Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Дипломна работа

на тема

Рекурентни редици в състезателната математика

Дипломант: Васил Георгиев Василев, *ф.н.:* 1MI3000053

Специалност: Иновации и мултидисциплинарност в задължителната подготовка по математика, компютърно моделиране и информационни технологии

Научен ръководител: проф. д-р Станислав Николаев Харизанов, ИИКТ-БАН

София, 2025

Съдържание

1. Увод

1.1. Исторически сведения за развитието на рекурентните редици

Рекурентните редици са известни на човечеството още от дълбока древност. Има исторически сведения за конструкции, наподобяващи или напълно съвпадащи със структурата на рекурентните редици, в трудове на индийски мислители още отпреди новата ера. Например индиецът Пингала (около IV-III в. пр. н. е.) в трактата си Chandahśāstra е анализирал двоични комбинации от къси и дълги срички в поетични творби, като е броял възможните комбинации от такива срички при дадена дължина на стиха. Броят на тези комбинации всъщност е известната редица на Фибоначи (Datta и Singh, 1935).

В късното средновековие се появяват и първите задачи, свързани с редици. Най-известната от тях е редицата на Фибоначи. През 1202г. в труда си *Liber Abaci* (в превод - Книга за смятането, чрез която за първи път в Европа са популяризирани индо-арабските цифри и съвременната десетична бройна система) търговският син Леонардо Боначи от Пиза (смята се, че Фибоначи идва от словосъчетанието "син на Боначи") формулира следната задача

Задача на Фибоначи. Някакъв човек поставил двойка зайци в място, оградено от всички страни с ограда. Колко двойки зайци ще се получат от тази първоначална двойка за една година, ако се приеме, че всяка двойка ражда нова двойка всеки месец, започвайки от втория месец след своето раждане? (of Pisa (Fibonacci), 2002)

Фибоначи обаче не решава задачата чрез формула, а чрез итеративно изброяване месец по месец, използвайки табличен подход. Това е типичен за времето си начин на решаване, в който не се използва алгебрично-символна форма, а чисто дедуктивни, постъпкови разсъждения. С други думи Фибоначи не записва редицата символно, а числово изчислява членовете на редицата месец по месец, използвайки по същество рекурентната зависимост. Така макар да не формулира всеизвестното рекурентно уравнение, по същество го използва в смисъла на зависимостта между членовете на дадена редица.

През ренесанса рекурентните редици се появяват в различни математически контексти, но отново рядко биват формализирани алгебрично. По-късно, от края на XVI до края на XVII век Виет, Декарт, Ферма и други известни матемтици изграждат силната алгебрично-символна основа, с която работим и до ден днешен и с това разбирането за редиците и записването им чрез формули, които могат да се изследват и с които могат да се извършват операции, се задълбочава значително. По това време се появяват и първите опити за намирането на затворени форми на членовете на една рекурентна редица.

Всичко това поставя основата за по-строга теория и през XVIII век Моавър формулира метода на характеристичното уравнение за решаване на линейни рекурентни уравнения с постоянни коефициенти (Edwards, 2004). По същото време Ойлер наблюдава и описва изключително широкия спектър на приложение на теорията на рекурентните редици - в комбинаторното броене, в различни направления в теорията на числата, а освен това развива в значителна степен идеите на Моавър за пораждащите функции.

През XIX век Коши, Вайерщрас и други формализират теорията на математическия анализ и въвеждат дефиниции за граници и сходимост на редици. Така теорията за редици се разширява и се появяват обобщения – линейни хомогенни редици от по-висок ред, нелинейни рекурентни уравнения, както и редици, дефинирани чрез условия на минималност, модулност и др. По същото време Бине извежда явната формула за общия член на редицата на Фибоначи като използва характеристичното уравнение и корените му, с което се дава началото на най-съвременния период на изучаването на рекурентни редици (Katz, 2009).

Нуждата от решаване и анализиране на рекурентни редици спомага изключително много за развитието на теорията на пораждащите функции - формални степенни редове от вида $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, чрез които рекурентни зависимости могат да се трансформират в алгебрични уравнения на $G(x)$. Въпреки че пораждащите функции не водят началото си от рекурентните редици, развитието на тези функции е тясно свързано с рекурентните редици, както отбелязват авторите Wilf (Wilf, 2005) и Stanley (Stanley, 2012) като те определят пораждащите функции като "сенки на редиците" и подчертават, че "развитието на тези функции се дължи на тяхната забележителна полезност при решаване на рекурентни зависимости, особено комбинаторни такива". През XX век техниката на тези функции се превръща в основен инструмент на алгебричната комбинаторика.

През XX и XXI век успоредно с пораждащите функции, теорията на рекурентите редици се развива и в други направления. Анализират се рекурентни зависимости с променливи коефициенти и нелинейни рекурентни зависимости, редиците се класифицират алгебрично и формално, доказват се теореми за съществуване и единственост на решенията, изследва се поведението на решение откъм ограниченост, експоненциален растеж, логаритмична амплитуда и сингулярност, развиват се операторни и функционални подходи за решаването и анализирането на рекурентни уравнения. Откъм приложения, рекурентните редици навлизат в почти всички науки в ново и най-ново време чрез връзката им с диференциалните уравнения и дискретните диференчни уравнения, чрез които се моделират огромен брой процеси във финансите, в обществото и в природата. Освен това редиците намират широки приложения в информатиката и математиката - в диференциалните и диференчните уравнения, в дизайна и анализа на алгоритми, в криптографията, формалните езици, в комбинаториката чрез развитието на символната комбинаторика, която лежи в основата на съвременните компютърни системи и символни изчисления (Stanley, 2012; Knuth, 1997). Теоретично еднакви концепции се използват и в разновидности на изкуствения интелект като рекурентните невронни мрежи и дълбоките времеви модели, които се основават на вътрешни рекурсии. В анализа на времеви редове в икономиката, статистиката и финансите, модели като AR, MA, ARIMA са формулирани чрез линейни рекурсии (Box et al., 2015).

В крайна сметка, рекурентните редици не са просто математически формули, а универсален език за описание на дискретната промяна. Те се прилагат в моделирането на голям брой процеси, в изчислителната математика, в теорията на алгоритмите, в комбинаториката, физиката, логиката и изкуствения интелект, доказвайки своята трайна и нарастваща роля в съвременната наука.

1.2. Рекурентните редици в съвременното българско образование

В българското училище рекурентните редици не се изучават като отделна, самостоятелна тема, но идеята за тях присъства под различни форми в учебното съдържание – в гимназиалния курс и в профилираната подготовка по математика.

Още в 9.–10. клас учениците се запознават с числови редици, където се въвеждат най-известните примери за рекурентни зависимости, а именно аритметичната и геометричната прогресия. Това всъщност е първото запознанство на учениците с идеята за рекурентна дефиниция, макар и без да се използва този термин.

Учениците в 11.-12. клас в профилирани математически паралелки изучават тематиката малко по-задълбочено. Представяме учебната програма по "Елементи на математическия анализ" от профилираната подготовка на Министерството на образованието и науката (Министерство на образованието и науката, 2017):

Учебно съдържание (теми)	**Очаквани резултати от обучението (компетентности)**	**Ключови понятия**
2.1 Метод на математическата индукция;	Умее да прилага метода на математическата индукция при доказване на формула за общ член на числова редица и при доказване на тъждества.	Математическа индукция.
2.2 Нютонов бином;	Знае понятието Нютонов бином; умее да пресмята биномни коефициенти; знае свойствата на биномните коефициенти.	Нютонов бином; триъгълник на Паскал.
2.3 Числови редици;	Знае понятието числова редица и понятията, свързани с него; знае понятието ограничена редица; умее да доказва твърдения, свързани с монотонност и ограниченост на редица.	Ограничена числова редица; монотонна редица.
2.4 Теореми за граници;	Знае понятието граница на числова редица и свойствата на сходящите редици; умее да доказва твърдения, свързани със сходимост на редици; умее да намира граница на редица чрез използване на основните граници: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ за $\lvert q\rvert < 1$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$; знае и прилага теоремите за граници на числови редици.	Граница на числова редица; сходяща и разходяща редица.
2.5 Сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия.	Знае понятието и умее да намира сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия.	Безкрайно намаляваща геометрична прогресия.

Таблица 1: Раздел 2. *Числови редици* — Учебна програма на МОН (Приложение № 78 към Наредба № 7/11.08.2016 г.)

Макар отново в учебниците за профилираната подготовка да не присъстват формални дефиниции на понятието "рекурентна редица" или "рекурентна зависимост", то се срещат задачи, свързани с рекурентни редици. Обучението в профилираните паралелки включва дефиниции и теореми за граници и сходимост на числови редици и в частност на рекурентни редици, приложения на основните теореми, свойства на границите, намиране на потенциални граници и доказване, че наистина редиците са сходящи и подобни, както и доказване, че предварително зададена функция се явява общ член на рекурентна редица чрез метода на математическата индукция.

В училищното образование на всички нива освен формалните дефиниции на рекурентни редици, липсват и някои от най-известните методи за работа с тях като характеристичните уравнения. Общите членове на редиците са предварително зададени и доказването им се извършва чрез метода на математическата индукция.

В университетското образование материалът за рекурентни редици се преподава в зависимост от наличното време и нуждите на съответния предмет. Най-често формални дефиниции се срещат в предмети, свързани с дискретната математика, математическият анализ, анализа на алгоритми и моделирането на финансови, природни и социални процеси. В голяма част от университетската литература се дефинират формално единствено линейните хомогенни и нехомогенни рекурентни зависимости и в лекции и упражнения се разчита на интуицията. Изучава се формално методът на характеристичното уравнение за намиране на общ член на редици с линейни рекурентни зависимости константни коефициенти, но често не се дават доказателства за него, а и в литературата често не са дадени такива. Освен това се забелязват и липси в смисловата и дидактическата пълнота на колекциите от задачи за самостоятелни упражнения. Например, не се срещат дидактически системи от задачи, в които едновременно са дадени примери за линейни хомогенни рекуретни уравнения с постоянни коефициенти с некратни реални корени, с кратни реални корени и с комплексни корени на характеристичното уравнение или комбинации от всичките.

Нелинейни рекурентни зависимости най-често се срещат в анализа на алгоритми и в математическото моделиране на икономически, природни и социални процеси, но те също най-често се преподават неформално и най-често се спомеват като инструмент или междинна тема преди да се премине към следващите въпроси в съответните курсове.

1.3. Рекурентните редици в състезателната математика

Може би най-системното и най-масово съприкосновение с рекурентните редици в световен мащаб се случва в училищните състезания и олимпиади по математика в гимназиалния курс. Редиците са универсален метод за описване на закономерности и динамични зависимости и по тази причина те се срещат в почти всички основни полета на състезателната математика - алгебра и анализ, теория на числата и комбинаторика.

В състезателната алгебра и анализ най-често се иска да се докаже ограниченост или сходимост на дадена рекурентна редица, да се определи нейната граница или да се докаже неограниченост. Освен това в същите полета рекурентните редици могат да бъдат използвани ефективно при решаването на задачи, свързани с функционални уравнения и неравенства. В състезателната комбинаторика рекурентните редици имат широко приложение като едно от основните средства за броене. Това се проявява най-вече в задачи, в които дадени комбинаторни обекти могат да се конструират чрез по-малки обекти от същия тип, което поражда естествени рекурентни зависимости. В задачите, свързани с рекурентни редици в състезателната теория на числата, най-често става дума за доказване на определени делимости или периодичност по даден модул, както и за откриване на скрити числови закономерности. Даже и от най-простите рекурентни съотношения могат да възникнат неочаквани и сложни теоретико-числови резултати.

Огромният брой задачи, свързани с рекурентни редици, на ученически олимпиади в конкретно-държавен, а и в световен мащаб, също прави впечатление. Задачи с рекурентни зависимости се срещат в състезания от всякакъв вид - от масови състезания и регионални турнири на базово ниво, до контролни за определяне на национални отбори и до най-престижните международни олимпиади. Този факт, заедно с присъствието им в почти всички основни състезателни направления, прави рекурентните редици един от най-универсалните обединителни елементи на състезателната математика.

В същото време прави впечатление как в специализираните литературни източници за работа по извънкласна математика задачи за рекурентни редици се срещат рядко. Спорадично се засягат характеристичните уравнения като метод за намирания на явен вид на рекурентна зависимост от по-висок от втори ред и където се срещат задачи за редици, най-често нямат никаква връзка помежду си в метода на решение и анализ, а са просто една логически несвързана съвкупност от задачи. Рядко се говори за основните евристични подходи при решаването на конкретните задачи и по този начин е трудно да възникне обобщена представа за решаването на такива задачи у учениците. И така дидактически системи от задачи за рекурентни редици в издържания теоретичен смисъл почти не се срещат.

1.4. Цел, задачи, обект и предмет на дипломната работа

Дипломната работа се концентрира върху различни евристични подходи за решаването на състезателни задачи, свързани с рекурентни редици. Основната мотивация за създаването ѝ е адресирането поне в известна степен на горепосочените проблеми и липси и желанието да бъде предоставен на ученици, студенти и педагогически специалисти един структуриран материал, който да послужи като по-пълно въведение в теорията на рекурентните редици и да разкрие основни евристични подходи при решаването на състезателни задачи, свързани с тях.

Целта на дипломната работа е да разкрие широк набор от актуални евристични подходи за решаването на задачи от математически състезания, свързани с рекурентни редици, и на негова база да се разработят дидактически системи от такива задачи, които да подпомогнат педагогическите специалисти и учениците в процеса на подготовка за математически състезания и олимпиади. Това включва изграждане на добра теоретична база за работа с линейни рекурентни редици и групиране на състезателни задачи в съответствие с разкритите подходи.

Задачите, произтичащи от целта на дипломната работа, са:

1. Извършване на литературен преглед за теоретичната основа на работата с линейни рекурентни редици;
2. Набиране на богата колекция от състезателни задачи, свързани с рекурентни редици;
3. Разкриване на евристичните подходи, приложими в колекцията от задачи;
4. Структуриране на задачите в зависимост от намерените евристични подходи;
5. Създаване на дидактически системи от задачи в съответствие с горната структура;
6. Генериране на колекция от видеозаписи към дипломната работа, илюстриращи в реално време приложенията и евристиките в най-показателните задачи.

Обект на дипломната работа е изучаването на рекурентни редици в контекста на състезанията по математика.

Предмет на дипломната работа е усъвършенстването на уменията на ученици, студенти и преподаватели за работа с рекурентни редици в областта на състезателната математика .

2. Дидактически и методически обосновки

2.1. Общи бележки

Изучаването на рекурентни редици може да се разглежда като развиващо (конструктивистко) обучение, насочено към изграждане на висши когнитивни умения и към развитие на творческото мислене. Според Л. С. Виготски (Vygotsky, 1978) основен фактор в когнитивното развитие е зоната на най-близко развитие, в рамките на която учениците могат да усвояват нови концепции с дидактическа подкрепа. В този контекст рекурентните редици могат да послужат за въвеждане на по-абстрактни математически поняния при учениците чрез внимателно конструирани последователности от задачи, които надграждат върху вече познатите от училище числови редици и базовата работа с тях. Чрез работата с рекурентни редици учениците могат да усвоят знания за динамични взаимовръзки и така не просто да заучават формули, а да изграждят сложни когнитивни схеми за закономерности и индуктивно мислене - процес, който според Ж. Пиаже е основополагащ (Piaget, 1970).

При работата си с рекурентни редици, особено в състезателен контекст, учениците анализират динамичната структура на редиците в различни ситуации, синтезират начини за опростяване на рекурентни зависимости и за доказване на искани факти и най-накрая оценяват коректността и степента на приложимост на методи в различни ситуации. Така от гледна точка на таксономията на Блум (Bloom, 1956) и И. Ганчев (Ганчев, 1965; Ганчев, 2001) при работа с рекурентни редици учениците развиват най-високите равнища на познавателна дейност - анализ, синтез и оценяване. Би могло да се каже, че някои от равнищата на емоционална дейност по Блум също биват развивани - организиране и характеризация. Това прави темата особено подходяща за формиращо обучение, ориентирано към развитие на мисловни стратегии, а не само към възпроизвеждане на знания.

Постепенното изграждане на понятието редица и после рекурентна редица (първо в задължителната подготовка в училище, след това в профилираната и след това в извънкласната състезателна подготовка) осигурява логическа последователност и съответства на представата на Д. Брунър за спираловидно развитие на знанията (Bruner, 1960), при която понятията се надграждат с все по-високо ниво на абстракция.

Решаването на системи от задачи за рекурентни редици от състезания по математика може да развие значително и мисловни операции като сравнение, аналогоя, обобщение и пренос на знания, което според Ганчев (Ганчев, 1965) е важна цел на обучението по математика. Такава система от последователни учебни дейности може да изгради у учениците устойчиви мисловни структури и умения за откриване на закономерности.

2.2. Дидактически системи от задачи

Според Ганчев (Чехларова, 2006) "Дидактическа система от задачи наричаме група от задачи, в която всяка задача (без последната) е съставна част в следващите задачи.". Други автори дефинират дидактическите системи от задачи като методически обоснована съвкупност от задачи, която осигурява постигане на планирани резултати в обучението (Асенова и Маринов, 2019).

За достатъчна пълнота и конкретика представяме и дефиницията на Нинова и Кадиев (Кадиев и Нинова, 2021), която до голяма степен надгражда описанието и характеристиките на В. В. Гузеев, според които система от задачи се нарича набор от задачи към група от уроци по определена тема, които отговарят на следните изисквания (критерии):

1. Пълнота - наличие на задачи за изучавани понятия (нови и някои стари).
2. Наличие на „ключови задачи", т.е. на задачи, които са „ключове" за решаването на други. Някои от тях могат да са задачи-компоненти.
3. Последователност - задачите да са подредени в определен ред, като системата започва с въвеждащи задачи и завършва с обобщаващи или с приложни задачи.
4. Повишаване на трудността (сложността на решение на задачата - б.а.) Задачите в системата се подреждат по принципа от просто към сложно.
5. Целева ориентация - за всяка задача се определят място и цел в системата от задачи и нейните функции.
6. Достатъчност - броят на задачите трябва да бъде достатъчен (съобразен с известни психологически норми, емпирично установени) за постигане на целта, като има както задачи за работата в клас, така и за самостоятелната работа в клас или у дома.
7. Психологически комфорт - да се отчитат темпераментът, типът мислене, видът памет и възрастовите особености на учениците.

Когато системата от задачи е дидактическа, към посочените характеристики на системата трябва да се добавят още и следните изисквания:

а) Системата трябва да бъде цялостна, т.е. тя трябва да съдържа предметно-съдържателни и дидактически връзки.

б) Системата трябва да бъде дидактически завършена (да има функционална достатъчност), което означава, че системата трябва да дава възможност за изпълнение на стимулиращите, преподавателските, развиващите, възпитателните, оценяващите, прогностичните и комуникационните функции на задачите.

в) Системата трябва да има предметна и съдържателна завършеност във връзка с изискванията за нивата на усвояване на знанията, изразена в наличие на задачи с различна степен на сложност на решението им.

Наистина задачите в системите не са случайна съвкупност, а са подредени така, че следващите стъпват върху предходните като съвкупностите покриват критериите за пълнота и последователност – започват с въвеждащи примери за линейни рекурентни зависимости и преминават през аналитични и синтетични преобразувания (характеристични уравнения, делимости). Така се постига градиране на трудността и целева ориентация, съответстваща на когнитивните нива на Блум и Ганчев – от анализ и синтез до оценка и творчество. Освен това се вижда развиващата, възпитателната и оценяващата функция в задачите и забележките и така учениците не само усвояват техники за решаване на рекурентни редици, но и развиват мисловни операции като аналогия, обобщение и пренос на знания.

2.3. Евристиката

Евристиката е дял от методологията на мисленето, който изследва начините за откриване на нови знания и решения чрез използване на предишен опит, аналогии и логически догадки. Терминът произлиза от гръцкото heurisko (или по-съвременното vrisko) – „намирам“, „откривам“. В контекста на обучението по математика евристиката представлява система от методи, насочени към активното търсене на решения и към развитието на творческото мислене на учениците. Евристиката силно насърчава откривателската дейност на ученика и се основава на идеята, че решаването на задачи е не просто упражнение, но и средство за развитие на мисленето. По този начин евристиката се явява като своеобразен мост между теорията и творчеството.

За основоположник на съвременната евристика се счита Дьорд Пойа (George Polya), който в класически си труд *How to Solve It* (Polya, 1945) посочва четиристепенен метод за решаване на задачи:

1. Разбиране на задачата;

2. Изготвяне на план за решението;

3. Изпълняване на плана;

4. Проверка и обобщение на решението или поглед назад.

Пойа подчертава, че решаването на математически задачи не е механичен акт, а динамичен мисловен процес, при който решаващият се връща към предходни етапи, проверява предположения и изгражда аналогии с вече познати случаи. Целта не е само постигането на вярно решение, а управление на самия процес на мислене. В този смисъл, според Пойа, добрата задача е онази, която провокира разсъждение, а не просто проверява знания. Приложена на практика, тази концепция означава, че учениците трябва да бъдат насочвани да откриват закономерности, да търсят връзки и да изграждат собствени стратегии за решение, а задачите от състезания по математика са изключително подходящи за постигането на тези цели и по-конкретно задачите за рекурентни редици от състезания илюстрират този принцип в изключително голяма и много явна степен.

В българското образование идеите на Пойа са адаптирани и доразвити в най-голяма степен от проф. Иван Тонов, чийто хабилитационен труд *Евристиката – наука, изкуство, занаят* (Тонов, 2012) разглежда евристиката като универсален модел на познавателна и творческа дейност. Според него образованието по математика трябва не само да предава заучени алгоритми, а метод на мислене, основан на проби и грешки и формулиране и проверка на хипотези. В тази връзка Тонов настоява, че уменията за решаване на задачи могат и трябва да бъдат преподавани, тъй като те развиват, освен знания, и чисто психологически характеристики като воля, увереност и постоянство, а в не малка степен способстват и готовността за експериментиране. В допълнение на това Тонов отбелязва, че задачи с отворен край могат да бъдат ефективен инструмент за развитие на математическата интуиция в някои ситуации.

В светлината на горепосоченото не е изненада, че Тонов разглежда задачата като основна единица за изграждане на знание, за усъвършенстване на мисловните умения и за развитие на творчеството на учениците. При този поглед всяка задача има определена фукция - да въвежда, да насърчава търсенето на хипотези, да награжда, да обобщава, да провокира и т.н.. Оттук естествено може да се направи изводът, че именно такива мисли и цели трябва да стоят в основата на задачите в една добра дидактическа система и особено в такива системи, които целят подпомагане на напреднали ученици за подготовка за състезания, тъй като там задачите в най-голяма степен се отдалечават от алгоритмичното начало в класическите учебни програми и изискват значителна креативност, творчество и откривателство.

2.4. Методически насоки

Представените в дипломната работа дидактически системи от задачи представляват структурирана съвкупност от взаимносвързани задачи, чрез която може целенасочено да се постигнат определени обучителни резултати, а именно подобряване на уменията на ученици да решават задачи свързани с рекурентни редици от състезания по математика, разширяване на познанията на ученици и студенти по темата за рекурентни редици или допълнително упражняване на този материал. За ефективното използване на тези ресурси е необходимо преподавателите да опитат първо да решат задачите сами, за да могат да вникнат в дълбокия евристичен и дидактически смисъл на всяка задача и да могат да го предадат на учениците в пълнота, а това би изискало определено време и мотивация.

За настоящите и бъдещите преподаватели по математика е от съществено значение да владеят умението за ефективно комбиниране на различните учебни ресурси и средства, с които разполагат. Затова е уместно да се запознаят в дълбочина с представените задачи и теория и да преценят как биха могли да ги съчетаят с други налични ресурси. Комбинацията от различни типове учебни материали и подходи може да подкрепи индивидуалните стилове на учене на учениците и по този начин да допринесе за постигане на по-високи учебни резултати, но само когато е методически добре планирана.

Задачите в настоящата дипломна работа, могат да бъдат използвани в извънкласни форми на обучение – например в математически кръжоци, подготовка за състезания или клубове по интереси, а могат да бъдат предоставяни и за самостоятелна подготовка на напреднали ученици, тъй като материалът за рекурентни редици не се изучава формално в средното образование.

Предложената дидактическа система от задачи е подходяща за ученици със силен изявен интерес към математиката в гимназиалния етап. Необходими предварителни знания са тези за работа с алгебричен и тригонометричен вид на комплексни числа, знания за решаване на алгебрични уравнения от по-високи степени, познания за метода на математическата индукция, владеенето на основни понятия и теореми от теорията на числата като делимост и теореми на Ферма и Ойлер, познаването на дефинията на функцията "скобка x" ($\lfloor x \rfloor$), основни комбинаторни формули като тази за Нютоновия бином и биномните коефиценти, както и класическата работа с радикали от учебния материал в 8.-9. клас. Това предпоставя минимална долна граница 9. клас, но често може и да е по-висока и на преподавателя да се наложи да прецени дали ще се наложи да се преподават част от тези умения предварително, в кой клас, в какъв период от време и в каква дълбочина след преглед на примерните задачи.

Въпреки че рекурентните редици и дефинирането на конкретни такива в задачи са интуитивни и лесноусвоими, то е добре на учениците да бъдат показани няколко съвсем лесни примера за рекурентни зависимости и общи членове в началото и еквивалентността между общия член и рекурентната зависимост да се установи чрез експериментиране. Освен това при решаване на по-сложни задачи трябва винаги да има стремеж те да се свеждат до други и вече известни по-прости задачи.

В ресурсните файлове са предоставени видеозаписи, съдържащи последователни решения на задачите от дидактическата система. Целта на тези записи е да послужат като помощно средство за преподавателите за лесно припомняне на акцентираните ключови моменти в решението на всяка задача. Тези ресурси могат да бъдат използвани и от ученици за самоподготовка, но трябва ясно да бъде подчертан редът на гледане и необходимите предварителни знания, за да може тази самоподготовка да не доведе до спадане на мотивацията.

3. Теоретични основи

3.1. Означения, дефиниции и класификация

С $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ ще означаваме крайната редица $x_1, x_2, \ldots, x_n$. С $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ще означаваме безкрайна редица $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Понякога първият член на редицата е x_0, и тогава ще записваме $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ за крайна редица и $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ за безкрайна. Понякога вместо $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ за удобство ще пишем просто $\{x_i\}$. В настоящия труд ще се интересуваме най-вече от безкрайни рекурентни редици и затова следващите дефиниции са дадени за такива.

