline{2,1},4,3) \to (1,2,\underline{4,3}) \to (1,2,3,4)$, $(\underline{3,4},1,2) \to (4,3,\underline{1,2}) \to (\underline{4,3,2,1}) \to (1,2,3,4)$, за всяка от които са необходими по 3 хода. Аналогично с най-много 3 хода можем да подредим 4 карти в намаляващ ред.

Нека сега $n=5$ и да разгледаме произволна пермутация. С най-много един ход картата с номер 1 <u>или</u> картата с номер 5 може да бъде поставена на първа или последна позиция. Сега монотонизираме останалите 4 карти за най-много 3 хода (по описания алгоритъм), избирайки дали редът да е нарастващ или намаляващ според това коя карта сме поставили на първа или последна позиция на предходната стъпка. Това гарантира, че при $n=5$ са достатъчни 4 хода, с което доказателството е завършено.

Коментар: При решаване на задачата приложихме рекурсивен подход за съставяне на алгоритъма, върху който от своя страна да се базира доказателството, че $2n-6$ хода са винаги достатъчни. При прилагане на рекурсията достигаме до оценка за частния случай с $n=5$ карти. Можем да интерпретираме стратегията за решаване на задачата и като „обратна“ индукция, при която преминаването от следващ към предходен случай ни насочва към необходимата оценка за индукционната база.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: рекурсивен подход

Задача 62 (WLPMC 2020): Нека n и k са естествени числа, като $n>k$. Двама играчи – A и B –играят игра с n кутии и k топчета, редувайки се, като A започва първи. В началото на играта топчетата се намират в първите k кутии отляво надясно, като във всяка кутия има по едно топче. Играчът на ход избира топче и го премества (ако е възможно) в избрана от него празна кутия надясно по редицата. Играта приключва когато топчетата се намират в последните k кутии отляво надясно и съответно играчът, който следва да е на ход, не може да играе и губи. В зависимост от n и k определете кой играч има печеливша стратегия.

Решение: Твърдим, че играта е крайна. Наистина, в нея има краен брой възможни позиции и тъй като движението на топчетата е само отляво надясно, никоя не може да се повтаря, което гарантира, че играта не може да продължи безкрайно.

Ще докажем, че A има печеливша стратегия тогава и само тогава, когато поне едно от числата n и k е нечетно.

Първо, нека n и k са едновременно четни. Ще докажем, че B има печеливша стратегия. B мислено разделя кутиите на двойки съседни – $(1,2)$, $(3,4)$, …, $(n-1,n)$. С ходовете си B осигурява всяка такава двойка да съдържа две празни кутии или две кутии с топче. Наистина, преди първия си ход A има пред себе си конфигурация, в която това е изпълнено, доколкото k и n са четни и топчетата са в първите k кутии. Премествайки топче надясно, A „разваля“ точно две двойки, превръщайки ги в двойки, във всяка от които в едната кутия има топче, а в другата – не. Сега B може да премести топчето, останало в лявата от тези „развалени“ двойки в празната кутия от дясната „развалена“ двойка, така че вече в лявата двойка няма да има топчета, а в дясната ще има две топчета. Продължавайки по същия начин, след всеки свой ход B ще оставя конфигурацията във вид, в който във всяка от определените двойки кутии или има общо две топчета, или няма топчета и при всеки свой ход A ще е принуден да „разваля“ точно две двойки кутии в тази конфигурация. Тъй като крайното положение на играта, при което всичките k на брой топчета са в последните k на брой кутии, е именно положение, при което всяка от определените двойки кутии или съдържа две топчета, или няма топчета, то това положение е достижимо само след ход на B и следователно A няма да може да играе и ще загуби играта.

Нека сега поне едно от числата n и k е нечетно. Ще докажем, че A винаги има печеливша стратегия, като ще разгледаме три случая.

- Ако n и k са нечетни, то в първия си ход A мести най-дясното топче в последната кутия. Оттук нататък предстои игра с $n-1$ кутии и $k-1$ топчета, като $n-1$ и $k-1$ са четни.
- Ако n е четно, а k е нечетно, то в първия си ход A мести най-лявото топче в последната кутия. Така оттук нататък предстои игра с $n-2$ кутии и $k-1$ топчета, като $n-2$ и $k-1$ са четни.
- Ако n е нечетно и k е четно, то в първия си ход A мести най-лявото топче непосредствено след най-дясното (т.е. го поставя в $k+1$-та кутия). Така оттук нататък следва игра с $n-1$ кутии и k топчета, като $n-1$ и k са четни.

След описания ход за A, който е различен във всеки от разгледаните случаи, продължаваме с игра, в която броят кутии и броят топчета са четни и B е първи, така че A може да спечели, прилагайки стратегията на B при четни стойности за параметрите n и k.

Коментар: При решаването на задачата съществено е както да се формулира правилна хипотеза относно това при кои стойности на параметрите n и k кой от играчите има печеливша стратегия, така и да се конструират самите стратегии. Евристичният процес по справянето с тези два проблема протича паралелно и може да се базира на експериментиране с различни частни случаи за фиксирани стойности за параметрите от условието. Идеята за въвеждане на релация върху двойките съседни кутии в случая на четни n и k произлиза от следната инвариантност, която можем да забележим: когато всички двойки са в релацията и играч направи ход, получаваме конфигурация, в която точно две двойки вече не са от релацията и следващият играч с хода си може да получи конфигурация, в която отново всички двойки са в релацията.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: пълно изчерпване на възможности, експериментиране с частни случаи, въвеждане на релация

VI. Алгебра и анализ

Задача 63 (GJMO, 2018): Съществува ли реално число *x*, такова че числата $x+\sqrt{3}$ и $x^2+\sqrt{3}$ са едновременно рационални?

Решение: Нека $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$. Тогава $x+\sqrt{3}=\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$ и $x^2+\sqrt{3}=\frac{1}{4}-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}=3\frac{1}{4}\in\mathbb{Q}$.

Коментар: Авторовото решение на задачата е логически пълно, но почти неизползваемо от учебна гледна точка. За учениците важен е отговорът на въпроса как достигаме до посочената стойност за *x*, а доказателството, че тя изпълнява условията на задачата, което е важно за математическата консистентност на решението, е тривиално за тях. Как бихме могли да ги насочим сами да достигнат до примера за *x*? Нека означим $a=x+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$. Тогава $x=a-\sqrt{3}$ и $x^2+\sqrt{3}=a^2-2a\sqrt{3}+3+\sqrt{3}=a^2+3+(1-2a)\sqrt{3}$, така че за да бъде последното рационално, е необходимо $1-2a=0$, т.е. $a=\frac{1}{2}$ или $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$. Чрез този подход учениците се насочват към работа с метод на неопределените коефициенти и в една сравнително лесна задача трупат опит, който впоследствие могат да прилагат и в по-сложен контекст. Авторовото решение задава подходящ контекст с учениците да се коментират разликите между формално необходимото за строгото решение на задачата и анализът към това решение, който не е непременно задължителна част от пълното решение, но е необходима стъпка за достигането до него.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на неопределените коефициенти

Задача 64 (CJMO 2025): Разглеждаме аритметична прогресия от цели числа, която съдържа числото 1. Докажете, че тази прогресия съдържа безкрайно много точни кубове.

Решение: Доколкото прогресията съдържа числото 1, общият ѝ член може да се представи като $a_n=1+dn, n\in\mathbb{Z}$ за някаква константа *d*. Фиксираме произволно $u\in\mathbb{Z}$ и разглеждаме $n=d^2u^3+3du^2+3u$. Така получаваме $a_n=1+dn=(du+1)^3$ за всеки избор на $u\in\mathbb{Z}$.

Коментар: Тук изборът на *n* е съгласуван с формулата за куб на двучлен. След като искаме да конструираме безкрайно много кубове, е логично да използваме произволно фиксиран параметър, който може да приема възможно най-много стойности и да го интегрираме в израз с аналитичен вид, позволяващ да получим съответната формула. За да се приложи задачата в българската образователна практика в прогимназиален етап, е достатъчно условието да се преформулира, като се дефинира понятието за аритметична прогресия.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: параметризиране със свободен параметър

Задача 65: Съществуват ли ирационални числа a и b, такива че a^b е рационално число?

Решение: Разглеждаме числото $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

Ако $\alpha \in \mathbb{Q}$, то за ирационалните числа $a = \sqrt{2}$ и $b = \sqrt{2}$ е изпълнено, че $a^b \in \mathbb{Q}$.

Ако $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, то за ирационалните числа $a = \alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $b = \sqrt{2}$ получаваме, че $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

Така независимо дали числото $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ е рационално или ирационално, намерихме числа a и b, изпълняващи условието на задачата.

Коментар: Проблемът, който разглежданата задача поставя, възниква по естествен път при изучаването на множеството на ирационалните числа. Учениците могат да бъдат насърчени да търсят самостоятелно примера. Фактът за ирационалността на числото $\sqrt{2}$, чието доказателство е базово при въвеждането на самото понятие за ирационално число, функционира като фундамент при конструиране на примера. Освен това, изборът да се работи именно с това число е логичен, дори и по простата причина, че в началото на работата с ирационални числа в училище няма много други кандидати. Конструкцията на примера тук е интересна, тъй като се базира на пълно изчерпване на възможностите за природата на числото $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – не се стремим да определим какво е то, а доказваме, че независимо дали е рационално или ирационално, с помощта му можем да докажем съществуването на числа с исканите условия. Така основно средство за доказателство в случая е логическата дихотомия, свързана с подходящо избрана конструкция.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: пълно изчерпване на възможности, неявно конструиране на пример, използване на логическа дихотомия

Задача 66 (ВОМ 1963): Дадена е безкрайна аритметична прогресия от естествени числа, сред членовете на която има точен квадрат. Да се докаже, че безкрайно много от членовете на тази прогресия са точни квадрати.

Решение: Нека разликата на прогресията е $d \geq 0$ и членът ѝ $a_t = m^2$ за някое $m \in \mathbb{N}$. Тогава числото $(m+kd)^2 = m^2 + 2mkd + k^2d^2 = a_t + (2mk + k^2d)d$ също е член на прогресията за всяко $k \in \mathbb{N}$, така че прогресията наистина съдържа безкрайно много точни квадрати.

Коментар: Конструирането на формула, генерираща безкрайно много членове на редицата, които са точни квадрати, може да се достигне като се използва от една страна дефиницията за аритметична прогресия („Как можем да докажем, че едно число принадлежи на тази прогресия?“) и от друга съображението, че даденият елемент, който е точен квадрат, би трябвало да участва в тази формула.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: параметризиране със свободен параметър

Задача 67 (ММО 1994, Василев, Н. Б.): Докажете, че съществуват безбройно много наредени тройки цели числа (x, y, z), които са решение на уравнението $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$.

Решение: За произволно $k \in \mathbb{Z}$ наредената тройка $x = k(2k^2+1)$, $y = 2k^2+1$, $z = -k(2k^2+1)$ е решение на уравнението, понеже след заместване лявата страна придобива вида $2k^2(2k^2+1)^2 + (2k^2+1)^2 = (2k^2+1)^3$, на колкото е равна и дясната му страна.

Коментар: Идеята неизвестните да бъдат изразени чрез параметър, който може да приема безбройно много стойности, е съвсем базова. Водещо при стратегията за решаване на задачата е как все пак достигаме до самия начин за параметризиране. Естествено е да положим $z=-x$ с цел да опростим дясната страна. Така достигаме до $2x^2+y^2=y^3$ или $x^2=\frac{y-1}{2}y^2$. Оттук $\frac{y-1}{2}$ трябва да е точен квадрат и може да определим $\frac{y-1}{2}=k^2, k\in\mathbb{Z}$, откъдето изразяваме $y=2k^2+1$ и $x=k\left(2k^2+1\right)$.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: параметризиране със свободен параметър, смяна на променливите

Задача 68 (BrMO 2000): Да се намери най-малката стойност на израза $x^2+4xy+4y^2+2z^2$, където x, y и z са реални положителни числа и $xyz=32$.

Решение: Доколкото $\left(x-2y\right)^2\geq 0$, то $x^2+4y^2\geq 4xy$. Прилагайки последователно това неравенство и неравенството между средно аритметично и средно геометрично за три променливи, както и условието $xyz=32$, получаваме оценката:

$$x^2+4xy+4y^2+2z^2\geq 4xy+4xy+2z^2\geq 3\sqrt[3]{4xy.4xy.2z^2}=3\sqrt[3]{32\left(xyz\right)^2}=96.$$

Равенство се достига при $x^2=4y^2$ и $4xy=2z^2$, което съгласно положителността на x, y и z води до $x=z=2y$. Заместването в условието дава $4y^3=32$, така че равенство се реализира при $x=4, y=2$ и $z=4$.

Коментар: При решаване на задача за намиране на екстремална стойност е необходимо да се направи оценка, намираща или задаваща хипотеза за тази стойност и да се посочи примерен набор от стойности на променливите, за който тази стойност се достига. Това по същество категоризира всяка задачите от този тип като частен случай на категорията „пример и оценка“. Тук стратегията за реализация на решението е съвсем класическа – прилагане на неравенство на средните за изследване на израза. Към това насочва както положителността на променливите, така и стремежът да достигнем до израз, в който участва произведението xyz, чиято стойност е известна от условието.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: класически неравенства

Задача 69: Реалните числа a и b са такива, че $a^3+b^3+9ab=27$. Определете всички възможни стойности на сбора $a+b$.

Решение: Нека положим $u=a+b$ и $v=ab$. Преобразуваме равенството във вида $a^3+b^3+9ab=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)+9ab=u^3-3uv+9v=27$ и след разлагане получаваме, че $(u-3)\left(u^2+3u+9-3v\right)=0$, така че е необходимо $u=3$ или $u^2+3u+9=3v$. Тъй като от неравенството между средно аритметично и средно геометрично $\frac{(a+b)^2}{2}\geq ab$, то $v\leq\frac{u^2}{2}$.

Оттук $u^2+3u+9=3v$ води до $u^2+3u+9\leq\frac{3u^2}{4}$, което е еквивалентно на $(u+6)^2\leq 0$ и изисква $u=-6$. Така единствените възможности за стойността на сбора $u=a+b$ са $u=3$ (например при $a=1, b=2$) и $u=-6$ (например за $a=b=-3$).

Коментар: В случая намерихме възможните стойности на сбора $a+b$, използвайки стратегия за оценяване, базираща се на изразяване чрез елементарните симетрични полиноми на две променливи и прилагане на неравенството между средно аритметично и средно геометрично. Работата с елементарни симетрични полиноми тук е логична предвид необходимостта да се изследват стойностите именно на симетрична функция на a и b и симетричността на равенството.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: смяна на променливите, класически неравенства

Задача 70 (USAJMO 2010, David Speyer): Нека $n>1$ е естествено число. Да се намерят всички редици от естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ със следните свойства:

(1) $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$

(2) $x_i+x_{n-i}=2n$ за всяко $i=1,2,\ldots,n-1$

(3) за всеки два индекса i и j (не задължително различни), за които $x_i + x_j < 2n$ съществува елемент на редицата x_k, такъв, че $x_i + x_j = x_k$.

Решение: От свойство (2) $x_1 + x_{n-1} = 2n$. Доколкото $x_{n-2} < x_{n-1}$, свойство (3) води до $x_1 + x_{n-2} = x_{n-1}$. Аналогично $x_1 + x_{n-3} = x_{n-2}$, …, $x_1 + x_2 = x_3$. Така получаваме, че $x_{n-1} - x_{n-2} = x_{n-2} - x_{n-3} = ... = x_3 - x_2 = x_1$. Доколкото от свойство (2) $x_1 + x_{n-1} = x_2 + x_{n-2}$, то $x_1 = x_{n-1} - x_{n-2} = x_2 - x_1$, така че търсената редица е аритметична прогресия с разлика x_1. Така определяме, че тя е от вида $x_1, 2x_1, 3x_1, ..., (n-1)x_1$. Сега тъй като $x_1 + x_{n-1} = 2n$, то $x_1 = 2$ и редицата е 2, 4, 6, …, $2n-2$.

Коментар: Даденото решение включва конструиране на редицата и доказване на единствеността ѝ. Подходяща стратегия за достигане до хипотеза за природата на отговаряща на условията редица е анализ на дефиниращите я свойства от условието. Уместно е да си отговорим на въпроса: „Кои познати редици имат тези свойства?“, отговорът на който прави търсенето много по-фокусирано.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: заместване в дадените условия на подходящи конкретни стойности

Задача 71 (ТГ 2020): Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 3$ съществуват различни естествени числа $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$, такива че $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = x_{n+1}^3$.

Решение: При $n = 3$ избираме $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 6$, за които $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. При $n = 4$ избираме $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 8, x_4 = 13, x_5 = 14$, които удовлетворяват равенството, доколкото $2^3 + 3^3 + 8^3 + 13^3 = 14^3$.