Дефиниция 3.1. *Редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ се нарича* ***рекурентна редица*** *или* ***рекурентно зададена редица****, ако всеки неин член е функция на предходни членове на редицата. Това може да се запише явно като $x_n = f_n(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)$ (1) за всяко $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, или неявно като $F_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = 0$ (2) за всяко $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, където f_n и F_n са някакви функции, зависещи от n. Равенствата (1) и (2) се наричат* ***рекурентни уравнения*** *или* ***рекурентни зависимости*** *на редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$.* □

Дефиниция 3.2. *Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека $x_n = f_n(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$ или $F_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}) = 0$ е рекурентната зависимост на някаква редица $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, (т.е. всеки член на редицата може да бъде изразен като функция на предходните k нейни члена). Такава рекурентна зависимост се нарича* ***рекурентна зависимост от k-ти ред****.* □

Дефиниция 3.3. *Нека $x_n = f_n(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$ за всяко $n \in \mathbb{N}, n \geq k$, е рекурентната зависмост на някаква редица $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ако $f_n \in \mathbb{C}[u_1, u_2, \ldots, u_k]$ е полином от първа степен на променливите $u_1, u_2, \ldots, u_k$, зададен чрез $f_n(u_1, u_2, \ldots, u_k) = a_1(n)u_1 + a_2(n)u_2 + \ldots + a_k(n)u_k + b(n)$, където редиците от (в най-общия случай комплексни) числа $a_i(n)$ са дадени за всяко $n \in \mathbb{N}$ с $a_k(n) \neq 0$, то тази зависимост $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ се нарича* ***линейна рекурентна зависимост от k-ти ред****. Ако полиномът f_n не е от първа степен, то рекурентната зависимост се нарича* ***нелинейна****.* □

Дефиниция 3.4. *Нека $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k} + b(n)$, $k \leq n$ е рекурентната зависимост на редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ако $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са константи и $a_k \neq 0$, то тази зависимост се нарича* ***линейна рекурентна зависимост от k-ти ред с постоянни коефициенти****, иначе се нарича* ***линейна рекурентна зависимост от k-ти ред с променливи коефициенти****. Ако освен това е изпълнено $b(n) = 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, то зависимостта се нарича* ***линейна хомогенна рекурентна зависимост от k-ти ред с постоянни коефициенти****.* □

Горните дефиниции ни дават възможност да направим класификация на рекурентните зависимости. Сега ще дадем няколко по-конкретни примера за рекурентни уравнения (зависимости), чрез които горните дефиниции да станат по-ясни:

а) $x_n = 2x_{n-1}$ — линейна хомогенна рекурентна зависимосст от първи ред с постоянни коефициенти

б) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ — линейна хомогенна рекурентна зависимост от втори ред с постоянни коефициенти

в) $x_n = 4x_{n-1} + 1$ — линейна нехомогенна рекурентна зависимост от първи ред с постоянни коефициенти

г) $x_n = 3x_{n-6}$ — линейна хомогенна рекурентна зависимост от шести ред с постоянни коефициенти

д) $x_n = (n-1)x_{n-1} + (n^{1000} - 2)x_{n-2}$ — линейна хомогенна рекурентна зависимост от втори ред с непостоянни (променливи) коефициенти

е) $x_{n+1} = 2nx_n + 1$ — линейна нехомогенна рекурентна зависимост от първи ред с непостоянни (променливи) коефициенти

ж) $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}^2$ — нелинейна хомогенна рекурентна зависимост от втори ред с постоянни коефициенти

з) $x_{n+1} = x_n^2 + n$ — нелинейна нехомогенна рекурентна зависимост от първи ред с променливи коефициенти

Нека $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ е редица с рекурентна зависимост от ред k. За да бъде добре дефинирана тази редица, т.е. за да може да се пресметне всеки от членовете на редицата, използвайки рекурентната формула, е необходимо да са зададени k члена на редицата, т.е. да са дадени k на брой **начални условия**.

Дефиниция 3.5. *Нека $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ е редица, определена чрез рекурентна зависимост от вида $x_n = f_n(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$, за $n \geq k$, с начални условия $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. **Общ член** на редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ наричаме всяка функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, за която $x_n = \varphi(n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, и за която са изпълнени началните условия $\varphi(i) = x_i$ за $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Функцията φ се нарича **явна форма** или **явен вид** на редицата, а изразът $x_n = \varphi(n)$ — **формула за общия член**. По-неформално - общ член на рекурентна редица се нарича изразът, който представя всеки член на редицата като явна функция от неговия пореден номер. Когато редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ е зададена чрез рекурентна зависимост, намирането на общия ѝ член означава извеждане на формула от вида $x_n = f(n)$, където f е някаква функция.* □

Ще приведем и няколко примера, отнасящи се към горните дефиниции:

а) $a_0 = 0$, $a_1 = 3$ — начални условия
$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$ — рекурентна зависимост
$a_n = 3n$ — общ член

б) $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ — начални условия
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$ — рекурентна зависимост
$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ — общ член

в) $x_0 = \frac{3}{2}$ — начално условие
$x_n = 2x_{n-1}$, $n \geq 1$ — рекурентна зависимост
$x_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n = 3 \cdot 2^{n-1}$ — общ член

3.2. Линейни хомогенни рекурентни зависмости с постоянни коефициенти

В предишната част дефинирахме линейна хомогенна рекурентна зависимост от k-ти ред с константни коефициенти като $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + ... + a_k x_{n-k}$ $(*)$ за всяко $n \in \mathbb{N}, n \geq k$, където $a_1, a_2, ..., a_k$ са някакви константим, $a_k \neq 0$, и $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ е някаква редица. Най-ефективният и популярен метод за решаване на такива хомогенни зависимости е чрез така нареченото **характеристично уравнение**.

Първо ще мотивираме разглеждането на такова уравнение. Ако потърсим общ член на редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ във вида $x_n = r^n$, където r е някакво число, то, замествайки в рекурентната зависимост, ще получим уравнението $r^n = a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_k r^{n-k}$ (1). Не може да имаме $r = 0$, защото тогава ще получим, че $x_n = 0^n = 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_0 = 0^0 = 1$ и оттук при $n = k$ рекурентната зависимост $(*)$ ще приеме вида $x_k = a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \cdots + a_k x_0 \iff 0 = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots a_{k-1} \cdot 0 + a_k \cdot 1$ и оттук ще получим, че $a_k = 0$, което е невъзможно. Следователно $r \neq 0$ и като разделим уравнението (1) на r^{n-k} ще получим $r^k - a_1 r^{k-1} - a_2 r^{k-2} - \cdots - a_k = 0$ и значи това число r трябва да е корен на последното уравнение. Така става ясно, че уравнения от този вид са специални и затова ще ги дефинираме.

Дефиниция 3.6. *Нека $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ е редица, зададена чрез линейната хомогенна рекурентна зависимост с постоянни коефициенти $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + ... + a_k x_{n-k}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. Уравнението $x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + ... + a_{k-1} x + a_k$ се нарича* ***характеристично уравнение на дадената зависимост.*** $\square$

По-горе доказахме, че ако редицата $a_n = r^n$ удовлетворява рекурентната зависимост, то r е корен на характеристичното уравнение. Сега ще докажем и обратното.

Твърдение 3.7. *Нека r е корен на характеристичното уравнение. Тогава редицата $x_n = r^n$ удовлетворява рекурентната зависимост $(*)$.*

Доказателство. Знаем, че $r^k - a_1 r^{k-1} - a_2 r^{k-2} - \cdots - a_k = 0$ и умножавайки по r^{n-k} получаваме $r^n = a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_k r^{n-k}$ и като заместим $r^i = x_i$ за всяко $i = n-k,\, n-k+1, \ldots, n$ в това уравнение, то получаваме $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}$, което беше исканото. $\square$

Теорема 3.8. *Нека S е множеството от всички редици $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ от (в най-общия случай комплексни) числа, които удовлетворяват рекурентната зависимост $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}$ $(*)$. Нека освен това характеристичното уравнение $r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \cdots + a_k$ на редицата има k различни корена $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Тогава множеството S е линейно пространство над $\mathbb{C}$ с размерност k.*

Доказателство. Нека $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$ са две редици, които удовлетворяват $(*)$ и нека $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ са произволни. Тогава $\alpha \cdot u_n + \beta \cdot v_n = \alpha \cdot (a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k}) + \beta \cdot (a_1 v_{n-1} + a_2 v_{n-2} + \ldots + a_k v_{n-k}) = a_1 \cdot (\alpha \cdot u_{n-1} + \beta \cdot v_{n-1}) + a_2 \cdot (\alpha \cdot u_{n-2} + \beta \cdot v_{n-2}) + \cdots + a_k \cdot (\alpha \cdot u_{n-k} + \beta \cdot v_{n-k})$, откъдето следва, че редицата $\{\alpha \cdot u_i + \beta \cdot v_i\}$ също удовлетворява зависимостта $(*)$ и значи наистина S е линейно пространство.

Остава да докажем по-сложната част, а именно, че размерността на S е k. Първо ще споменем, че от рекурентната зависимост $(*)$ е ясно, че първите k члена на всяка редица, която я удовлетворява, дефинират еднозначно всичките следващи членове на редицата. Нека $\{a_i^{(1)}\}, \{a_i^{(2)}\}, \ldots, \{a_i^{(k+1)}\}$ са редици, които удовлетворяват рекурентната зависимост $(*)$. Разглеждаме първите k члена на всяка от тях като вектор-стълб, т.е. за всяко $j = 1, 2, \ldots, k+1$:

$$v^{(j)} = \begin{pmatrix} a_0^{(j)} \\ a_1^{(j)} \\ \vdots \\ a_{k-1}^{(j)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^k.$$

Векторното пространство $\mathbb{C}^k$ е с размерност k и не съдържа $k+1$ линейно независими вектора. Следователно съществуват числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$, не всички нули, такива че:

$$\lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \cdots + \lambda_{k+1} v^{(k+1)} = 0.$$

Това означава, че за всяко $i = 0, 1, \dots, k-1$ е изпълнено:

$$\lambda_1 a_i^{(1)} + \lambda_2 a_i^{(2)} + \dots + \lambda_{k+1} a_i^{(k+1)} = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 a_0^{(1)} + \lambda_2 a_0^{(2)} + \dots + \lambda_{k+1} a_0^{(k+1)} = 0, \\ \lambda_1 a_1^{(1)} + \lambda_2 a_1^{(2)} + \dots + \lambda_{k+1} a_1^{(k+1)} = 0, \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{k-1}^{(1)} + \lambda_2 a_{k-1}^{(2)} + \dots + \lambda_{k+1} a_{k-1}^{(k+1)} = 0. \end{cases}$$

Нека сега да дефинираме нова редица:

$$s_n = \lambda_1 a_n^{(1)} + \dots + \lambda_{k+1} a_n^{(k+1)} \text{ за всяко } n \in \mathbb{N} \quad (**)$$

Понеже S е линейно пространство, редицата $\{s_n\}$ също удовлетворява рекурентната зависимост $(*)$. Но тогава от горната система директно получаваме, че:

$$s_0 = s_1 = \dots = s_{k-1} = 0.$$

Но ако първите k члена на една редица са нули, то от рекурентната формула $(*)$ следва, че и всички останали членове също са нули. Значи $\{s_n\}$ е нулевата редица и тогава от равенствата $(**)$ получаваме, че $a^{(1)}, \dots, a^{(k+1)}$ са линейно зависими, тъй като λ_i не са едновременно нули и освен това от факта, че $\{s_n\}$ е нулевата редица, следва, че всичките съответни членове на тези редици са линейно зависими. И така получихме, че $\dim S \leq k$ и остава да покажем, че има k на брой линейно независими редици.

Ще докажем, че редиците $\{r_1^i\}, \{r_2^i\}, \dots, \{r_k^i\}$, където $r_1, r_2, \dots, r_k$ са корените на характеристичното уравнение, са линейно независми, а вече знаем, че тези редици са от S, тъй като в предходното твъдение го доказахме. Да разгледаме произволна нулева линейна комбинация:

$$\gamma_1 r_1^n + \gamma_2 r_2^n + \dots + \gamma_k r_k^n = 0 \quad \text{за всяко } n \geq 0.$$

За $n = 0, 1, \dots, k-1$ получаваме система от k линейни уравнения:

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k = 0, \\ \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 + \dots + \gamma_k r_k = 0, \\ \vdots \\ \gamma_1 r_1^{k-1} + \gamma_2 r_2^{k-1} + \dots + \gamma_k r_k^{k-1} = 0. \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{pmatrix}}_{\text{Матрица на Вандермонд}} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Това е известната матрица на Вандермонд и се знае, че нейната детерминанта е:

$$\det(V) = \prod_{1 \le i < j \le k} (r_j - r_i) \neq 0,$$

тъй като корените r_i са различни. Оттук системата има само тривиално решение $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_k = 0$ и значи елементите $\{r_1^i\}$, $\{r_2^i\}$, $\ldots$, $\{r_k^i\}$ на S са линейно независими, откъдето следва, че $\dim S = k$ и с това теоремата е доказана. $\square$

В процеса на доказателството на тези теорема всъщност доказахме следния факт, който сега ще изведем като явен резултат:

Следствие 3.9. *Нека е дадена редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ от (в най-общия случай комплексни) числа, която удовлетворява рекурентната зависимост $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + ... + a_k x_{n-k}$ $(*)$. Нека освен това характеристичното уравнение $r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \cdots + a_k$ на редицата има k различни корена $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Тогава общите членове на всички редици, които удовлетворяват тази зависимост имат вида*

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + a_k r_k^n,$$

за някакви константи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, които могат да бъдат определени от началните условия на редиците.

Теорема 3.10. *Нека S е множеството от всички редици $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ от (в най-общия случай комплексни) числа, които удовлетворяват рекурентната зависимост $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + ... + a_k x_{n-k}$ $(*)$. Нека освен това характеристичното уравнение $r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \cdots + a_k$ на редицата има s различни корена $r_1, r_2, \ldots, r_s$ с кратности $m_1, m_2, \ldots, m_s$ съответно. Тогава множеството S е линейно пространство над $\mathbb{C}$ с размерност k.*

Доказателство. Ясно е, че $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = k$. По същия начин като в миналата теорема можем да докажем, че S е линейно пространство и $\dim S \le k$ $(+)$. Сега ще докажем, че ако r_0 е корен на характеристичното уравнение с кратност поне $m+1$, то $\{n^m r_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ е в S. Нека $p(r) = r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \cdots - a_k r^{n-k}$. Да предположим, че r_0 е корен на уравнението $p(r) = 0$ с кратност поне $m+1$. Това означава, че $p(r) = (r - r_0)^{m+1} q(r)$ за някой полином $q(r)$. Нашата цел е да покажем, че редицата с общ член $x_n = n^m r_0^n$ удовлетворява рекурентната зависимост. С други думи, трябва да покажем, че:

$$n^m r_0^n = a_1 (n-1)^m r_0^{n-1} + a_2 (n-2)^m r_0^{n-2} + \cdots + a_k (n-k)^m r_0^{n-k}.$$

Ако преместим всички членове отлято, то целта е да докажем, че:

$$n^m r_0^n - a_1(n-1)^m r_0^{n-1} - a_2(n-2)^m r_0^{n-2} - \cdots - a_k(n-k)^m r_0^{n-k} = 0. \tag{1}$$

За произволен полином $P(x) = \sum_{i=0}^{d} b_i x^i$ дефинираме нов полином:

$$\widehat{P}(x) = \sum_{i=0}^{d} i b_i x^i.$$

След това дефинираме редица от полиноми $p_0(r) = p(r)$ и $p_j(r) = \widehat{p_{j-1}}(r)$. По-точно,

$$p_j(r) = n^j r^n - a_1(n-1)^j r^{n-1} - a_2(n-2)^j r^{n-2} - \cdots - a_k(n-k)^j r^{n-k}.$$

Забележете, че целта ни да покажем, че уравнение (1) е тъждество, се свежда до това да докажем, че $p_m(r_0) = 0$. Сега ще докажем няколко факта, които ще са ни необходими:

Лема 3.11. *Нека $P_1(x)$ и $P_2(x)$ са полиноми и $P(x) = P_1(x)P_2(x)$. Тогава*

$$\widehat{P}(x) = P_1(x)\widehat{P_2}(x) + \widehat{P_1}(x)P_2(x).$$

Доказателство. Нека $P_1(x) = \sum_{i=0}^{d} b_i x^i$, а $P_2(x) = \sum_{j=0}^{e} d_j x^j$. Тогава

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{e} b_i d_j x^{i+j},$$

и следователно

$$\widehat{P}(x) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{e} (i+j) b_i d_j x^{i+j}.$$

Оттук директно следва формулата за произведението, защото

$$P_1(x)\widehat{P_2}(x) + \widehat{P_1}(x)P_2(x) = \left(\sum_{i=0}^{d} b_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{e} j d_j x^j\right) + \left(\sum_{i=0}^{d} i b_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{e} d_j x^j\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{e} (j b_i d_j x^{i+j} + i b_i d_j x^{i+j}) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{e} (i+j)\, b_i d_j x^{i+j}.$$

□

Лема 3.12. *За $m \geq 1$, ако $P(x) = (x-c)^m$, то $\widehat{P}(x) = mx(x-c)^{m-1}$.*

Доказателство. Ще докажем твърдението чрез индукция по m. При $m = 1$ имаме $P(x) = x - c$ и следователно $\widehat{P}(x) = x = x(x-c)^0$. Допускаме, че твърдението е вярно за $m-1$. Тогава $P(x) = (x-c)^m = (x-c)(x-c)^{m-1}$. Прилагайки предходната лема и индукционната хипотеза получаваме:

$$\widehat{P}(x) = (x-c) \cdot x(m-1)(x-c)^{m-2} + x(x-c)^{m-1} = xm(x-c)^{m-1}.$$

□

Лема 3.13. *Нека $Q(x)$ е полином и $P_0(x) = (x-c)^{m+1}Q(x)$. Нека $P_j(x) = \widehat{P_{j-1}}(x)$ за $j \geq 1$. Тогава за всяко $0 \leq j \leq m$ съществува полином $Q_j(x)$, такъв че*

$$P_j(x) = (x-c)^{m+1-j}Q_j(x).$$

Доказателство. Ще докажем твърдението чрез индукция по j. При $j = 0$ избираме $Q_0(x) = Q(x)$, тогава $P_0(x) = (x-c)^{m+1-0}Q_0(x)$. Нека твърдението е вярно за $j-1$. Тогава $P_{j-1}(x) = (x-c)^{m+1-j+1}Q_{j-1}(x)$. Следователно

$$P_j(x) = \widehat{P_{j-1}}(x) = (x-c)^{m+1-j}[(x-c)\widehat{Q_{j-1}}(x) + x(m+1-j+1)Q_{j-1}(x)].$$

Като вземем $Q_j(x) = (x-c)\widehat{Q_{j-1}}(x) + x(m+1-j+1)Q_{j-1}(x)$, завършваме индукцията.

□

Сега се връщаме към полинома p_m, който дефинирахме в началото. Припомнете си, че искахме да покажем, че $p_m(r_0) = 0$, за да докажем уравнение (1). Предположихме, че $p_0(r) = (r-r_0)^{m+1}q(r)$ за някакъв полином $q(r)$ и сега от Лема 3.12 при $j = m$ получаваме $p_m(r) = (r-r_0)q'(r)$ за някой полином $q'(r)$. Следователно $p_m(r_0) = 0$, което завършва доказателството на твърдението, че $\{n^m r_0^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ е в S. Но все още теоремата не е доказана.

До момента доказахме, че ако r е корен на характеристичното уравнение с кратност m, то рециците $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{nr^n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{n^2r^n\}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \{n^{m-1}r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяват рекурентната зависимост $(*)$. Тези редици са точно m на брой и това е вярно за всеки корен на характеристичното уравнение. Всички тези рекурентни редици (т.е. всички тези елементи на S) са линейно независими. Наистина, да допуснем, че съществуват коефициенти $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, не всички нули, такива че:

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell n^\ell r^n = 0 \quad \text{за всички } n.$$

Тъй като $r \neq 0$, можем да разделим двете страни на r^n и да получим:

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell n^\ell = 0 \quad \text{за всички } n.$$

Нека

$$Q(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \cdots + \alpha_{m-1} n^{m-1}.$$

Тогава условието е $Q(n) = 0$ за всички $n \in \mathbb{N}$. Но полином от степен най-много $m-1$ не може да има повече от $m-1$ различни корена, освен ако не е тъждествено нулев и понеже равенството е вярно за безкрайно много стойности на n, полиномът $Q(n)$ трябва да е тъждествено нула и значи: $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$. Следователно линейната комбинация е тривиална и редиците са линейно независими, както искахме да покажем. По същата причина като в миналата теорема всички тези редици са линейно независими и помежду си и значи размерността на линейното пространство трябва да е поне $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = k$ и това, заедно с факта $(+)$ ни показва, че $\dim S = k$, с което теоремата е доказана. $\square$

От последната теорема става ясно, че редиците $\{r_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{nr_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{n^2 r_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\ldots$, $\{n^{m-1} r_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ са базисни елементи за разглежданото в нея линейно пространство за всеки корен r_i с кратност m_i на характеристичното уравнение на редицата. Така, сумирайки линейните комбинации на тези елементи, получаваме:

Следствие 3.14. *Нека е дадена редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ от (в най-общия случай комплексни) числа с рекурентна зависимост $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}$ $(*)$. Нека освен това характеристичното уравнение $r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \cdots + a_k$ на редицата има s различни корена $r_1, r_2, \ldots, r_s$ с кратности $m_1, m_2, \ldots, m_s$ съответно. Тогава общите членове на всички редици, които удовлетворяват тази зависимост имат вида*

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} (\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} n + \cdots + \alpha_{i,m_i-1} n^{m_i-1})\, r_i^n = P_{m_1-1}(n) r_1^n + P_{m_2-1}(n) r_2^n + \ldots + P_{m_s-1}(n) r_s^n$$

където $P_i(n)$ е полином на n от степен най-много i с константни коефициенти $\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,m_i-1}$, които могат да бъдат определени от началните условия на редиците.

Следствие 3.15. *Нека е дадена редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ от реални числа с рекурентна зависимост $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}$ $(*)$, където $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Тогава, ако $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ са двойка еднократни комплексно спрегнати корени на характеристичното уравнение с тригонометричен вид $\lambda = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\overline{\lambda} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$, то частта от общия член на редицата, която отговаря на тези два корена, има вида*

$$r^n (A\cos n\alpha + B\sin n\alpha)$$

за някакви реални константи A и B.

Доказателство. Първо да отбележим, че тъй като коефициантите в рекурентното уравнение на редицата са реални числа, то характеристичното уравнение ще е с реални коефициенти. Тогава от алгебрата знаем, че ако $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ е корен на характеристичното уравнение, то и $\overline{\lambda}$ също е корен. Сега от предходните теореми знаем, че частта от общия член, която отговаря на тези корени, е

$$C_1\lambda^n + C_2\overline{\lambda}^n,$$

за някакви C_1, $C_2 \in \mathbb{C}$. Записвайки горното в трионометричен вид, получаваме:

$$\begin{aligned}
C_1\lambda^n + C_2\overline{\lambda}^n &= C_1\left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^n + C_2\left[r(\cos\alpha - i\sin\alpha)\right]^n = \\
&= C_1r^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + C_2r^n(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = \\
&= C_1r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + C_2r^n(\cos n\alpha - i\sin n\alpha) = \\
&= \left((C_1+C_2)\cos n\alpha + i(C_1-C_2)\sin n\alpha\right)r^n = \left(A\cos n\alpha + B\sin n\alpha\right)r^n,
\end{aligned}$$

където $A = C_1 + C_2$ и $B = i(C_1 - C_2)$ и остава да докажем, че A и B са реални числа.

Тъй като коефициентите на рекурентната зависимост са реални числа, то и всичките членове на редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ ще са реални числа и тогава $x_n = \overline{x_n}$ за всяко $n \in \mathbb{N}_0$, откъдето

$$C_1\lambda^n + C_2\overline{\lambda}^n = \overline{C_1\lambda^n + C_2\overline{\lambda}^n} = \overline{C_1}\cdot\overline{\lambda}^n + \overline{C_2}\cdot\overline{\overline{\lambda}}^n = \overline{C_1}\cdot\overline{\lambda}^n + \overline{C_2}\cdot\lambda^n.$$

Оттук получаваме, че $\left(C_1 - \overline{C_2}\right)\lambda^n + \left(C_2 - \overline{C_1}\right)\overline{\lambda}^n = 0$, и тъй като $\{\lambda^n\}$ и $\{\overline{\lambda}^n\}$ са две линейно независими решения на рекурентната зависимост (както доказахме в предходните теореми), то единствената възможност е $C_1 = \overline{C_2}$, $C_2 = \overline{C_1}$. Но тогава ще получим, че $A = C_1 + C_2 = C_1 + \overline{C_1} \in \mathbb{R}$ и $B = i\left(C_1 - C_2\right) = i\left(C_1 - \overline{C_1}\right) \in \mathbb{R}$, и с това твърдението е доказано. $\square$

Следствие 3.16. *Нека е дадена редицата $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ от реални числа с рекурентна зависимост $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + ... + a_kx_{n-k}$ $(*)$, където a_1, a_2, $\ldots$, $a_k \in \mathbb{R}$. Тогава, ако $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ са двойка комплексно спрегнати корени на характеристичното уравнение с кратност s и с тригонометричен вид $\lambda = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\overline{\lambda} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$, то частта от общия член на редицата, която отговаря на тези два корена, има вида*

$$r^n(A_{s-1}(n)\cos n\alpha + B_{s-1}(n)\sin n\alpha)$$

за някакви полиноми $A_{s-1}(n)$ и $B_{s-1}(n)$ от степен най-много $s-1$.

Доказателство. От предходните теореми и следствия знаем, че частта от общия член, която съответства на корените λ и $\overline{\lambda}$, има вида $P_{s-1}(n)\lambda^n + Q_{s-1}(n)\overline{\lambda}^n$, където $P_{s-1}(n)$ и $Q_{s-1}(n)$ са полиноми от степен най-много $s-1$ на n с комплексни коефициенти. Но тогава, тъй като членовете на редицата са реални, то $x_n = \overline{x_n}$ и тогава:

$$P_{s-1}(n)\lambda^n + Q_{s-1}(n)\overline{\lambda}^n = \overline{P_{s-1}(n)\lambda^n + Q_{s-1}(n)\overline{\lambda}^n} = \overline{P_{s-1}(n)} \cdot \overline{\lambda}^n + \overline{Q_{s-1}(n)} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^n =$$
$$= \overline{P_{s-1}(n)} \cdot \overline{\lambda}^n + \overline{Q_{s-1}(n)} \cdot \lambda^n.$$

Оттук получаваме, че $\left(P_{s-1}(n) - \overline{Q_{s-1}(n)}\right)\lambda^n + \left(Q_{s-1}(n) - \overline{P_{s-1}(n)}\right)\overline{\lambda}^n = 0$ и тъй като $\{\lambda^n\}$ и $\{\overline{\lambda}^n\}$ са две линейно независими решения на рекурентната зависимост (както доказахме в предходните теореми), то единствената възможност е $P_{s-1}(n) = \overline{Q_{s-1}(n)}$, $Q_{s-1}(n) = \overline{P_{s-1}(n)}$.

Нека $A_{s-1}(n) = P_{s-1}(n) + Q_{s-1}(n) = P_{s-1}(n) + \overline{P_{s-1}(n)}$ и $B_{s-1}(n) = i\left(P_{s-1}(n) - Q_{s-1}(n)\right) = i\left(P_{s-1}(n) - \overline{P_{s-1}(n)}\right)$. Ясно е, че $A_{s-1}(n)$ и $B_{s-1}(n)$ са полиноми с реални коефициенти, тъй като коефициентите на $A_{s-1}(n)$ са суми от комлексни числа и техните комплексно спрегнати, а коефициентите на $B_{s-1}(n)$ са разлики на комплексни числа с техните комплексно спрегнати, умножени по i. За частта от общия член, която отговаря на λ и $\overline{\lambda}$, имаме:

$$P_{s-1}(n)\lambda^n + Q_{s-1}(n)\overline{\lambda}^n = P_{s-1}(n)\left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^n + Q_{s-1}(n)\left[r(\cos\alpha - i\sin\alpha)\right]^n =$$
$$= P_{s-1}(n)r^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + Q_{s-1}(n)r^n(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n =$$
$$= P_{s-1}(n)r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + Q_{s-1}(n)r^n(\cos n\alpha - i\sin n\alpha) =$$
$$= \left((P_{s-1}(n) + Q_{s-1}(n))\cos n\alpha + i(P_{s-1}(n) - Q_{s-1}(n))\sin n\alpha\right)r^n =$$
$$= \left(A_{s-1}(n)\cos n\alpha + B_{s-1}(n)\sin n\alpha\right)r^n,$$

с което твърдението е доказано. □

4. Колекции от задачи

4.1. Намиране на общ член на редица. Хомогенизиране на нехомогенни рекурентни уравнения

В настоящата глава ще илюстрираме как чрез прилагане на теорията от миналата глава можем да намираме общи членове на редици. За да е налице максимална възможна пълнота, са представени примери за характеристични уравнения с различни реални корени, с кратни реални корени, с комлексни корени и с комбинации от вече посочените. Освен това са дадени примери за хомогенизиране на нехомогенни рекурентни зависимости.

Пример 1. Ако $a_0 = 8$, $a_1 = 6$, $a_2 = 26$ и $a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-3}$ за всяко $n \geq 3$, то намерете общия член на редицата $\{a_n\}$.

Решение. Характеристичното уравнение на редицата е $x^3 = -x^2 + 4x + 4 \iff x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$. Това е еквивалентно на $(x+1)(x+2)(x-2) = 0$, чиито корени са -2, -1, 2. Тъй като корените са реални и различни, то от Следствие 3.9 знаем, че общият член има вида $x_n = c_1(-2)^n + c_2(-1)^n + c_3.2^n$ за някакви константи c_1, c_2, c_3. Можем да намерим тези константи, използвайки първите три члена. Получаваме $8 = a_0 = c_1(-2)^0 + c_2(-1)^0 + c_3.2^0 = c_1 + c_2 + c_3$, $6 = a_1 = c_1(-2)^1 + c_2(-1)^1 + c_3.2^1 = -2c_1 - c_2 + 2c_3$ и $26 = a_2 = c_1(-2)^2 + c_2(-1)^2 + c_3.2^2 = 4c_1 + c_2 + 4c_3$. Тези уравнения дават системата

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 8 \\ -2c_1 - c_2 + 2c_3 = 6 \\ 4c_1 + c_2 + 4c_3 = 26 \end{cases}$$

Решавайки системата, получаваме $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$ и така формулата за общия член е $a_n = (-2)^n + 2.(-1)^n + 5.2^n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. □

Коментар. *Това беше пример за характеристично уравнение с различни реални корени.*

Пример 2. Ако $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ и $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ за всяко $n \geq 1$, намерете формула за общия член x_n на редицата като функция на n.

Решение. Характеристичнто уравнение на редицата е $x^2 = 2x - 1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$. То има двоен корен $x_{1,2} = 1$. Така според Следствие 3.14, общият член на редицата има вида $x_n = P(n).1^n$, където $P(n)$ е полином от степен с едно по малка от кратността на корена, т.е. линеен полином. Нека $P(n) = an + b$ за някакви константи a и b. Така $x_n = an + b$. Можем да намерим a и b от пъвите няколко члена на редицата. Имаме $3 = x_1 = a.1 + b$ и $4 = x_2 = a.2 + b$. Така намираме $a = 1$ и $b = 2$, и оттук уравнението за общия член е $x_n = n + 2$. $\square$

Коментар. *Това беше пример за характеристично уравнение с двоен реален корен.*

Пример 3. Ако $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 28$, $a_3 = 32$ и $a_n - 8a_{n-2} + 16a_{n-4} = 0$ за всяко $n \geq 4$, намерете формула за обшия член a_n на редицата.

Решение. Характеристичното уравнение е $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \iff (x-2)^2(x+2)^2 = 0$. Така 2 и -2 са двойни корени. Според Следствие 3.14 общият член има вида $a_n = P(n).(-2)^n + Q(n).2^n$, където $degP(n) =$ (кратността на корена -2) $- 1 = 1$ и $degQ(n) =$ (кратността на корена 2) $- 1 = 1$. Значи съществуват константи c_1, c_2, c_3, c_4, такива че $P(n) = c_1n + c_2$ и $Q(n) = c_3n + c_4$. Така общият член е $a_n = (c_1n+c_2).(-2)^n + (c_3n+c_4).2^n$. За константите имаме $1 = a_0 = c_2 + c_4$, $4 = a_1 = -2c_1 - 2c_2 + 2c_3 + 2c_4$, $28 = a_2 = 8c_1 + 4c_2 + 8c_3 + 4c_4$ и $32 = a_3 = -24c_1 - 8c_2 + 24c_3 + 8c_4$. От тези уравнения намираме $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$, $c_4 = 1$ и така общият член на редицата е $a_n = n.(-2)^n + (2n+1).2^n$. $\square$

Коментар. *Това беше пример за характеристично уравнение с два двойни реални корена.*

Пример 4. Ако $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ и $a_{n+2} + 2a_{n+1} + 2a_n = 0$ за всяко $n \geq 0$, намерете общия член a_n на редицата.

Решение. Характеристичното уравнение е $x^2 + 2x + 2 = 0$. Неговата дискриминанта е $D = 4 - 8 = -4 = 4i^2 < 0$, съответно негови корени са комплексните числа $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$. Сега формулата за общия член има вида $a_n = p(-1-i)^n + q(-1+i)^n$ и остава да намерим константите p и q. Обаче този вид на уравнението е много неудобен за работа. Най-добрият вариант е да използваме тригонометричната форма на комплексните числа. Лесно намираме че $-1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} \pm i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и сега от Следствие 3.15 следва, че формулата за общия член е $a_n = (\sqrt{2})^n\left(c_1\cos\dfrac{3\pi}{4} + c_2\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^n \overset{\text{Моавър}}{=} 2^{\frac{n}{2}}\left(c_1\cos\dfrac{3n\pi}{4} + c_2\sin\dfrac{3n\pi}{4}\right)$, където c_1 и c_2 са константи, които ще намерим от първите членове на редицата. Получаваме $1 = a_0 = c_1$ и $3 = a_1 = \sqrt{2}\left(c_1\cos\dfrac{3\pi}{4} + c_2\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}c_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}c_2\right) = -c_1 + c_2$ и оттук $c_2 = 4$. Така формулата за общия член е $a_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{3n\pi}{4} + 4\sin\dfrac{3n\pi}{4}\right)$. $\square$

Коментар. *Това беше пример за характеристично уравнение с двойка комплексни корени (комплексно-спрегнати).*

Пример 5. Ако $x_0 = 0$ и $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1$, намерете формула за общия член на редицата.

Решение. Тази зависимост не е хомогенна заради $+1$, което се намира накрая. Много лесно обаче можем да я сведем до хомогенна. Имаме $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1$ (1) и като я запишем, замествайки n с $n+1$, получаваме $x_{n+2} = -\frac{1}{2}x_{n+1} + 1$ (2). Когато извадим (1) от (2), получаваме $x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$ и това е хомогенно, значи можем да намерим характеристичното уравнение. То е $x^2 - x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \iff 2x^2 - x - 1 = 0$. Неговите корени са $-\frac{1}{2}$ и 1. Така общият член е $x_n = c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_2.1^n$. Проверявайки първите членове на редицата, получаваме $c_1 = -\frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{2}{3}$ и така общият член е $x_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$, с което сме готови. □

Коментар. *Това беше пример на хомогенизация на нехомогенна рекурентна зависимост.*

Пример 6. Ако $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = -4$ и $a_{n+3} + a_{n+2} = 2a_n + 5$ за всяко $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, намерете формула за общия член a_n на редицата.

Решение. Тази зависимост също не е хомогенна заради $+5$ в края, и значи не можем да намерим характеристичното уравнение. Отново можем да хомогенизираме, както в предния пример. Имаме $a_{n+3} + a_{n+2} = 2a_n + 5$ (1) и замествайки n с $n+1$, получаваме $a_{n+4} + a_{n+3} = 2a_{n+1} + 5$ (2). Сега изваждаме (2)-(1) и получаваме $a_{n+4} + a_{n+3} - (a_{n+3} + a_{n+2}) = 2a_{n+1} + 5 - (2a_n + 5) \iff a_{n+4} - a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$. Сега зависимостта е хомогенна и можем да намерим характеристичното уравнение $x^4 - x^2 = 2x - 2 \iff (x-1)^2(x^2+2x+2) = 0$. То има двоен корен $x_{1,2} = 1$ и двойка комплексни корени $x_{3,4} = -1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} \pm i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. От Следствие 3.14 и Следствие 3.15 следва, че общият член на редицата е

$$a_n = (c_1 + c_2 n).1^n + 2^{\frac{n}{2}}\left(c_3\cos\frac{3n\pi}{4} + c_4\sin\frac{3n\pi}{4}\right).$$

Сега трябва да намерим c_1, c_2, c_3, c_4 от първите членове на редицата. Но тъй като има четири константи, трябва да намерим и a_3. От рекурентната зависимост намираме $a_3 = -a_2 + 2a_0 + 5 = 19$. Получаваме $5 = a_0 = c_1 + c_3\cos 0 + 4c_4\sin 0 = c_1 + c_3$, $4 = a_1 = c_1 + c_2 + \sqrt{2}\left(c_3\cos\frac{3\pi}{4} + c_4\sin\frac{3\pi}{4}\right) = c_1 + c_2 - c_3 + c_4$, $-4 = a_2 = c_1 + 2c_2 + 2\left(c_3\cos\frac{3\pi}{2} + c_4\sin\frac{3\pi}{2}\right) = c_1 + 2c_2 - 2c_4$ и $19 = a_3 = c_1 + 3c_2 +$

$2\sqrt{2}\left(c_3\cos\frac{9\pi}{4}+c_4\sin\frac{9\pi}{4}\right) = c_1+3c_2+2c_3+2c_4$. От тези уравнения намираме $c_1=2$, $c_2=1$, $c_3=3$, $c_4=4$ и така общият член е

$$a_n = 2+n+2^{\frac{n}{2}}\left(3\cos\frac{3n\pi}{4}+4\sin\frac{3n\pi}{4}\right).$$

□

Коментар. *Това беше пример за хомогенизиране на нехомогенна зависимост с характеристично уравнение и с кратни реални, и с комплексни корени.*

Пример 7. Ако $a_1=1$ и $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+n^2-15$ за всяко $n\geq 2$, намерете общия член a_n на редицата. (Zhang, 2011)

Решение. Зависимостта не е хомогенна заради полинома n^2-15 отдясно. Това означава, че трябва да хомогенизираме и след това да намерим характеристичното уравнение. Как бихме могли да го направим? Съществува алгоритъм, който ще поясним след задачата. Засега нехомогенната част е полином $f(n)=n^2-15$ от степен 2. Тогава нека намерим полином $g(n)$, $deg(g)=deg(f)$, такъв че $a_n+g(n)=\frac{2}{3}(a_{n-1}+g(n-1))$ $(*)$. Нека $g(n)=an^2+bn+c$ за някакви константи a, b, c. Замествайки това в $(*)$, получаваме $a_n+an^2+bn+c=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{2}{3}(a(n-1)^2+b(n-1)+c)$ и, използвайки зависимостта $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+n^2-15$, се получава

$$\frac{2}{3}a_{n-1}+n^2-15+an^2+bn+c=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{2}{3}(a(n-1)^2+b(n-1)+c)$$

Опростяваме израза и получаваме еквивалентното $(a+1)n^2+bn+c-15=\frac{2}{3}an^2+\left(-\frac{4a}{3}-\frac{2b}{3}\right)n+\frac{2a}{3}-\frac{2b}{3}+c$. Това трябва да бъде вярно за всяка стойност на n, което означава че полиномите от двете страни са еднакви,т.е. съответните им коефициенти са равни. Така получаваме системата

$$\begin{cases} a+1=\frac{2}{3}a \\ b=-\frac{4a}{3}+\frac{2b}{3} \\ c-15=\frac{2a}{3}-\frac{2b}{3}+\frac{2}{3}c \end{cases}$$

Решавайки я, получаваме $a=-3$, $b=12$, $c=15$. Така имаме $g(n)=-3n^2+12n+15$ и $a_n+g(n)=\frac{2}{3}(a_{n-1}+g(n-1))$ (1) за всяко $n\geq 2$. Сега можем да дефинираме $b_n=a_n+g(n)$ и (1) става $b_n=\frac{2}{3}b_{n-1}$, което е хомогенна зависимост. Но това също означава, че b_n е геометрична прогресия с частно $r=\frac{2}{3}$. Това пък означава, че няма нужда да работим с характеристично уравнение (въпреки че задачата може да се реши и чрез него). Освен това имаме $b_1 = a_1 + g(1) = 1 - 3 + 12 + 15 = 25$ и от формулата за общия член на геометрична прогресия получаваме $b_n = b_1 r^{n-1} = 25\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. Накрая от $a_n = b_n + g(n)$ получаваме, че $a_n = b_n - g(n) = 25\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3n^2 - 12n - 15$ е формулата за общия член a_n. □

Коментар. *Това беше пример за рекурентна редица от 1-ви ред с нехомогенна зависимост, като нехомогенната част е полином. По-общ случай е налице, когато зависимостта е от вида $a_n = pa_{n-1} + f(n)$, където $f(n)$ е полином. Тогава трябва да намерим полином $g(n)$ със степен като тази на $f(n)$, такъв че $a_n + g(n) = p(a_{n-1} + g(n-1))$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, и да положим $b_n = a_n + g(n)$, за да намерим редица с геометричната зависимост $b_n = pb_{n-1}$ и да намерим формула за общия член използвайки $a_n = b_n - g(n)$. Естествен въпрос е какво бихме направили ако редицата е от втори ред?*

Коментар. *Нека $\{a_k\}_{k=1}^{n,\infty}$ е редица с рекурентна зависимост $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + P(n)\alpha^n$ $(*)$, където p, q, α са константи и $P(n)$ е полином. Формулата за общия член на такава редица е $a_n = x_n + y_n$, където x_n е решението на хомогенната редица $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$, а y_n е редица (специфично решение), удовлетворяваща $(*)$. Трудната част е именно да намерим такава редица. Как можем да го направим? В случая, в който нехомогенната част е $P(n)\alpha^n$, специфичното решение има вида $Q(n)\alpha^n$, където $degQ = \{degP, degP + 1, degP + 2\}$, и трябва да проверим и трите случая, за да го намерим. Нека видим пример.*

Пример 8. Намерете редиците $\{x_n\}_{n\geq 0}$, удоволетворяващи зависимостта

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n + 2^n, \quad n = 0, 1, \dots \ (*)$$

Решение. Първо трябва да намерим формула за общия член на $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ (1). Характеристичното уравнение е $x^2 - 3x + 2 = 0$ с корени $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Така формулата за общия член на (1) е $x_n = c_1 + c_2.2^n$. Сега трябва да намерим специфично решение на зависимостта $(*)$. От горната забележка е ясно, че това решение има вида $P(n).2^n$, където $P(n)$ е полином от степен 0, 1 или 2 (защото нехомогенната част на $(*)$ е 1.2^n и 1 е полином от степен 0). Първо ще проверим дали $degP(n) = 0$ работи. Нека $P(n) = c$, където c е константа. Така трябва да проверим дали $x_n = c.2^n$ удоволетворява $(*)$ за константа c. Ако това е така, имаме $c.2^{n+2} = 3.c.2^{n+1} - 2.c.2^n + 2^n \iff 4c.2^n = 6c.2^n - 2c.2^n + 2^n \iff 2^n = 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, което е невъзможно. Нека сега проверим дали $\deg P(n) = 1$ работи. Така $P(n) = an + b$ за константи a, b. Трябва да проверим дали $x_n = (an + b).2^n$ удоволетворява $(*)$ за някои a, b. Заместваме в $(*)$ и получаваме $(a(n+2)+b).2^{n+2} =$

$3(a(n+1)+b).2^{n+1} - 2(an+b).2^n + 2^n \iff (4an+8a+4b).2^n = (6an+6a+6b).2^n - (2an+2b).2^n + 2^n \iff 2a.2^n = 2^n$, което е вярно за $a = \dfrac{1}{2}$ и всяко b. Можем да изберем $a = \dfrac{1}{2}$ и $b = 0$, получавайки специфично решение $\dfrac{1}{2}n.2^n = n.2^n$. И тъй като общият член на a_n е сумата на решението на хомогенната част на $(*)$ и специфичното решение, получаваме, че общият член на редицата, удовлетворяващ $(*)$, е $a_n = c_1 + c_2.2^n + n.2^n$, с което сме готови. □

4.2. Хомографски рекурентни редици

Хомографските рекурентни редици са една масово непозната тема, която обаче е доста интересна и има приложения в състезанията по математика, както и в моделирането и науката. Тези редици описват итерации на дробно-линейни (хомографски) функции и имат дълбока връзка с теорията на Мьобиусовите преобразувания. Поведението им може да бъде много разнообразно — от сходимост към крайна граница до периодичност или хаотичност, в зависимост от параметрите.

Дефиниция 4.1. *Нека $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ е рекурентна редица, удовлетворяваща зависимост от вида $a_{n+1} = \dfrac{a.a_n + b}{c.a_n + d}$ за всяко $n \geq 0$ и дадени константи a, b, c, d. Тогава редицата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ се нарича хомографска рекурентна редица или просто хомографска редица.*

Алгоритъмът за намиране на общия член на такива редици е следният:

1) Ако редицата удовлетворява зависимостта $a_{n+1} = \dfrac{a.a_n + b}{c.a_n + d}$ $(*)$, то решаваме квадратното уравнение $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

2) Нека x_1, x_2 са корени на уравнението (те могат да бъдат и комплексни числа).

3) Ако $x_1 = x_2 = p$, то зависимостта $(*)$ може да бъде записана като $a_{n+1} - p = \dfrac{a.a_n + b}{c.a_n + d} - p$, което е еквивалентно на $a_{n+1} - p = \dfrac{(a-cp)a_n + b - pd}{c.a_n + d} \iff \dfrac{1}{a_{n+1} - p} = \dfrac{c.a_n + d}{(a-cp)a_n + b - pd} \iff \dfrac{1}{a_{n+1} - p} = \dfrac{c.a_n + d}{(a-cp)a_n - p(a-cp) + p(a-cp) + b - pd} \iff \dfrac{1}{a_{n+1} - p} = \dfrac{c.a_n + d}{(a-cp)(a_n - p) + ap - cp^2 + b - pd}$. Сега, тъй като p е корен на уравнението $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, то $cp^2 + pd - ap - b = 0$, и съответно $\dfrac{1}{a_{n+1} - p} = \dfrac{c.a_n + d}{(a-cp)(a_n - p)} \iff \dfrac{1}{a_{n+1} - p} = \dfrac{c.(a_n - p) + cp + d}{(a-cp)(a_n - p)} \iff \dfrac{1}{a_{n+1} - p} = \dfrac{c.(a_n - p) + cp + d}{(a-cp)(a_n - p)} = \dfrac{c}{a - cp} + \dfrac{cp + d}{a - cp} \cdot \dfrac{1}{a_n - p}$. Сега дефинираме

$b_n = \dfrac{1}{a_n - p}$ и последната зависимост става $b_{n+1} = \dfrac{c}{a-cp} + \dfrac{cp+d}{a-cp} \cdot b_n$ (1), където a, b, c, d са константи. Но зависимостта (1) е линейно-рекурентна и значи можем да я решим по познатия метод.

4) Ако има два различни корена $x_1 = p$ и $x_2 = q$, пресмятаме $a_{n+1} - p$ и $a_{n+1} - q$ и да разгледаме частното $\dfrac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q}$. По подобен начин като по-горе получаваме $\dfrac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q} = \dfrac{a_n - p}{a_n - q} \cdot \dfrac{a-pc}{a-qc}$, което е просто геометрична прогресия.

Алгоритъмът на пръв поглед изглежда сложен, но се надяваме да бъде усвоен чрез следващите няколко примера.

Пример 9. Ако $a_1 = 1$ и $a_{n+1}a_n = 4(a_{n+1} - 1)$ за $n \geq 1$, то намерете $a_1 a_2 \dots a_n$. (Feng, 2020)

Решение. Тази задача може да бъде решена и по други начини, но е добър пример за този метод. Можем да пренапишем зависимостта като $a_{n+1} = \dfrac{4}{4-a_n}$ $(*)$. Сега решаваме квадратното уравнение $x = \dfrac{4}{4-x} \iff (x-2)^2 = 0$, което има двоен корен $x_{1,2} = 2$. Сега от $(*)$ получаваме $a_{n+1} - 2 = \dfrac{4}{4-a_n} - 2 \iff a_{n+1} - 2 = \dfrac{2a_n - 4}{4 - a_n} \iff \dfrac{1}{a_{n+1}-2} = \dfrac{4-a_n}{2a_n - 4} \iff \dfrac{1}{a_{n+1}-2} = \dfrac{2-(a_n-2)}{2(a_n-2)} = \dfrac{1}{a_n - 2} - \dfrac{1}{2}$. Дефинираме $b_n = \dfrac{1}{a_n - 2}$ и последната зависимост става $b_{n+1} = b_n - \dfrac{1}{2}$. Оттук очевидно $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ е аритметична прогресия с разлика $-\dfrac{1}{2}$. Освен това $b_1 = \dfrac{1}{a_1 - 2} = -1$. Така $b_n = b_1 + (n-1) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1 + \dfrac{1-n}{2} = -\dfrac{n+1}{2}$ за всяко $n \geq 1$. Но знаем, че $b_n = \dfrac{1}{a_n - 2} \iff a_n - 2 = \dfrac{1}{b_n} \iff a_n = \dfrac{1}{b_n} + 2 = -\dfrac{2}{n+1} + 2 = \dfrac{2n}{n+1}$ за всяко $n \geq 1$. Така $a_1 a_2 \dots a_n = 2^n \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \dots \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2^n}{n+1}$ и сме готови. □

Пример 10. (Китай) Ако $\dfrac{1}{2} < a_1 < \dfrac{2}{3}$ и $a_{n+1} = a_n(2 - a_{n+1})$ за $n \geq 1$, то докажете че

$$n + \frac{1}{2} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n} < n + 2.$$

(Zhang, 2011)

Решение. Можем да запишем зависимостта като $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 1}$. Сега решаваме уравнението $x = \dfrac{2x}{x+1} \iff x(x-1) = 0$ и то има два различни корена $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Следвайки алгоритъма, забелязваме че $a_{n+1} - 1 = \dfrac{2a_n}{a_n+1} - 1 = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ и $a_{n+1} - 0 = \dfrac{2a_n}{a_n+1} - 0 \iff a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n+1}$. Сега разглеждаме частното на тези двете:

$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n-1}{a_n+1} : \dfrac{2a_n}{a_n+1} = \dfrac{a_n-1}{2a_n} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n}$. Полагайки $b_n = \dfrac{a_n-1}{a_n}$ за всяко $n \geq 1$, зависимостта става $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n$, и това е геометрична прогресия с частно $\dfrac{1}{2}$. Имаме $b_1 = \dfrac{a_1-1}{a_1}$ и така $b_n = b_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{a_1-1}{2^{n-1}a_1}$. Но това е еквивалентно на $\dfrac{a_n-1}{a_n} = \dfrac{a_1-1}{2^{n-1}a_1} \iff a_n = \dfrac{2^{n-1}a_1}{2^{n-1}a_1-a_1+1} \iff \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{2^{n-1}a_1-a_1+1}{2^{n-1}a_1} = 1+\dfrac{1-a_1}{2^{n-1}a_1}$.
От тук следва, че

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} = 1+\frac{1-a_1}{a_1}+1+\frac{1-a_1}{2a_1}+\cdots+1+\frac{1-a_1}{2^{n-1}a_1} =$$

$$= n+\frac{1-a_1}{a_1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = n+\frac{1-a_1}{a_1}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}}.$$

Последното равенство следва от факта, че частта в скобите е сума на първите n члена на геометрича прогресия с частно $\dfrac{1}{2}$. Сега просто трябва да докажем, че

$$\frac{1}{2} < \frac{1-a_1}{a_1}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}} < 2 \text{ за всяко } n \geq 1.$$

Тъй като $a_1 > \dfrac{1}{2}$, то $\dfrac{1-a_1}{a_1} = \dfrac{1}{a_1} - 1 < \dfrac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 1$ и $\dfrac{1-a_1}{a_1}\cdot\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}} < \dfrac{2^n-1}{2^{n-1}} < 2$ за всяко $n \geq 1$, и остава да докажем дясното неравенство. Тъй като $a_1 < \dfrac{2}{3}$, то $\dfrac{1-a_1}{a_1} = \dfrac{1}{a_1} - 1 > \dfrac{1}{\frac{2}{3}} - 1 = \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1-a_1}{a_1}\cdot\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}} > \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}} = \dfrac{2^n-1}{2^n} > \dfrac{1}{2}$ за всяко $n \geq 1$, с което сме готови. □

Много хомографски редици всъщност са периодични. Особено тези, при които корените на $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ са комплексни, но не всички. Ще дадем няколко примера за такива редици.