Да допуснем, че за някое $n \geq 3$ числата $x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1}$ са такива, че $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = x_{n+1}^3$. Достатъчно е да докажем, че при $n+2$ съществуват числа $y_1 < y_2 < ... < y_{n+2} < y_{n+3}$, такива че $y_1^3 + y_2^3 + ... + y_{n+2}^3 = y_{n+3}^3$. Тъй като $(6x_1)^3 + (6x_2)^3 + ... + (6x_n)^3 = (6x_{n+1})^3$ и $(3x_1)^3 + (4x_1)^3 + (5x_1)^3 = (6x_1)^3$, можем да положим $y_1 = 3x_1, y_2 = 4x_1, y_3 = 5x_1, y_4 = 6x_2, y_5 = 6x_3, ..., y_{n+2} = 6x_n$ и $y_{n+3} = 6x_{n+1}$, получавайки вярното равенство $(3x_1)^3+(4x_1)^3+(5x_1)^3+(6x_2)^3+\ldots+(6x_n)^3=(6x_{n+1})^3$, лявата страна на което съдържа точно $n-1+3=n+2$ събираеми.

Коментар: Използваме индуктивен подход за дефиниране на числа с исканото свойство. Интересното тук е, че конструкцията генерира решение за случая $n+2$, базиращо се на решението за *n*, което налага разглеждане на индукционна база от поне две последователни стойности за *n*. Всъщност, тук анализ само на частния случай $n=3$ (и достигане именно до посоченото по-горе решение в този случай, тъй като то не е единствено), може да доведе до формулиране на погрешна хипотеза за последователност на числата. Ще отбележим и че условието $n\geq 3$ е съществено, тъй като при $n=2$ задачата се свежда до частен случай на Голямата теорема на Ферма.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция

Задача 72 (ЕМТ 2014): Да се намерят всички реални числа $x\in[0;1]$, които са решения на уравнението $\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}+\ldots+\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{x}}}}_{2014\text{ радикала}}=2014x$.

Решение: Очевидно $x=0$ и $x=1$ са решения. Нека сега разгледаме произволно $x_0\in(0;1)$. Доколкото $\sqrt{x_0}>x_0$ и $\sqrt{x_0}\in(0;1)$, то всяко от събираемите от лявата страна е по-голямо от x_0, така че тя има стойност, по-голяма от $2014x_0$ и съответно x_0 не може да бъде негово решение.

Коментар: Решаването на уравнението се свежда до директно изброяване на решенията му и доказателство, че то няма други такива. Това го причислява към задачите от типа „пример и оценка“ с тази особеност, че тук не посочваме само конкретен пример, а трябва да се досетим за всички решения. Основната тежест е свързана за доказателството за липса на други решения, което изисква познаване на свойствата на показателната функция.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: монотонност на функции, взаимодействие между пример и оценка

Задача 73 (ВОМ 1962): Да се докаже, че за всеки три безкрайни редици от естествени числа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ съществуват такива номера p и q, че $a_p \geq a_q$, $b_p \geq b_q$ и $c_p \geq c_q$.

Решение: Тъй като редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е от естествени числа, тя има най-малък елемент и нека това е a_{i_1}. Сега разглеждаме подредицата $\{a_n\}_{n=i_1}^{\infty}$, която също е от естествени числа и съответно съгласно принципа на крайния елемент има най-малък елемент a_{i_2}. Сега от подредицата $\{a_n\}_{n=i_2}^{\infty}$ избираме най-малкия ѝ елемент a_{i_3} и продължавайки по същия начин, можем да намерим безкрайна редица от индекси $i_1, i_2, ..., i_n, ...$, такава че $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3} \leq ... \leq a_{i_n} \leq ...$. Сега по аналогичен начин можем да изберем подредица $j_1, j_2, ..., j_n, ...$ на редицата $i_1, i_2, ..., i_n, ...$, такава че $b_{j_1} \leq b_{j_2} \leq b_{j_3} \leq ... \leq b_{j_n} \leq ...$. Сега избираме подредица $k_1, k_2, ..., k_n, ...$ на редицата $j_1, j_2, ..., j_n, ...$, такава че $c_{k_1} \leq c_{k_2} \leq c_{k_3} \leq ... \leq c_{k_n} \leq ...$. Очевидно е изпълнено и че $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq a_{k_3} \leq ... \leq a_{k_n} \leq ...$ и $b_{k_1} \leq b_{k_2} \leq b_{k_3} \leq ... \leq b_{k_n} \leq ...$, така че ако изберем например $p = k_2$ и $q = k_1$, то $a_p \geq a_q$, $b_p \geq b_q$ и $c_p \geq c_q$.

Коментар: Решението доказва съществуването на членове на редиците с исканите свойства, прилагайки принципа на крайния елемент. То демонстрира и гъвкавост при работата с подредици, която е ценно умение от гледна точка на изучаваните в училищния курс елементи на математическия анализ.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на крайния елемент

Задача 74 (ММР 2013/2014): Съществува ли стойност на параметъра α, такава че всички членове на безкрайната редица $\cos\alpha, \cos 2\alpha, ..., \cos\left(2^n \alpha\right), ...$ да са отрицателни?

Решение: Разглеждаме $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, съответно $\cos\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} < 0$. Да допуснем, че за някое $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ е изпълнено, че $\cos\left(2^k \alpha\right) = -\frac{1}{2}$. Тогава съгласно индукционното предположение $\cos\left(2^{k+1}\alpha\right) = \cos\left(2.2^k \alpha\right) = 2\cos^2\left(2^k \alpha\right) - 1 = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$. Така от принципа на математическата индукция всички членове на редицата при $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ са равни на $-\frac{1}{2}$ и съответно отрицателни.

Коментар: Даденото по-горе решение е предложеното от автора, но реално използването на индукция може да се избегне, ако се отбележи, че стойността на косинуса при произведенията на така избраното α с числа, които не са кратни на 3, е $-\frac{1}{2}$. Откриването на подходяща стойност за α едва ли може да се разглежда като особено предизвикателство, тъй като логиката предполага проверките да започнат с табличните отрицателни стойности на функцията $\cos\alpha$, а техният набор е ограничен. Допълнително средство за насока към решението е, че аналитичната формула за редицата предполага прилагане на формулата за косинус на удвоен ъгъл и естествено възникващият въпрос е „При какви отрицателни стойности за $\cos\alpha$ ще бъде изпълнено, че $\cos 2\alpha$ също е отрицателно?". Задачата може да се усложни и като се постави въпросът за намиране на всички стойности на параметъра, при които условието ще бъде изпълнено. Оказва се, че те са само $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: метод на математическата индукция, таблични стойности на тригонометрична функция

Задача 75 (ВМО 2012): Да се докаже, че за положителните реални числа *x*, *y* и *z* е вярно, че $(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}\geq 4(xy+yz+zx)$ и да се определят стойностите на *x*, *y* и *z*, при които се достига равенство.

Решение: Неравенството на Коши-Буняковски-Шварц дава $\sqrt{(z+x)(z+y)}\geq z+\sqrt{xy}$, $\sqrt{(x+y)(x+z)}\geq x+\sqrt{yz}$ и $\sqrt{(y+z)(y+x)}\geq y+\sqrt{zx}$, така че получаваме следната оценка за лявата страна: $(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}\geq$ $\geq(x+y)\left(z+\sqrt{xy}\right)+(y+z)\left(x+\sqrt{yz}\right)+(z+x)\left(y+\sqrt{zx}\right)$. Сега остава да докажем, че

$(x+y)\sqrt{xy}+(y+z)\sqrt{yz}+(z+x)\sqrt{zx}\geq 2(xy+yz+zx)$. От неравенството между средно аритметично и средно геометрично $x+y\geq 2\sqrt{xy}$, $y+z\geq 2\sqrt{yz}$ и $z+x\geq 2\sqrt{zx}$, така че наистина $(x+y)\sqrt{xy}+(y+z)\sqrt{yz}+(z+x)\sqrt{zx}\geq 2(xy+yz+zx)$. Равенство се достига само при $x=y=z$.

Коментар: По същество всяка задача за доказване на нестрого неравенство попада в категорията „пример и оценка“, но за разлика от типичните задачи в тази категория тук трябва да се намерят всички възможни примери, осъществяващи равенството. В случая това се базира на теорията, свързана с приложените основни неравенства. Евристичната стратегия се свежда именно до правилен избор именно на основни неравенства, които да реализират исканата оценка. За да го направим, е достатъчно да дадем правилен отговор на въпросите „Кое неравенство можем да приложим за всеки от цикличните компоненти от лявата страна?“ и „С кое неравенство можем да получим алгебричната конфигурация от дясната страна?“. Последното се постига с опит в прилагането и добро познаване на базовите неравенства.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: класически неравенства, метод на водещия въпрос

Задача 76 (ММР 2014/2015): Съществуват ли две периодични функции с (най-малък положителен) период съответно 2 и 6, чиято сума да е периодична функция с период 3?

Решение: Нека разгледаме функциите $f(x)=\cos\frac{2}{3}\pi x+\cos\pi x$ и $g(x)=-\cos\pi x$, чиято сума е $h(x)=\cos\frac{2}{3}\pi x$. Най-малкият положителен период на $g(x)$ е 2, а най-малкият положителен период на $h(x)$ е $2\pi:\left(\frac{2}{3}\pi\right)=3$. Нека функцията $f(x)=h(x)-g(x)$ има най-малък положителен период *T*. Тогава $\cos\frac{2}{3}\pi T+\cos\pi T=\cos 0+\cos 0=2$, което е възможно тогава и само тогава, когато $\cos\frac{2}{3}\pi T=\cos\pi T=1$. Последното води до $\frac{2}{3}\pi T=2\pi k, k\in\mathbb{N}$ и

$\pi T = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$. Оттук $T = 3k = 2n$, така че най-малкият положителен период на функцията наистина е 6.

Коментар: Тук конструирането на подходящ пример за функции изисква гъвкавост при работата с тригонометрични функции и добро познаване на периодичността им.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: експериментиране с частни случаи

Задача** 77 **(KNO 1995): Да се докаже, че за всяко естествено число m съществуват цели числа a и b, такива че $|a| \le m$, $|b| \le m$ и $0 < a + b\sqrt{2} \le \dfrac{1+\sqrt{2}}{m+2}$.

Решение: Да разгледаме множеството $S = \left\{ (m+2)\left(x + y\sqrt{2}\right) \middle| 0 \le x, y \le m \right\}$. Мощността му е $|S| = (m+1)^2$ и всички негови елементи са числа от интервала $\left[0; m(m+2)\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$, така че от принципа на Дирихле съществуват числа $x = a_1 + b_1\sqrt{2}, y = a_2 + b_2\sqrt{2} \in S$, такива че $|x - y| \le \dfrac{m(m+2)\left(1+\sqrt{2}\right)}{(m+1)^2 - 1} = 1 + \sqrt{2}$. Сега $a = a_1 - a_2$ и $b = b_1 - b_2$ изпълняват условието на задачата, понеже $|a_1 - a_2| \le m$, $|b_1 - b_2| \le m$ и $x - y = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2}$.

Коментар: Тук конструирането на числата a и b е неявно – съществуването им се гарантира от принципа на Дирихле. Както видяхме и от други задачи, той е силен инструмент за доказателство за съществуване. В разглежданата задача се изисква значителна находчивост, за да се достигне до него, тъй като наративът на условието не съдържа явна референция към прилагането му. Задачата е илюстрация за това, че принципът на Дирихле винаги трябва да присъства в активния набор от средства, особено в случаите, в които се изисква доказателство за съществуване на обекти, за които няма добри изгледи да бъдат посочени в явен вид.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле

Задача 78 (АРМО 2011): За всяко реално число *x* със $\lfloor x \rfloor$ означаваме най-голямото цяло число, което не надвишава *x*. Да се докаже, че за всяко реално число $r \geq 2$ уравнението $x^2 = r\lfloor x \rfloor$ има точно два или три положителни реални корена.

Решение: Ако $\lfloor x \rfloor = 0$, то получаваме $x = 0$, което не е положително. Следователно $\lfloor x \rfloor \geq 1$ и ако означим $y = \lfloor x \rfloor$, то $x = \sqrt{ry}$. Последното е решение на даденото уравнение точно тогава, когато $y \leq x < y+1$. Това означава, че е достатъчно да докажем, че при $r \geq 2$ двойното неравенство $y^2 \leq ry < (y+1)^2$ има точно две или три решения в цели числа. Числата $y_1 = \lfloor r \rfloor$ и $y_2 = \lfloor r \rfloor - 1$ са очевидно различни и са решения на неравенството, доколкото от $\lfloor r \rfloor \leq r < \lfloor r \rfloor + 1$ следват $\lfloor r \rfloor^2 \leq r\lfloor r \rfloor \leq (\lfloor r \rfloor + 1)^2$ и $(\lfloor r \rfloor - 1)^2 \leq r(\lfloor r \rfloor - 1) \leq \lfloor r \rfloor^2$. Освен това тъй като $y = \lfloor x \rfloor \geq 1$ двойното неравенство $y^2 \leq ry < (y+1)^2$ е еквивалентно на $y \leq r \leq y + 2 + \dfrac{1}{y}$, така че е необходимо $y \leq r < y+3$, което е еквивалентно на $y \in (r-3; r]$, а този интервал съдържа точно три цели числа. Това означава, че има най-много три (но поне две в лицето на y_1 и y_2) решения за *y*, което е еквивалентно на точно две или три положителни решения и за *x*.

Коментар: Посоченото решение на задачата посочва две числа, които винаги са решения на уравнението и доказва, че при разглежданите стойности на параметъра то има най-много още едно положително решение. Тук както достигането до числата, които са „гарантирани“ корени, така и доказателството за наличие на не повече от общо три решения при дадените условия се базират на познаване на свойствата на функцията $\lfloor x \rfloor$.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: свойства на функцията $\lfloor x \rfloor$

Задача 79: Нека функцията $f : [0,1] \to [0,1]$ е непрекъсната. Докажете, че съществува число $x \in [0,1]$, такова че $f(x) = x$.

Решение: Разглеждаме функцията $g(x)=f(x)-x$, която също е непрекъсната в интервала $[0,1]$ като разлика на две непрекъснати функции. Тъй като $g(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0$ и $g(1)=f(1)-1\leq 0$, то по теоремата за междинните стойности съществува число $x_0\in[0,1]$, такова че $g(x_0)=0$. Но тогава $f(x_0)-x_0=0$, т.е. $f(x_0)=x_0$.

Коментар: Решението на тази класическа задача включва конструиране на подходяща функция, за която може да бъде приложена теоремата за междинните стойности и по този начин да бъде доказано съществуването на число с исканите свойства. Решаването на задачата е добро теоретично упражнение при изучаване на теоремите за непрекъснатост в рамките на разглеждането на елементи от математическия анализ в рамките на профилираната подготовка.

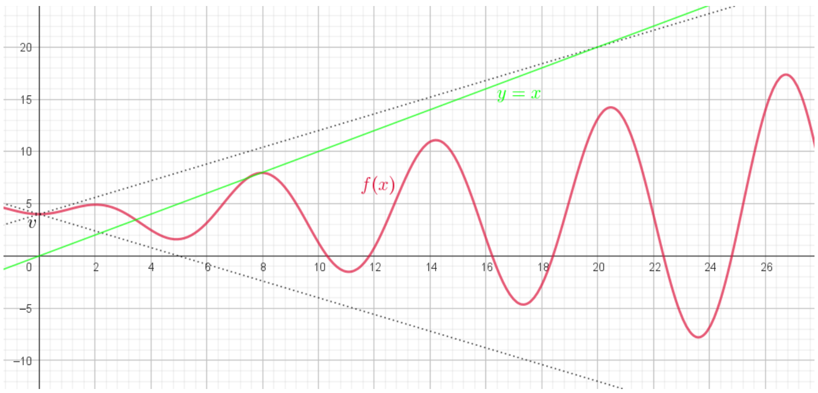
Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: теореми за непрекъснатост на функции

Задача 80: Нека функцията $f(x)$ е диференцируема за всяко $x\in\mathbb{R}$ и съществува константа $k<1$, такава че $|f'(x)|\leq k$ за всяко $x\in\mathbb{R}$. Докажете, че съществува реално число *x*, такова че $f(x)=x$.

Решение: Нека без ограничение на общността $f(0)=v>0$. Да допуснем, че за всяко $x\geq 0$ е изпълнено, че $f(x)\neq x$. Съгласно теоремата за междинните стойности последното изисква $f(x)>x$. Фиксираме произволно число $b>0$. Съгласно теоремата за средните стойности съществува число $u\in(0,b)$, такова че $f'(u)=\dfrac{f(b)-f(0)}{b-0}=\dfrac{f(b)-v}{b}$. Сега доколкото $f(b)>b$ имаме $f'(u)>\dfrac{b-v}{b}=1-\dfrac{v}{b}$. Тук можем да изберем b достатъчно голямо, така че $f'(u)$ да бъде в произволно малка околност на числото 1. Това обаче противоречи на условието, че $|f'(u)|\leq k<1$. Така допускането е погрешно и съществува $x_0>0$, такова че $f(x_0)=x_0$. Случаят $f(0)<0$ е аналогичен.

Коментар: В разгледаното решение доказваме съществуването на точка с исканите свойства, използвайки косвен подход и прилагайки теоремата за средните стойности и теоремата за междинните стойности. Идеята за решението може да бъде генерирана на база графичната интерпретация на условието. Съгласно геометричния смисъл на понятието производна, условието гарантира, че графиката на функцията е „затворена“ между раменете на остър ъгъл от вида на изобразения с пунктир на чертежа. При този визуален поглед върху условието твърдението на задачата изглежда съвсем естествено, а допускането $f\left(x\right)>x$ и прилагането на теоремата за средните стойности са аргументиран избор на средства.



Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: теореми за непрекъснатост и диференцируемост на функции, графична интерпретация на понятието производна

Задача 81: Има ли граница редицата с общ член $a_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}$?

Решение: Имаме, че $a_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+2n+1}$. Тъй като за всяко $k=1,2,\ldots,2n+1$ е изпълнено, че $\dfrac{1}{n^2+2n+1}\le\dfrac{1}{n^2+k}\le\dfrac{1}{n^2+1}$, то $\dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}\le a_n\le\dfrac{2n+1}{n^2+1}$. Сега доколкото $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+1}=0$, по лемата за полицаите следва, че редицата $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница 0.

Коментар: Задачата може да бъде разгледана в рамките на модула „Елементи на математическия анализ“ от профилираната подготовка по математика. В решението ѝ ключово е конструирането на подходящи редици, с които дадената да бъде ограничена отгоре и отдолу. При намирането им водеща насока е, че за да може да бъде приложена лемата на полицаите, която задава достатъчно условие за сходимост, границите на тези редици трябва да съвпадат помежду си. Така при достигане на хипотезата, че редицата $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница 0 и избора на лемата на полицаите като теоретично средство за доказателство на сходимост, въпросът на задачата се свежда до: „Кои са подходящите редици с граница 0, с които $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ може да бъде ограничена отдолу и отгоре?“.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: ограничаване с редици, лема за полицаите

Задача 82: Има ли граница редицата $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, зададена с $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2}{2a_n}$?

Решение: Ако допуснем, че $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница *l*, то при граничен преход в дефиниционното равенство $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2}{2a_n}$ получаваме $l = \dfrac{l^2 + 2}{2l}$, откъдето възможните стойности за *l* са $l = \pm\sqrt{2}$. Тъй като $a_n > 0$ за всяко *n*, то единствената възможна стойност за *l* е $\sqrt{2}$. Ще докажем, че $a_n > \sqrt{2}$ за всяко *n*. Наистина, това е в сила при *n*=1 и също $a_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{a_n^2 + 2}{2a_n} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(a_n - \sqrt{2}\right)^2}{2a_n} \geq 0$, така че редицата $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отдолу. Освен това, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n^2 + 2}{2a_n} - a_n = \dfrac{2 - a_n^2}{2a_n} = \dfrac{\left(\sqrt{2} + a_n\right)\left(\sqrt{2} - a_n\right)}{2a_n} \leq 0$, което доказва, че редицата $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща. Сега доколкото $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отдолу и монотонно намаляваща, по теорема тя е сходяща, така че от доказаното $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Коментар: Тук водещ е изборът на теоретично средство за доказателство за сходимост на редицата. Разглеждането на първите ѝ няколко члена естествено формира хипотезата за монотонно намаляване. Оттам насетне правилните въпроси възникват естествено при добро познаване на теорията. Тук важно евристично средство за достигане до предположение на точната долна граница на редицата, е извършване на граничен преход в рекурсивната формула за общия ѝ член.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: теореми за сходимост на редици

Задача 83 (IMO 2009, Bruno Le Floch): Да се намерят всички функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, такива че за всеки две естествени числа a и b съществува неизроден триъгълник с дължини на страните $a, f(b)$ и $f(b+f(a)-1)$.

Решение: Разглеждаме триъгълници със страни естествени числа. Ще започнем със следното наблюдение: ако триъгълник има страни 1, a и b, то от неравенство на триъгълника следва, че $a=b$.

Нека $a=1$. Тогава от горното наблюдение следва, че $f(b)=f(b+f(1)-1)$. Последното означава, че или $f(1)=1$, или функцията f е периодична с период $T=f(1)-1\geq 1$. При фиксиране на b и избор на достатъчно голямо a обаче последното би довело до противоречие със съществуването на триъгълника. Следователно $f(1)=1$.

Сега полагаме $a=n$, $b=1$. Страните на триъгълника стават n, $f(1)=1$ и $f(1+f(n)-1)=f(f(n))$ и съгласно наблюдението в началото на решението получаваме $f(f(n))=n$, т.е. f е инволюция и в частност биекция.

Означаваме $\delta=f(2)-1>0$. Твърдим, че за всяко n $f(n+1)=f(n)+\delta$ или $f(n-1)=f(n)+\delta$. Разглеждаме $a=2$, $b=f(n)$. Тогава страните на триъгълника са 2, $f(f(n))=n$ и $f(f(n)+f(2)-1)=f(f(n)+\delta)$ и от неравенство на триъгълника $n-2<f(f(n)+\delta)<n+2$. Освен това, $f(f(f(n)+\delta))=f(n)+\delta$.

Ако допуснем, че $f(f(n)+\delta)=n$, това води до $\delta=0$ и води до противоречие с биективността на f. Така имаме, че наистина $f(f(n)+\delta)=n+1$ или $f(f(n)+\delta)=n-1$.

Знаем, че $f(1)=1$ и $f(2)=1+\delta$. С индукция по n установяваме, че f е аритметична прогресия с разлика δ и при това вариантът $f(f(n)+\delta)=n-1$ отпада. Така $f(n+1)=f(n)+\delta$ и доколкото $f(f(n))=n$, функцията е $f(n)=n$.

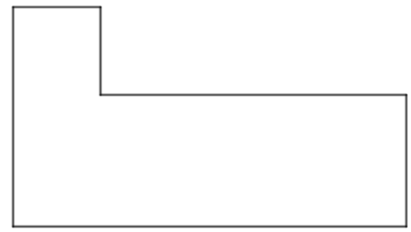
Коментар: В това функционално уравнение достигането до аналитичния вид на функцията не е голямо предизвикателство, тъй като, най-малкото тя е една от първите „заподозрени“. Логично е първите стъпки към ориентиране в условието да включват експериментиране с различни познати функции с добре известни свойства и предвид линейния характер на условието за съществуване на триъгълник, $f(n)=n$ е обещаващ кандидат за верен отговор. Дали обаче има и други? Пътят към доказателство за единственост по същество е конструктивен и проследява етапите на достигане до аналитичния вид на функцията чрез откриване на нейни свойства и отхвърляне на класове функции, които ги нарушават. Така независимо, че предварително имаме нагласа за отговора, достигаме и строго до него, като хипотезата $f(n)=n$ ни подсказва какви стъпки да предприемем. Евристичните бариери в процеса на решаване на задачата са свързани и с подходящ подбор на стойности за a и b, чрез които да се извличат зависимости и свойства. Преодоляването на тези бариери е свързано както с познаване на свойствата на функцията от хипотезата, така и с опит в решаването на функционални уравнения.

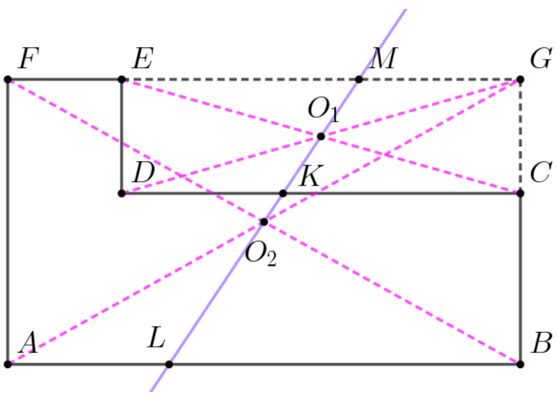
Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: експериментиране в частни случаи, метод на водещия въпрос

VII. Геометрия

Задача 84: Пет от вътрешните ъгли на шестоъгълника на чертежа са по 90°, а шестият е 270°. Възможно ли е само с линийка (без деления) той да бъде разделен на две равнолицеви части?





Решение: Ще използваме означенията на чертежа. Извършваме построението по следния начин: продължаваме правите BC и FE до пресичането им в точка G. Построяваме точките $O_1 = DG \cap CE$ и $O_2 = AG \cap BF$. Твърдим, че правата O_1O_2 разделя шестоъгълника на две равнолицеви части. При централна симетрия $\sigma_{O_1} : D \to G$, $E \to C$, $M \to K$ (доколкото $DC \to GE$ и правата MK се изобразява в себе си), така че $DKME \to GMKC$ и $S_{DKME} = S_{GMKC}$. Аналогично $S_{ALMF} = S_{LBGM}$, така че даденият шестоъгълник се разделя от правата O_1O_2 на части с лица $S_{ALMF} - S_{DKME}$ и $S_{LBGM} - S_{KCGM}$, които според доказаното са равни.

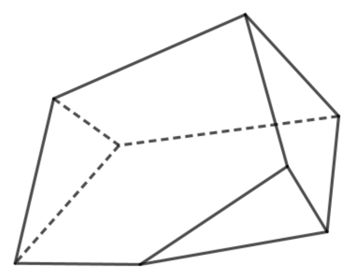
Коментар: Водещият въпрос при решаването на задачата е „Какво можем да построим само с линийка?“. На пръв поглед отговорът изглежда отчайващо ограничаващ – можем само да построяваме прави, свързвайки две точки. Всъщност обаче именно ограниченията, наложени от този инструмент, ни водят към идеята за решението. „Какви прави можем да построим?“ „Какви свойства можем да използваме, за да разделяме фигури на равнолицеви части?“ Тук важна е и асоциацията между равнолицевост и еднаквости: знанието, че пресечната точка на диагоналите на правоъгълник е негов център на симетрия и съображението, че всяка права през този център разделя правоъгълника на две равнолицеви части. Както сме свикнали в задачите по математика, за успешното решение на задачата са необходими от една страна опит и знания, от друга – внимателен прочит на условието и от трета – съобразителност, която е необходимата среда, за да могат другите компоненти да заработят синергично. Поучителното в случая е, че именно ограниченията на инструментариума, зададен по условие, са ключ към решението. Ще отбележим, че при друг избор на центрове на правоъгълници, с които да се работи, е възможно построената права да раздели дадения шестоъгълник на три, а не на две части, което би наложило изследването на различни случаи. Това е аспект на решението, към който е целесъобразно да бъде насочено вниманието и на учениците. Предложеното тук решение е различно от авторското – последното изисква разглеждане на отделни случаи с цел избягване на споменатата опасност.

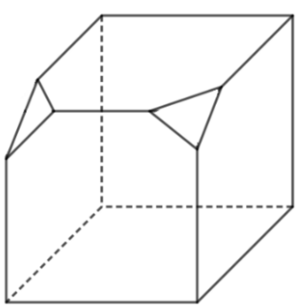
Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: равнолицевост, симетрия

Задача 85 (LVII ММО): Съществува ли многостен, никои три стени на който нямат еднакъв брой страни?

Решение (първи вариант): Отрязвайки триъгълни пирамиди с върхове два върха на тетраедър, получаваме шестостен, стените на който са 2 триъгълника, 2 четириъгълника и 2 петоъгълника.





Решение (втори вариант): Отрязвайки триъгълни пирамиди с върхове два съседни върха на куб, получаваме осмостен, стените на който са 2 триъгълника, 2 четириъгълника, 2 петоъгълника и 2 шестоъгълника.

Коментар: Задачата има подчертано конструктивен характер. Един подход към намирането на пример е да се анализира природата на познати базови тела и да се зададат правилните въпроси за тях, а именно: „Какво можем да променим в един тетраедър, за да получим тяло с исканото свойство?“ или „Какво да променим в един куб, така че да заменим 4 от стените му със стени от друг вид?“. Дори след като открием един или повече примери, добрите практики изискват учениците да бъдат насърчени да търсят различни конструкции, задачата предполага да си зададем и други въпроси, като например: „Възможно ли е да избегнем и двойките стени с равен брой страни? Ако беше възможно, сигурно задачата щеше да изисква да посочим именно такъв пример. Ако не е възможно, каква е причината?“ Това по естествен път води до следващата задача, която може да бъде формулирана съвсем спонтанно в хода на учебната работа.

Класове, за които задачата е подходяща: 6, 7

Стратегии и инструменти, използвани в решението: експериментиране в частни случаи

Задача 86: В даден многостен най-големият брой стени, които имат един и същ брой страни, е k. Каква е най-малката възможна стойност на k?

Решение: Да допуснем, че $k=1$, т.е. никои две стени на многостена нямат равен брой страни. Разглеждаме тази негова стена, която има най-много страни; нека те са n на брой. Това означава, че тази стена има n съседни стени, които според допускането трябва да са с различен брой страни, всеки от които трябва да е по-малък от n. Числата, които могат да означават този брой страни обаче са 3, 4, …, $n-1$ и са само $n-3$ на брой, което води до противоречие.

Ако $k=2$, можем да посочим като пример някоя от конструкциите в предходната задача.

Така установяваме, че най-малката възможна стойност на k е 2.

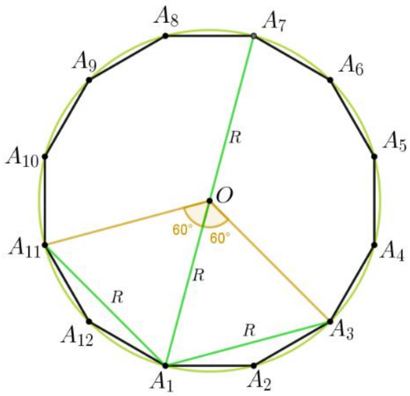
Коментар: Разгледаната задача се категоризира към логическата структура пример и оценка. Оценката се извършва с помощта на принципа на крайния елемент, който е естествен подход за постигане на противоречие с допускането, че е възможно всеки две стени на многостена да имат различен брой страни. Решаването ѝ дава завършеност на проблемната ситуация, поставена от предходната задача . От друга страна, ако се разглежда независимо от нея, това прави формулирането на хипотезата за отговора значително по-сложно.

Класове, за които задачата е подходяща: 7, 8

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка

Задача 87: Съществува ли правилен многоъгълник, някой от диагоналите на който е равен на сбора на други два негови диагонала?

Решение: Нека разгледаме правилен 12-ъгълник $A_1A_2A_3...A_{12}$, вписан в окръжност с радиус



R. Диагоналът му $A_1A_7 = 2R$ е диаметър за окръжността, а доколкото $\measuredangle A_{11}OA_1 = \measuredangle A_1OA_3 = 60°$, то диагоналите $A_{11}A_1 = A_1A_3 = R$, така че $A_{11}A_1 + A_1A_3 = A_1A_7$.

Коментар: Тук изборът на правилен 12-ъгълник за конструиране на примера е естествен, тъй като диагоналите му могат да бъдат изразени лесно чрез радиуса на описаната окръжност. Задачата е подходящ избор за упражнение в рамките на задължителната подготовка. Тя поставя учениците в проблемна ситуация, формулирайки съвсем естествен въпрос. Намирането на отговора на този въпрос изисква добро разбиране за свойствата на правилните многоъгълници и всеки етап от търсенето му е отправна точка за разширяване и задълбочаване на познанията, включително евентуалното преминаване през неподходящи за целите на задачата многоъгълници.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

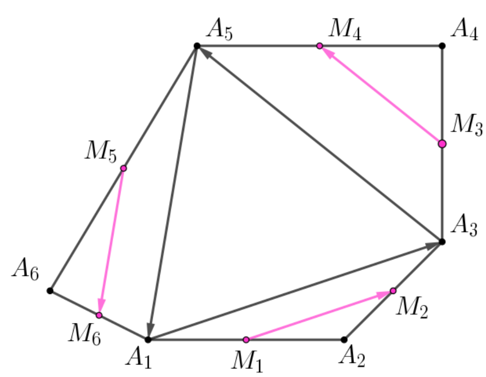
Стратегии и инструменти, използвани в решението: познаване на достатъчни условия равнобедрен триъгълник да е равностранен

Задача 88: Даден е изпъкнал шестоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ със среди на страните A_1A_2, A_2A_3, …, A_6A_1 съответно M_1, M_2, …, M_6. Сигурно ли е, че съществува триъгълник със страни M_1M_2, M_3M_4 и M_5M_6?

Решение: Тъй като $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{M_3M_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_3A_5}$ и $\overrightarrow{M_5M_6} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_5A_1}$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \overrightarrow{M_5M_6} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_5} + \overrightarrow{A_5A_1}\right) = \vec{0}.$$

Последното гарантира, че съществува триъгълник със страни M_1M_2, M_3M_4 и M_5M_6.



Коментар: Задачата е достъпна и подходяща за упражнение в рамките на задължителната подготовка. Може да се използват средни отсечки или вектори, като тук асоциацията за работа с вектори идва по две направления – от една страна, разглежданият шестоъгълник е произволен. От друга, логичният въпрос, който можем да си зададем, искайки да докажем съществуване на триъгълник, е: „Какви необходими и достатъчни условия за съществуване на триъгълник познаваме?“, а векторният апарат задава стандартно достатъчно условие за съществуване на произволен n-ъгълник.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: аналитичен подход, вектори, средна отсечка

Задача 89: Дадени са пет окръжности, всеки четири от които минават през една и съща точка. Докажете, че съществува точка, обща за петте окръжности.

Решение: Нека окръжностите са k_1, k_2, k_3, k_4 и k_5. Нека окръжностите k_1, k_2, k_4 и k_5 минават през точка A, окръжностите k_1, k_3, k_4 и k_5 минават през точка B, а окръжностите k_2, k_3, k_4 и k_5 минават през точка C. Да допуснем, че точките A, B и C са различни. Всяка от тях е обща за окръжностите k_4 и k_5, но те могат да имат най-много две обши точки, което е противоречие с допускането и доказва, че поне две измежду точките A, B и C съвпадат. Които и да са те, те съвпадат и с точка, обща за петте окръжности.

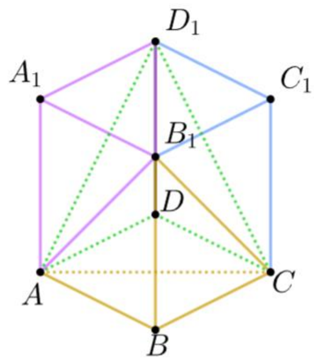
Коментар: В решението на задачата конструираме търсената точка чрез косвен подход. Идеята за доказателството може да се достигне чрез намирането на подходящо достатъчно условие за съвпадение на точки, които са общи за окръжности. При избора на опорните точки в решението съгласуваме дефиницията им с това достатъчно условие.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: косвен подход

Задача 90: Куб е разделен на k непресичащи се тетраедъра. Каква е най-малката възможна стойност на k?

Решение: Разглеждаме куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб a. Той може да се раздели на следните $k=5$ непресичащи се тетраедъра: $AA_1B_1D_1$, AB_1BC, $ACDD_1$, $B_1C_1D_1C$ и ACD_1B_1 (с други думи, „издялкваме“ в средата тетраедъра ACD_1B_1, отстранявайки четири тетраедрични парчета).



Да допуснем, че кубът може да се раздели на $k \le 4$ непресичащи се тетраедъра. Поне два от тях имат стена, лежаща на стената $ABCD$. Поне два тетраедъра имат и стена, лежаща на стената $A_1B_1C_1D_1$. Тъй като $(ABC) \| (A_1B_1C_1)$ и тетраедърът не може да има успоредни стени, то горните четири тетраедъра са различни и така k е поне 4. Ако обаче $k=4$, то сборът от обемите на посочените четири тетраедъра не надвишава $\frac{2a^3}{3}$, което е по-малко от обема на куба и води до противоречие с допускането $k \le 4$.

Така най-малката възможна стойност на k е 5.

Коментар: Тази задача от комбинаторната геометрия логически попада в категорията „пример и оценка“. Тук разсъжденията, доказващи, че $k \ge 4$ насочват пряко към конструиране на примера, така че е налице евристично взаимодействие между достигането до оценката и намирането на подходящ пример.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка

Задача 91 (ВОМ 1985): Дадена е безкрайна правоъгълна мрежа, разграфена на квадратни клетки със страна 1. Разрешено е да се правят разрези само по линиите на мрежата. Да се докаже, че за всяко естествено число $m>12$ от мрежата може да се изреже правоъгълник с лице, по-голямо от *m*, от който не може да се изреже правоъгълник с лице *m*.

Решение: Даден правоъгълник би удовлетворявал условието, ако страните му *x* и *y*, където $x \le y$ са такива, че $xy > m$, но $x(y-1) < m$, доколкото най-големият по площ съдържащ се в него правоъгълник, който е разрешено да бъде изрязан, е този със страни *x* и $y-1$. Ще означаваме лицето на последния с $S_{\max}$.

Ако $m=k^2$ за някое естествено число *k*, разглеждаме правоъгълника със страни $x=k-1$ и $y=k+2$. Лицето на този правоъгълник е $xy=(k-1)(k+2)=k^2+k+1>m$, а $S_{\max}=x(y-1)=(k-1)(k+1)=k^2-1<m$.

Ако $k^2<m<k(k+1)$, $k\in\mathbb{N}$, разглеждаме правоъгълника със страни $x=k$ и $y=k+1$ и лице $xy=k(k+1)>m$. За него $S_{\max}=x(y-1)=k^2<m$.

Ако $m=k(k+1)$, $k\in\mathbb{N}$, разглеждаме правоъгълника със страни $x=k-1$ и $y=k+3$ и лице $xy=(k-1)(k+3)=k(k+1)+k-3>m$, доколкото $m>12$ води до $k-3>0$, а $S_{\max}=(k-1)(k+2)=k(k+1)-2<m$.

Накрая, ако $k(k+1)<m<(k+1)^2$, $k\in\mathbb{N}$, то разглеждаме квадрата със страна $x=y=k+1$ и лице $xy=(k+1)^2>m$. За него $S_{\max}=k(k+1)<m$.

Коментар: Решението на задачата изисква намиране на правоъгълник с лице по-голямо от *m*, за който е вярно, че дори да намалим по-голямата му страна само с 1, ще получим правоъгълник с лице, по-малко от *m*. Отговорът на въпроса „Кой е правоъгълникът, за който намаляването на по-голямата страна с 1 „реже“ възможно най-много от лицето?“ насочва към разглеждане на правоъгълници с възможно най-близки страни и по естествен път води до даденото решение.

Добре е също да се обсъди въпросът доколко изискването $m>12$ (използвано в третия случай по-горе) е съществено; можем да се уверим, че от всеки правоъгълник с лице, по-голямо от 12, можем изрежем правоъгълник с лице 12 – наистина, ако страните му са $a \le b$ (ab>12), то:

- ако a=1, то $b\ge 13$ и вътре се поставя правоъгълник 1×12;

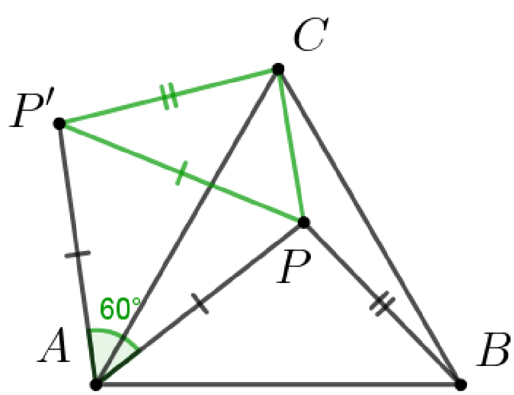
- ако a=2, то $b \geq 7$ и вътре се поставя правоъгълник 2×6;
- ако a=3, то $b \geq 5$ и вътре се поставя правоъгълник 3×4;
- ако $a \geq 4$, то $b \geq a \geq 4$ и вътре се поставя правоъгълник 3×4.

Класове, за които задачата е подходяща: 8, 9

Стратегии и инструменти, използвани в решението: пълно изчерпване на възможности; нареждане по големина

Задача 92 (GNO, 2006): Нека P е точка от вътрешността на равностранен триъгълник ABC. Докажете, че съществува триъгълник със страни PA, PB и PC.

Решение: Разглеждаме ротация $R_A^{60^\circ}$. При нея $B \to C$, $P \to P'$, $AP \to AP'$, $BP \to CP'$. От свойствата на ротацията $AP = AP'$ и $\measuredangle PAP' = 60^\circ$, така че триъгълник PAP' е равностранен и $PP' = PA$. Сега триъгълникът CPP' има страни, равни на отсечките PA, PB и PC. Достатъчно е да отбележим, че тъй като P е точка от вътрешността на триъгълника ABC, то точките C, P и P' не са колинеарни, така че CPP' не е изроден.

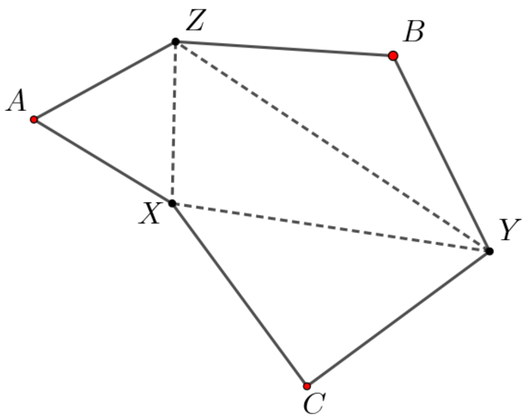


Коментар: Асоциацията, водеща към това елегантно решение на задачата, е достатъчно базова, когато става дума за равностранен триъгълник. Чрез използването на ротация директно конструираме триъгълник с исканите страни. Задачата не е предизвикателство при наличието на опит за работа с еднаквости – те се явяват базов подход за конструиране в много геометрични задачи, при това не само построителни.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: ротация

Задача 93 (Paul Zeitz): Нека *XYZ* е триъгълник. Външно за него са построени равнобедрени триъгълници *XZA*, *ZYB* и *XYC* с основи съответно *XZ*, *ZY* и *XY* и ъгли при върховете *A*, *B* и *C* съответно 60°, 120° и 90°. Ако са дадени точките *A*, *B* и *C*, да се възстанови триъгълникът *XYZ*.



Решение (анализ): Разглеждаме ротации с центрове дадените точки: $R_A^{60^\circ}: X \to Z$, $R_B^{120^\circ}: Z \to Y$ и $R_C^{90^\circ}: Y \to X$. Така получаваме, че композицията $R_C^{90^\circ} \circ R_B^{120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$ изобразява точката *X* в себе си. От свойствата на суперпозициите на еднаквости, доколкото $60^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 270^\circ \neq 360^\circ$, тази композиция е ротация на ъгъл 270°. Тъй като центърът е единствената неподвижна точка при ротация, то центърът на $R_C^{90^\circ} \circ R_B^{120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$ е точката *X*.

Точката *X* можем да построим като намерим образите на две произволно избрани точки при композицията $R_C^{90^\circ} \circ R_B^{120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$ и използваме, че центърът на породената от нея ротация (т.е. *X*) лежи на симетралата на отсечката, свързваща образ и първообраз при ротация. След това точките *Y* и *Z* намираме с ротациите $R_A^{60^\circ}: X \to Z$ и $R_B^{120^\circ}: Z \to Y$.

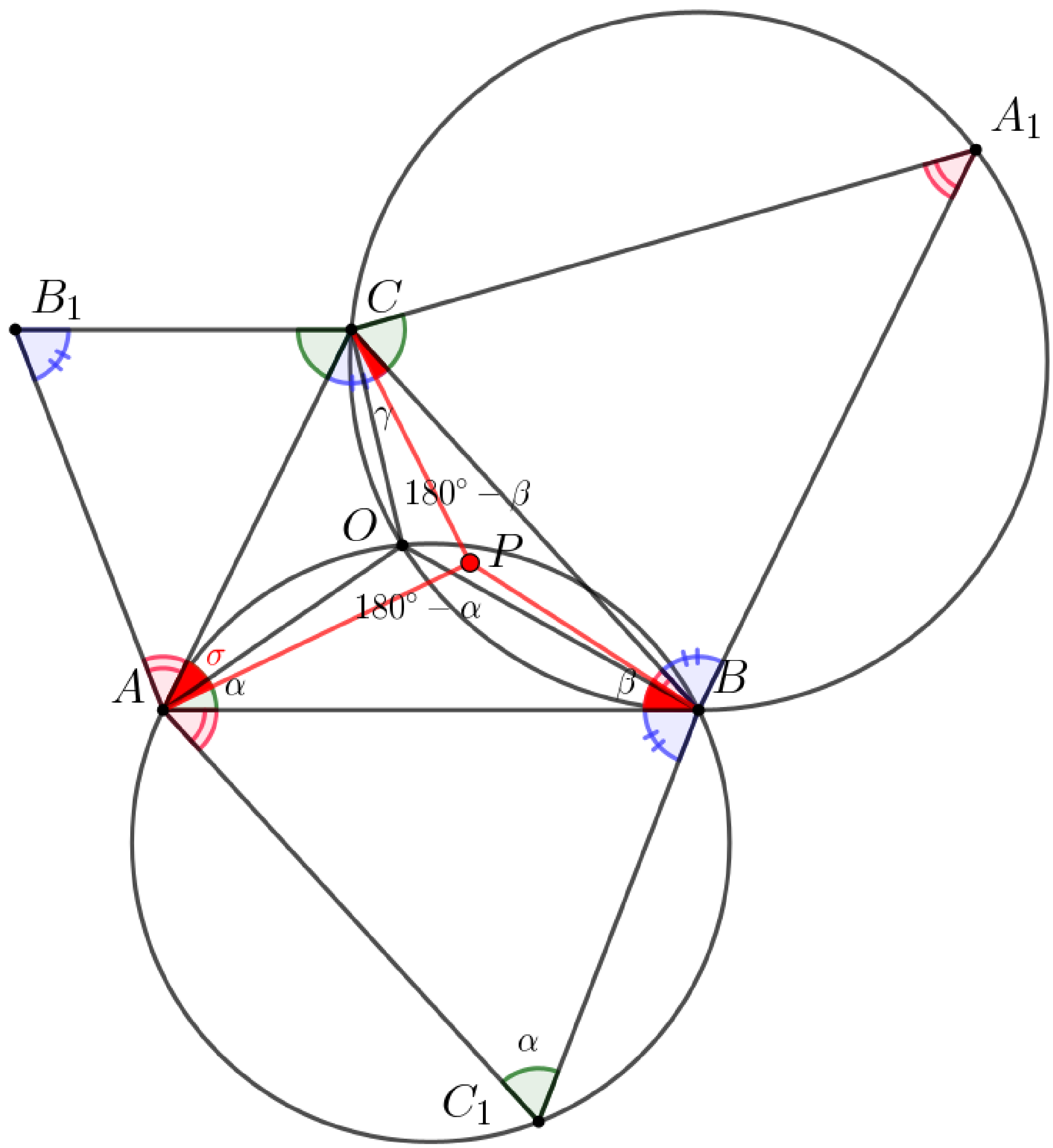
Коментар: Класическият подход при решаване на построителни задачи започва с анализ, при който извършваме коментираното от Zeitz „пожелателно мислене“, при което си представяме, че сме построили търсения обект и базирайки се на свойствата му, достигаме до модел за решение. В случая от евристична гледна точка подходът с ротация е логичен, а по-специфичното е използването на композиция от ротации. Задачи като тази могат да бъдат отправна точка за изследване свойствата на суперпозициите на еднаквости в хода на учебната и извънкласна работа.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: композиция на ротации

Задача 94 (точка на Brocard): Да се докаже, че във вътрешността на всеки триъгълник ABC съществува единствена точка P със свойството $\measuredangle ABP = \measuredangle CAP = \measuredangle BCP$.

Решение: Външно за триъгълника ABC построяваме триъгълници CA_1B, CAB_1 и C_1AB, съответно подобни на ABC (ъглите при съответно написаните върхове в четирите триъгълника са равни). Означаваме ъглите на ABC съответно с α, β и γ.



Нека окръжностите, описани около триъгълниците CA_1B и C_1AB се пресичат за втори път в точка O. От вписания четириъгълник AC_1BO получаваме, че $\measuredangle AOB = 180° - \alpha$, а от вписания четириъгълник BA_1CO – че $\measuredangle BOC = 180° - \beta$. Така $\measuredangle COA = 180° - \gamma$ и точката O

лежи на описаната около триъгълник CAB_1 окръжност. Имаме $\measuredangle AOA_1 = \measuredangle AOB + \measuredangle BOA_1 = 180° - \alpha + \measuredangle BCA_1 = 180° - \alpha + \alpha = 180°$, така че $O \in AA_1$. Аналогично $O \in BB_1$ и $O \in CC_1$, така че правите AA_1, BB_1 и CC_1 минават през една точка и тя е O. Ако означим $\measuredangle OBA = \varphi$, то $\measuredangle OBC = \beta - \varphi$ и от сбор на ъгли в триъгълник BCO намираме $\measuredangle BCO = \varphi$. Сега от $\measuredangle OBA = \gamma - \varphi$ и $\measuredangle COA = 180° - \gamma$ следва $\measuredangle BAO = \varphi$, така че точката O притежава свойството от условието на задачата.

Да допуснем, че съществува точка $P \neq O$, такава че $\measuredangle ABP = \measuredangle CAP = \measuredangle BCP = \sigma$. Доколкото $\measuredangle ABP = \measuredangle CAP = \sigma$, то $\measuredangle PAB = \alpha - \sigma$ и от триъгълник ABP намираме, че $\measuredangle APB = 180° - \alpha$, така че точката P лежи на описаната около триъгълник C_1AB окръжност. Аналогично точката P лежи и на описаните около триъгълниците CA_1B и CAB_1 окръжности, така че P съвпада с O.