Пример 11. Редицата $\{a_n\}_{n\geq 0}$ е дефинирана с $a_0 = a$ и

$$a_{n+1} = \frac{a_n+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a_n}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Намерете a_{2019}.

Решение. Решаваме уравнението $x = \dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}x} \iff \sqrt{3}x^2 = -\sqrt{3} \iff x^2 = -1$. Решенията са комплексните числа $x_1 = i$ и $x_2 = -i$. Ако попаднем в такава ситуация, не е добра идея да продължим по познатия метод, тъй като сметките стават много времеемки и теоритични. Тъй като обаче корените на уравнението са комплексни, то има голяма вероятност редицата да е периодична. Така нека се опитаме да познаем тази периодичност. Имаме $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a_{n+1}} = \dfrac{\frac{a_n+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a_n}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\frac{a_n+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a_n}} = \dfrac{2\sqrt{3}-2a_n}{-2-2\sqrt{3}a_n} = \dfrac{\sqrt{3}-a_n}{-1-\sqrt{3}a_n}$. После $a_{n+3} = \dfrac{a_{n+2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a_{n+2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-a_n}{-1-\sqrt{3}a_n}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}-a_n}{-1-\sqrt{3}a_n}} = \dfrac{-4a_n}{-4} = a_n$. Така редицата има период 3, което значи, че $a_{n+3} = a_n$ за всяко $n \geq 0$. Така $a_{2019} = a_{2016} = a_{2013} = \cdots = a_0 = a$ и сме готови. □

Пример 12. (British MO, 2015/1) Първия член x_1 на редица е 2014. Всеки следващ член на редицата е дефиниран от предишните по следната формула

$$x_{n+1} = \frac{(\sqrt{2}+1)x_n - 1}{(\sqrt{2}+1)+x_n}.$$

Намерете x_{2015}.
(Bradley и Smith, 2018)

Решение. Първо, нека решим уравнението $x = \dfrac{(\sqrt{2}+1)x-1}{(\sqrt{2}+1)+x} \iff x^2 = -1$. Негови корени са $x_1 = i$ и $x_2 = -i$. Корените са комплексни числа и отново ще се оглеждаме за периодичност. Имаме $x_{n+2} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)x_{n+1}-1}{(\sqrt{2}+1)+x_{n+1}} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)\frac{(\sqrt{2}+1)x_n-1}{(\sqrt{2}+1)+x_n}-1}{(\sqrt{2}+1)+\frac{(\sqrt{2}+1)x_n-1}{(\sqrt{2}+1)+x_n}} = \cdots = \dfrac{x_n-1}{x_n+1}$. После $x_{n+4} = \dfrac{x_{n+2}-1}{x_{n+2}+1} = \dfrac{\frac{x_n-1}{x_n+1}-1}{\frac{x_n-1}{x_n+1}+1} = \dfrac{-2}{2x_n} = -\dfrac{1}{x_n}$ и накрая $x_{n+8} = -\dfrac{1}{x_{n+4}} = -\dfrac{1}{-\frac{1}{x_n}} = x_n$. Така редицата е периодична с период 8 и оттук $x_{2015} = x_{2007} = \cdots = x_7$. Но знаем, че $x_5 = -\dfrac{1}{x_1} = -\dfrac{1}{2014}$ и $x_7 = \dfrac{x_5-1}{x_5+1} = \dfrac{-\frac{1}{2014}-1}{-\frac{1}{2014}+1} = -\dfrac{2015}{2013}$, с което сме готови. □

Сега ще разгледаме и хомографска редица с комплексни корени, която обаче не е периодична.

Пример 13. (Контролни за определяне на българския отбор за Балканската олимпиада по математика, 2011) Редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана с уравненията $x_1 = \dfrac{2}{3}$ и $x_{n+1} = \dfrac{3x_n+2}{3-2x_n}$. Съществуват ли естествени числа N и T такива че $x_{i+T} = x_i$ за всяко естествено число $i \geq N$? (Мушкаров et al., 2012)

Решение. Очевдино трябва да определим дали редицата е периодична от даден момент нататък. Нека решим уравнението $x = \dfrac{3x+2}{3-2x} \iff x^2 = -1$. Негови корени са $x_1 = i$ и $x_2 = -i$, които са комплексни числа. От предишните примери можем да предположим, че редицата е периодична, но когато пресметнем първите членове, ще забележим, че периодичност не се появява. Вместо това ще се опитаме да докажем, че редицата не е периодична.

Нека приемем, че редицата е периодична. Тогава можем да приемем, че $N = 1$ (цялата редица е периодична). И наистина, от зависимостта $x_n = \dfrac{3x_{n+1} - 2}{2x_{n+1} + 3}$ $(*)$ и от $x_{n+1} = x_{n+1+T}$ следва, че $x_n = x_{n+T}$, което значи, че можем да се връщаме назад. От зависимостта $(*)$ получаваме, че ако $x_{i+1} = \dfrac{2}{3}$ за някое i, е вярно, че $x_i = \dfrac{3x_{i+1} - 2}{2x_{i+1} + 3} = 0$.

Сега нека $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ е несъкратима дроб. Така от рекурентната зависимост получаваме $x_{n+1} = \dfrac{3p_n + 2q_n}{3q_n - 2p_n}$. Ако d е общ делител на $3p_n+ 2q_n$ и $3q_n - 2p_n$, не е трудо да се установи, че $d \mid 13$. От друга страна в редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, зададени с условията $a_1 = 2, b_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ и $b_{n+1} = 3b_n - 2a_n$, няма остатък 0 по модул 13 (директно проверяваме че са периодични по модул 13). От тук следва, че ако $x_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ с НОД$(p_{n+1}, q_{n+1}) = 1$, то $p_{n+1} = 3p_n+ 2q_n$ и $q_{n+1} = 3q_n - 2p_n$.

Остава да отбележим, че ако редицата е периодична и $x_{n+1} = \dfrac{2}{3}$ за някое n, то $x_n = 0$ и $13 \mid p_n$, противоречие. (Аналогично противоречие следва и от наблюдението, че $p_{n+1}^2 + q_{n+1}^2 = 13\left(p_n^2 + q_n^2\right) = \ldots = 13^n$). □

4.3. "Налучкване" и линеаризация на рекурентни уравнения. Индукция.

В предходните раздели разгледахме строго аналитичните методи за решаване на рекурентни зависимости — чрез характеристични уравнения, хомогенизация и хомографски преобразувания. В настоящата част ще обърнем внимание на една по-интуитивна, но изключително ценна техника, често срещана в математическите състезания: налучкването и линеаризацията, съчетани с метода на математическата индукция.

Този подход представлява естествено продължение на класическите методи. Докато характеристичното уравнение осигурява строго аналитично решение при линейни зависимости, а хомогенизацията — начин да се справим с нехомогенни уравнения, то налучкването и линеаризацията предлагат евристичен път към решаването на на пръв поглед сложни или нелинейни рекурентни зависимости. Техниката разчита на интуиция, наблюдение и експериментално търсене на закономерности между първите няколко члена на редицата, след което хипотезата се доказва по класическия метод на математическата индукция.

В решенията на задачи от математически състезания често виждаме аргументи като "$a_n^2 + 5 = a_{n-1}a_{n+1} \implies a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ по индукция". При тях повечето читатели биха си помислили "Как, за Бога, бих се сетил за това?". Ще се опитаме да дадем отговор на този въпрос в следващите примери.

Пример 14. (Korean MO, 2023/1) Редицата от положителни реални числа $\{a_n\}$ е дефинирана с равенствата

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}$$

Покажете, че за всяко неотрицателно естествено число n, a_n е естествено.

Решение. Дадената зависимост на пръв поглед не е нито линейна, нито хомографска? Когато видим нелинейна зависимост, трябва да се опитаме да я направим линейна. Ще наречем този процес *линеаризация* и можем да го релизираме по следния начин:

1) Пресмятаме първите 5-6 члена на редицата.

2) Търсим константи p, q, r, за които някоя от зависимостите $a_{n+1} = pa_n + q$, $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ или $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + r$ е изпълнена за първите няколко члена от редицата. Ако никое от тези не работи, проверяваме $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ като последен опит.

3) Ако някое от горните е вярно за първите няколко члена на редицата, се опитваме да докажем, че е вярно за цялата редица, използвайки индукция (този метод ще работи в повечето случаи) или други методи.

С пресмятане намираме, че $a_2 = \dfrac{a_1^2 + 2}{a_0} = 11$, $a_3 = \dfrac{a_2^2 + 2}{a_1} = 41$, $a_4 = \dfrac{a_3^2 + 2}{a_2} = 153$, $a_5 = \dfrac{a_4^2 + 2}{a_3} = 571$. Най-честият вариант на линеаризация е $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$, където p и q are са константи. Нека сега намерим p и q в нашия случай, използвайки първите членове на редицата. Трябва да имаме

$$\begin{cases} 11 = a_2 = pa_1 + qa_0 = 3p + q \\ 41 = a_3 = pa_2 + qa_1 = 11p + 3q \end{cases}$$

Решавайки системата, получаваме $p = 4$, $q = -1$. Така нашата хипотеза е, че оригиналната зависимост е еквивалентна на $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ за всяко $n \geq 0$. Нека проверим следващите няколко члена. Намираме, че $a_4 = 153 = 3.41 - 11 = 3a_3 - a_2$ и $a_5 = 571 = 4.153 - 41 = 4a_4 - a_3$. Сега вече е много вероятно хипотезата да е вярна. Сега трябва да докажем хипотезата за общия член. Това може да бъде направено по индукция. Вече сме проверили базовите случаи. Да приемем, че $a_{k+2} = 4a_{k+1} - a_k$ за всяко $k \leq n$. Трябва да го докажем и за $k = n+1$, тоест да докажем, че $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1}$. Най-лесният начин да го направим е като използваме обратна логика. Искаме $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1}$. От оригиналната рекурсия имаме $a_{n+3} = \dfrac{a_{n+2}^2 + 2}{a_{n+1}}$, така че искаме да докажем, че $\dfrac{a_{n+2}^2 + 2}{a_{n+1}} = 4a_{n+2} - a_{n+1} \iff a_{n+2}^2 + 2 = 4a_{n+1}a_{n+2} - a_{n+1}^2$ (1). Но ние знаем, че $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ от индукционната хипотеза, и значи (1) става $(4a_{n+1} - a_n)^2 + 2 = 4a_{n+1}(4a_{n+1} - a_n) - a_{n+1}^2 \iff 16a_{n+1}^2 - 8a_na_{n+1} + a_n^2 + 2 = 16a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} - a_{n+1}^2 \iff a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} + a_n^2 + 2 = 0$ (2). Сега искаме да докажем тази последна зависимост. За a_{n+2} знаем от условието и хипотезата, че $\dfrac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n} = a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \iff a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} + a_n^2 + 2 = 0$ и така (2) трябва да бъде вярно, с което сме готови.

Сега знаем, че $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ за всяко $n \geq 2$. От тук е ясно, че всеки член на редицата е цяло число, тъй като е разлика на две цели числа. Сега е очевидно, че ако $a_i > a_{i-1} > 0$, то $a_{i+1} = 4a_i - a_{i-1} = 3a_i + (a_i - a_{i-1}) > 0$ и така всеки член на редицата е положително число, с което сме готови. $\square$

Коментар. *Този пример илюстрира една значима евристика - как можем да подхождаме към нелинейни зависимости. Освен това описва ясно метода, по който това се осъществява - чрез налучкване, оформяне на хипотеза и доказването ѝ. В общия случай рядко можем да "линеаризираме" нелинейна зависимост, но в състезателни задачи това е сравнително често срещано и поради това е доста полезно човек да разполага с този арсенал в мисълта си.*

Пример 15. (Romanian IMO TST, 2006/1) Нека $\{a_n\}_{n\geq 1}$ е редица с $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ и за всяко $n > 1$ е изпълнено

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1} + 1}.$$

а) Докажете, че членовете на редицата са естествени числа.
б) Докажете, че $2a_na_{n+1} + 1$ е точен квадрат за всяко естествено n. (*Romanian Mathematical Competitions: RMC 2006*, 2006)

Решение. Първо повдигаме на квадрат и зависимостта става $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} + 1 \iff a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}$. Нека се опитаме да я направим линейна. Както в предишната задача, пресмятаме $a_3 = \dfrac{a_2^2 - 1}{a_1} = 15$, $a_4 = \dfrac{a_3^2 - 1}{a_2} = 56, a_5 = \dfrac{a_4^2 - 1}{a_3} = 209$. Сега отново търсим p и q, които да удовлетворяват $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ за първите няколко члена на редицата. Имаме

$$\begin{cases} 15 = a_3 = pa_2 + qa_1 = 4p + q \\ 56 = a_4 = pa_3 + qa_2 = 15p + 4q \end{cases}$$

Решения на системата са $p = 4, q = -1$. Така хипотезата ни е, че зависимостта е еквивалентна на $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$. Проверяваме за $209 = a_5 = 4.56 - 15 = 4a_4 - a_3$. Сега ще го докажем за цялата редица посредством индукция. Нека приемем, че $a_{k+2} = 4a_{k+1} - a_k$ за всяко $k \leq n$. Ще го докажем и за $k = n + 1$, тоест ще докажем, че $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1}$. Знаем, че $a_{n+3} = \dfrac{a_{n+2}^2 - 1}{a_{n+1}}$ и значи искаме $\dfrac{a_{n+2}^2 - 1}{a_{n+1}} \stackrel{?}{=} 4a_{n+2} - a_{n+1} \iff a_{n+2}^2 - 1 \stackrel{?}{=} 4a_{n+1}a_{n+2} - a_{n+1}^2 \iff$ $(4a_{n+1} - a_n)^2 - 1 \stackrel{?}{=} 4a_{n+1}(4a_{n+1} - a_n) - a_{n+1}^2 \iff a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} + a_n^2 - 1 \stackrel{?}{=} 0$. Но от условието и индукционната хипотеза получаваме $\dfrac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n} = a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \iff$ $a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} + a_n^2 - 1 = 0$ $(*)$, и с това индукцията е завършена.

Ясно е, че членовете на редицата са естествени числа. Остава да докажем, че $2a_na_{n+1} + 1$ е точен квадрат за всяко $n \in \mathbb{N}$. Това е очевидно, защото $(*)$ може да бъде записано като $a_{n+1}^2 - 2a_na_{n+1} + a_n^2 = 2a_na_{n+1} + 1 \iff 2a_na_{n+1} + 1 = (a_{n+1} - a_n)^2$, и сме готови. $\square$

Коментар. *Този пример отново илюстрира евристиката на "линеаризирането" на нелинейни зависимости. Новата стойност, която разкрива, е, че самият процес на линеаризация и доказването ѝ чрез индукция би могъл да ни помогне в следващите стъпки от задачата. Например, ако не бяхме преминали през анализа на равенството $a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} + a_n^2 - 1 = 0$ в процеса на доказателството на хипотезата ни, то е спорно дали щяхме да се досетим за него и да го използваме за доказването на факта, че $2a_na_{n+1} + 1$ е точен квадрат.*

Пример 16. (British MO, 2020/4) Редица $b_1, b_2, b_3, \ldots$ се състои от ненулеви реални числа и удоволетворява

$$b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^2 - 1}{b_n} \text{ за всяко естествено } n.$$

Нека $b_1 = 1$ и $b_2 = k$, където $1 < k < 2$. Докажете, че съществува константа B, зависима от k, такава че $-B \leq b_n \leq B$ за всяко n. Също докажете, че за $1 < k < 2$ съществува n, такова че $b_n > 2020$.

Решение. По същия начин като в предишните примери можем да докажем, че $b_{n+2} = kb_{n+1} - b_n$. Това е добро начало, но все още не е очевидно как да довършим задачата. Характеристичното уравнение на редицата е $x^2 - kx + 1 = 0$ с корени $x_{1,2} = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ $(*)$. Тези корени са комплексни, защото $k < 2$ и дискриминантата е отрицателна. Но какво можем да правим с тези корени? Те изглеждат много неудобни за работа и няма да е лесно да намерим формула за общия член. Това е така, но можем да използваме следния трик: тъй като $k \in (1; 2)$, можем да положим $k = 2\cos\varphi$, където $\varphi \in [0; 90°]$. Сега трябва да е вярно, че $2\cos\varphi \in$

$(1;2) \iff \varphi \in (0^\circ;60^\circ)$. Тогава имаме $k^2-4=4\cos^2\varphi-4=-4(1-\cos^2\varphi)=-4\sin^2\varphi=4i^2\sin\varphi$ и $(*)$ става $x_{1,2}=\dfrac{2\cos\varphi\pm 2i\sin\varphi}{2}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$. Но това е точно тригонометричната форма на комплексните решения на харакеристичното уравнение. Така от Следствие 3.15 можем да намерим формула за общия член на редицата:

$$b_n=c_1\cos n\varphi+c_2\sin n\varphi$$

Сега ще намерим и константите c_1 и c_2. Имаме $1=b_1=c_1\cos\varphi+c_2\sin\varphi$ (1) и $2\cos\varphi=k=b_2=c_1\cos 2\varphi+c_2\sin 2\varphi$ (2). От (1) намираме $c_2=\dfrac{1-c_1\cos\varphi}{\sin\varphi}$ и, използвайки тригонометричните формули $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1$ и $\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$, уравнение (2) става $2\cos\varphi=c_1(2\cos^2\varphi-1)+\dfrac{1-c_1\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi \iff 2\cos\varphi=2c_1\cos^2\varphi-c_1+2\cos\varphi-2c_1\cos^2\varphi \iff c_1=0$ и после $c_2=\dfrac{1-c_1\cos\varphi}{\sin\varphi}=\dfrac{1}{\sin\varphi}$. Така формулата за общия член на редицата е

$$b_n=\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}.$$

Сега е очевидно че $|b_n|=\dfrac{|\sin n\varphi|}{|\sin\varphi|}\le\dfrac{1}{|\sin\varphi|}$ и, тъй като $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\dfrac{k^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{4-k^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{4-k^2}}{2}$, намираме че $|b_n|\le\dfrac{1}{|\sin\varphi|}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$. После $-\dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}\le b_n\le\dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$ и тогава константата B от условието е точно $B=\dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$, и така сме готови с първата част.

За втората част от $b_n=\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ и от $\varphi\in(0^\circ;60^\circ)$, можем да изберем φ да бъде толкова близо до 0° че $0<\sin\varphi<\dfrac{1}{10^4}$. Сега е достатъчно да изберем n такова че $n\varphi$ е близо до 90° и тогава е ясно че за тези n и k (φ), имаме $b_n=\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}>\dfrac{1}{\frac{1}{10^4}}=10^4>2020$ и сме готови. □

Коментар. *Този пример отново използваше линеаризацията, но ни разкри и още една евристика, която е добре да бъде запомнена - когато разполагаме с променлива или константа x от интервала $[0,a]$ понякога е удобно да се положи $x=a\sin\varphi$ или $x=a\cos\varphi$, защото в някои ситуации това значително улеснява пресмятанията и често ги превръща от невъзможни във възможни.*

Пример 17. (Балканска олимпиада по математика, 2004/1) Редицата $\{a_n\}_{n\ge 0}$ от реални числа удоволетворява зависимостта:

$$a_{m+n}+a_{m-n}-m+n-1=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$$

за всички неотрицателни цели числа m и n, $m \geq n$. Ако $a_1 = 3$, то намерете a_{2004}. (Бойваленков et al., 2007)

Решение 1. Замествайки $m = n = 0$, получаваме $2a_0 - 1 = a_0 \Longrightarrow a_0 = 1$. После, замествайки с $n = 0$, получаваме $2a_m - m - 1 = \dfrac{1}{2}(a_{2m} + a_0) \iff a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$ за всяко цяло неотрицателно число m. Други замествания изглеждат неудобни за работа. Обаче уравнението $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$ $(*)$ ни подсказва, че a_m би могло да е полином на m. Но нека първо намерим първите няколко члена на редицата. Уравнението $(*)$ за $m = 1$ дава $a_2 = 4a_1 - 5 = 7$, за $m = 2$ дава $a_4 = 4a_2 - 7 = 21$ и за $m = 4$ дава $a_8 = 4a_4 - 11 = 73$. Сега в оригиналната зависимост заместваме $m = 2$, $n = 1$ и получаваме $a_3 - a_1 - 2 = \dfrac{1}{2}(a_4 + a_2) \iff a_3 = 13$, а за $m = 4$, $n = 1$ имаме $a_5 + a_3 - 4 = \dfrac{1}{2}(a_8 + a_2) \iff a_5 = 38$. Така $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 13$, $a_4 = 21$, $a_5 = 31$. Сега, имайки идеята, че a_m може да е полином на m, ще проверим дали това наистина е така. Първо ще се пробваме с линеен полином, тоест $a_m = am + b$, където a, b са константи. Имаме $1 = a_0 = a.0 + b$, $3 = a_1 = a + b$ и после $a = 2$, $b = 1$ and $a_m = 2m + 1$, но тук трябва да имаме $7 = a_2 = 2.2 + 1 = 5$, което не е вярно. Тогава a_m не е линеен полином на m. Нека сега разгледаме квадратен полином, тоест нека $a_m = am^2 + bm + c$ за някои константи a, b, c. Имаме $1 = a_0 = c$, $3 = a_1 = a + b + c$, $7 = a_2 = 4a + 2b + c$ и съответно $a = b = c = 1$, което значи, че $a_m = m^2 + m + 1$. В този случай $13 = a_3 = 3^3 + 3 + 1 = 13$, $21 = a_4 = 4^2 + 4 + 1$, $31 = a_5 = 5^2 + 5 + 1 = 31$ се получават вярно. Това означава, че предположението ни най-вероятно е вярно и ще се опитаме да го докажем.

Отново ще приложим индукция. Вече сме проверили базата. Нека приемем, че $a_{m-1} = (m-1)^2 + (m-1) + 1$ и $a_m = m^2 + m + 1$. Сега ще се опитаме да докажем, че $a_{m+1} = (m+1)^2 + (m+1) + 1$. Замествайки $n = 1$ в оригиналната рекурсия, получаваме $a_{m+1} + a_{m-1} - m = \dfrac{1}{2}(a_{2m} + a_2)$, но ние знаем, че $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3 = 4m^2 + 2m + 1$ и така последното е еквивалентно на $a_{m+1} + a_{m-1} - m = 2m^2 + m + 4 \iff a_{m+1} = 2m^2 + 2m + 4 - a_{m+1} = 2m^2 + 2m + 4 - (m-1)^2 - (m-1) - 1 = m^2 + 3m + 3 = (m+1)^2 + (m+1) + 1$, и значи хипотезата е вярна за всяко m. Така $a_{2004} = 2004^2 + 2004 + 1$ и сме готови. $\square$

Решение 2. Замествайки $m = n = 0$ в даденото, получаваме $a_0 = 1$. Нека сега $n = 0$ и тогава се получава $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$. Полагайки $n = m$ в последното уравнение, получаваме $a_{2n} = 4a_n - 2n - 3$. Замествайки това в началното уравнение, получаваме

$$a_{m+n} + a_{m-n} + 2n + 2 = 2a_m + 2a_n.$$

При $n = 1$ това дава $a_{m+1} = 2a_m - a_{m-1} + 2$. Така $a_{m+2} = 2a_{m+1} - a_m + 2$ и, изваждайки тези двете, получаваме $a_{m+2} - a_{m+1} = 2a_{m+1} - 3a_m + a_{m-1}$. Сега характеристичното уравнение е $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$, което има троен корен $x_{1,2,3} = 1$, и значи общият член на редицата е от вида $a_n = (an^2+bn+c).1^n$. Накрая намираме a, b, c, както в първото решение. $\square$

Коментар. *Първото решение се основава на мотивираното предположение, че редицата всъщност е полином. То беше обосновано от вида на рекурентната зависимост, който получихме след няколко замествания. Остатъка от решението изцяло се гради на него и в такъв смисъл то е ключово. Във второто решение линеаризираме зависимостта и използваме характеристичното уравнение, за да намерим общия член.*

4.4. Редици с нотка на теория на числата (и обратно)

Рекурентните редици често служат като естествен мост между алгебрата и теорията на числата и в много случаи ни се налага да работим с редици от цели числа. Макар на пръв поглед динамичните зависимости да принадлежат към областта на анализа или алгебрата, в състезателната математика прости на вид рекурентни формули пораждат изненадващо богати аритметични структури.

В този раздел ще разгледаме задачи, в които рекурентната зависимост е само входната точка, а истинската трудност произтича от аритметичните свойства на членовете на редицата. Именно тук се проявява една от най-интересните евристики: преминаването от рекурентния вид към числови инварианти, остатъци, модулни съображения, монотонни или периодични характеристики. Решенията на някои от тези задачи изискват добри познания по ТЧ, но във всички се използват аргументи за редици. Разбира се характеристичните уравнения и другите методи, които обсъдихме в предишните части ще бъдат много полезни.

Започваме със задача, която ще решим по два начина - груба сила и пресмятания и по-хитър и кратък метод.