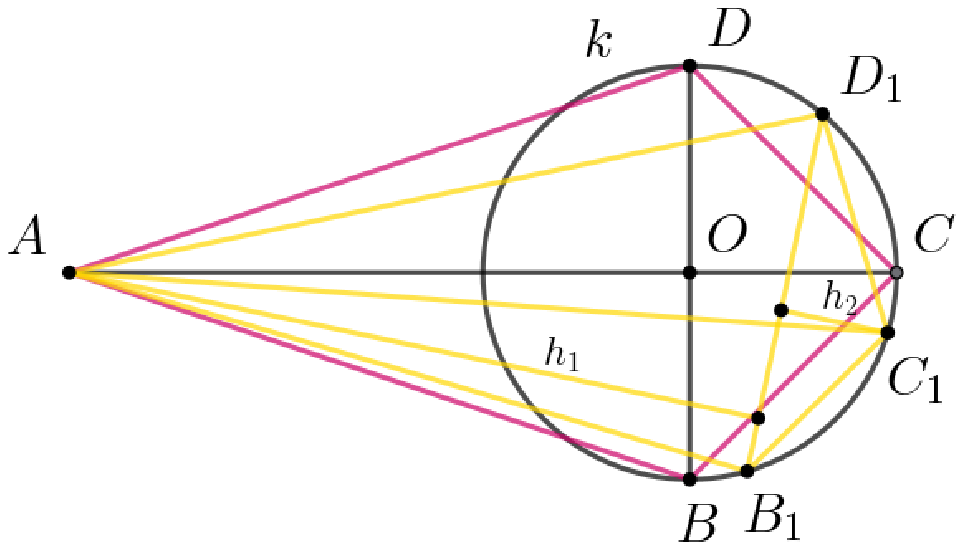
Коментар: Задачата доказва съществуването и единствеността на първата точка на Brocard. Сама по себе си, точката на Brocard и свързаните с нея геометрични конфигурации са задължителен компонент от знанията на ученици в гимназиален курс, които участват в състезания по математика. Разглеждането на доказателството обаче е не по-малко ценно от самия факт – то е инструмент за развиването на умения за решаване на задачи на ниво набор на стратегии и логически подходи. Дефиницията за точката на Brocard е съвсем естествена, но математическата коректност изисква да си зададем въпроса: „Дали такава точка наистина съществува?“, който естествено продължава със следващия въпрос: „Ако съществува, дали е единствена?“. Намирането на точката следва често прилаган в геометрията подход – да разгледаме обект, дефиниран по различен начин и да докажем, че той притежава свойствата на търсения. Тук работата с подобни триъгълници и описани окръжности е логичен подход при решаване на задача, свързана с равни ъгли, а разсъжденията следват търсене на отговор на въпроса: „Ако приемем, че точка с исканото свойство съществува, то какви свойства би имала тя?“. Той задава набор от необходими условия, който от своя страна насочва към допълнителните построения и до хипотезата, че точката на Brocard съвпада с пресечната точка на трите описани окръжности. Аналитичният и проблемно-ориентиран подход към задачата създава изследователски контекст, който предразполага към разглеждане на втората точка на Brocard и различните свойства и геометрични конструкции, свързани с двете точки, както и тяхната изогоналност.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: доказателство за инцидентност на точки

Задача 95 (СМО, 2014): Нека k е окръжност с център O и радиус R и A е точка, външна за k, като $AO = d$. Определете точки B, C и D от окръжността k така, че изпъкналият четириъгълник $ABCD$ да има максимално лице.

Решение: Нека h_1 и h_2 са височините към страната BD съответно в триъгълниците ABD и BCD. Тогава $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{(h_1 + h_2)BD}{2}$. Доколкото $h_1 + h_2 \leq AC$, то сборът $h_1 + h_2$ ще е максимален точно когато $BD \perp AC$. Хордата BD пък има максимална дължина точно



тогава, когато е диаметър на k. Така получаваме, че точката C е пресечната за AO и k, която е по-отдалечена от A, а B и D са пресечни за k с перпендикулярната на AC права през т. O.

Коментар: Алтернативно можем да изразим $S_{ABCD} = \frac{AC.BD\sin\measuredangle AOD}{2} = \frac{(R+d)2R\sin\measuredangle AOD}{2} = R(R+d)\sin\measuredangle AOD$ и да заключим, че лицето ще бъде максимално само при $\sin\measuredangle AOD = 1$, т.е. когато $BD \perp AC$.

Тук формално самото решение води до намиране на верния отговор, но от друга страна, за да изберем който и да е от споменатите два подхода за изразяване на лицето, е необходимо да имаме ако не правилна, то поне приблизителна хипотеза за избора на точките *B*, *C* и *D*, водещ до четириъгълник с максимално лице. За достигане до тази може да се използва динамичен геометричен софтуер. Динамичните геометрични системи са изключително полезно евристично средство за учениците, което ги подпомага както на конкретно ниво за отделни задачи, така и съдейства за акумулирането на трайни знания и опит с цел с течение на времето подпомагането с тези системи да стане излишно.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: динамични геометрични системи, експериментиране в частни случаи

Задача 96: От всички триъгълници с даден периметър $2p$ да се намери този, който има максимално лице.

Решение: Разглеждаме триъгълник *ABC* с периметър $2p$, една от страните на който е с фиксирана дължина *a*. Ако другите му страни са с дължини *b* и *c*, то от формулата на Херон $S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$. Съгласно неравенството на Коши имаме $\sqrt{\left(p-b\right)\left(p-c\right)}\leq\frac{p-b+p-c}{2}=\frac{2p-(b+c)}{2}=\frac{a}{2}$, като равенство се достига точно тогава, когато $p-b=p-c\Leftrightarrow b=c$. Така установяваме, че при фиксирана страна а най-голямо лице измежду триъгълниците с периметър $2p$ има този, който е равнобедрен.

Сега ще намерим при коя стойност на *a* триъгълникът ще има максимално лице измежду всички равнобедрени с дадения периметър. От горното неравенство получаваме, че $\left(p-b\right)\left(p-c\right)\leq\frac{a^2}{4}$, така че лицето на равнобедрения триъгълник може да изразим като $S(a)=\sqrt{p\left(p-a\right)\frac{a^2}{4}}$. Това лице е максимално точно тогава, когато функцията $f\left(a\right)=\left(p-a\right)a^2, a\in\left(0;p\right)$ приема най-голямата си стойност. Доколкото

$f'(a) = a(2p-3a)$ и $a \in (0;p)$, то тази функция достига своята най-голяма стойност в локалния си максимум $a = \frac{2p}{3}$. Тогава $b = c = \frac{2p-a}{2} = \frac{2p}{3}$ и триъгълникът е равностранен.

Коментар: Вместо да използваме производна, можем отново да прибегнем до неравенството на Коши: средното геометрично на $p-a$, $\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{2}$ не надхвърля средното им аритметично $\frac{p}{3}$, като равенство се достига точно при $p-a=\frac{a}{2}$, което, комбинирано с наблюдението, че в първото приложение на неравенството на Коши равенството е при $b=c$, пак води до извода, че триъгълникът трябва да е равностранен.

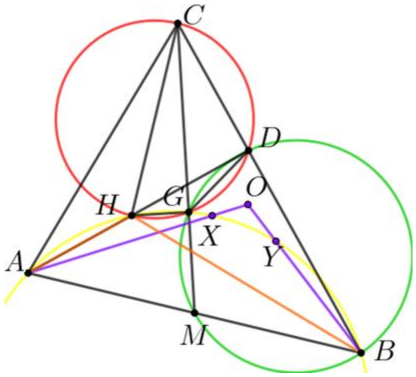
Тази класическа екстремална задача е задължителна за извънкласната работа по геометрия. За достигане до хипотезата за вида на търсения триъгълник може да се използва динамичен геометричен софтуер.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: динамични геометрични системи, класически неравенства

Задача 97 (ЗМС 2012): Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и среда M на страната AB. Медицентърът G на триъгълника е петà на перпендикуляра от H към CM. Да се намери най-голямата възможна стойност на $\measuredangle ACB$.

Решение: Ще докажем, че точките A, H, G и B лежат на една окръжност. Нека D е петàта на височината от върха A. Тогава $\measuredangle HDC = \measuredangle HGC = 90°$, така че точките H, G, D и C лежат на една окръжност. Оттук от равенство на вписани в тази окръжност ъгли следва, че $\measuredangle DGC = \measuredangle DHC = 180° - \measuredangle AHC = \measuredangle ABC$. Следователно $\measuredangle DGM = 180° - \measuredangle ABC$, така че точките M, B, D и G лежат на една окръжност. От вписани в нея ъгли $\measuredangle BGM = \measuredangle BDM$, но в правоъгълния триъгълник ABD с медиана DM $\measuredangle BDM = \measuredangle ABC = \beta$, така че $\measuredangle BGM = \beta$. Така получаваме, че



$\measuredangle HAB + \measuredangle HGB = \measuredangle HAB + \measuredangle HGM + \measuredangle BGM = 90° - \beta + 90° + \beta = 180°$ и съответно точките *A*, *H*, *G* и *B* наистина лежат на една окръжност. Нека *O* е център на описаната около триъгълника *ABC* окръжност. Ако триъгълникът *ABC* е равностранен, то точките *O, G* и *H* съвпадат и $\measuredangle ACB = 60°$. В противен случай трите точки са различни и лежат на правата на Ойлер, като *G* е между *O* и *H*. Това означава, че точката *O* е външна за окръжността, описана около четириъгълника *ABGH*. Нека *AO* и *BO* пресичат тази окръжност съответно в точки *X* и *Y*. Тогава $\measuredangle AOB = \frac{AB - XY}{2} < \frac{AB}{2} = \measuredangle AHB$. Сега от $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB = 2\gamma$ и $\measuredangle AHB = 180° - \measuredangle ACB = 180° - \gamma$ неравенството $\measuredangle AHB > \measuredangle AOB$ води до $\gamma < 60°$. Така най-голямата възможна стойност за мярката на $\measuredangle ACB$ е 60°.

Коментар: Решаването на тази екстремална задача изисква посочване на пример, при който максималната стойност на ъгъла се достига и доказателство, че тя наистина е най-голямата възможна. Логично е да започнем с формулиране на хипотеза за екстремалната стойност. Евристичните средства за достигането до нея могат да бъдат от различен характер – използване на динамичен геометричен софтуер, експериментиране с конкретни примери за триъгълници с „хубави“ свойства – например равностранен, асоциации с различни важни геометрични конфигурации – „Какво е характерно за триъгълник, в който медицентърът е петà на перпендикуляра от ортоцентъра към медианата от върха *C*?“. Доказателството за максималност на ъгъла минава през добро познаване на забележителни обекти в триъгълника, като например правата на Ойлер и гъвкавост при работата с ъгли и окръжности.

Класове, за които задачата е подходяща: 10, 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: права на Ойлер, експериментиране в частни случаи, динамични геометрични системи

Задача 98 (Прасолов, В.): Докажете, че за всяко естествено число $n > 1$, което не е степен на просто число, съществува изпъкнал многоъгълник с равни ъгли, страните на който са равни на 1, 2, 3, …, *n*.

Решение: Разглеждаме правилен *n*-ъгълник, страните на който определят последователно векторите $\overrightarrow{e_0}$, $\overrightarrow{e_1}$, …, $\overrightarrow{e_{n-1}}$. Достатъчно е да докажем, че пренареждайки тези вектори, можем да получим множество $\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\right\}$, такова че $\sum_{k=1}^{n} n\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$. Тъй като по условие числото n не е степен на просто число, то за него съществува представяне от вида $n=pq$, където $(p,q)=1$. Разглеждаме следните вектори: $\overrightarrow{e_0},\overrightarrow{e_p},...,\overrightarrow{e_{(q-1)p}}$; $\overrightarrow{e_q},\overrightarrow{e_{q+p}},...,\overrightarrow{e_{q+(q-1)p}}$; …; $\overrightarrow{e_{(p-1)q}},\overrightarrow{e_{(p-1)q+p}},...,\overrightarrow{e_{(p-1)q+(q-1)p}}$ (номерацията е по модул n); те са точно $pq=n$ на брой. Ако допуснем, че измежду тях има равни, това би означавало, че за някои $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{N}$ е изпълнено, че $x_1q+y_1p\equiv x_2q+y_2p\left(\operatorname{mod} pq\right)$. Доколкото $(p,q)=1$ обаче, последното води до $x_1\equiv x_2\left(\operatorname{mod} p\right)$ и $y_1\equiv y_2\left(\operatorname{mod} q\right)$, така че в разглежданото множество всеки от векторите $\overrightarrow{e_0}$, $\overrightarrow{e_1}$, …, $\overrightarrow{e_{n-1}}$ се среща точно по един път. Нека ги означим съответно с $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$. Ако разгледаме векторите $\overrightarrow{e_q},\overrightarrow{e_{q+p}},...,\overrightarrow{e_{q+(q-1)p}}$ с общо начало, крайните им точки ще представляват върховете на правилен q-ъгълник, така че сборът им е равен на нулевия вектор. Освен това, векторите $\overrightarrow{e_0},\overrightarrow{e_p},...,\overrightarrow{e_{(q-1)p}}$ се изобразяват съответно във векторите $\overrightarrow{e_q},\overrightarrow{e_{q+p}},...,\overrightarrow{e_{q+(q-1)p}}$ при ротация на ъгъл $\varphi=\dfrac{2\pi}{p}$. Оттук следва, $(q+1)\overrightarrow{e_q}+(q+2)\overrightarrow{e_{q+p}}+...+2q\overrightarrow{e_{q+(p-1)p}}=q\left(\overrightarrow{e_q}+\overrightarrow{e_{q+p}}+...+\overrightarrow{e_{q+(p-1)p}}\right)+\overrightarrow{e_q}+2\overrightarrow{e_{q+p}}+...+q\overrightarrow{e_{q+(p-1)p}}$, което е образът на вектора $\vec{b}=\overrightarrow{e_0}+2\overrightarrow{e_p}+...+q\overrightarrow{e_{(q-1)p}}$ при ротация на ъгъл φ. При прилагане на аналогичните разсъждения за останалите вектори от разглежданото множество, получаваме, че $\sum_{k=1}^{n} k\overrightarrow{a_k}=\vec{b}+R^{\varphi}\left(\vec{b}\right)+...+R^{(p-1)\varphi}\left(\vec{b}\right)=\vec{0}$. Последното доказва съществуването на многоъгълник с исканите свойства.

Коментар: Концепцията за конструиране на търсения многоъгълник в случая се свежда до прилагане на достатъчно условие, зададено чрез векторно равенство. Тази идея сама по себе си е базова (дори в тази разработка вече я срещнахме приложена в много по-семпла форма). Тук обаче усложненията произтичат по различни направления – необходимостта от избор на подходяща отправна точка за конструиране, която се явява правилният n-ъгълник, правилният подбор на векторите $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$, гъвкавото приложение на ротацията на вектор, интегрирането на елементи от теорията на числата. Важно е да отбележим, че проблемът, поставен чрез задачата, може да се преформулира като изследване на стойностите на числото *n*, за които *n*-тите корени на единицата, умножени с коефициенти числата от 1 до *n*, имат сбор 0. Тази перспектива към условието представлява и средство, насочващо към инструментите за решаване, но възможността човек да погледне задачата през нея изисква знания, опит и „поглед отгоре“. Задачата може да бъде разширена и с поставянето на допълнителния въпроси с изследователски характер, който възниква естествено още в хода на анализа на условието: „Какво се случва, ако *n* е степен на просто число?“. Оттам може да бъде разгледана и задачата: „Намерете всички стойности на числото $n > 1$, за които съществува изпъкнал многоъгълник с равни ъгли, страните на който са равни на 1, 2, 3, …, *n*.“

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: аналитичен подход, модулна аритметика, комплексни числа, метод на водещия въпрос

VIII. Задачи за ученици от начален етап

Задача 99 (ТГ 2005/2006): Наричаме едно естествено число „палиндром“, ако се чете еднакво отляво надясно и отдясно наляво. Съществуват ли 2005 числа $n \in \mathbb{N}$, такива че, числата във всяка от двойките $(n, n+110)$ са палиндроми?

Решение: Разглеждаме числата $n_k = 109\underset{k}{...}901$ за $k = 1, ..., 2005$. За всяко от тях е изпълнено, че е палиндром и че $n_k + 110 = 110\underset{k}{...}011$, което също е палиндром.

Коментар: Ключовите въпроси тук са „Как откриваме подходяща конструкция за числата *n*?“ и „Как насочваме учениците от начален етап да го направят?“. От една страна, въпросът сам по себе си предполага генерична структура на числата с търсеното свойство, ако такива съществуват. Дали съществуват и как биха изглеждали можем да се досетим, разглеждайки ребуси от вида $\overline{a_1a_1} + 110 = \overline{b_1b_1}$, $\overline{a_1a_2a_1} + 110 = \overline{b_1b_2b_1}$, $\overline{a_1a_2a_2a_1} + 110 = \overline{b_1b_2b_2b_1}$, $\overline{a_1a_2a_3a_2a_1} + 110 = \overline{b_1b_2b_3b_2b_1}$ и търсейки дали те имат поне едно решение. Решаването на ребуси е достъпно средство от извънкласната сфера за учениците от начален етап и е ефективен начин за достигане до подходяща конструкция за числата *n*.

Класове, за които задачата е подходяща: 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: моделиране с ребуси

Задача 100: Естествените числа a, b, c и d имат сбор 300. Ако $a<b<c<d$, то коя е най-голямата възможна стойност на числото a?

Решение: Ако $a \geq 74$, то сборът на числата е поне $74+75+76+77>300$, което противоречи на условието. Ако $a=73$, то условието е изпълнено например при $b=74$, $c=75$ и $d=78$ $(73+74+75+78=300)$. Щом $a=73$ е възможно, а $a \geq 74$ – не, най-голямата възможна стойност на a е 73.