Пример 18. (Romania TST, 2002) Редицата $\{a_n\}$ е дефинирана с уравненията: $a_0 = a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$ for all $n \geq 1$. Докажете че $2a_n - 1$ е точен квадрат за всяко $n \geq 0$. (*Romanian Mathematical Competitions: RMC 2002*, 2002)

Решение 1. Това решение се основава на груба сила и множество пресмятания. Характеристичното уравнение е $x^2-14x+1 = 0$ с корени $x_{1,2} = \dfrac{14 \pm 8\sqrt{3}}{2} = 7\pm4\sqrt{3}$. Общият член на редицата е $a_n = c_1(7-4\sqrt{3})^n + c_2(7+4\sqrt{3})^n$. По познатия начин намираме $c_1 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ и $c_2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$. Така формулата за общия член е

$$a_n = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)(7-4\sqrt{3})^n + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)(7+4\sqrt{3})^n$$

Тъй като искаме да докажем нещо свързано с точни квадрати, е логично да си отделим някакви точни квадрати във формулата. За щастие можем да забележим, че $7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2$. После

$$a_n = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)(2-\sqrt{3})^{2n} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)(2+\sqrt{3})^{2n}$$

Сега трябва да направим нещо с константите, тъй като те изглеждат неудобни за работа. Знаем, че $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$ и значи формулата за общия член може да бъде записана като

$$a_n = \frac{1}{4}(2-\sqrt{3})^{2n-1} + \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})^{2n-1} = \frac{1}{4}\left((2-\sqrt{3})^{2n-1} + (2+\sqrt{3})^{2n-1}\right)$$

Сега е очевидно, че

$$2a_n - 1 = \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^{2n-1} + \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})^{2n-1} - 1 = \frac{1}{2}\left((2-\sqrt{3})^{2n-1} + (2+\sqrt{3})^{2n-1} - 2\right)$$

Трябва да преобразуваме тази формула до точен квадрат на израз и, тъй като степените в скобите са нечетни, трябва да помислим за нещо друго. Забелязвме, че $2 \pm \sqrt{3} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{2}$. Така получаваме

$$2a_n - 1 = \frac{1}{2}\left((2-\sqrt{3})^{2n-1} + (2+\sqrt{3})^{2n-1} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{3}-1)^{2(2n-1)}}{2^{2n-1}} + \frac{(\sqrt{3}+1)^{2(2n-1)}}{2^{2n-1}} - 2\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left((\sqrt{3}-1)^{2(2n-1)} + (\sqrt{3}+1)^{2(2n-1)} - 2.2^{2n-1}\right) = \frac{1}{2^{2n}}\left((\sqrt{3}-1)^{2n-1} - (\sqrt{3}+1)^{2n-1}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1} - (\sqrt{3}+1)^{2n-1}}{2^n}\right)^2$$

Единствено остана да докажем, че изразът в скобите е цяло число и ще сме готови. Ще го докажем по индукция. Базата е очевидна и нека приемем, че $\dfrac{(\sqrt{3}-1)^{2k-1} - (\sqrt{3}+1)^{2k-1}}{2^k}$ е цяло за всяко $k \leq n$. Ще го докажем и за $n = k+1$. Нека $A = \sqrt{3} - 1$ и $B = \sqrt{3} + 1$. Така $A^2 + B^2 = 8$ и $A^2B^2 = 4$. Сега можем да използваме известното тъждество $A^{2n+1} - B^{2n+1} = (A^2+B^2)(A^{2n-1} - B^{2n-1}) - A^2B^2(A^{2n-3} - B^{2n-3}) = 8(A^{2n-1} - B^{2n-1}) - 4(A^{2n-3} - B^{2n-3})$. От това имаме $\dfrac{A^{2n+1} - B^{2n+1}}{2^{n+1}} = 4 \cdot \dfrac{A^{2n-1} - B^{2n-1}}{2^n} - \dfrac{A^{2n-3} - B^{2n-3}}{2^{n-1}}$ и от индукционната хипотеза $\dfrac{A^{2n-1} - B^{2n-1}}{2^n}$ и $\dfrac{A^{2n-3} - B^{2n-3}}{2^{n-1}}$ са цели. Така $\dfrac{A^{2n+1} - B^{2n+1}}{2^{n+1}}$ също трябва да бъде цяло. □

Решение 2. С това решение ще покажем по-общ метод за доказване, че редици съдържат само точни квадрати. Нека намерим първите няколко члена на $\{2a_n - 1\}$.

Имаме $2a_0 - 1 = 1, 2a_1 - 1 = 1, 2a_2 - 1 = 5^2, 2a_3 - 1 = 19^2, 2a_4 - 1 = 71^2$. Нека $\{b_n\}$ да е редицата от корените от $\{2a_n - 1\}$, тоест нека $b_n = \sqrt{2a_n - 1}$ за всяко $n \geq 1$. Имаме $b_1 = 1$, $b_2 = 5$, $b_3 = 19$, $b_4 = 71$. Сега търсим рекурентна зависимост за b_i, тоест търсим p и q, за които $b_{n+2} = pb_{n+1} + qb_n$. Лесно се намира, че $p = 4$, $q = -1$ и значи $b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n$. Очевдино е, че всики b_i са естествени числа. Сега ще докажем по индукция, че

$$2a_n - 1 = b_n^2,$$

където $b_1 = 1$, $b_2 = 5$ и $b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}$ за всяко $n \geq 1$. Приемаме, че това е вярно за $1, 2, \ldots, n$. Сега трябва да докажем, че $2a_{n+1} - 1 = b_{n+1}^2$. Имаме $2a_{n+1} - 1 = 2(14a_n - a_{n-1}) = 28a_n - 2a_{n-1}$ (1). Сега от индукционната хипотеза знаем, че $a_n = \dfrac{b_n^2 + 1}{2}$ и $a_{n-1} = \dfrac{b_{n-1}^2 + 1}{2}$ и, замествайки в (1), получаваме $2a_{n+1} - 1 = 14(b_n^2 + 1) - (b_{n-1}^2 + 1) - 1 = 14b_n^2 - b_{n-1}^2 + 12$. Така остава само да докажем, че $14b_n^2 - b_{n-1}^2 + 12 \stackrel{?}{=} b_{n+1}^2 = (4b_n - b_{n-1})^2 \iff 14b_n^2 - b_{n-1}^2 + 12 \stackrel{?}{=} 16b_n^2 - 8b_nb_{n-1} + b_{n-1}^2 \iff b_n^2 + b_{n-1}^2 - 4b_nb_{n-1} - 6 \stackrel{?}{=} 0$ (2).

Отново ще използваме индукция. Очевидно е, че (2) е вярно за $n = 1$ и $n = 2$. Приемаме, че $b_n^2 + b_{n-1}^2 - 4b_nb_{n-1} - 6 = 0$. Ще докажем, че $b_{n+1}^2 + b_n^2 - 4b_nb_{n+1} - 6 \stackrel{?}{=} 0$ (3). Използвайки рекурентната зависимост за $\{b_n\}$, можем да пренапишем (3) като $(4b_n - b_{n-1})^2 + b_n^2 - 4b_n(4b_n - b_{n-1}) - 6 \stackrel{?}{=} 0 \iff 16b_n^2 - 8b_nb_{n-1} + b_{n-1}^2 + b_n^2 - 16b_n^2 + 4b_nb_{n-1} - 6 \stackrel{?}{=} 0 \iff b_n^2 + b_{n-1}^2 - 4b_nb_{n-1} - 6 \stackrel{?}{=} 0$ и това е вярно от индукционната хипотеза. □

Коментар. *Първото решение показва как задачата може да се реши само с груба сила и калкулации. Такива методи изискват добро познаване на алгебрични субституции и да не забравяме какво се иска - да запишем $2a_n - 1$ като израз повдигнат на квадрат. Това обаче не винаги е лесно и праволинейно.*

Второто решение показва по-общ метод за доказване, че дадена редица $\{a_n\}$ се състои от точни квадрати. Дефинираме нова редица $\{b_n\}$, такава че $b_n = \sqrt{a_n}$ за всяко n. След като намерим рекурентната зависимост за b_n чрез налучкване и проверка на първите няколко члена, доказваме, че b_i са естествени числа и че $a_n = b_n^2$ за всяко n с индукция или както се случи в този пример - с две последователни индукции.

Пример 19. Нека m и n са цели числа, по-големи от 1, такива че

$$\text{НОД}(m, n-1) = \text{НОД}(m, n) = 1$$

Докажете, че първите $m - 1$ члена на редицата $n_1, n_2, \ldots$, за $n_1 = mn + 1$ и $n_{k+1} = n \cdot n_k + 1, k \geq 1$, не могат да бъдат едновременно прости числа.

Решение. Нека пресметнем първите няколко члена на редицата. Имаме $n_2 = n(mn + 1) + 1 = mn^2 + n + 1$, $n_3 = n(mn^2 + n + 1) + 1 = mn^3 + n^2 + n + 1$, $n_4 = mn^4 +$

n^3+n^2+n+1 и е очевидно, че $n_k = mn^k+n^{k-1}+n^{k-2}+\cdots+n+1 = mn^k+\dfrac{n^k-1}{n-1}$ $(*)$ за всяко естествено k. Сега да видим какво ще правим нататък. Нека се опитаме да използваме и другите условия и първо ще го направим с НОД$(m, n-1) = 1$. В $(*)$ имаме делител $n-1$ в дробта $\dfrac{n^k-1}{n-1}$ и ние знаем, че тази дроб е цяло положително число. Това ни дава идея да изберем k, такова че числителят да се дели на m, за да използваме НОД$(m, n-1) = 1$. Значи искаме $n^k - 1 \equiv \pmod{m} \iff n^k \equiv 1 \pmod{m}$ и така е логично да изберем $k = \varphi(m)$, където $\varphi(x)$ е функцията на Ойлер. Сега от теоремата на Ойлер $n^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$. Оттук $\dfrac{n^{\varphi(m)}-1}{n-1} = sm$ за някое $s \in \mathbb{N}$ и така

$$n_{\varphi(m)} = mn^{\varphi(m)} + \frac{n^{\varphi(m)}-1}{n-1} = mn^{\varphi(m)} + sm \equiv 0 \pmod{m}$$

заради факта, че $\dfrac{n^{\varphi(m)}-1}{n-1}$ е естествено и НОД$(m, n-1) = 1$. Сега, тъй като $\varphi(m) \le m-1$ и $n_{\varphi(m)} > m$, имаме, че $n_{\varphi(m)}$ е съставно и е сред първите $m-1$ члена на редицата. □

Коментар. *Този пример илюстрира няколко класически евристични стратегии. Първата е експериментиране и извеждане на общия член $n_k = mn^k + \dfrac{n^k-1}{n-1}$. Втората е ключова евристична идея във всеки един момент на решаването на задачи, а именно да търсим структури, които съответстват по някакъв начин на дадените в задачата условия. Така, виждайки знаменателя $n-1$ в дадената формула, би трябвало да се обърнем към условието НОД$(m, n-1) = 1$ и да видим дали не бихме могли да го включим някак в решението. Това всъщност се оказва ключът към задачата, който разплита всичко по-нататък.*

Пример 20. (Есенен математически турнир, 2017, 11 клас) За дадено нечетно естествено число m е дефинирана редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ чрез равенствата $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = (m+1)a_n + \left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot a_n \right\rfloor$ за $n \ge 1$. Намерете най-високата степен на 2, която дели a_{2017}. (Бойваленков et al., 2020)

Авторово решение. От неравенствата

$$a_{n+1} < (m+1)a_n + \sqrt{m^2+1}\, a_n < a_{n+1} + 1$$

получаваме

$$a_{n+1}(m+1-\sqrt{m^2+1}) < 2ma_n < (a_{n+1}+1)(m+1-\sqrt{m^2+1}),$$

откъдето

$$(m+1)a_{n+1} - 2ma_n < a_{n+1}\sqrt{m^2+1} < (m+1)a_{n+1} - 2ma_n + m + 1 - \sqrt{m^2+1}.$$

Тъй като $0 < m + 1 - \sqrt{m^2 + 1} < 1$, последните неравенства показват, че

$$\lfloor a_{n+1}\sqrt{m^2+1} \rfloor = (m+1)a_{n+1} - 2ma_n.$$

Като използваме, че $\lfloor a_{n+1}\sqrt{m^2+1} \rfloor = a_{n+2} - (m+1)a_{n+1}$, получаваме

$$a_{n+2} = 2(m+1)a_{n+1} - 2ma_n$$

при $a_1 = 1$ и $a_2 = 2m + 1$. Сега по индукция директно следва, че ако $2^\alpha \mid\mid a_n$ и $2^\alpha \mid\mid a_{n+1}$, то $2^{\alpha+1} \mid\mid a_{n+2}$ и $2^{\alpha+1} \mid\mid a_{n+3}$ при $n \geq 1$. Следователно търсената стойност е 2^{1008}. $\square$

Кратко и ясно! Авторите са се "досетили" да разгледат точно тези неравенства, в следствие на които са получили удобен за работа линеаризиран вид на рекурентната зависимост. Читателят може бързо да реши за себе си дали и колко "лесно" би било да се досети за тях. За много състезатели, а и читатели, такива решения действат силно демотивиращо. Така вместо да развиват интереса към математиката, подобни "хитрини" биха могли да доведат и до обратния ефект, а именно до загуба на интерес. Всъщност тези неравенства наистина са логични, но стават такива след доста предварителна работа и наблюдения, както можем да видим в следващото решение.

Решение. Рекурентната зависимост е много хаотична и неудобна за работа и не е ясно откъде да започнем. Нека пресметнем първите членове на редицата. Имаме $a_2 = m + 1 + \left\lfloor \sqrt{m^2+1} \right\rfloor$. Знаем, че $m^2 < m^2 + 1 < (m+1)^2 \iff m < \sqrt{m^2+1} < m + 1$, и значи $\left\lfloor \sqrt{m^2+1} \right\rfloor = m$, откъдето $a_2 = 2m+1$. След това имаме $a_3 = (m+1)(2m+1) + \left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot (2m+1) \right\rfloor$. Трябва да пресметнем $\left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot (2m+1) \right\rfloor$. Това е трудно и може да се направи само като вкараме $2m + 1$ под корена. Имаме $\sqrt{m^2+1} \cdot (2m+1) = \sqrt{(m^2+1)(2m+1)^2} = \sqrt{4m^4 + 4m^3 + 5m^2 + 4m + 1}$. Това означава, че трябва да заключим $4m^4 + 4m^3 + 5m^2 + 4m + 1$ между два последователни точни квадрата. Това се прави по известен алгоритъм. Следвайки алгоритъма, получаваме, че $(2m^2 + m + 1)^2 < 4m^4 + 4m^3 + 5m^2 + 4m + 1 < (2m^2 + m + 2)^2 \iff 2m^2 + m + 1 < \sqrt{4m^4 + 4m^3 + 5m^2 + 4m + 1} < 2m^2 + m + 2$ и $\left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot (2m+1) \right\rfloor = 2m^2 + m + 1$, откъдето $a_3 = (m+1)(2m+1) + 2m^2 + m + 1 = 4m^2 + 4m + 2$. След това имаме $a_4 = (m+1)(4m^2 + 4m + 2) + \left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot (4m^2 + 4m + 2) \right\rfloor$. Сега трябва да пресметнем $\sqrt{m^2+1} \cdot (4m^2 + 4m + 2) = \sqrt{(m^2+1)(4m^2+4m+2)^2} = \sqrt{16m^6 + 32m^5 + 48m^4 + 48m^3 + 36m^2 + 16m + 4}$ и да заключим $16m^6 + 32m^5 + 48m^4 + 48m^3 + 36m^2 + 16m + 4$ между два последователни точни квадрата. Отново, ползвайки алгоритъма, намираме, че $(4m^3 + 4m^2 + 4m + 2)^2 < 16m^6 + 32m^5 + 48m^4 +$

$48m^3+36m^2+16m+4 < (4m^3+4m^2+4m+3)^2$, и значи $4m^3+4m^2+4m+2 < \sqrt{16m^6+32m^5+48m^4+48m^3+36m^2+16m+4} < 4m^3+4m^2+4m+3$, което ни дава, че $\left\lfloor \sqrt{16m^6+32m^5+48m^4+48m^3+36m^2+16m+4} \right\rfloor = 4m^3+4m^2+4m+2$. Така можем да намерим и четвъртия член $a_4 = (m+1)(4m^2+4m+2)+4m^3+4m^2+4m+2 = 8m^3+12m^2+10m+4$. Някой може да си помисли да намери и a_5, но пресмятанията стават все по-трудни и времеемки. За да намери a_4, опитен състезател ще се нуждае от 20-тина минути.

Но какво да правим сега? Първите членове не изглежда да дават каквато и да е интуиция за общия член. Нека пробваме класическата идея - да линеаризираме. Ще потърсим p и q, за които $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ и се молим това да работи. Имаме

$$\begin{cases} 4m^2+4m+2 = a_3 = pa_2 + qa_1 = p(2m+1)+q \\ 8m^3+12m^2+10m+4 = a_4 = pa_3 + qa_2 = p(4m^2+4m+2)+q(2m+1) \end{cases}$$

Като решим системата, намираме $p = 2(m+1)$ и $q = -2m$. Така нашата хипотеза е, че $a_{n+2} = 2(m+1)a_{n+1} - 2ma_n$ за всяко $n \geq 1$. Добра идея е да пресметнем и a_5 за да сме по-сигурни, че хипотезата е вярна, но това е много времеемко, затова няма да го правим. Сега трябва да докажем, че това е вярно за всяко $n \geq 1$. Би било логично да пробваме индукция както в предишните примери, но това не е добра идея в този пример, поради функцията за цяла част. Трябва да използваме някои от свойствата ѝ. Искаме да докажем, че $2(m+1)a_{n+1} - 2ma_n = a_{n+2} \stackrel{?}{=} (m+1)a_{n+1} + \left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot a_{n+1} \right\rfloor \iff (m+1)a_{n+1} - 2ma_n \stackrel{?}{=} \left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot a_{n+1} \right\rfloor$ (1). За функцията за цяла част знаем, че $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ so $\sqrt{m^2+1} \cdot a_{n+1} - 1 < \left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot a_{n+1} \right\rfloor < \sqrt{m^2+1} \cdot a_{n+1}$ и, за да докажем (1), трябва да докажем, че

$$\sqrt{m^2+1} \cdot a_{n+1} \geq (m+1)a_{n+1} - 2ma_n > \sqrt{m^2+1} \cdot a_{n+1} - 1.$$

Първо ще докажем, че $\sqrt{m^2+1} \cdot a_{n+1} \stackrel{?}{\geq} (m+1)a_{n+1} - 2ma_n \iff 2ma_n \stackrel{?}{\geq} \left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right) a_{n+1} \iff 2ma_n \stackrel{?}{\geq} \left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right)\left((m+1)a_n + \left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot a_n \right\rfloor\right)$. Но от свойствата на функцията за цяла част имаме

$$\begin{aligned} &\left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right)\left((m+1)a_n + \left\lfloor \sqrt{m^2+1} \cdot a_n \right\rfloor\right) \leq \\ &\leq \left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right)\left((m+1)a_n + \sqrt{m^2+1} \cdot a_n\right) = \\ &= \left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right)\left(m+1+\sqrt{m^2+1}\right) a_n = \left((m+1)^2 - (m^2+1)\right) a_n = 2ma_n \end{aligned}$$

и това е точно търсеното. Сега остана да докажем и $(m+1)a_{n+1} - 2ma_n \stackrel{?}{>}$

$\sqrt{m^2+1}\cdot a_{n+1}-1 \iff 2ma_n-1 \overset{?}{<} \left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right)a_{n+1} \iff 2ma_n \overset{?}{<} \left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right)\left((m+1)a_n+\left\lfloor\sqrt{m^2+1}\cdot a_n\right\rfloor\right)$. Отново от свойствата на функцията за цяла част имаме

$$\begin{aligned}\left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right)\left((m+1)a_n+\left\lfloor\sqrt{m^2+1}\cdot a_n\right\rfloor\right) >\\ > \left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right)\left((m+1)a_n+\sqrt{m^2+1}\cdot a_n-1\right) =\\ = \left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right)\left(m+1+\sqrt{m^2+1}\right)a_n-\left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right) =\\ = 2ma_n+\sqrt{m^2+1}-(m+1)\end{aligned}.$$

Остана единствено да докажем, че $2ma_n+\sqrt{m^2+1}-(m+1) \overset{?}{>} 2ma_n-1 \iff \sqrt{m^2+1} \overset{?}{>} m$, което е очевидно вярно, с което доказахме хипотезата.

Сега имаме $a_{n+2}=2(m+1)a_{n+1}-2ma_n$ за всяко $n\geq 1$ и остана лесната част. От зависимостта можем да забележим, че ако 2^α е най-високата степен на 2, която дели a_n и a_{n+1} (това може да се запише като $2^\alpha \mid\mid a_n$ и $2^\alpha \mid\mid a_{n+1}$), то $2^{\alpha+1}$ е най-високата степен на 2, която дели a_{n+2} и a_{n+3}. И наистина, от $a_{n+2}=2(m+1)a_{n+1}-2ma_n$, имаме, че $2^\alpha \mid\mid a_n$ and $2^\alpha \mid\mid a_{n+1}$, и така $2^{\alpha+2} \mid 2(m+1)a_{n+1}$ и $2^{\alpha+1} \mid\mid 2ma_n$, тъй като m е нечетно. После $2^{\alpha+1} \mid\mid a_{n+2}$. Сега от $a_{n+3}=2(m+1)a_{n+2}-2ma_{n+1}$, получаваме $2^{\alpha+3} \mid a_{n+2}$, но $2^{\alpha+1} \mid\mid 2ma_{n+1}$ (защото m е нечетно) и така $2^{\alpha+1} \mid\mid a_{n+3}$. Това може да бъде доказано и по индукция. Така, тъй като $2^0 \mid\mid a_1,\, a_2$, имаме, че $2^1 \mid\mid a_3,\, a_4 \implies 2^2 \mid\mid a_5,\, a_6 \implies \ldots \implies 2^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} \mid\mid a_k,\, a_{k+1}$ и за $k=2017$ получаваме, че $2^{1008} \mid\mid a_{2017}$, и значи най-високата степен на 2, която дели a_{2017}, е 2^{1008}, с което сме готови. □

Коментар. *Официалното решение на задачата е коректно по съдържание, но е изключително слабо от методическа и евристична гледна точка до такава степен, че би могло спокойно да бъде определено като "антиевристично". То започва с използването на специфични неравенства, които не произтичат по естествен начин от дефиницията на редицата, а по-скоро изглеждат като предварително известен трик. Най-съществената слабост на авторовия подход е, че не дава на читателя никаква индикация* как *човек би могъл да се сети точно за тази конструкция. Получените неравенства са твърде специфични, а появата на множителя $m+1-\sqrt{m^2+1}$ е неочевидна дори за опитни състезатели. Така решението показва „какво работи“, но не и „защо точно това работи“ и още по-малко „как би могъл читателят сам да го измисли“. Именно това го прави демотивиращо - използваните техники изглеждат като магически ход, който не може да бъде възпроизведен в други задачи.*

За разлика от това, второто решение следва естествения ход на математическото мислене. Вместо да започва с готови неравенства, то тръгва *от най-логичната и достъпна за всеки състезател стъпка – пресмятане на първите членове на редицата. Тази стъпка е техническа, но без нея не може!*

След като се изчислят няколко члена, читателят има достатъчно информация да заподозре, че редицата вероятно удовлетворява линейна рекурсия от втори ред. Тук се проявява една от ключовите евристики - да опитаме да линеаризираме. *Да потърсим коефициенти p и q, за които $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$. Това е широко приложима състезателна техника, която работи в много други задачи, както вече видяхме.*

След като линеаризираме, вече виждаме какво ще искаме да докажем и чрез него неравенствата, описани от авторите, се появяват автоматично и съвсем естествено и остава да се използват най-базовите свойства на фукцията за цялата част, за да бъдат доказани. По този начин второто решение показва на читателя реалния процес на откриване. Не премълчава трудностите, а ги систематизира и преодолява с техники, на които може да се подражава. В официалното решение трудната част е скрита, а в евристичното решение трудната част е демистифицирана. *Именно това е същността на добрата евристика – да превърне един привидно случаен трик в логична последователност от идеи, които читателят може да усвои и използва. Така евристичното решение не просто дава отговор, то изгражда математическо мислене.*

Пример 21. (Есенен математически турнир, 2019, 10-11 клас) Нека $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица, зададена чрез:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n \quad \text{за} \quad n \geq 0$$

Намерете всички прости числа p в интервала $[2000, 2100]$, такива че десетичният запис на p завършва на 9 и p дели x_{p-1}. (Бойваленков et al., 2020)

Решение. Характеристичното уравнение на $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е $t^2 - 3t - 1 = 0$ с корени $t_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ и $t_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$. Сега от стойностите на $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ намираме, че формулата за общият член на редицата $\{x_n\}$ е:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right)$$

Това не изглежда много добре, но нямаме друг избор освен да разкрием скобите и да се надяваме на нещо по-приятно. След разкриване получаваме

$$x_n = \frac{1}{2^n\sqrt{13}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\sqrt{13}^k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}\sqrt{13}^k\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n\sqrt{13}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\sqrt{13}^k\left(1-(-1)^k\right) = \frac{1}{2^n\sqrt{13}}\cdot 2\cdot \sum_{k-\text{нечетно},\, k\le n}\binom{n}{k}3^{n-k}\sqrt{13}^k =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{13}}\sum_{s:\,2s+1\le n}\binom{n}{2s+1}3^{n-2s-1}\sqrt{13}^{2s+1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{s:\,2s+1\le n}\binom{n}{2s+1}3^{n-2s-1}13^s$$

Където сумираме по всяко $s \geq 0, s \in \mathbb{Z}$, такова че $2s+1 \leq n$. Ако това изглежда объркващо, можем да напишем сумата и като $\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2s+1}3^{n-2s-1}13^s$. Сега от условията на задачата знаем, че $p \mid x_{p-1} \iff \frac{1}{2^{p-2}}\sum_{s:\,2s+1\le p-1}\binom{p-1}{2s+1}3^{p-2s-2}13^s \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p) \iff \sum_{s:\,2s+1\le p-1}\binom{p-1}{2s+1}3^{p-2s-2}13^s \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p)$ (1). Последното преобразувание следва от факта, че ако цяло число дели друго цяло число, записано като дроб, то то дели и числителя на дробта.

Сега трябва да опростим израза в (1), тъй като сегашният му вид не ни дава никаква полезна информация. Нека първо разгледаме биномните коефициенти $\binom{p-1}{2s+1}$. Какви остатъци могат да дават те по модул p? Отговорът не е очевиден. Ще разгледаме малки случаи, за да формираме хипотеза: за $s = 0$ имаме $\binom{p-1}{2s+1} = \binom{p-1}{1} = p-1 \equiv -1 \pmod{p}$, за $s = 1$ имаме $\binom{p-1}{2s+1} = \binom{p-1}{3} = \frac{(p-1)!}{(p-4)!\,3!} = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{6} = \frac{p^3-6p^2+11p-6}{6} = p\cdot\frac{p^2+11}{6} - p^2 - 1 \equiv -1 \pmod{p}$, защото 6 дели p^2+11 за всяко нечетно просто p. Каква хипотеза ще направим вече е очевидно: $\binom{p-1}{2s+1} \equiv -1 \pmod{p}$ за всяко s. Нека я докажем! Имаме

$$\binom{p-1}{2s+1}+1 = \frac{(p-1)!}{(p-2s-2)!\,(2s+1)!}+1 = \frac{(p-2s-1)(p-2s)\dots(p-2)(p-1)}{(2s+1)!}+1 =$$

$$= \frac{(p-2s-1)(p-2s)\dots(p-2)(p-1)+(2s+1)!}{(2s+1)!} =$$

$$= \frac{\left(p-(2s+1)\right)(p-2s)\dots(p-1)+(2s+1)!}{(2s+1)!} =$$

$$= \frac{Ap+\left(-(2s+1)\right)(-2s)\dots(-2)(-1))!+(2s+1)!}{(2s+1)!} = \frac{Ap-(2s+1)!+(2s+1)!}{(2s+1)!} = \frac{Ap}{(2s+1)!},$$

където A е полином на p, получен чрез разкриването на $(p-2s-1)(p-$

$2s)\dots(p-2)(p-1)$, премахвайки константния член и делейки на p. Сега от $2s+1 \leq p-1 < p$ и факта, че p е просто, следва, че $\gcd((2s+1)!\,,p) = 1$, и така $(2s+1)!$ дели A. От тук следва, че $\dfrac{Ap}{(2s+1)!} = p \cdot \dfrac{A}{(2s+1)!}$ се дели на p и е цяло число (тъй като биномните коефициенти са цели). От тук получаваме $\dbinom{p-1}{2s+1} + 1 \equiv 0 \pmod{p} \iff \dbinom{p-1}{2s+1} \equiv -1 \pmod{p}$, и с това доказателството е завършено.