Коментар: По отношение на необходимия апарат от учебното съдържание, горната задача е достъпна за ученици дори в трети клас. Разбира се, логическата ѝ структура надхвърля заложените цели на задължителната подготовка, но е подходяща за извънкласната сфера. В хода на решаване на задачата ключов е евристичният момент с откриването на стойностите на a, необходими за конструирането на примера и за доказателството за максималност. В хода на обучението могат да се обсъдят различните стратегии за намиране на тези стойности; например осъзнаване, че щом искаме най-малкото от числата да е колкото се може по-голямо, трябва да се стараем числата да са приблизително (но не съвсем) равни, поради което разделяме на 300 на 4 и разпределяме четирите числа максимално близо около получения резултат.

Класове, за които задачата е подходяща: 3, 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка, груба оценка

Задача 101: В „Медената къща" се продават два вида пакетчета с меденки – малки с по 3 меденки и големи с по 7 меденки. Днес в „Медената къща" продадоха няколко малки и няколко големи пакетчета с меденки, които съдържаха общо 156 меденки. Продадените малки пакетчета са повече на брой от продадените големи. Колко най-малко малки пакетчета с меденки е възможно да са продадени днес?

Решение: Нека са продадени $м$ малки и $г$ големи пакетчета => $м>г$.

=> $3.м+7.г=156$. Искаме $м$ да е възможно най-малко, така че $м>г$. => $м$ и $г$ трябва да възможно най-близки. Ако бяха равни, 156:10=15(ост.6), т.е. щяха да са по около 15.

М	...	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
Г	…	18	-	-	-	-	-	-	15	-	-	…
Възможно ли е?	…	Не	-	-	-	-	-	-	да	-	-	…

$м=15$ дава $45+7.г=156$, откъдето $7.г=111$, което няма решение (навсякъде търсим решения в естествени числа);

$м=14$ дава $42+7.г=156$, откъдето $7.г=114$, което няма решение;

$м=13$ дава $39+7.г=156$, откъдето $7.г=117$, което няма решение;

$м=12$ дава $36+7.г=156$, откъдето $7.г=120$, което няма решение;

$м=11$ дава $33+7.г=156$, откъдето $7.г=123$, което няма решение;

м=10 дава 30+7.*г*=156, откъдето 7.*г*=126 и *г*=18, но понеже искаме *м*>*г*, *м* не може да бъде 10 или по-малко: колкото по-малко става то, толкова повече нараства *г* и съответно изискването *м*>*г* ще е нарушено;
м=16 дава 48+7.*г*=156, откъдето 7.*г*=108, което няма решение;
м=17 дава 51+7.*г*=156, откъдето 7.*г*=105 и *г*=15, което отговаря на условията, т.е. най-малкото възможно *м* с тези свойства е 17.
Коментар: Задачата е подходяща за извънкласната подготовка на ученици от четвърти или по-висок клас. Решението може да се оптимизира в зависимост от уменията на учениците да решават диофантови уравнения и да боравят с неравенства. Представен е вариант за решение с пълно изчерпване на възможности, достъпен дори за четвъртокласници. Ценното в случая е възможността дори ученици със силно ограничен математически апарат да бъдат въведени в сложна логическа структура.
Класове, за които задачата е подходяща: 3, 4
Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка, груба оценка, моделиране с диофантови уравнения

Задача 102: Квадратна таблица с три реда и три стълба наричаме „магически квадрат“, ако във всяко от деветте полѐта е записано по едно число и сборовете на числата по редове, по стълбове и по двата главни диагонали са равни на едно и също число. Това число наричаме „магически сбор“.
а) Квадратчетата на един магически квадрат са попълнени с различни естествени числа. На колко най-малко може да е равен магическият сбор на този квадрат?
б) Квадратчетата на един магически квадрат са попълнени с различни естествени числа. Магическият сбор на квадрата е четно число. На колко най-малко може да е равен този сбор?
Решение:
а) Най-малкият възможен сбор на 9 различни естествени числа е 1+2+3+...+9=45; ако е възможно подреждане на магически квадрат с тези числа, магическият сбор ще бъде 45:3=15. Пример за такъв квадрат е:

4	9	2

3	5	7
8	1	6

б) Ето пример на магически квадрат, попълнен с различни естествени числа и с магически сбор 18:

5	10	3
4	6	8
9	2	7

В „а“ сме доказали, че 15 е най-малкият възможен магически сбор за квадрат, попълнен с различни естествени числа, така че четните сборове, по-малки от 15, са невъзможни. Остава да покажем, че магически сбор 16 е невъзможен. Ще покажем, че при означенията на схемата, числото x е три пъти по-малко от магическия сбор във всеки магически квадрат. Нека магическият сбор е равен на S.

a	b	c
d	x	e
f	g	h

Тогава доколкото $S = b + x + g = a + x + h = c + x + f$, то $a + b + c + 3x + f + g + h = 3S$, така че $S + 3x + S = 3S$ и $3x = S$, което е невъзможно при S=16. Така най-малкият възможен четен магически сбор при поставеното условие е 18.

Коментар: Задачата е подходяща за извънкласната работа още в начален етап. Характерно методически за нея е, че докато в първото подусловие оценката е сравнително лесен компонент от решението, а примерът е по-труден за конструиране, то във второто подусловие е обратното – примерът се получава генерично от вече конструирания в „а“, а доказателството за минималност на магическия сбор изисква повече съобразителност и съдържа по-сложен евристичен момент. Задачата може да се използва и за илюстрация на това, че няма универсално правило с кое е по-целесъобразно да се започва – с примера или с оценката. Преценката за това също е част от стратегията за решение на всяка конкретна задача.

Класове, за които задачата е подходяща: 3, 4

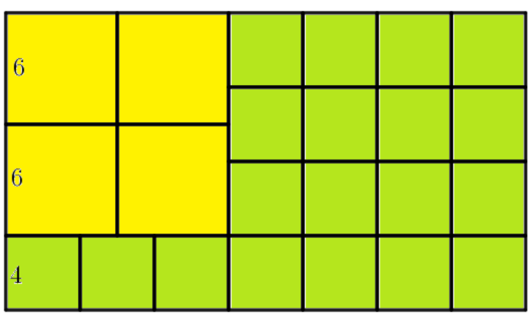
Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка

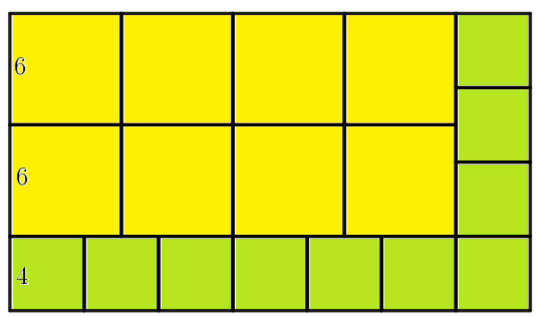
Задача 103: Правоъгълник има обиколка 88 см и едната му страна е с 12 см по-голяма от другата. Разрязан е без остатък на квадрати, част от които (поне един) са с обиколка 24 см, а останалите – с обиколка 16 см. Колко квадрата са получени при разрязването?

Решение: Ако размерите на правоъгълника са a см и a+12 см, то $2a+12=44$. Оттук a=16 и страните на правоъгълника са 16 см и 16+12=28 см, а лицето му е 16.28=448 см^2. Ако при разрязването са получени x квадрата със страна 16:4=4 см (и лице 16 см^2) и y квадрата със страна 24:4=6 см (и лице 36 см^2), то сборът от лицата им е $16x+36y=448$ см^2, откъдето $4x+9y=112$. Тъй като $4x$ винаги се дели на 4 и 112 се дели на 4, то $9y$ трябва да се дели на 4, така че y се дели на 4. Освен това $y<13$, тъй като $13.9>112$. При извършване на проверките намираме:

x	19	10	1
y	4	8	12
$x+y$	23 квадрата	18 квадрата	не се реализира

При $x=1$ и $y=12$ решение няма, тъй като за всяка от страните на правоъгълника е необходима поне по една отсечка с дължина 4 см (16 и 28 не се делят на 6), а няма как единственият квадрат със страна 4 см да допира всички страни на правоъгълника. В другите два случая подреждането е възможно, например съответно така:





Коментар: В горната задача оценката е извършена чрез решаване на диофантово уравнение в естествени числа. Уравнението има три решения, от които при едно не може да се реализира пример. Важно е на учениците да се обърне внимание върху необходимостта да се докаже, че това решение не води до реализация. По този начин те получават нагледна илюстрация за необходимостта от посочване на пример. Въвеждането на задачи като тази още в начален етап демонстрира значимостта на конструирането на пример за логическата пълнота на решението и мотивира значимостта на доказателството за съществуване.

Класове, за които задачата е подходяща: 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: пълно изчерпване на възможности

Задача 104: Във всяка от клетките на правоъгълна таблица 3×5 е записано едно от числата 1 или 4, така че във всеки квадрат 2×2 да има точно три равни числа. На колко най-малко може да е равен сборът на всички числа, написани в клетките на таблицата?

Решение: В таблицата могат да се разположат два непресичащи се квадрата 2×2, така че във всеки от тях трябва да има поне по едно число 4. Така сборът на числата в таблицата е поне $2.4+13.1=21$. Следващият пример показва как е възможно числата в таблицата да имат сбор, равен точно на 21.

1	1	1	1	1
1	4	1	4	1
1	1	1	1	1

Коментар: В разгледаната задача оценката насочва към конструиране на примера. „Как да разположим тези два непресичащи се квадрата, така че числата 4 в тях да могат да удовлетворят изискването за таблицата?“. При работа с ученици в начален етап задачата може да се развие, като се разгледат случаи на по-голяма таблица и се проследи развитието на модела за конструиране на пример.

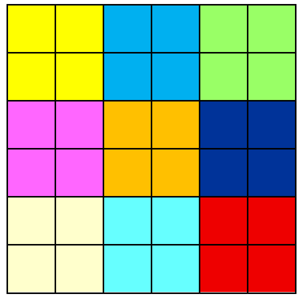
Класове, за които задачата е подходяща: 3, 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка

Задача 105: Всяко поле на таблица 6×6 е оцветено в някакъв цвят. Изпълнено е, че всяко поле има поне две съседни (по страна) полета, които са оцветени в неговия цвят. Колко най-много цветове могат да са използвани в оцветяването?

Решение: Да допуснем, че за оцветяването са използвани повече от 9 цвята. Тогава тъй като полетата са 36, то от принципа на Дирихле следва, че има поне един цвят, в който са оцветени не повече от 3 полета. Разглеждаме едно от тези (най-много 3) полета. Съгласно условието другите две полета от този цвят трябва да са негови съседни, но тогава всяко от тях има само по един съсед в този цвят (разгледаното поле). Противоречието доказва, че цветовете не могат да бъдат повече от 9.

Следващият пример показва как е възможно оцветяването да бъде извършено с точно 9 цвята.



Коментар: Задачата е достъпна за ученици в начален етап и същевременно с това прилага инструменти, важни за формирането на умения за изграждане на математическо доказателство – допускане на противното, принцип на Дирихле, оперативно разбиране за необходимост и достатъчност. Конструирането на примера въвежда концепцията за блоково оцветяване, което е често използван подход в комбинаторните задачи.

Класове, за които задачата е подходяща: 3, 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: принцип на Дирихле, блоково оцветяване

Задача 106: Редица е съставена от 99 естествени числа. Сборът на всеки 7 съседни числа в редицата не надхвърля 99. Какъв е най-големият възможен сбор на 99-те числа?

Решение: Тъй като $99:7=14$(ост.1), имаме 14 групички от по 7 числа и още 1 число. Сборът на първите 14 групички не надхвърля $14\cdot 99=1386$. Понеже всяко от числата е поне 1, последното число е не повече от $99-6=93$. Така общият сбор е не повече от $1386+93=1479$. За да се достигне този сбор, трябва последното число да е 93, така че шестте преди него трябва да са единици. За да бъде максимален сборът, трябва числото преди тях да е 93, така че шестте преди него трябва да са единици. Продължавайки по същия начин напред, разбираме, че описаният максимален сбор се достига при редица, съставена от 14-кратно повторение на последователността (93, 1, 1, 1, 1, 1, 1) , следвано от числото 93.

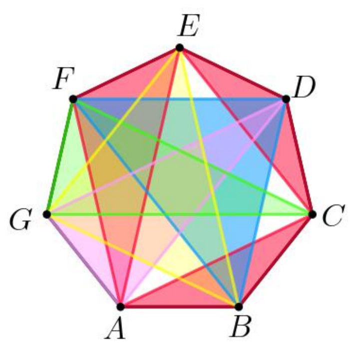
Коментар: В процеса на решаване на задачата определени съображения от оценката задават ключови насоки за генериране на примера. В хода на учебния процес е целесъобразно учениците да бъдат направлявани да ги търсят, а също така да формират умения във вече завършени компоненти на решението да търсят ориентири към други негови елементи.

Класове, за които задачата е подходяща: 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: взаимодействие между пример и оценка

Задача 107 (АКП 2018): Даден е седмоъгълник *ABCDEFG*. Какъв най-голям брой триъгълници можем да изберем с върхове сред точките *A, B, C, D, E, F, G*, така че всеки два избрани триъгълника да имат точно един общ връх?

Решение: Да допуснем, че от някой връх е общ за повече от 3 триъгълника. Доколкото остават 6 върха, а всеки триъгълник трябва да има още два върха, получаваме, че би имало триъгълници с повече от един общ връх. Следователно от всеки връх излизат най-много по 3 триъгълника. Ако от всеки връх излизат по точно 3 триъгълника, то общият брой триъгълници е (7.3):3=7. Това е възможно например за триъгълниците *ABC, CDE, EFA, BDF, ADG, BEG, CFG*.



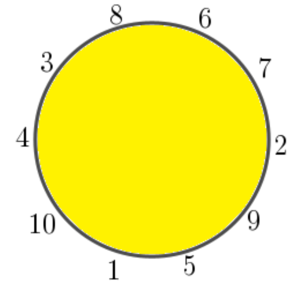
Коментар: Решението на тази комбинаторна задача изисква конструиране на пример и доказателство за екстремалност. За да се улесни намирането на примера и търсенето му да е фокусирано, ученикът следва да има предварителна нагласа за отговора, т.е. да е извършил оценката и тя да му предостави хипотеза за крайния верен отговор.

Класове, за които задачата е подходяща: 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: допускане на противното, взаимодействие между пример и оценка

Задача 108 (ОО 2009): По окръжност в някакъв ред са написани естествените числа от 1 до 10. Петя записала всичките 10 сбора на три последователни числа от окръжността и подчертала този с най-малка стойност. На колко най-много може да е равен подчертаният сбор?

Решение: Да допуснем, че подчертаният сбор е по-голям или равен на 16. Отделяме числото 10 и остават 9 числа, които образуват 3 непресичащи се сбора, всеки от които има стойност поне 16. Така сборът на всички числа по окръжността е поне $3.16+10=58$, но в действителност той е $1+2+3+...+10=55<58$. Противоречието доказва, че подчертаният сбор има стойност не по-голяма от 15. Примерът вляво показва разположение на числата по окръжността, при което минималният сбор на три последователни числа е 15.



Коментар: Основният въпрос в задачите от категорията „пример и оценка" е с кое от двете да започнем. От гледна точка на решението оценката е по-удобно начало, за да ни ориентира в каква посока да търсим конструкция за пример. Но от друга страна търсенето на оценка с числото 16 се базираше на очакванията за примера. Как решихме да търсим пример с 15 и да докажем, че 16 е невъзможно? Отчетохме, че общият брой числа дава остатък 1 при деление с 3, поради което решаваме да отделим едно число, а остатъка да разделим на тройки. Експериментирайки с крайните случаи, бързо стигаме до извода, че е редно да отделим най-голямото число (10), а остатъка от сбора (45) да се постараем да разделим на приблизително равни тройки, като разположим 8 и 9 така, че при преминаването към съседни тройки да сборът да не пада под 15. Особеното в случая е, че оценката е сравнително груба, което буди колебание дали е достатъчно точна, за да може да послужи като основа за формулиране на правилна хипотеза за отговора. Поучителното е, че понякога една доза пожелателно мислене работи добре за стратегията при решаване на задачи.

Класове, за които задачата е подходяща: 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: допускане на противното, взаимодействие между пример и оценка

Задача 109 (SAJMO 2015): Наричаме едно естествено число „хубаво", ако не съдържа цифрата 0 и ако прибавим към него произведението на цифрите му, получаваме число със същото произведение на цифрите. Да се докаже, че съществува 2015-цифрено хубаво число.

Решение: Разглеждаме числото $2\underbrace{111...111}_{2013}4$. Произведението на цифрите му е равно на 8 и сборът му с това произведение е числото $2\underbrace{111...111}_{2012}22$, което също има произведение на цифрите 8.

Коментар: Чрез задачи като дадената учениците с интерес към математиката, дори в начален етап, могат по съвсем естествен път да се запознаят с концепцията за доказателство за съществуване и да достигнат до извода, че посочването на пример е достатъчно за извършване на това доказателство. В хода на конструирането на примера можем да ги насочваме към търсене на вариантите числото 8 да бъде представено като произведение на цифри и гъвкаво прилагане на свойствата на естествените числа.

Класове, за които задачата е подходяща: 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: експериментиране в частни случаи

Задача 110 (ММР 2013-2014): На остров живеят 100 рицари (които винаги казват истината) и 100 лъжци (които винаги лъжат). Всеки от тях има поне един приятел на острова. Веднъж 100 от жителите на острова казали: „Всички мои приятели са рицари.“, а другите 100 казали: „Всички мои приятели са лъжци.“. Какъв е най-малкият възможен брой двойки приятели, в които единият е рицар, а другият – лъжец?

Решение: Да разгледаме произволен жител *A* на острова, който твърди, че всички негови приятели са лъжци. Ако *A* е рицар, то всички негови приятели наистина са лъжци. Ако *A* е лъжец, то той има поне един приятел, който е рицар. И в двата случая *A* участва в приятелска двойка, в която единият е рицар, а другият е лъжец. Тъй като има 100 души, които са изказали твърдението на *A*, то броят на двойките приятели рицар – лъжец, е поне 100:2=50.

Ще конструираме пример с точно 50 приятелски двойки между рицар и лъжец. Нека 50 рицари са приятели помежду си (всеки от тях ще каже, че всички негови приятели са рицари), 50 лъжци са приятели помежду си (всеки от тях ще каже, че всички негови приятели са рицари) и има 50 двойки приятели, в които единия е рицар, а другият лъжец (всеки от 100-те души в тази група ще каже, че всички негови приятели са лъжци).

Коментар: Задачата е представител на класическата серия задачи за рицари и лъжци. Наративът е достатъчно интересен, за да мотивира учениците дори от начален етап да разсъждават по нея и това я превръща в подходящ инструмент за демонстрация на логическата структура „пример и оценка“. В концепцията за разглеждане на задачата в зависимост от подготовката на учениците учителят може да им покаже оценката и да ги остави да работят по примера, да им съдейства за примера и да ги остави да се справят самостоятелно с оценката, или да им предостави възможността да решат изцяло сами задачата. При всички случаи важен е и коментарът по отделните логически необходими компоненти на решението. Задачата предоставя възможност и за работа с отрицание на твърдения, което е ценно упражнение по формална логика в тази възрастова група.

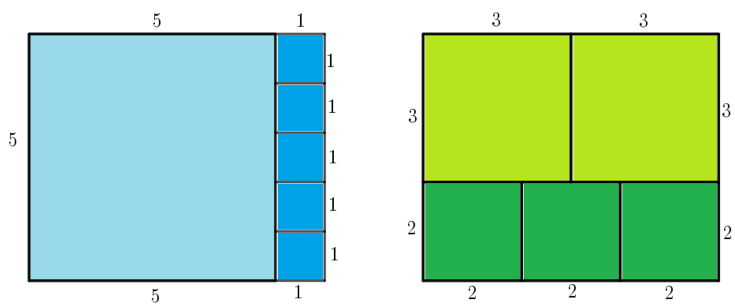
Класове, за които задачата е подходяща: 4

Стратегии и инструменти, използвани в решението: пълно изчерпване на възможностите, взаимодействие между пример и оценка

IX. Контрапримери

Задача 111: Нека е даден правоъгълник със страни m и n. Разделяме правоъгълника без остатък на квадрати по следния начин: първо изрязваме от него най-големия възможен квадрат; след това изрязваме от остатъка най-големия възможен квадрат; на всяка следваща стъпка изразяваме от текущия остатък най-големия възможен квадрат. Можем ли за всяка стойност на m и n да твърдим, че по този начин броят на получените от правоъгълника квадрати е възможно най-малък?

Решение: Разглеждаме правоъгълник със страни $m = 6$ и $n = 5$. По описания алгоритъм той ще се раздели на един квадрат със страна 5 и още пет квадрата със страна 1, т.е. на общо 6 квадрата. Долу вдясно е показан пример как може да бъде разделен само на 5 квадрата: два със страна 3 и три със страна 2.



Коментар: Задачата може да се разглежда с ученици от начален етап. От една страна, решаването ѝ представлява полезно евристично предизвикателство в търсене на доказателство за оптималност или контрапример за опровержение и е поучително по отношение на самото изясняване на логическата структура, свързана с всяка една от тези хипотези при така формулиран въпрос. От друга страна, задачата представлява една нагледна илюстрация, че лакомият алгоритъм (greedy algorithm) не гарантира оптималност. Последният факт е нещо, което е добре учениците да са осъзнали на възможно по-ранен етап, за да не изпаднат в ситуация, в която интуитивното им усещане за оптимизиране чрез прилагане на този алгоритъм да ги подведе, поставяйки ги в ситуация на фактологически невярна отправна точка в разсъжденията.

Класове, за които задачата е подходяща: 4, 5

Стратегии и инструменти, използвани в решението: явна конструкция

Задача 112 (ТГ 2014/2015): Естествените числа $x, x^2, x^3, ..., x^{2015}$ започват с една и съща цифра. Може ли да се твърди със сигурност, че тази цифра е равна на 1?

Решение: Избираме такова естествено число *k*, че $10^{-k} \leq 1 - \sqrt[2015]{0,9}$. Тогава за всяко $n \leq 2015$ ще бъде изпълнено неравенството $0,9 \leq \left(1-10^{-k}\right)^{2015} \leq \left(1-10^{-k}\right)^{n} < 1$. Умножавайки го с $10^{kn} > 0$, получаваме еквивалентно $0,9.10^{kn} \leq \left(10^{k}-1\right)^{n} < 10^{kn}$. Последното означава, че при избор на $x = 10^{k} - 1$ всички числа от редицата $x, x^2, x^3, ..., x^{2015}$ ще започват с цифрата 9.

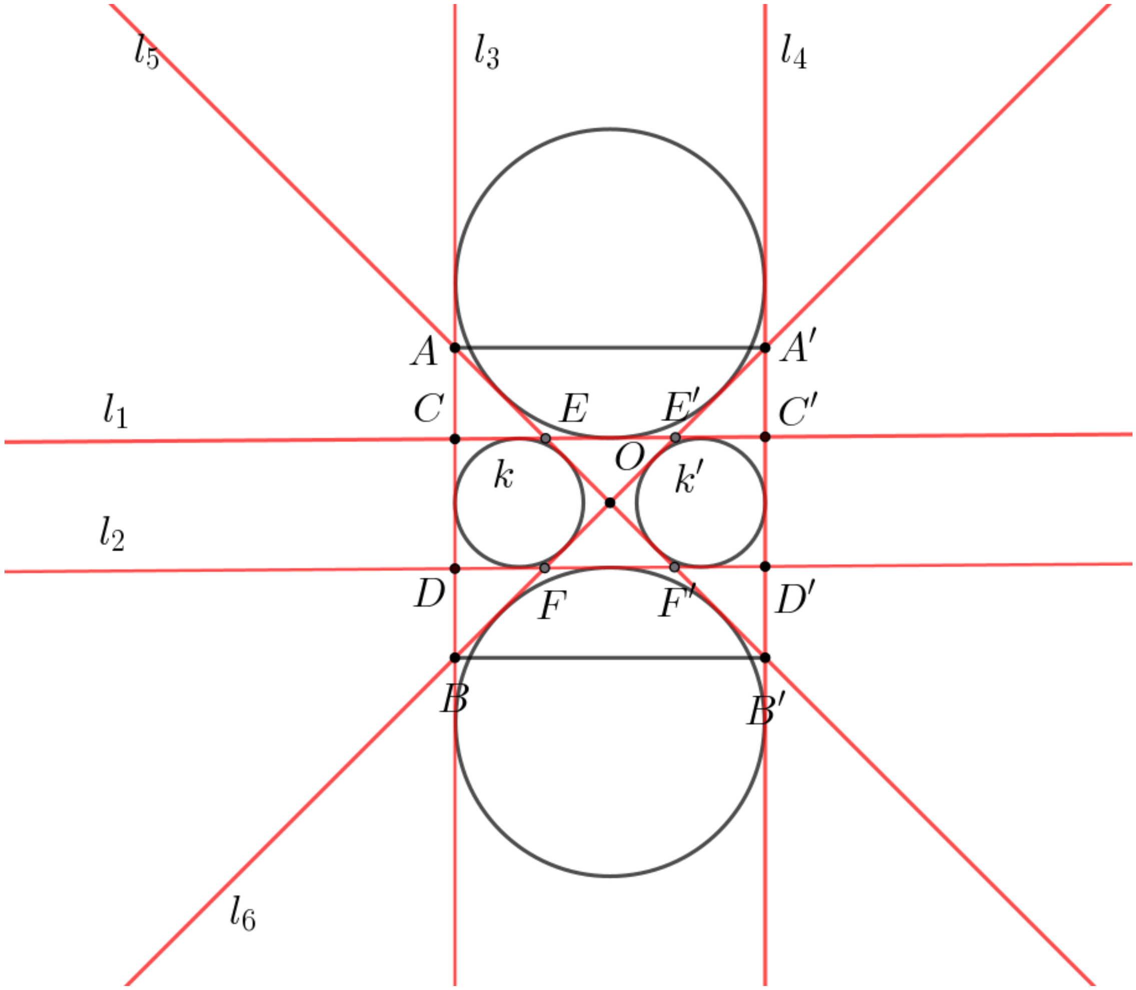
Коментар: Формулирането на правилна хипотеза за отговор на поставения въпрос и определянето на алтернативна от 1 начална цифра за числата от разглежданата редица могат да се постигнат с експериментиране с различни стойности за *x* и проследяване на първите ѝ няколко члена. Тук от полза може да бъде и подходящо софтуерно средство – система за компютърна алгебра или дори електронна таблица. Дефинирането на числото *k*, ключово при конструиране на контрапримера, изисква известна гъвкавост в работата с неравенства.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: системи за компютърна алгебра, работа с неравенства

Задача 113 (Богданов, И.): В равнината са дадени шест прави. Известно е, че за всеки три от тях съществува четвърта права от същото множество, такава че четирите прави се допират до една и съща окръжност. Може ли да се твърди със сигурност, че всичките шест прави се допират до една и съща окръжност?

Решение: Ще конструираме пример, доказващ, че не е задължително шестте прави да се допират до една и съща окръжност. Нека $ABB'A'$ е квадрат с пресечна точка на диагоналите *O*, *k* и *k'* са окръжностите, вписани съответно в триъгълниците *BOA* и *B'OA'*, а l_1 и l_2 са общите им външни непресичащи се допирателни. Твърдим, че правите l_1, l_2, $l_3 = AB$, $l_4 = A'B'$, $l_5 = AB'$ и $l_6 = A'B$ изпълняват условието на задачата, но не се допират до една и съща окръжност.



Достатъчно е да докажем, че правите AB, AB', $A'B$, $A'B'$ и l_1 се допират до една окръжност. Наистина, от съображения за симетрия това би означавало, че правите във всяка от петорките (1, 2, 3, 5, 6), (1, 2, 4, 5, 6), (1, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 4, 5, 6) се допират до една окръжност. Нека правата l_1 пресича правите AB, A', $A'B$, $A'B'$ съответно в точки C, E, E', C'. Равнобедрените правоъгълни триъгълници AOB и BCE' имат една и съща вписана окръжност, откъдето следва, че са еднакви. Оттук $EC = EO$, така че триъгълниците ACE и EOE' са еднакви. Следователно $AE = EE'$ и аналогично $EE' = E'A'$. Така $\measuredangle AEE' = \measuredangle EE'A' = 135°$ и точките A, E, E' и A' са съседни върхове на правилен осмоъгълник, т.е. осмоъгълник, вписан в окръжност. Така доказваме, че съществува разположение на правите, при което условията на задачата са изпълнени, но те не се допират до една и съща окръжност.

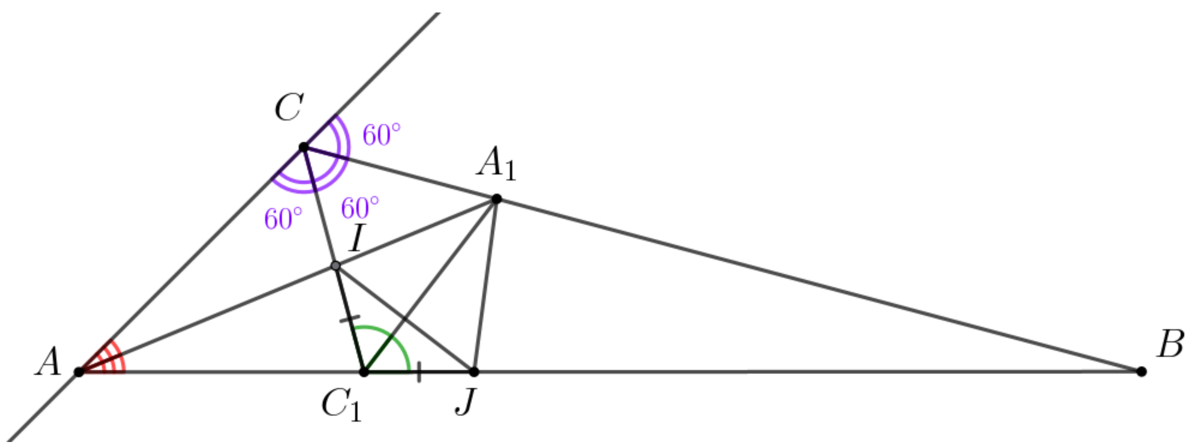
Коментар: Сложността на задачата произтича както от намирането на подходяща геометрична конфигурация, така и от строгото доказателство. Опитът с различни геометрични конструкции и инверсия може да се яви основата за откриване на работещ модел.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: работа със симетрични конструкции, явна конструкция

Задача 114 (Заславский, А.): Ъглополовящите AA_1 и BB_1 на триъгълника ABC се пресичат в точка I. Построени са равнобедрени триъгълници A_1IA_2 и B_1IB_2 с основи съответно A_1I и B_1I и върхове A_2 и B_2, които лежат на правата AB. Известно е, че правата CI разполовява отсечката A_2B_2. Може ли да се твърди със сигурност, че триъгълник ABC е равнобедрен?

Решение: Разглеждаме триъгълник ABC с $\measuredangle ACB = 120°$. Нека CC_1 е ъглополовяща на ъгла



при върха C. Тогава CA_1 е ъглополовяща на ъгла, съседен на $\measuredangle ACC_1$, и точката A_1 е равноотдалечена от правите AC и CC_1. От друга страна обаче тя е равноотдалечена и от правите AB и AC, така че C_1A_1 е ъглополовяща на $\measuredangle BC_1C$. Така ако правата през I, перпендикулярна на C_1A_1, пресича AB в точка J, то $A_1C_1 \equiv S_{IJ}$. Сега от свойство на външния ъгъл $\measuredangle AA_1C_1 = \measuredangle A_1C_1B - \measuredangle A_1AB = \dfrac{\measuredangle CC_1B - \measuredangle CAB}{2} = \dfrac{\measuredangle ACC_1}{2} = 30°$, така че $\measuredangle IA_1J = 2\measuredangle AA_1C_1 = 60°$ и триъгълник IA_1J е равностранен. Последното води до $IJ = A_1J$, така че точка J притежава свойствата на A_2 от условието и можем да разгледаме $A_2 \equiv J$.

Така $A_2C_1 = IC_1$. Аналогично $B_2C_1 = IC_1$, така че в разгледания пример CI разполовява отсечката A_2B_2, като същевременно не е необходимо триъгълник ABC да е равнобедрен.

Коментар: Естественият подход към отговора на въпроса, поставен в задачата, минава през опита за намиране на контрапример, опровергаващ хипотезата, че зададеното условие е достатъчно, за да гарантира, че триъгълникът ABC е равнобедрен. В случая идеята да се потърси конструкция, при която $IC_1 = C_1A_2$, е естествена по най-малко две причини: първо, ако това бъде постигнато, по аналогични причини ще бъде изпълнено и че $IC_1 = C_1B_2$, което по силата на транзитивността на равенството би означавало, че $C_1A_2 = C_1B_2$; второ, симетрията на конструкцията е логичен път за получаване на равнобедрен триъгълник. Друг евристичен подход към избор на подходящ частен случай за конструиране на контрапример е да си зададем въпроса: „Какво би станало, ако триъгълник IA_1A_2 е не само равнобедрен, но и равностранен?“ Разбира се, независимо от евристичния подход, в основата на достигане до контрапример стои един богат набор от знания, свързани с геометричната конфигурация – свойства на ъглополовящите и пресечните им точки, и опитът в задачи, свързани с нея.

Класове, за които задачата е подходяща: 9, 10

Стратегии и инструменти, използвани в решението: познаване на класически геометрични конфигурации

Задача 115: Общият член на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към 0. Може ли да се твърди със сигурност, че редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ с общ член $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ е сходяща?

Решение: Да разгледаме редицата $a_n = \dfrac{1}{n}$, която клони към 0. В представянето на общия член на редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ групираме събираемите след второто в групи с 2, 4, 8, 16, …, 2^k члена: $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{2^k + 1} + \dfrac{1}{2^k + 2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right) + \ldots$. Доколкото редицата $a_n = \dfrac{1}{n}$ е монотонно намаляваща, то $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} > 2.\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} > 4.\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$, …,

$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+...+\frac{1}{2^{k+1}}>k.\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$, така че $S_n>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$ и редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена, така че не е сходяща.