Сега изразът в (1) става

$$\sum_{s:\,2s+1\leq p-1} \binom{p-1}{2s+1} 3^{p-2s-2}13^s \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p) \iff \sum_{s:\,2s+1\leq p-1} (-1)3^{p-2s-2}13^s \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p) \iff$$

$$\iff \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor} 3^{p-2s-2}13^s \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p) \iff$$

$$\iff 3^{p-2} + 3^{p-4}13^1 + 3^{p-6}13^2 + \dots 3^3 13^{\frac{p-5}{2}} + 3.13^{\frac{p-3}{2}} \equiv 0 \pmod{p}, \quad (2)$$

като последното преобразуване следва от факта, че $p-2$ е нечетно и така $\left\lfloor \dfrac{p-2}{2} \right\rfloor = \dfrac{p-3}{2}$. Но можем да забележим, че събираемите в (2) са последователни членове на геометрична прогресия с частно $\dfrac{13}{3^2} = \dfrac{13}{9}$. Има общо $\dfrac{p-1}{2}$ събираеми в (2) и така (2) е еквивалентно на

$$3^{p-2} \cdot \frac{(\frac{13}{9})^{\frac{p-1}{2}} - 1}{\frac{13}{9} - 1} \equiv 0 \pmod{p} \iff \frac{3^p}{4} \cdot \frac{13^{\frac{p-1}{2}} - 9^{\frac{p-1}{2}}}{9^{\frac{p-1}{2}}} \equiv 0 \pmod{p} \iff$$

$$\iff 3^p \left(13^{\frac{p-1}{2}} - 9^{\frac{p-1}{2}}\right) \equiv 0 \pmod{p} \iff 13^{\frac{p-1}{2}} - 9^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p} \iff$$

$$\iff 13^{\frac{p-1}{2}} - 3^{p-1} \equiv 0 \pmod{p} \quad (3)$$

Но от теоремата на Ферма знаем, че $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, и така (3) става $13^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Но това означава, че 13 е квадратичен остатък по модул p, тоест $\left(\dfrac{13}{p}\right) = 1$ (това е символът на Льожандър). Сега от квадратичния закон за реципрочност имаме $\left(\dfrac{13}{p}\right)\left(\dfrac{p}{13}\right) = (-1)^{\frac{13-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}} = 1$ и значи $\left(\dfrac{p}{13}\right) = 1$, т.е. p е квадратичен остатък по модул 13. Квадратичните остатъци по модул 13 са 1, 3, 4, -1, -3, -4 и единствените прости числа в интервала [2000; 2100], които завършват на 9 и дават нужните остатъци по модул 13, са 2029 и 2089 и така имаме две опции: $p = 2029$ и $p = 2089$. $\square$

Коментар. *В тази задача основната евристика е постепенното опростяване на рекурентната редица, докато не се достигне до познат аритметичен критерий.*

Първата стъпка е стандартна - за линейни рекурентни редици с постоянни коефициенти се извежда експлицитна формула чрез характеристичното уравнение. Разкриването на тази формула изглежда тежко, но всъщност има ясна цел — да се открие скрита симетрия, благодарение на която повечето членове се унищожават и остава само контролируема сума.

Следващата евристика е да се работи по модул p, като се игнорират всички знаменатели, които са обратими по този модул. Така сложният израз се свежда до линейна комбинация от биномни коефициенти. Самите биномни коефициенти се анализират по най-класическия състезателен метод: проверяват се няколко малки случая, разпознава се закономерност, формулира се хипотеза и след това тя се доказва алгебрично.

Когато биномните коефициенти са заменени с прости остатъци, сумата се разпознава като геометрична прогресия — друга често използвана евристика за работа със степени. Това позволява изразът да се сведе до единствено модулно сравнение, зад което стои добре познато твърдение от теорията на числата: условие за квадратичен остатък.

Освен всичко това, този пример показва, че грубата сила е необходима при решаване на някои задачи. Добра идея е да се запомни, че $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$, тъй като това е полезен факт и може да се ползва и в други задачи. Също, когато стигнем до $13^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, можем да довършим задачата и без квадратични остатъци. Тъй като единствените прости числа между 2000 и 2100, завършващи на 9, са 2029, 2039, 2069, 2089 и 2099, можем да проверим директно дали всяко число отговаря на условието.

4.5. Какво да правим при нелинейни зависимости?

Дотук разгледахме само линейно-рекурентни зависимости и такива, които се свеждат до тях. Обаче следният въпрос възниква - какво да правим иначе? Истината е, че само няколко нелинейни редици имат формула за общ член. По-конкретно, от всички редици от типа $x_{n+1} = x_n^2 + c$, само $x_{n+1} = x_n^2$ и $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ имат затворена формула. И, разбира се, всяка зависимост, която може да се сведе до една от тези двете, може да бъде решена. Друг пример с решение са някои от редиците от вида $a_{n+1} = pa_n + \dfrac{q}{a_n}$. В тази част ще разгледаме точно тези специални случаи.

Пример 22. Ако $a_0 = a$ и $a_{n+1} = a_n^2$, намерете общия член на редицата $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

Решение. Този пример е лесен. Имаме $a_1 = a^2$, $a_2 = a^4$, $\ldots$, $a_n = a^{2^n}$ което може да бъде доказано лесно по индуция. $\square$

Пример 23. **(Китай)** Редицата $\{a_n\}$ удоволетворява $a_1 = 2$ и за $n = 1, 2, \cdots$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

Намерете формула за общия член на редицата. (Feng, 2020)

Решение. Алгоритъмът за решаване на такива редици е следният: първо ще решим уравнението $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, което се намира от зависимостта в условието, като заменим всички a_i с x, тоест намираме възможните граници на редицата. Корените на уравнението са $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Сега ще работим с изразите $a_{n+1} - x_1$ и $a_{n+1} - x_2$. Имаме $a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}$. По подобен начин $a_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{(a_n + \sqrt{2})^2}{2a_n}$. Така получаваме

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} : \frac{(a_n + \sqrt{2})^2}{2a_n} = \left(\frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}\right)^2.$$

Сега заместваме $b_n = \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$ и получаваме зависимостта $b_{n+1} = b_n^2$ и вече знаем, че оттук следва $b_{n+1} = b_1^{2^n}$. Така имаме

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{a_{n-1} - \sqrt{2}}{a_{n-1} + \sqrt{2}}\right)^{2^2} = \cdots = \left(\frac{a_1 - \sqrt{2}}{a_1 + \sqrt{2}}\right)^{2^n}$$

Сега $\frac{a_1 - \sqrt{2}}{a_1 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$. Така $\frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{2}}{a_1 + \sqrt{2}}\right)^{2^n} = (\sqrt{2} - 1)^{2^{n+1}}$. И по този начин получаваме, че $\frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)^{2^n}$. Решаваме уравнението и получаваме

$$a_n = \frac{\sqrt{2}\left(1 + (\sqrt{2} - 1)^{2^n}\right)}{1 - (\sqrt{2} - 1)^{2^n}}$$

с което сме готови. $\square$

Коментар. *Алгоритъмът, който използвахме по-горе, няма да работи във всички зависимости от вида* $a_{n+1} = pa_n + \frac{q}{a_n}$*, но винаги е добра идея да пробваме, ако нямаме други идеи.*

Пример 24. Ако $a_0 = \frac{5}{2}$ и $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ за всяко $n \geq 0$, намерете формула за общия член на редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Решение. Ще докажем по индукция, че ако $a_0 = \alpha$, то общият член на редицата е $a_n = \beta^{2^n} + \dfrac{1}{\beta^{2^n}}$, където β е корен на уравнението $\beta + \dfrac{1}{\beta} = \alpha$ (забележете, че от формулите на Виет двата корена са реципрочни числа и затова няма значение кой корен взимаме).

В нашата задача $\alpha = \dfrac{5}{2}$ и така уравнението $\beta + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{5}{2}$ има решения $\beta_1 = 2$ и $\beta_2 = \dfrac{1}{2}$. Ще докажем по индукция, че $a_n = 2^{2^n} + \dfrac{1}{2^{2^n}}$. За базата имаме $\dfrac{5}{2} = a_0 = 2^{2^0} + \dfrac{1}{2^{2^0}} = \dfrac{5}{2}$. Сега нека приемем, че $a_n = 2^{2^n} + \dfrac{1}{2^{2^n}}$ и ще докажем, че $a_{n+1} \stackrel{?}{=} 2^{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}$. Имаме

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 = \left(2^{2^n} + \frac{1}{2^{2^n}}\right)^2 - 2 = 2^{2^{n+1}} + 2.2^{2^n} \cdot \frac{1}{2^{2^n}} + \frac{1}{2^{2^{n+1}}} - 2 = 2^{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$$

и с това индукцията е завършена. □

4.6. Изрази от вида $(a + b\sqrt{c})^n$ и рекурентни редици

Тук ще разгледаме няколко задачи с изрази от вида $(a + b\sqrt{c})^n$, които се решават с рекурентни зависимости.

Пример 25. (IMO Alternative, Finland, 1980/6) Намерете цифрите от двете страни на десетичната запетая на $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$.

Решение. Трябва се занимаваме с израза $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n$. Това ни дава идея да разгледаме редицата $a_n = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n}$. Защо обаче степента е $2n$, а не n? Отговорът е, че искаме да запишем израза в скобите като $a + b\sqrt{c}$, където a, b, c са цели и, ако имаме $a_n = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^n + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^n$, то ние не бихме могли да го направим. Но сега $a_n = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{2n} + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2n} = \left(\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2\right)^n + \left(\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2\right)^n = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^n + \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^n$, както искахме. Сега ще потърсим рекурсивна зависимост. Нека първо пресметнем пъвите няколко члена, за да добием някаква интуиция $a_0 = 2$, $a_1 = 10$, $a_2 = 98$, $a_3 = 970$. Сега ще потърсим p и q, такива че $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$. От $a_2 = pa_1 + qa_0$, $a_3 = pa_2 + qa_1$ намираме $p = 10$, $q = -1$ и с тези стойности проверяваме и a_4, което става $a_4 = 10a_3 - a_2$, което очевидно е вярно.

Сега ще докажем, че общият член на редицата $a_0 = 2$, $a_1 = 10$, $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$ е точно $a_n = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^n + \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^n$. И наистина, характерстичното уравнение е $x^2 - 10x + 1 = 0$ с корени $x_{1,2} = \dfrac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$ и така исканото лесно следва. От зависимостта $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$ виждаме, че $a_{n+2} \equiv -a_n \pmod{10}$ и така остатъците на членовете на редицат по модул 10 са 2, 0, -2, 0, 2, 0, -2, 0, 2, 0,

-2, 0, ... Така имаме, че $a_{990} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980} \equiv -2 \pmod{10}$, и така последната му цифра е 8. Тъй като $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980} << 0.1$, цифрата на единиците на $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ е 7, а цифрата след десетичната запетая е 9 и сме готови. $\square$

Пример 26. (Есенен математически турнир, 2017, 12 клас) Нека n е естествено число. Намерете най-голямата степен на 2, която дели $\lfloor (1+\sqrt{3})^n \rfloor$. (Бойваленков et al., 2020)

Решение. Трябва да работим с израза $\left(1+\sqrt{3}\right)^n$, и затова нека дефинираме редицата с общ член $a_n = \left(1-\sqrt{3}\right)^n + \left(1+\sqrt{3}\right)^n$. Първите членове на редицата са $a_0 = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = 20$, $a_4 = 56$, $a_5 = 152$, $a_6 = 416$, $a_7 = 1136$. От тези стойности по подобен начин на предишната задача намираме и доказваме рекурентната зависимост $a_{n+1} = 2a_{n+1} + 2a_n$ за всяко $n \geq 0$.

Сега очевидно $(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ е четно цяло число за всяко $n \in \mathbb{N}$ (следва от разкриване на скоби). Освен това, $-1 < 1-\sqrt{3} < 0$, от което следва, че $0 < (1-\sqrt{3})^n < 1$ за четно n и $-1 < (1-\sqrt{3})^n < 0$ за нечетно n. Така, ако n е четно число, то

$$\left\lfloor (1+\sqrt{3})^n \right\rfloor = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n - 1.$$

Но това очевидно е нечетно число (следва от разкриване на скоби), и ако n е четно, то най-високата степен на 2, която дели $\lfloor (1+\sqrt{3})^n \rfloor$ е 2^0.

Сега остава да видим какво се случва, когато n е нечетно, тоест ако $n = 2m+1$. В този случай от $-1 < (1-\sqrt{3})^{2m+1} < 0$, имаме

$$\left\lfloor (1+\sqrt{3})^{2m+1} \right\rfloor = (1+\sqrt{3})^{2m+1} + (1-\sqrt{3})^{2m+1}.$$

И така търсим най-високата степен на 2, която дели членовете на редицата с нечетни индекси. Нека да намерим рекурентна зависимост за тази редица. Ще търсим p и q, такива че $a_{2m+5} = pa_{2m+3} + qa_{2m+1}$. Имаме $152 = a_5 = pa_3 + qa_1 = 20p + 2q$, $1136 = a_7 = pa_5 + qa_3 = 152p + 20q$ и намираме $p = 8$, $q = -4$, значи ще искаме да докажем че $a_{2m+5} = 8a_{2m+3} - 4a_{2m+1}$. От рекурентната зависимост на оригиналната редица следва, че $a_{2m+5} = 2a_{2m+4} + 2a_{2m+3} = 2(2a_{2m+3} + 2a_{2m+2}) + 2a_{2m+3} = 6a_{2m+3} + 4a_{2m+2}$, и значи искаме да докажем, че $6a_{2m+3} + 4a_{2m+2} \stackrel{?}{=} 8a_{2m+3} - 4a_{2m+1} \iff 2a_{2m+3} = 4a_{2m+2} + 4a_{2m+1}$, което очевидно е вярно от оригиналната зависимост.

Сега от $a_{2m+5} = 8a_{2m+3} - 4a_{2m+1} = 4(2a_{2m+3} - a_{2m+2})$, виждаме, че ако 2^k е най-високата степена на 2, която дели $\gcd(a_{2m+3}, a_{2m+1})$, то 2^{k+1} е най-високата степена на 2, която дели a_{2m+5}. От тук следва, че най-високата степена на 2, която дели a_{2m+1} е 2^{m+1} за всяко $m \geq 0$ и сме готови. $\square$

4.7. Субституции, свеждащи нелинейни рекурентни зависимости до линейни

В тази част ще разгледаме няколко примера за рекурентни редици, които не могат да бъдат записани като линейни, но с подходящи субститиции могат да се опростят и сведат до такива.

Пример 27. (Putnam, 1999/A6) Редицата $(a_n)_{n\geq 1}$ е зададена с $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 24$ и

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}, \quad n = 4, 5, \ldots$$

Докажете, че за всяко n, a_n е цяло число, делящо се на n. (Kedlaya et al., 2002)

Решение. Имаме

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 6\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} - 8\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}.$$

Полагаме $b_n = a_n/a_{n-1}$ и намираме, че $b_2 = 2$ и $b_3 = 12$, откъдето формулата за общия член на редицата е $b_n = 2^{n-1}\left(2^{n-1} - 1\right)$. С лесни пресмятания можем да докажем, че

$$a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \left(2^i - 1\right).$$

За да докажем, че a_n се дели на n, полагаме $n = 2^k m$, където m е нечетно. Тъй като $k \leq n \leq n(n-1)/2$ и съществува $i \leq m-1$, такова че m е делител на $2^i - 1$ (например $i = \varphi(m)$, където φ е функцията на Ойлер) и НОД$(2^k, m) = 1$, следва, че $2^k m = n$ дели a_n. □

Пример 28. Намерете формула за общия член на следните редици:

а) $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}x_n}{x_n - 2x_{n+1}}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $x_1 = \dfrac{1}{3}$

б) $x_{n+2} = x_{n+1}x_n^2$, $x_0 = x_1 = 2$

Решение. а) Вземайки реципрочното уравнение, получаваме:

$$\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{x_n - 2x_{n+1}}{x_{n+1}x_n} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{2}{x_n}$$

Сега полагаме $a_n = \dfrac{1}{x_n}$, и така $a_0 = 2$ и $a_1 = 3$ и $a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_{n+2}$. Характеристичното уравнение е $x^2 - x + 2 = 0$ с корени $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ и така $a_n = c_1\left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^n + c_2\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^n$ като сега е лесно да намерим константите c_1 и c_2 и съответно x_n. □

б) При второто уравнение можем да напишем $x_{n+2} = x_{n+1}x_n^2 \iff \log_2 x_{n+2} = \log_2(x_{n+1}x_n^2) \iff \log_2 x_{n+2} = \log_2 x_{n+1} + 2\log_2 x_n$. Сега нека $y_n = \log_2 x_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}_0$ и така последната зависимост става $y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n$. Тук характеристичното уравнение е $x^2 - x - 2 = 0$ с корени $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ и така $y_n = c_1.(-1)^n + c_2.2^n$. От x_0 и x_1 получаваме $y_0 = y_1 = 1$ и съответно $c_1 = \dfrac{1}{3}$ и $c_2 = \dfrac{2}{3}$, така че $y_n = \dfrac{1}{3}\cdot(-1)^n + \dfrac{2}{3}\cdot 2^n$ и после $x_n = 2^{\frac{1}{3}\cdot(-1)^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n}$, с което сме готови. $\square$

Коментар. *В б) можехме да вземем ln вместо* $\log_2$ *и щяхме да получим същия резултат, но* $\log_2$ *бе по-подходящо заради началните стойности* $x_0 = x_1 = 2$. *Също трябва да отбележим, че субституцията в б) е стандартна и може да линеаризира всички зависимости от вида* $a_{n+k} = a_{n+k-1}^{\alpha_1}a_{n+k-2}^{\alpha_2}\dots a_n^{\alpha_k}$, *така че е добра идея да се запомни.*

4.8. Приложение на рекурентните редици в решаването на функционални уравнения и неравенства

Често функционалните уравнения са свързани с рекурентни зависимости. Ако например за функцията f имаме, че $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, то едно естествено полагане би било $a_n = f(n)$ и тогава дадена функционална зависимост би могла да се анализира като рекурентна зависимост. Това би могло да се разшири и извън $\mathbb{N}$. Например, решението на уравнението на Коши $f(x+y) = f(x) + f(y)$ по същество се основава на простата рекурентна зависимост $a_{n+1} = a_n + a_1$ за $a_n = f(nx)$.

Друга идея, която води до рекурентни зависимости, е да се итерира дадена функция и членовете на редицата да се дефинират чрез тези итерации. Например, ако имаме $f(x) + f(f(x)) = x$, то можем да положим $a_0 = x$, $a_{k+1} = f(a_k)$ за всяко $k \in \mathbb{N}_0$ и така, замествайки с $x \to a_n$, да получим рекурентната зависимост $a_{n+1} + a_{n+2} = a_n$. Тази глава е посветена на решаването на функционални уравнения и неравенства чрез тези методи — чрез конструиране на редици и използване на рекурентните зависимости между тях. Първо ще започнем с няколко задачи за функционални уравнения.

Пример 29. Нека a е положително цяло число. Да се определят всички функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ такива, че

$$f(n+m) + f(n-m) = f(an)$$

за всички неотрицателни цели числа $n \geq m$. (Andreescu et al., 2019)

Решение. Полагайки $m = 0$, получаваме $2f(n) = f(an)$. В частност $f(0) = 0$. Сега, полагайки $m = 1$, получаваме $f(n+1) + f(n-1) = f(an) = 2f(n) \iff f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = 0$, откъдето след полагането $a_n = f(n)$, $n \geq 0$, се получава рекурентната зависимост

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0,$$

Характеристичното уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$ има двоен корен $x_1 = x_2 = 1$ и оттук следва, че $f(n) = A + Bn$. Тъй като $0 = f(0) = A$ получаваме, че $f(n) = Bn$ за всички $n \in \mathbb{N}_0$. Следователно $B(n+m) + B(n-m) = Ban$ за всички $n \geq m$ и получаваме $B(a-2) = 0$. Така за $a \neq 2$ единственото решение е нулевата функция, а за $a = 2$ решенията са функциите $f(n) = Bn$, където B е константа. $\square$

Коментар. *Този пример чудесно илюстрира колко полезно може да е полагането $a_n = f(n)$ в определени ситуации, тъй като свежда на пръв поглед предизвикателни задачи до базови факти за рекурентни редици.*

Пример 30. (Longlist на Международната олимпиада по математика, 1982) Определете всички функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ такива, че

$$f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m)$$

за всички $n, m \in \mathbb{Z}$, ако: (а) $f(1) = \frac{5}{2}$; (б) $f(1) = \sqrt{3}$. (Andreescu et al., 2019)

Решение. Полагайки $m = 0, n = 1$ получаваме $f(1)f(0) = 2f(1)$. Следователно $f(0) = 2$, понеже $f(1) \neq 0$. Сега полагайки $n = 0$ получаваме $f(m) = f(-m)$ и значи е достатъчно да определим $f(n)$ за $n \in \mathbb{N}$. За да направим това, полагаме $m = 1$ в даденото уравнение и то приема вида $f(n)f(1) = f(n+1) + f(n-1)$ и полагайки $a_n = f(n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, получаваме рекурентната зависимост

$$a_{n+1} - f(1)a_n + a_{n-1} = 0,$$

където $a_n = f(n), n \geq 0$.

(а) В този случай $f(1) = \frac{5}{2}$ и корените на характеристичното уравнение $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ са $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$. Следователно

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 2^{-n}$$

за някои константи A и B. Тъй като $a_0 = f(0) = 2$ и $a_1 = f(1) = \frac{5}{2}$, получаваме $A = B = 1$. Следователно $f(n) = 2^n + 2^{-n}$ за $n \geq 0$. Тъй като $f(n) = f(-n)$, заключаваме, че $f(n) = 2^n + 2^{-n}$ за всички $n \in \mathbb{Z}$. Лесно се проверява, че тази функция удовлетворява даденото уравнение.

(б) В този случай $f(1) = \sqrt{3}$ и корените на характеристичното уравнение $x^2 - \sqrt{3}\,x + 1 = 0$ са $x_{1,2} = \cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6}$. Следователно

$$f(n) = a_n = A\cos\frac{n\pi}{6} + B\sin\frac{n\pi}{6}$$

за $n \geq 0$. Тъй като $f(0) = 2, f(1) = \sqrt{3}$ намираме $A = 2, B = 0$. Следователно

$$f(n) = 2\cos\frac{n\pi}{6}$$

за всички $n \in \mathbb{Z}$, и е лесно да се провери, че тази функция удовлетворява даденото уравнение, с което задачата е решена. □

Коментар. *Този пример отново илюстрира полагането $a_n = f(n)$, но е по-предизвикателен от предходния, защото, за да се дефинира добре редицата a_n (тъй като не може да е дефинирана за отрицателни числа), трябва първо да уточним, че $f(m) = f(-m)$ за всяко $m \in \mathbb{N}$ и оттук вече да се интересуваме само от стойностите на $f(n)$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Това свеждане обаче изисква допълнителна стъпка. Освен това тук характеристичното уравнение е по-предизвикателно.*

Пример 31. (Национален кръг на НОМ, 9-12 клас, 1996) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такива, че

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n \quad \text{за всяко } n \in \mathbb{Z}.$$

(Николов и Мушкаров, 2003)

Решение. Да фиксираме n и да положим $a_0 = n,\ a_{k+1} = f(a_k),\ k \geq 0$. Но сега от дефиницията на a_k и от факта, че $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ е ясно, че $a_k \in \mathbb{Z}$ за всяко $k \in \mathbb{N}_0$. Тогава, заествайки n с a_k в условието, получаваме, че

$$3a_{k+1} - 2a_{k+2} = a_k.$$

Характеристичното уравнение на тази линейна рекурентна връзка е $3x - 2x^2 = 1$ и неговите корени са 1 и $\frac{1}{2}$. Следователно

$$a_k = c_0 \cdot 1^k + c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

където c_0 и c_1 са константи, зависещи само от a_0 и a_1. От $k = 1, 2$ лесно получаваме, че $c_0 = 2a_1 - a_0$ и $c_1 = 2(a_0 - a_1)$. Тъй като a_k и c_0 са цели числа за всяко k, то от формулата за общия член следва, че 2^k дели $c_1 = 2(a_0 - a_1)$ за всяко k и следователно $c_1 = 0$. Тогава $a_k = c_0$ за всяко k и значи $a_1 = c_0 = 2a_1 - a_0$. Така получаваме $a_1 = a_0 = n$ и значи $f(n) = a_1 = {}_0 = n$, като тази функция изпълнява условието на задачата. $\square$

Коментар. *Този пример чудесно илюстрира полезността на полагането $a_0 = n$, $a_{k+1} = f(a_k)$, $k \geq 0$ в задачи, включващи функционални уравнения и итерации. Чрез него свеждаме тази иначе сложна задача до съвсем стандартни пресмятания с редици. Все пак ще отбележим, че довършителните разсъждения в такъв тип задачи зависят много силно от вида на дефиниционното множество и множеството от образите на функцията.*

Пример 32. (Putnam, 1988) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, за които

$$f(f(x)) + f(x) = 6x \quad \text{за всички } x \in \mathbb{R}^+.$$

(Николов и Мушкаров, 2003)

Решение. За дадено $x \in \mathbb{R}^+$ полагаме $a_0 = x$, $a_{k+1} = f(a_k)$, $k \geq 0$. Тъй като $a_k = f(a_{k-1}) \in \mathbb{R}^+$ за всяко $k \in \mathbb{N}$, то можем да заменим x в горното уравнение с a_k. Тогава получаваме рекурентната връзка

$$a_{k+2} + a_{k+1} = 6a_k, \qquad k \geq 0.$$

Характеристичното уравнение на тази рекурентна зависимост е $x^2 + x = 6$, което има корени 2 и -3. Следователно

$$a_k = c_0 2^k + c_1(-3)^k,$$

където $c_0 = \dfrac{3a_0 + a_1}{5}$, $c_1 = \dfrac{2a_0 - a_1}{5}$. Забележете, че $\lim_{k\to+\infty} \frac{3^k}{2^k} = +\infty$. Следователно $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = -\infty$ ако $c_1 < 0$, $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -\infty$ ако $c_1 > 0$. Но членовете на редицата $\{a_k\}$ са положителни и последното е противореие. Оттук следва, че $c_1 = 0$ и значи $a_1 = 2a_0$, но това е същото като $f(x) = 2x$ за всички $x \in (0, \infty)$, с което задачата е решена. $\square$

Коментар. *Тази пример отново илюстрира полагането $a_0 = x$, $a_{k+1} = f(a_k)$, $k \geq 0$, но този път при дефиниционно множество и множество от образите на f положителните реални числа. Вижда се, че тук довършителните разсъждения са съществено по-различни от тези в миналия пример, защото множествата на целите и естествените числа предполагат довършителни разсъждения чрез делимост, докато множеството на реалните числа предполага довършителни разсъждения чрез методи и техники от анализа.*

Пример 33. Намерете всички функции $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, за които

$$f(f(f(x))) + f(f(x)) = 2x + 5$$

за всички $x \in (0, \infty)$. (Andreescu et al., 2019)

Решение. Използвайки същата нотация както в решението на предходната задача, получаваме $a_{k+3}+a_{k+2} = 2a_k+5,\ k \geq 0$. Изваждайки това равенство от $a_{k+4}+a_{k+3} = 2a_{k+1} + 5$, получаваме $a_{k+4} = a_{k+2} + 2a_{k+1} + 2a_k,\ k \geq 0$, чието характеристичното уравнение е $x^4 = x^2 + 2x + 2$. Това може да се запише като $(x-1)^2(x^2+2x+2) = 0$, което има двоен корен 1 и два комплексни корена $\sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{4} \pm i\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)$. Следователно

$$a_k = c_0 + c_1 k + 2^{k/2}\left(c_2\cos\frac{k\pi}{4} + c_3\sin\frac{k\pi}{4}\right),$$

където константите c_n, $0 \leq n \leq 3$, са реални и зависят само от първите четири члена на редицата. Разглеждайки подредиците с индекси, сравними по модул 8 съответно с $0, 2, 4, 6$, заключаваме, както и в решението на предишната задача, че съответно $c_2 \geq 0$, $c_3 \geq 0$, $c_2 \leq 0$, $c_3 \leq 0$. Това означава $c_2 = c_3 = 0$. Следователно $a_{k+1} = a_k + c_1$, и замествайки в уравнението на редицата, получаваме $c_1 = 1$. Следователно $f(x) = x + 1$, което е решението на задачата. □

Коментар. *Този пример илюстрира почти същата техника като в миналата задача, но характеристичното уравнение е доста по-сложно, както и довършителните разсъждения.*

Сега ще илюстрираме един метод за решаване на задачи, свързани с функционалните неравенства, чрез намиране на граници на безкрайни рекурентни редици, които биват индуцирани от условието.