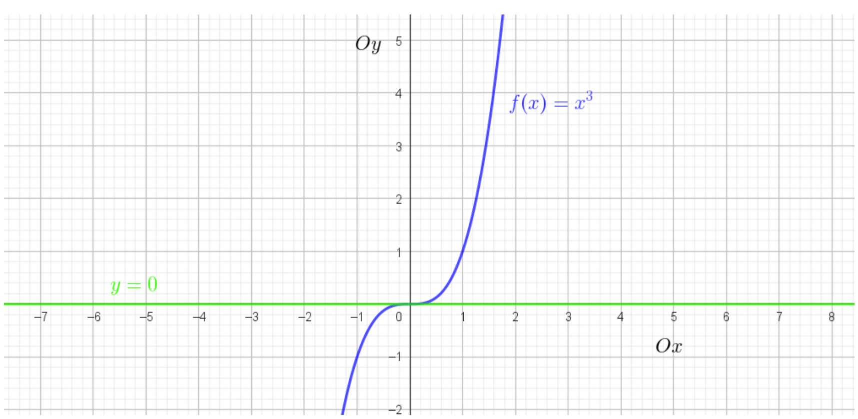
Коментар: Разгледаната задача представлява базов факт от теорията на числовите редове. Изучаването им не е част от учебната програма в България, но проблемът, който задачата поставя възниква естествено в хода на изучаването на сходимост на числови редици и сума на безкрайна геометрична прогресия. „Достатъчно ли е редицата от събираеми, пораждаща една безкрайна сума да клони към 0, за да бъде сумата ограничена?“ Въпросът е достатъчно интересен и провокиращ вниманието и изследователската нагласа, за да бъде целесъобразно учениците с отношение към математиката да бъдат въвлечени в търсенето на отговора му. Тук евристиката в намирането на контрапримера е свързана както с избора на хармоничния ред, така и с конструиране на подходящи метод за оценка на членовете му и доказване на неограничеността.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: ограничаване с неравенства, метод на водещия въпрос

Задача 116: Може ли да се твърди, че допирателната към крива в дадена точка не пресича кривата в тази точка?

Решение: Нека разгледаме функцията $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$. Правата $y=0$ е нейна допирателна в точката $(0;0)$ и я пресича в тази точка.



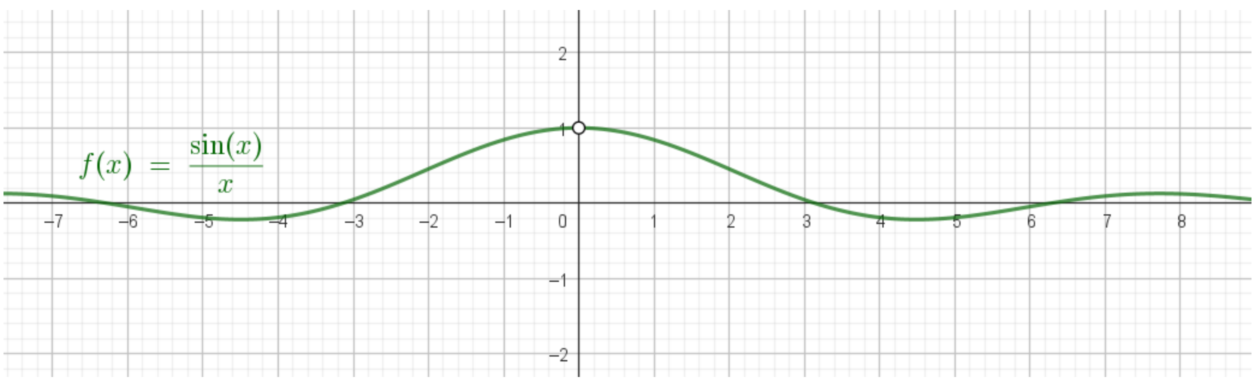
Коментар: Разгледаната задача е полезно дидактическо средство при въвеждане на понятието допирателна към графика на функция в хода на изучаване на елементите от математическия анализ в училищния курс. Тя илюстрира конфигурация, непозната за учениците, които до този момент са отъждествявали понятието допирателна с допирателна към окръжност. Самостоятелното търсене на подходящ контрапример е полезно упражнение за работа с дефиниции.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: явно посочване на пример, познаване графиките на основните функции

Задача 117: Нека $h(a)=0$. Може ли да се твърди, че функцията $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ има вертикална асимптота в точката $x=a$?

Решение: Нека разгледаме функцията $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0$. Тя няма вертикална асимптота в точката $x=0$ при все че знаменателят ѝ приема стойност 0 в тази точка.



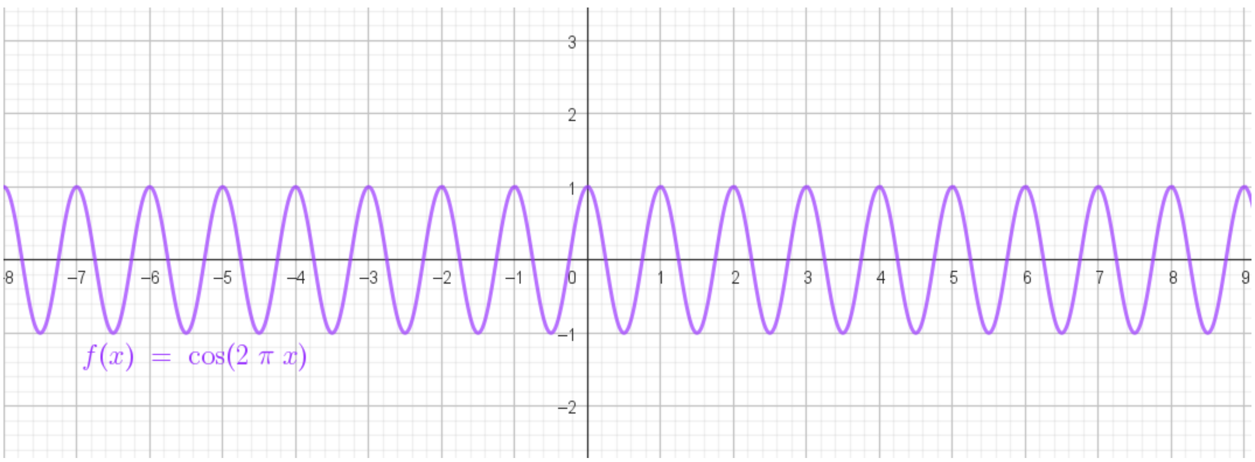
Коментар: Задачата е подходяща при изучаване на понятието вертикална асимптота. Откриването на подходящ контрапример за зададеното чрез условието твърдение е полезно упражнение за доброто разбиране на вертикалната асимптота и свързаните с нея необходими и достатъчни условия.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: явно посочване на пример, познаване на класически граници на функции

Задача 118: Функцията $f(x)$ е непрекъсната за всяко $x \in \mathbb{R}$ и съществува границата $\lim_{n \to \infty} a_n = A$ на редицата $a_n = f(n)$. Може ли да се твърди, че съществува границата $\lim_{x \to \infty} f(x)$ и е равна на A?

Решение: Разглеждаме функцията $f(x) = \cos(2\pi x), x \in \mathbb{R}$. Тя е навсякъде непрекъсната и границата на породената от нея редица $\lim_{n \to \infty} \cos(2\pi n) = 1$ съществува, доколкото $\cos(2\pi n) = 1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, но границата $\lim_{x \to \infty} \cos(2\pi x)$ не съществува.



Коментар: Разгледаният контрапример е важен за разбирането на връзката между граница на функция и граница на редица. Самостоятелното достигане до него предполага добро познаване на свойствата на функциите и гъвкавост при работата с тях, но дори само срещата с конструкции като тази за съществени за осмисляне на тези свойства.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: явно посочване на пример, познаване свойствата на тригонометричните функции, метод на водещия въпрос

Задача 119: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са монотонни. Може ли да се твърди със сигурност, че функцията $f(x) + g(x)$ е монотонна?

Решение: Нека $f(x) = \sin x + 2x, x \in [-\pi; \pi]$ и $g(x) = \sin x - 2x, x \in [-\pi; \pi]$. Доколкото $f'(x) = \cos x + 2 > 0$ за всяко x и $g'(x) = \cos x - 2 < 0$ за всяко x, то за всяко x, то $f(x)$ е монотонно растяща, а $g(x)$ е монотонно намаляваща. Функцията $f(x) + g(x) = 2\sin x$

обаче не е монотонна в интервала $[-\pi;\pi]$, тъй като $\left(f(x)+g(x)\right)'=2\cos x$ приема отрицателни стойности за $x\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ и положителни за $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Коментар: Задачата е подходящо упражнение за ученици при изучаване на монотонност на функции. Тя формулира естествен въпрос, а конструирането на контрапример изисква добро познаване на свойствата на изучаваните функции и находчивост при конструиране на аналитичния им вид. Работата по проблем от такъв характер развива добро разбиране за природата на понятията и поставя учениците в условията на изследователи в проблемно-базирана среда. Ефектът е, че изучаването на елементите от математическия анализ, заложени в учебната програма, се свежда не просто до придобиване на механични умения за намиране на производни и прилагане на свързаните с тях теореми за монотонност, а до постигане на едно по-задълбочено познавателно равнище и боравене с теорията с цел конструиране и синтез.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: познаване свойствата на основните функции, метод на водещия въпрос

Задача 120: Функциите $f(x)$ и $g(x)$ са периодични. Може ли да се твърди със сигурност, че функцията $f(x)+g(x)$ също е периодична?

Решение: Да разгледаме функциите $f(x)=\cos x$ и $g(x)=\cos\alpha x$, където α е ирационално, за $x\in\mathbb{R}$. Изпълнено е, че $f(x)$ е периодична с период 2π, а $g(x)$ е периодична с период $\frac{2\pi}{\alpha}$. Доколкото α е ирационално, дължините на двата периода са несъизмерими, така че $f(x)+g(x)$ не е периодична функция. Наистина, $f(0)+g(0)=2$. Ако допуснем, че съществува друго число $t\in\mathbb{R}$, такова че $f(t)+g(t)=2$, това би означавало, че съществуват $n,k\in\mathbb{Z}$, такива че $t=2k\pi=\frac{2n\pi}{\alpha}$. Последното обаче води до $\alpha=\frac{n}{k}\in\mathbb{Q}$ и противоречи с ирационалността на α.

Коментар: Коментарът на поставения от задачата въпрос е полезен при изучаване на свойствата на периодичните функции, а контрапримерът съдейства за по-добро осмисляне на ирационалността.

Класове, за които задачата е подходяща: 11, 12

Стратегии и инструменти, използвани в решението: работа с несъразмерни величини, познаване на свойствата на основните функции

X. Заключение

Традиционно част от целите на обучението по математика се свързват с изграждане на начин на мислене, формиране на аналитичност, умения за аргументация, критичност и рефлексия. Задачите, чието решение изисква доказателство за съществуване, заемат особено място в този процес, тъй като те съчетават имплементирането на изискванията за пълнота и непротиворечивост на математическата логика и творческия импулс на откривателството – изследване, формулиране и проверка на хипотези, създаване на модели, евристика. Решаването на математически проблеми, свързани със съществуване, развива паралелно и синергично логическата дисциплина на мисленето, от една страна, и съзидателните умения за изграждане на явни или абстрактни конструкции, от друга. Част от ценността на този тип задачи от гледна точка на процеса на обучение се състои в това, че те демонстрират математическото знание не просто като механично и алгоритмично, а като динамично и изследователско и стимулират уменията за анализ и преценка на хипотези, стратегическото мислене и творческия импулс. Евристичният процес по решаване на задачи, свързани с доказателство за съществуване, въвлича учениците в автентична изследователска дейност и ги стимулира към критичност и рефлексия.

В образователните практики в България акцент върху целенасочената работа на учениците по отношение на формиране на умения за изграждане на математическо доказателство за съществуване се поставя в разширената и профилирана подготовка и в извънкласната сфера. Преките цели на това обучение обикновено са свързани с подготовка за явяване на състезания по математика, плавен преход към академичното равнище на обучение, участие в изследователски проекти. Дългосрочните резултати включват изграждането на критично мислене и умение да си задаваш въпроси и да търсиш аргументиран, непротиворечив, логически консистентен отговор. „Какво означава нещо да съществува в разглеждания контекст?“, „Какви средства мога да използвам, за да го докажа?“, „Трябва ли да търся конструкция, или мога да докажа съществуването, установявайки, че несъществуването би довело до противоречие?“ … Отговорът на всеки от тези въпроси изисква опит и знания и постепенно води до постигане на непосредствената цел. Същевременно с това процесът на интерактивно взаимодействие с тях дългосрочно формира умението дори извън контекста на математическата проблематика винаги да си задаваме ключовия въпрос: „А това наистина ли е възможно?“. И да търсим не просто формален отговор, базиран на нечия декларация, частични наблюдения или убеждения, а отговор, който е логически пълен и непротиворечив, който е доказано истинен и базиран на законите на логиката. Така, както математиката ни учи.

XI. Списък на използваните съкращения

(азбучен ред; кирилица след латиница)

AIME – American Invitational Mathematics Examination

APMO – Asian Pacific Mathematics Olympiad

BMO – Balkan Mathematical Olympiad

BrMO – British Mathematical Olympiad

CGMO – Chinese Girls' Mathematical Olympiad

CJMO – Canadian Junior Mathematical Olympiad

EGMO – European Girls' Mathematical Olympiad

GJMO – Greece Junior Mathematical Olympiad

GNO – Greek National Olympiad

IMO – International Mathematical Olympiad

IZhO – International Zhautykov Olympiad in Mathematics, Physics and Computer Science

JBMO – Junior Balkan Mathematical Olympiad

KNO – Korean National Olympiad

NMC – Nordic Mathematical Competition

RMM – Romanian Masters of Mathematics

SAJMO – Saudi Arabia Junior Mathematical Olympiad

USAJMO – United States of America Junior Mathematical Olympiad

USAMO – United States of America Mathematical Olympiad

WLPMC – William Lowell Putnam Mathematical Competition

АКП – Математически турнир „Академик Кирил Попов“

ВОМ – Всерусийска олимпиада по математика

ЕМТ – Есенен математически турнир

ММО – Московска математическа олимпиада

ММР – Московска математическа регата

НОМ – Национална олимпиада по математика

ОО – Олимпиада на Ойлер

ТГ – Турнир на градовете

XII. Литература

1. Тонов, Иван. *Евристиката – наука, изкуство, занаят*, 2012

2. Zeitz, Paul. *The Art and Craft of Problem Solving*, John Wiley & Sons, Inc. 2007

3. Chen, Evan. *IMO Solution Notes*, 2025

4. Polya, George. *How to Solve It, A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 2004

5. Velleman, Daniel J., *How to Prove It. A Structured Approach*, *Second edition*, Cambridge University Press, 2006

6. Джаков, П., Леви, Р., Малеев, Р., Троянски С., *Диференциално и интегрално смятане. Функции на една променлива*, УИ „Св. Климент Охридски“, 2004

7. Courant R., Robbins, H., *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, 1996

8. Prasolov, V., *Problems in Plane and Solid Geometry, v.1 Plane Geometry*, 2001

9. Федоров, Р.М., Канель-Белов, А. Я., Ковальджи, А. К., Ященко, И. В., *Московски математически олимпиади 1993-2005 г.*, МЦНМО, 2006

10. Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H., *Counterexamples in Analysis*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1992

11. https://artofproblemsolving.com/community/c13_contests

12. Маринов, М., *Материали за подготовка за JBMO*, https://drive.google.com/drive/folders/1fHThBvqQqbCE1ADjtqDnndMSMvrpSi3q

13. Huang, L., Evans, R., *Keeler's Theorem and products of distinct transpositions*, The American Mathematical Monthly, 121 (2), 136–144

14. Evans, R., *Mind Switches in Futurama and Stargate*, Mathematics Magazine, *87* (4), 252–262

15. Kortezov, I., A Combinatorial Question Related to an Easter Tradition Led to a New Entry in OEIS. Математика и Информатика, 64, 2, Национално издателство „Аз-буки“, 2021, ISSN 1310–2230 (Print), 222–225

16. Васильев, Н. Б., Егоров, А. А., *Задачи всесоюзных математических олимпиад*, Наука, 1988

17. Klymchuk, Sergiy, *Counterexamples in Calculus*, Maths Press, New Zealand, 2004

18. Mirsky, L. *A dual of Dilworth's decomposition theorem*, American Mathematical Monthly, 78 (8), 1971, 876–877, doi:10.2307/2316481, JSTOR 2316481

19. Sierpinski, W., *250 Problems in Elementary Number Theory*, American Elsevier Publishing Company, INC, 1970

20. Schoenfeld, A. H. (1985), *Mathematical problem solving,* Orlando, FL: Academic Press

21. Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010), *Thinking mathematically* (2nd ed.). Harlow, England: Pearson Education Limited

22. Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.). (2012), *Proof and proving in mathematics education.* New York: Springer

23. Stylianides, A. J. (2007), *The notion of proof in the context of elementary school mathematics. Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1–20