Пример 34. (Беларус, 1997) Нека $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ е функция, удовлетворяваща:

$$f(2x) \geq x + f(f(x)),$$

за всяко $x \in \mathbb{R}^+$. Да се докаже, че за всяко $x \in \mathbb{R}^+$ е изпълнено $f(x) \geq x$. (Николов и Мушкаров, 2003)

Решение. Забележете, че ако заместим x с $\dfrac{x}{2}$ в даденото уравнение, получаваме:

$$f(x) \geq \frac{x}{2} + f\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geq \frac{x}{2}.$$

Сега, ако използваме неравенството $f(x) \geq \dfrac{x}{2}$, можем да получим:

$$f(x) \geq \frac{x}{2} + f\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geq \frac{x}{2} + f\left(\frac{x}{4}\right) \geq \frac{x}{2} + \frac{x}{8} = \frac{5x}{8}.$$

По подобен начин, ако сега използваме неравенството $f(x) \geq \dfrac{5x}{8}$, ще получим:

$$f(x) \geq \frac{x}{2} + f\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geq \frac{x}{2} + \frac{25x}{128} = \frac{89x}{128}.$$

По-общо, ако имаме $f(x) \geq a_n x$ след n итерации, то след още една итерация ще имаме:

$$f(x) \geq \frac{x}{2} + f\Big(f\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big) \geq \frac{x}{2} + \frac{a_n^2}{2}x.$$

Следователно получаваме следната рекурентна зависимост:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2} \quad \text{с } a_0 = \frac{1}{2}.$$

Лесно може да се докаже чрез индукция, че $a_n < 1$. Също така редицата е нарастваща, понеже:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2} \geq 0,$$

следователно тя клони към някакво $a \in [0.5, 1]$, т.е. a е границата на тази редица. След граничен преход получаваме:

$$a = \frac{a^2 + 1}{2} \Rightarrow a = 1.$$

Следователно $f(x) \geq \lim\limits_{n \to +\infty} a_n.x = ax = x$, което е точно желаното. $\square$

Коментар. *Тази техника е особено полезна, когато има самотни членове, които съдържат полиноми в рамките на неравенството. Например лесно можем да видим, че същата техника ще работи, ако заменим даденото неравенство с*

$$f(3x)^2 \geq 4x^2 + 3x + 7 + f(f(2x + 1)).$$

Очевидно това ще доведе до много по-сложни пресмятания и ще отнеме много повече усилие само за да намерим точния полином $P(x)$, за който $f(x) \geq P(x)$. Една стратегия е първо да намерим степента на полинома (в този случай е линеен). След това да итерираме за $f(x) \geq ax + b$ и да намерим при кои a и b неравенството остава валидно. След това да намерим рекурентната зависимост, която в този случай трябва да бъде внимателно изведена, за да получим точния квадратен корен, който ще се появи. Накрая трябва да докажем, че редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ клонят към a и b.

Коментар. *Същата техника може да се приложи, когато има член, съдържащ полином. Например, ако имаме функция $f : (1, \infty) \to (1, \infty)$, удовлетворяваща:*

$$(x + 1)f(x^2) \geq x^2 f(x),$$

можем отново да итерираме, използвайки $f(x) > 1$ за първото неравенство, и да получим доста силна долна граница за $f(x)$ след безкрайно много итерации.

Пример 35. (Национален кръг на Националната олимпиада по математика, 2015) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, за които неравенствата

$$\begin{array}{ll}\text{(i)} & f(x+y) \geq f(x) + y \\ \text{(ii)} & f(f(x)) \leq x\end{array}$$

са в сила за всички положителни числа x и y. (Бойваленков et al., 2015)

Решение. Ако положим $y = x$ в първото неравенство, ще получим $f(2x) \geq f(x)+x$, което вече го свежда до видовете, споменати по-горе. Последното е еквивалентно на $f(x) \geq f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$. Сега, използвайки последното, получаваме

$$f(x) \geq f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} > \frac{x}{4} + \frac{x}{2} = \frac{3x}{4},$$

т.е. получихме по-добра долна граница за $f(x)$ и така се вижда, че можем да продължим този рекурсивен процес. Наистина, ако $f(x) > a_n x$ ще получим

$$f(x) \geq f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} > a_n \cdot \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{a_n + 1}{2} \cdot x.$$

Оттук се поражда и идеята да дефинираме редицата $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$. Лесно се вижда, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Тогава, следвайки горния рекурсивен процес, ще получим

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} a_n \cdot x = x.$$

Сега от второто неравенствто от условието се получава $x \geq f(f(x)) \geq f(x) \geq x$, откъдето единствената възможност е $f(x) = x$, с което задачата е решена. □

Коментар. *С този пример искахме най-вече да покажем, че често и неравенства на повече променливи биха могли да се сведат до такива на една променлива от искания вид.*

Пример 36. (Контролни за определяне на отбора за Международната олимпиада по математика, 2008) Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството на положителните реални числа. Да се намерят всички реални числа a, за които съществува функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, такава, че

$$3f^2(x) = 2f(f(x)) + ax^4 \quad \text{за всяко } x > 0.$$

(Колев et al., 2008)

Решение. Най-логично е първо да опитаме да налучкаме някоя функция f, която удовлетворява уравнението. Лесно се проверява, че функции от вида $f(x) = px + q$ не са решения. Логично е да опитаме с $f(x) = cx^2$, където c е положителна константа (защото при $c \leq 0$ имаме $f(x) = cx^2 \notin \mathbb{R}^+$). Тогава уравнението от условието приема вида $3c^2x^4 = 2c^3x^4 + ax^4$ и това трябва да е вярно за всяко $x > 0$.

Като разделим на x^4, то получаваме, че трябва да е изпълнено $3c^2 = 2c^3 + a \iff 3c^2 - 2c^3 = a$, т.е. ако a е число, което може да се представи във вида $3c^2 - 2c^3$ за някое $c > 0$, ще сме сигурни, че функцията $f(x) = cx^2$ ще удовлетворява уравнение от условието. Значи всички a, които се представят във вида $3c^2 - 2c^3$, за някое $c > 0$, със сигурност ще са решения на задачата. Лесно се вижда, че при $c > 0$ имаме $3c^2 - 2c^3 \leq 1$ (може с производни, а може и с налучкване). Следователно всички $a \leq 1$ са решения на задачата.

Сега ще докажем, че при $a > 1$ такава функция не съществува. Да допуснем противното, а именно че съществува функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, такава, че $3f^2(x) = 2f(f(x)) + ax^4$ за всяко $x > 0$. Тогава е ясно, че $3f^2(x) = 2f(f(x)) + ax^4 > ax^4$ и така $f^2(x) > \frac{a}{3}x^4 \iff f(x) > \sqrt{\frac{a}{3}x^4} = \sqrt{\frac{a}{3}} \cdot x^2$. Оттук получаваме

$$3f^2(x) = 2f(f(x)) + ax^4 > 2\sqrt{\frac{a}{3}}f^2(x) + ax^4 > 2\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}x^4 + ax^4 = \left(2\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + a\right)x^4 \iff$$

$$\iff f^2(x) > \frac{\left(2\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + a\right)x^4}{3} \iff f(x) > \sqrt{\frac{\left(2\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + a\right)x^4}{3}} = \sqrt{\frac{\left(2\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + a\right)}{3}} \cdot x^2 > \sqrt{\frac{a}{3}} \cdot x^2,$$

т.е. получихме по-добра долна граница за $f(x)$. Така виждаме, че тук може да се породи рекурсивен процес. Наистина, нека $f(x) > a_n x^2$. Тогава ще получим

$$3f^2(x) = 2f(f(x)) + ax^4 > 2a_n f^2(x) + ax^4 > 2a_n^3 x^4 + ax^4 = (2a_n^3 + a)x^4 \iff$$

$$\iff f(x) > \sqrt{\frac{2a_n^3 + a}{3}} \cdot x^2$$

Оттук идва идеята да дефинираме редицата $\{a_i\}$, за която $a_0 = \frac{a}{3}$ и за всяко n е изпълнено $a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n^3 + a}{3}}$ $(*)$. Тогава, следвайки този безкраен итеративен процес на усилване на неравенството, ще получим, че

$$f(x) \geq \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot x^2.$$

Остава да намерим границата $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Нека $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$. Като направим граничен преход в равенството $(*)$, получаваме $l = \sqrt{\frac{l^3 + a}{3}} \iff 3l^2 = 2l^3 + a$ и оттук $a = 3l^2 - 2l^3$ $(**)$. Но, тъй като $a > 1$ и изразът $3l^2 - 2l^3$ приема само стойности, по-малки или равни на 1, при $l > 0$, то равенството $(**)$ може да е изпълнено само при $l < 0$. Но тогава това $l < 0$ не може да е граница на редицата $\{a_i\}$, защото лесно се вижда, че тя е растяща при $a > 1$ и първият ѝ член a_0е положителен. Следователно тази редица е неограничена, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Тогава ще получим, че $f(x) \geq \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot x^2 = +\infty$, което е противоречие. От това противоречие следва, че при $a > 1$ не съществува такава функция f, с което задачата е решена. $\square$

Коментар. *Основната логика на доказателството, че при $a > 1$ такава функция не съществува в този пример беше същата като логиката в предходния пример, но рекурентната зависимост е доста по-сложна и забелязването на този итеративен процес също. Освен това трябва да отбележим, че това беше само една от стъпките в задачата, а необходимо предварително условие за достигане до тази стъпка беше да се опитаме да налучкаме отговора на задачата и да достигнем изобщо до вида $f(x) = cx^2$. Всичко това прави тази задача далеч по-предизвикателна за решаващите, но все пак следва два ясни евристични принципа - "налучкване" или формулиране на хипотеза и след това доказване на неограниченост на функция чрез рекурентни зависимости.*

5. Задачи за упражнение

5.1. Лесни задачи[1]

Задача 1. Намерете формула за общия член на редицата, удоволетворяваща

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

с $a_0 = 2$ и $a_1 = 7$?

Решение: 1

Задача 2. Намерете формула за общия член на $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, n \geq 0, a_0 = 2,$ $a_1 = 5$.

Решение: 2

Задача 3. Намерете a_n като функция на n, ако $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 9$ и $a_{n+3} - 3a_{n+1} - 2a_n = 0$.

Решение: 3

Задача 4. Каква е формулата за общия член на редицата

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

с $a_0 = 1, a_1 = -2$ и $a_2 = -1$?

Решение: 4

Задача 5. Редица x_n е дефинирана с $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ и рекурсивната зависимост $x_n = 6x_{n-1} - 12x_{n-2} + 8x_{n-3}$. Намерете зторена формула за x_n.

Решение: 5

Задача 6. Намерете решението на $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n, \quad x_0 = 0, x_1 = 1$.

Решение: 6

[1] Под „лесни“, „средни“ и „сложни“ задачи се разбира класификация според *нивото на когнитивна натовареност* и *необходимия обем от математически средства*, а не субективна оценка за трудност.

Задача 7. Решете рекурентната зависимост $x_{n+3} = 4x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1$.

Решение: 7

Задача 8. Нека $\{x_n\}_{n\geq 0}$ е редица, дефинирана чрез $x_0 = 9$ и $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + 3, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$. Намерете формула за x_n.

Решение: 8

Задача 9. Нека $\{a_n\}_{n\geq 0}$ е редицата $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$, $n = 1, 2, \ldots$. Намерете затворена формула за a_n.

Решение: 9

Задача 10. Намерете формула за общия член на редицата $\{x_n\}_{n\geq 0}$, за която $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n + 8n^2 - 24n, \quad n = 0, 1, \ldots$, с $x_0 = 5$ и $x_1 = 5$.

Решение: 10

Задача 11. Решете редицата

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 3a_{n-1} + 2n \text{ for } n \geq 1 \end{aligned}$$

Решение: 11

Задача 12. Намерете общия член на редицата $(x_n)_{n\geq 0}$, удоволетворяваща зависимостта

$$x_{n+2} = -4x_{n+1} - 4x_n + (-1)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Решение: 12

5.2. Средни задачи[2]

Задача 13. Нека $(x_n)_{n\geq 0}$ е редицата дефинирана с $x_0 = 2$ и

$$x_{n+1} = \frac{2}{1 + x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

[2]Под „лесни“, „средни“ и „сложни“ задачи се разбира класификация според *нивото на когнитивна натовареност* и *необходимия обем от математически средства*, а не субективна оценка за трудност.

Намерете x_{2019}.

Решение: 13

Задача 14. (Austria, 1979) Дефинираме редицата $(x_n)_{n\geq 0}$ чрез $x_0 = 1979$ и

$$x_{n+1} = \frac{1979\,(1+x_n)}{1979+x_n}, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Намерете x_n.

Решение: 14

Задача 15. Дефинираме редицата $(x_n)_{n\geq 0}$ чрез

$$x_{n+1}x_n + x_{n+1} = x_n - 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Ако е дадено, че за всяко n имаме $x_n \notin \{-1, 0, 1\}$ и $x_{2009} = 40$, то намерете x_n.

Решение: 15

Задача 16. Нека $(x_n)_{n\geq 0}$ е редица дефинирана чрез $x_0 = a$ и

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2}-1)x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Намерете x_{2009}.

Решение: 16

Задача 17. (EGMO, 2022/4) За дадено естествено число $n \geq 2$, намерете най-голямото естествено N, за което съществуват $N+1$ реални числа $a_0, a_1, \dots, a_N$, такива че

(1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$, и

(2) $(a_k + a_{k-1})\,(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ за $1 \leq k \leq N-1$.

Решение: 17

Задача 18. (Есенен математически турнир, 2018, 11 клас) Дадени са редици $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$, за които $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $b_1 = 7$, $b_2 = 13$, и

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1}, \quad b_{n+1} = 2b_n a_{n-1} - b_{n-1}a_n$$

за $n \geq 2$, намерете всички n, за които a_n дели b_n.

Решение: 18

Задача 19. (China TST, 2003) Редицата $\{a_n\}$ удоволетворява $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_n^2 + 5 = a_{n-1}a_{n+1}$, $n \geq 2$. Ако $a_n + (-1)^n$ е просто, докажете, че съществува неотрицателно цяло число m, такова че $n = 3^m$. (Art of Problem Solving Community, 2025)

Решение: 19

Задача 20. (China South East, 2021) Редицата $\{a_n\}$ е дефинирана рекурсивно чрез $a_1 = \frac{1}{2}$, и за $n \geq 2$, $0 < a_n \leq a_{n-1}$ и

$$a_n^2(a_{n-1}+1) + a_{n-1}^2(a_n+1) - 2a_n a_{n-1}(a_n a_{n-1} + a_n + 1) = 0.$$

(1) Намерете формула за общия член $\{a_n\}$;

(2) Нека $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Докажете, че за $n \geq 1$, $\ln\left(\frac{n}{2}+1\right) < S_n < \ln(n+1)$.

Решение: 20

Задача 21. (Vietnam TST, 2012/4) Дефинираме редицата $(x_n)_{n\geq 1}$, за която $x_1 = 1, x_2 = 2011$ и $x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Докажете, че $\dfrac{x_{2012}+1}{2012}$ е точен квадрат.

Решение: 21

Задача 22. (China South East, 2011) Редицата $(a_n)_{n\geq 1}$ удоволетворява $a_1 = a_2 = 1$ $a_n = 7a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 3$. Докажете, че за всяко естествено n, числото $a_n + 2 + a_{n+1}$ е точен квадрат. (Chen, Xu, et al., 2016)

Решение: 22

Задача 23. (Chinese Competition, 2000) Редиците (a_n) и (b_n) са такива, че $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 49$ и $\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3 \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4 \end{cases}$ за $n = 0, 1, 2, \cdots,$. Докажете, че a_n е точен квадрат за $n = 0, 1, 2, \cdots,$.

Решение: 23

Задача 24. Редицата $\{a_n\}$ е дефинирана чрез $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$. Докажете, че в редицата има безбройно много членове, които се делят на 7 и безбройно много, които се делят на 13.

Решение: 24

Задача 25. Редицата $\{u_n\}$ е дефинирана чрез $u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2}$, и $u_{n+1} = u_n\left(u_n^2 - 2\right) - \frac{5}{2}$. Докажете, че

$$\lfloor u_n \rfloor = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

Решение: 25

Задача 26. (IMO Shortlist, 1981) Редицата (a_n) е дефинирана чрез рекурсията

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}.$$

Намерете формула за a_n.

Решение: 26

Задача 27. (Putnam, 1993, A2) Нека $(x_n)_{n\geq 0}$ е редица от ненулеви реални числа, удоволетворяваща $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$ за $n = 1, 2, 3, \ldots$. Докажете, че съществува реално число a, такова че $x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$ за всяко $n \geq 1$.

Решение: 27

Задача 28. (IMO Longlist, 1986) Нека $(a_n)_{n\geq 1}$ е редица от цели числа, за която $a_1 = a_2 = 1$,

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2, \quad n \geq 1$$

Докажете, че a_n е точен квадрат за всяко n.

Решение: 28

Задача 29. (Moscow Mathematical Olympiad, 1963) Нека $(u_n)_{n\geq 1}$ е редица, удоволетворяваща $a_1 = a_2 = 1$ и $a_n = \left(a_{n-1}^2 + 2\right)/a_{n-2}$ за $n \geq 3$. Докажете, че a_n е цяло число за $n \geq 3$.

Решение: 29

Задача 30. (IMO Shortlist, 1988) Редица от цели числа е дефинирана чрез

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 1), \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Докажете, че 2^k дели a_n тогава и само тогава, когато 2^k дели n.

Решение: 30

Задача 31. (Putnam) Нека $a_n = \lfloor (5+\sqrt{21})^n \rfloor + 1$, така че $a_0 = 2, a_1 = 10, a_2 = 92, \ldots$ Докажете, че a_n се дели на 2^n.

Решение: 31

Задача 32. (Putnam) Намерете цифрите, които стоят отляво и отдясно на десетичната запетая на $(\sqrt{7}+\sqrt{13})^{2008}$.

Решение: 32

Задача 33. (Iberoamerican Olympiad, 1987) Нека $m, n, r > 0$ са цели числа, такива че

$$1 + m + n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{2r-1}.$$

Докажете, че m е точен квадрат.

Решение: 33

5.3. Сложни задачи[3]

Задача 34. (Putnam, 2007, B3) Нека $x_0 = 1$ и за $n \geq 0$, нека $x_{n+1} = 3x_n + \lfloor x_n\sqrt{5} \rfloor$. По този начин $x_1 = 5$, $x_2 = 26$, $x_3 = 136$, $x_4 = 712$. Намерете стойността на x_{2007}. ($\lfloor a \rfloor$ означава най-голямото цяло число $\leq a$.)

Решение: 34

Задача 35. (Vietnam, 2020/3) Нека редицата (a_n) изпълнява: $a_1 = 5, a_2 = 13$ и $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \forall n \geq 2$.

a) Докажете, че $(a_n, a_{n+1}) = 1, \forall n \geq 1$.

b) Докажете, че $2^{k+1} | p - 1$ за всяко $k \in \mathbb{N}$, за което p е прост делител на a_{2^k}.

Решение: 35

Задача 36. (Vietnam TST, 1997/4) Функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ е дефинирана с $f(0) = 2$, $f(1) = 503$ и $f(n+2) = 503f(n+1) - 1996f(n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Нека s_1, s_2, …, s_k са естествени числа, не по-малки от k, и нека $p(s_i)$ е прост делител на $f(2^{s_i})$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Докажете, че за всяко естествено число t $(t \leq k)$, имаме $2^t \Big| \sum_{i=1}^{k} p(s_i)$ тогава и само тогава, когато $2^t | k$.

Решение: 36

[3]Под „лесни“, „средни“ и „сложни“ задачи се разбира класификация според *нивото на когнитивна натовареност* и *необходимия обем от математически средства*, а не субективна оценка за трудност.

Задача 37. (China MO, 2004) Нека c е естествено число. Разглеждаме редицата $x_1, x_2, \ldots$, за която е изпълнено $x_1 = c$ и за $n \geq 2$,

$$x_n = x_{n-1} + \left\lfloor \frac{2x_{n-1} - (n+2)}{n} \right\rfloor + 1,$$

където $\lfloor x \rfloor$ е най-голямото цяло число, не по-голямо от x. Намерете формула за x_n, зависеща от n и c.

Решение: 37

Задача 38. (China Southeast, 2013/3) Дадена е редица $\{a_n\}$, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + (-1)^n}{a_{n-1}}$. Докажете, че $a_m^2 + a_{m+1}^2 \in \{a_n\}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Решение: 38

Задача 39. (China Southeast, 2008/2) Нека $\{a_n\}$ е редица, удоволетворяваща $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + n \cdot (1 + 2^n), (n = 1, 2, 3, \cdots)$. Намерете формула за общия член на $\{a_n\}$.

Решение: 39

Задача 40. (Пролетни математически състезания, 2015, 11-12 клас) Намерете всички тройки (a, b, c) от естествени числа, по-големи от 1, за които съществува безкрайна редица $x_1, x_2, \ldots$ от ненулеви цели числа, за които

$$abc \cdot x_{n+3} = a(c-b)x_{n+2} + (cb+a)x_{n+1} + bx_n$$

за всяко $n \geq 1$.

Решение: 40

Задача 41. (China Southeast, 2017/6) Редицата $\{a_n\}$ изпълнява $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{3}{8}$, и $a_{n+1}^2 + 3a_na_{n+2} = 2a_{n+1}(a_n + a_{n+2})(n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) Намерете формула за общия член на редицата $\{a_n\}$;

(2) Докажете, че за всяко естествено n, е изпълнено $0 < a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Решение: 41

Задача 42. (Vietnam, 2011) Дефинираме редицата от цели числа $\langle a_n \rangle$ като:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad \text{and} \quad a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

Докажете, че $a_{2012} - 2010$ се дели 2011.

Решение: 42

Задача 43. (China TST, 2008/2) Редицата $\{x_n\}$ е дефинирана с $x_1 = 2, x_2 = 12$, и $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Нека p е нечетно просто число, и нека q е прост делител на x_p. Докажете, че ако $q \neq 2, 3$, то $q \geq 2p - 1$.

Решение: 43

6. Подсказки и решения

Задача 1. 1 Редицата е линейно-рекурентна и значи първо трябва да намерим и решим характеристичното ѝ уравнение

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$(r+1)(r-2) = 0 \quad r_1 = 2$ и $r_2 = -1$. Сега $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$ е решението. Трябва да намерим α_1 и α_2, използвайки началните стойности.

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ a_1 &= \alpha_1 2 + a_2(-1) = 7 \end{aligned}$$

Така $\alpha_1 = 3$ и $\alpha_2 = -1$. Тогава $a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$ е решението. □

Задача 2. 2 Характеристичното уравнение е $r^2 - 5r + 6 = 0$ с корени 2 и 3. Така $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Като запишем формулата за $n = 0$ и $n = 1$, използвайки $a_0 = 2$ и $a_1 = 5$, извеждаме системата

$$\begin{aligned} 2 = a_0 &= C_1 + C_2 \\ 5 = a_1 &= 2C_1 + 3C_2 \end{aligned}$$

Решаваме я и получаваме $C_1 = C_2 = 1$. Така $a_n = 2^n + 3^n$. □

Задача 3. 3 Характеристичното уравнение е

$$\begin{aligned} &r^3 - 3r - 2 = 0 \\ &r^3 - r - 2r - 2 = 0 \\ &r(r-1)(r+1) - 2(r+1) \\ &(r+1)\left(r^2 - r - 2\right) = 0 \\ &(r+1)^2(r-2) = 0 \end{aligned}$$

Така $r = -1$ е двоен корен, а $r = 2$ е единичен корен. Така формулата трябва да има вида $a_n = A_1(-1)^n + A_2 n(-1)^n + B2^n$. Използвайки началните условия $a_0 = a_2 = 0$ и $a_1 = 9$, намираме че

$$\begin{aligned} 0 = a_0 &= A_1(-1)^0 + A_2 0(-1)^0 + B2^0 \\ 9 = a_1 &= A_1(-1)^1 + A_2 1(-1)^1 + B2^1 \\ 0 = a_2 &= A_1(-1)^2 + A_2 2(-1)^2 + B2^2 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}0 &= A_1 + B\\ 9 &= -A_1 - A_2 + 2B\\ 0 &= A_1 + 2A_2 + 4B\end{aligned}$$

Решаваме системата и получаваме $A_1 = -2, A_2 = -3$ и $B = 2$. Така решението на редицата е $a_n = (-2)(-1)^n + (-3)n(-1)^n + 2 \cdot 2^n$ или

$$a_n = (3n + 2)(-1)^{n+1} + 2^{n+1}.$$

□

Задача 4. 4 Намираме и решаваме характеристичното уравнение $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \iff (r+1)^3 = 0 \iff r_1 = -1$ (неговата кратност е 3.) Така $a_n = (\alpha_{10} + \alpha_{11} n + \alpha_{12} n^2)(-1)^n$ е решението. Сега трябва да намерим константите, използвайки началните стойности.

$$\begin{aligned}a_0 &= \alpha_{10} = 1\\ a_1 &= -\alpha_{10} - \alpha_{11} - \alpha_{12} = -2\\ a_2 &= \alpha_{10} + 2\alpha_{11} + 4\alpha_{12} = -1\end{aligned}$$

Така, $\alpha_{10} = 1, \alpha_{11} = 3$ и $\alpha_{12} = -2$. Това означава, че $a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$ е решението. □

Задача 5. 5 Харакеристичният полином на редицата е $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = (r-2)^3$. Той има само един корен, $r = 2$, с кратност 3. Така затворената формула за x_n ще е $x_n = a_1 2^n + a_2 n 2^n + a_3 n^2 2^n$. Ще намерим a_1, a_2, и a_3, използвайки началните стойности. Вземайки $n = 0, 1$, и 2, във формулата за x_n намираме уравненията $a_1 = -1$, $2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0$, и $4a_1 + 8a_2 + 16a_3 = 1$. Решавайки системата, намираме $a_1 = -1, a_2 = \frac{11}{8}$, и $a_3 = -\frac{3}{8}$. Така затворената формула за x_n е

$$x_n = -\frac{2^n}{8}\left(3n^2 - 11n + 8\right).$$

□

Задача 6. 6 Характеристичното уравнение е

$$r^2 - 2r + 2 = 0,$$

с корени $1 + i$ и $1 - i$. Техните тригонометрични форми са $\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$ и $\sqrt{2}(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4))$. Така

$$x_n = (\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

е общото решение на редицата. От началните стойности

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_1\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + C_2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Така $C_1 = 0, C_2 = 1$. По този начин общото решение е

$$x_n = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}.$$

□

Задача 7. 7 Характеристичното уравнение е

$$r^3 - 4r^2 + 6r - 4 = 0$$

с корени $2, 1+i$ и $1-i$. Така формулата е

$$x_n = C_1 2^n + (\sqrt{2})^n \left(C_2 \cos\frac{n\pi}{4} + C_3 \sin\frac{n\pi}{4} \right).$$

След като намерим константите намираме

$$x_n = -2^{n-1} + \frac{(\sqrt{2})^n}{2} \left(\cos\frac{n\pi}{4} + 3\sin\frac{n\pi}{4} \right).$$

□

Задача 8. 8 $x_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6, \quad n = 0, 1, \ldots$ □

Задача 9. 9 Имаме $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$ и $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$. Изваждаме двете и получаваме $a_{n+2} - a_{n+1} = 2a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}$. Характеристичното уравнение е $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ с троен корен $x_{1,2,3} = 1$ и така лесно следва, че $a_n = n^2 + n + 1$. □

Задача 10. 10 Следваме алгоритъма, обяснен във второто отклонение след Пример 7, за $P(n) = 8n^2 - 24n$. Полагаме $y_n = A_2 n^2 + A_1 n + A_0$ в зависимостта и получаваме

$$\begin{aligned} A_2(n+2)^2 + A_1(n+2) + A_0 =& 6\left[A_2(n+1)^2 + A_1(n+1) + A_0\right] \\ & - 9\left(A_2 n^2 + A_1 n + A_0\right) + 8n^2 - 24n. \end{aligned}$$

Намираме коефициентите пред n^2, n, и константата и получаваме

$$(4A_2 - 8)\, n^2 + (-8A_2 + 4A_1 + 24)\, n + (-2A_2 - 4A_1 + 4A_0) = 0.$$

Следва, че $4A_2 - 8 = 0, -8A_2 + 4A_1 + 24 = 0$, и $-2A_2 - 4A_1 + 4A_0 = 0$. Решението е $A_2 = 2, A_1 = -2$, и $A_0 = -1$. Така $y_n = 2n^2 - 2n - 1$ е специфично решение. Така формулата за общият член можем да получим, използвайки формула (2.27) като

$$x_n = (c_1 + c_2 n)\, 3^n + 2n^2 - 2n - 1, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Използваме началните стойности $x_0 = 5$ и $x_1 = 5$, и намираме, че $c_1 = 8$ и $c_2 = -\frac{14}{3}$. Накрая формулата за общия член е

$$\begin{aligned} x_n &= \left(8 - \frac{14}{3} n\right) 3^n + 2n^2 - 2n - 1 \\ &= 8 \cdot 3^n - 14n3^{n-1} + 2n^2 - 2n - 1, \quad n = 0, 1, \ldots. \end{aligned}$$

□

Задача 11. 11 Следвайки алгоритъма, обяснен във второто отклонение след Пример 7, можем да намерим че $a_n = \dfrac{2n.3^n + 3^{n+1} - 4n - 3}{4}$. □

Задача 12. 12 Следвайки алгоритъма, обяснен във второто отклонение след Пример 7, специфичното решение е от вида $y_n = A(-1)^n$ или от вида $(An + B)(-1)^n$. Заествайки в рекурентната зависимост, получаваме, че $A = 1$ работи за $y_n = A(-1)^n$. Така формулата за общия член е

$$x_n = (c_1 + c_2 n)\,(-2)^n + (-1)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

където c_1 и c_2 са константи. □

Задача 13. 13 Това е хомографска редица. Уравнението ѝ е $x = \dfrac{2}{1+x} \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff x_1 = -2,\ x_2 = 1$. Имаме $x_{n+1} - (-2) = x_{n+1} + 2 = \dfrac{2}{x_n + 1} + 2 = \dfrac{2x_n + 4}{x_n + 1}$ и $x_{n+1} - 1 = \dfrac{2}{x_n + 1} - 1 = \dfrac{1 - x_n}{x_n + 1}$ и после $\dfrac{x_{n+1} + 2}{x_{n+1} - 1} = \dfrac{2x_n + 4}{x_n + 1} : \dfrac{1 - x_n}{x_n + 1} = \dfrac{2x_n + 4}{1 - x_n} = -2 \cdot \dfrac{x_n + 2}{x_n - 1}$. Сега полагането $y_n = \dfrac{x_n + 2}{x_n - 1}$ ни дава $y_{n+1} = -2y_n$ и сега е очевидно, че $\{y_n\}$ е геометрична прогресия с частно -2. Знаем, че $y_0 = \dfrac{x_0 + 2}{x_0 - 1} = 4$ и така $y_n = y_0.(-2)^n = 4.(-2)^n$. Оттук лесно намираме, че $x_n = \dfrac{(-2)^{n+2} + 2}{(-2)^{n+2} - 1}$ и така x_{2019} е намерено. □

Задача 14. 14 Нека $1979 = a^2$. Така зависимостта става $x_0 = a^2$ с $x_{n+1} = \dfrac{a^2\,(1 + x_n)}{a^2 + x_n}$, $n = 0, 1, \ldots$. Това очевидно е хомографска редица и нейното уравнение е $x = \dfrac{a^2 + a^2 x}{a^2 + x} \iff x_{1,2} = \pm a$. От тук лесно можем да получим $x_{n+1} - a = \dfrac{a(a-1)(x_n - a)}{a^2 + x_n}$ и $x_{n+1} + a = \dfrac{a(a+1)(x_n + a)}{a^2 + x_n}$ и така

$$\frac{x_{n+1}-a}{x_{n+1}+a} = \frac{a(a-1)(x_n-a)}{a^2+x_n} : \frac{a(a+1)(x_n+a)}{a^2+x_n} = \frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{x_n-a}{x_n+a}.$$

Сега полагаме $y_n = \dfrac{x_n-a}{x_n+a}$ и получаваме $y_{n+1} = \dfrac{a-1}{a+1}\cdot y_n$, и така $\{y_n\}$ е геометрична прогресия с частно $\dfrac{a-1}{a+1}$ и $y_0 = \dfrac{x_0-a}{x_0+a} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Така имаме $y_n = \left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$ и оттук лесно можем да намерим x_n. □

Задача 15. 15 Отново имаме хомографска редица, чието уравнение е $x^2+x = x-1 \iff x^2=-1 \iff x_{1,2}=\pm i$. Тъй като корените са комплексни числа е много вероятно редицата да е периодична. С проверка може да се открие, че $x_{n+8}=x_n$ за всяко $n\in\mathbb{N}$ и така лесно може да се намери цялата редица. □

Задача 16. 16 Отново имаме хомографска редица, чието уравнение е $x = \dfrac{x+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)x} \iff x^2=-1 \iff x_{1,2}=\pm i$. Това означава, че най-вероятно редицата е периодична и с проверка намираме че $x_{n+8}=x_n$. Довършването е лесно. □

Задача 17. 17 Можем да запищем условието като $(a_k+a_{k-1})(a_k+a_{k+1}) = a_{k-1}+a_k-a_k-a_{k+1}$. Сега е логично да положим $b_n=a_{n-1}+a_n$ и това става $b_kb_{k+1} = b_k-b_{k+1}$ (1) за всяко $1\le k\le N-1$. Очевидно е, че a_s (за някое s) съществува тогава и само тогава, когато b_s съществува. Сега (1) ни дава хомографска редица, защото може да бъде записано като $b_{k+1} = \dfrac{b_k}{b_k+1}$ и очевидно b_{k+1} съществува за всяко k, такова че $b_k\neq -1$. Нека също отбележим, че ако $b_i=0$ за някое i, то $b_i=0$ за всяко $i=1,2,\ldots,N$ от зависимостта за b_i, но това е невъзможно, защото бихме имали, че $0=b_1=a_1+a_0=-\dfrac{1}{n}$, което очевдино не е вярно. Уравнението е $x=\dfrac{x}{x+1} \iff x_{1,2}=0$, което има двоен корен и тогава пресмятаме $b_{k+1}-0 = \dfrac{b_k}{b_k+1} \iff \dfrac{1}{b_{k+1}} = 1+\dfrac{1}{b_k}$. Сега полагаме $c_k=\dfrac{1}{b_k}$ (което е възможно за всяко $k\le N$, защото всяко b_i е ненулево), и получаваме $c_{k+1}=c_k+1$. Това е аритметична прогресия с разлика 1 и така лесно получаваме $c_{k+1}=k-n$, тъй като $c_1=\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{a_1+a_0}=-n$. Така имаме $b_{k+1}=\dfrac{1}{c_{k+1}}=\dfrac{1}{k-n}$ за всяко $k\le N$. Но сега е очевидно, че трябва $k-n\neq 0$ и така $k<n$. Тогава b_{n+1} няма как да съществува и съответно a_{n+1} не съществува, което означава че $N\le n$. За $N=n$ е очевидно, че такава редица съществува, защото при $a_1=0$, можем да намерим всички други a_i, тъй като вече знаем b_i и $b_i=a_i+a_{i-1}$, с което сме готови. □

Задача 18. 18 Разделяме двете страни на второто уравнение на $a_{n+1}=a_na_{n-1}$ и получаваме:

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{2b_na_{n-1}}{a_na_{n-1}} - \frac{b_{n-1}a_n}{a_na_{n-1}} = \frac{2b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}.$$

За редицата $c_n = \dfrac{b_n}{a_n}$, имаме:

$$c_1 = \frac{7}{3}, \quad c_2 = \frac{13}{5} \quad \text{и} \quad c_{n+1} + c_{n-1} = 2c_n.$$

Това означава, че $c_1, c_2, \ldots$ е аритметична прогресия с първи член $c_1 = \dfrac{7}{3}$ и разлика $d = c_2 - c_1 = \dfrac{13}{5} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{4}{15}$. Общият член на редицата има вида:

$$c_n = \frac{7}{3} + (n-1) \cdot \frac{4}{15} = \frac{4n+31}{15}.$$

Сега търсим всички n, за които a_n дели b_n, тоест, c_n е цяло. Това означава 15 да дели $4n+31$, тоест 15 да дели $4n+1$, което е изпълнено при $n = 15t + 11$ за всяко $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Задача 19. 19 Решение

Задача 20. 20 Получаваме $a_2 = \dfrac{1}{3}$ и оттък имаме квадратно уравнение, чиито два корена са $a_n = a_{n-1}\dfrac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}-2a_{n-1}^2}$ от $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$. Съответно (тъй като $a_n \leq a_{n-1}$) имаме $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$, което е $\dfrac{1}{a_n} = 1 + \dfrac{1}{a_{n-1}}$. Така $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

За горната граница имаме $\dfrac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k$ и значи

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$$

За долната граница $\dfrac{1}{k+1} > \ln(k+2) - \ln(k+1)$ и така

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+2) - \ln(k+1)) = \ln(n+2) - \ln 2 = \ln\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

$\square$

Задача 21. 21 Нека $2011 = a$. Ще докажем, че $\dfrac{x_{2n}+1}{a+1}$ е винаги точен квадрат. Първо забелязваме, че

$$x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n = 2a(2ax_n - x_{n-1}) - x_n = (4a^2-2)x_n + x_n - 2ax_{n-1} = (4a^2-2)x_n - x_{n-2}.$$

Разглеждаме редицата $y_1 = 1, y_2 = 2a-1, y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n$. Ще докажем че $\dfrac{x_{2n}+1}{a+1} = y_n^2$ по индукция. За базовите случаи лесно можем да проверим, че

$\dfrac{x_2+1}{a+1} = 1 = y_1^2, \dfrac{x_4+1}{a+1} = 4a^2 - 4a + 1 = y_2^2$. Приемаме, че исканото е вярно за $1, 2, \ldots, n$. Ще докажем, че е вярно и за $n+1$. Забелязваме

$$y_n^2 - y_{n+1}y_{n-1} = y_n^2 - (2ay_n - y_{n-1})y_{n-1} = y_{n-1}^2 + y_n(y_n - 2ay_{n-1}) = y_{n-1}^2 - y_n y_{n-2} = -2a + 2.$$

Използвайки $(y_{n+1} + y_{n-1})^2 = 4a^2 y_n$, получаваме

$$y_{n+1}^2 = (4a^2-2)y_n^2 - y_{n-1}^2 + 2(y_n^2 - y_{n+1}y_{n-1}) =$$

$$= \frac{(4a^2-2)x_{2n} + 4a^2 - 2}{a+1} - \frac{x_{2n-2}+1}{a+1} + 2(-2a+2) = \frac{x_{2n+2}+1}{a+1}$$

и сме готови. □

Задача 22. 22 Получаваме, че $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, където

$$\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{45}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{45}}{2} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

λ_1 и λ_2 са решения на уравнението $\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0, a_1 = 1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2, a_2 = 1 = C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2$. Така,

$$\begin{aligned}
a_n + a_{n+1} + 2 &= \lambda_1^{n-1}C_1\left(\lambda_1 + \lambda_1^2\right) + \lambda_2^{n-1}C_2\left(\lambda_2 + \lambda_2^2\right) + 2 \\
&= \lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n-1} + 2 \\
&= \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)^2 + \left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)^2 + 2 \\
&= \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]^2 = x_n^2,
\end{aligned}$$

където $x_n = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ е решението на редицата $\{x_n\}$ от положителни числа $x_1 = 2, x_2 = 3, x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2}, n \geqslant 3$. Задачата може да бъде решена и като във второто решение на Пример 18. □

Задача 23. 23 Имаме $b_n = \dfrac{1}{6}\left(a_{n+1} - 7a_n + 3\right)$. Заместваийки във второто уравнение, получаваме

$$a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 6.$$

С директни пресмятания откриваме $a_0 = 1 = 1^2, a_1 = 7a_0 + 6b_0 - 3 = 4 = 2^2, a_2 = 14a_1 - a_0 - 6 = 49 = 7^2, a_3 = 14a_2 - a_1 - 6 = 676 = 26^2, a_4 = 14a_3 - a_2 - 6 = 9409 =$

$97^2, \ldots$. Редицата $1, 2, 7, 26, 97, \ldots$ удоволетворява зависимостта: $d_0 = 1, d_1 = 2$,

$$d_{n+2} = 4d_{n+1} - d_n (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Сега предполагаме, че $a_n = d_n^2$ е вярна за $\{d_n\}$, удоволетворяваща зависимостта (5). Ще докажем това по метода на математическа индукция. За $n = 0$ и $n = 1, a_0 = 1 = d_0^2, a_1 = 4 = d_1^2$. Нека приемем че $n = k - 1$ и $n = k$. Получаваме, че $a_{k-1} = d_{k-1}^2, a_k = d_k^2$. Така за $n = k + 1$, имаме

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 14a_k - a_{k-1} - 6 = 14d_k^2 - d_{k-1}^2 - 6 \\ &= (4d_k - d_{k-1})^2 - 2\left(d_k^2 + d_{k-1}^2 - 4d_k d_{k-1} + 3\right) \\ &= d_{k+1}^2 - 2\left(d_k^2 + d_{k-1}^2 - 4d_k d_{k-1} + 3\right). \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} d_k^2 + d_{k-1}^2 - 4d_k d_{k-1} + 3 &= d_k \left(4d_{k-1} - d_{k-2}\right) + d_{k-1}^2 - 4d_k d_{k-1} + 3 \\ &= d_{k-1}^2 - d_{k-2} \left(4d_{k-1} - d_{k-2}\right) + 3 \\ &= d_{k-1}^2 + d_{k-2}^2 - 4d_{k-1} d_{k-2} + 3 \\ &= \cdots \\ &= d_1^2 + d_0^2 - 4d_1 d_0 + 3 \\ &= 2^2 + 1^2 - 4 \times 1 \times 2 + 3 = 0. \end{aligned}$$

Така $a_{k+1} = d_{k+1}^2$. Това означава, че за всяко $n = 0, 1, 2, \ldots, a_n = d_n^2$ е точен квадрат. $\square$

Задача 24. 24 Виждаме, че a_2, a_6, и a_{10} се делят на 7 и a_3, и a_9 се делят на 13, и така можем да предположим, че a_{4k+2} се дели на 7, а a_{6k+3} се дели на 13 за $k = 0, 1, 2, \ldots$. Използвайки рекурентната зависимост, получаваме

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - a_{n-2} \\ &= 4\left(4a_{n-2} - a_{n-3}\right) - a_{n-2} \\ &= 15a_{n-2} - 4a_{n-3} \\ &= 15\left(4a_{n-3} - a_{n-4}\right) - 4a_{n-3} \\ &= 56a_{n-3} - 15a_{n-4}, \end{aligned}$$

от което следва, че ако 7 дели a_{n-4}, то също дели и a_n, Сега лесна индукция показвам, че 7 дели a_{4k+2} за $k = 0, 1, 2, \ldots$. Аналогично на това изкарваме

$$\begin{aligned} a_n &= 56\left(4a_{n-4} - a_{n-5}\right) - 15a_{n-4} \\ &= 209a_{n-4} - 56a_{n-5} \\ &= 209\left(4a_{n-5} - a_{n-6}\right) - 56a_{n-5} \\ &= 780a_{n-5} - 209a_{n-6}, \end{aligned}$$

от което хипотезата за деление на 13 следва. □

Задача 25. 25 Започваме с малко експерментиране, а именно да сметнем първите членове на редицата:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 = 2^0 + 2^0 \\ u_1 &= \frac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1} \\ u_2 &= \frac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1} \\ u_3 &= \frac{65}{8} = 2^3 + 2^{-3} \\ u_4 &= \frac{1025}{32} = 2^5 + 2^{-5} \\ &\dots \end{aligned}$$

Не е трудно да се види моделът, тъй като трябва да търсим степени на 2, защото точно това искаме да докажем. Сега, ако това е вярно за за цялата редица, бихме получили $u_n = 2^\alpha + 2^{-\alpha}$. Но какво точно ще е α? Най-лесно бихме се досетили като видим какво всъщност търсим - имаме $\lfloor u_n \rfloor = 2^\alpha$, а искаме $\lfloor u_n \rfloor = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$. Сега е очевидно, че искаме да докажем че

$$u_n = 2^{a_n} + 2^{-a_n}, \quad n \geq 0, \ (1)$$

където $\{a_n\}$ е редицата дефинирана чрез $a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$.

Ще докажем хипотезата по индукция, но първо ще намерим рекурентна зависимост за $\{a_n\}$. Тъй като

$$a_n = \frac{1}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n,$$

корените на характеристичното уравнение са 2 и -1 , така че характеристичното уравнение е $r^2 - r - 2 = 0$, и така рекуренцията е $\{a_n\}$ is $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, n \geq 0$. Зависимостта може да бъде записана като $a_{n+2} - 2a_{n+1} = -\left(a_{n+1} - 2a_n\right)$. Оттук лесно следва по индукция, че

$$a_n - 2a_{n-1} = (-1)^{n+1}\left(a_1 - 2a_0\right) = (-1)^{n+1}. \ (2)$$

Връщайки се в началната индукция, забелязваме че (1) е изпълнено за $n = 0$ и $n = 1$. Ще приемем, че търсеното е вярно за $n - 1$ и n и ще докажем, че е вярно и за $n + 1$. Имаме

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n\left(u_n^2 - 2\right) - \frac{5}{2} \\ &= \left(2^{a_n} + 2^{-a_n}\right)\left[\left(2^{a_{n-1}} + 2^{-a_{n-1}}\right)^2 - 2\right] - \frac{5}{2} \\ &= \left(2^{a_n} + 2^{-a_n}\right)\left(2^{2a_{n-1}} + 2^{-2a_{n-1}}\right) - \frac{5}{2} \\ &= 2^{a_n + 2a_{n-1}} + 2^{-(a_n + 2a_{n-1})} + \left(2^{a_n - 2a_{n-1}} + 2^{-(a_n - 2a_{n-1})} - \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

От (2), $a_n - 2a_{n-1}$ и $-(a_n - 2a_{n-1})$ са 1 и -1 в някакъв ред, и така изразът в скобите е равен на 0 . Накрая като използваме зависимостта получаваме, че

$$u_{n+1} = 2^{a_{n+1}} + 2^{-a_{n+1}},$$

с което сме готови с индукцията. Така (1) е изпълнено, и така

$$\lfloor u_n \rfloor = 2^{a_n} + \lfloor 2^{-a_n} \rfloor = 2^{a_n} = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

□

Задача 26. 26 Първо забелязваме, че от $a_n > 0$ следва че $a_{n+1} > 0$. Тъй като $a_1 > 0$, по индукция следва, че a_n е положително реално число за всяко $n \in \mathbb{N}$. За да се отървем от квадратния корен, ще дефинираме (b_n), така че:

$$b_n = \sqrt{1 + 24a_n} > 0$$

От тук следва:

$$a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24}$$

Замествайки в оригиналната рекурсия и опростявайки, получаваме:

$$\frac{2}{3}b_{n+1}^2 = \frac{3}{2} + \frac{b_n^2}{6} + b_n,$$

$$b_{n+1}^2 = \frac{b_n^2}{4} + \frac{3}{2}b_n + \frac{9}{4} = \left(\frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}\right)^2$$

Така имаме:

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2},$$

което е линейна нехомогенна зависимост за (b_n). За $a_1 = 1$, получаваме $b_1 = 5$. Тъй като коефициента пред b_n в рекурсията не е 1, първо ще решим съответното хомогенно уравнение на редицата:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$$

където (c_n) е геометрична прогресия с частно $\frac{1}{2}$, тоест решението ѝ е $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. После заменяме в оригиналната редица и опростяваме, за да намерим:

$$d_{n+1} = d_n + 3 \cdot 2^{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

Това показва че (d_n) е линейна и нехомогенна, точно като (b_n), но коефициента пред d_n е 1. Преписвайки последното уравнение за индекси от 1 до $n-1$:

$$d_2 = d_1 + 3 \cdot 1,$$

$$d_3 = d_2 + 3 \cdot 2,$$

$$d_4 = d_3 + 3 \cdot 2^2,$$

и така нататък. Като сумираме всички тези уравнения, получаваме:

$$d_n = d_1 + 3\left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}\right) \quad \forall n \geq 2.$$

Сумата в скобите е геометрична прогресия с частно 2 и така:

$$d_n = 5 + 3\left(2^{n-1} - 1\right) \quad \forall n \geq 1.$$

Заместваайки това в уравнението за b_n и опростявайки, намираме:

$$b_n = 3 + 4 \cdot 2^{-n} \quad \forall n \geq 1.$$

Накарая като комбинираме формулите за b_n и a_n, получаваме:

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

□

Задача 27. 27 Константата a можем да си изведем от първите 3 члена. Сега ще правим индукция. Нека $x_{k+1} = ax_k - x_{k-1}$ за $k < n$. Искаме да докажем, че $x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$. Това е еквивалентно на доказването на $ax_nx_{n-1} = x_n^2 + x_{n-1}^2 - 1$ след заместване в оригиналната формула. Но от индукционната хипотеза е вярно, че $ax_{n-1}x_{n-2} = x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 - 1$. Сега събираме това с вярното $ax_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-2}) = (x_n + x_{n-2}) \cdot (x_n - x_{n-2})$ и сме готови. □

Задача 28. 28 Първите няколко члена на редицата са $a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 169$, $a_6 = 1156$ и можем да предположим, че за $n = 1, 2, \ldots, 6$ имаме $a_n = b_n^2$, където b_n удоволетворява $b_1 = b_2 = 1, b_{n+2} = 3b_{n+1} - b_n$ за $n \geq 1$. Ще докажем, че редицата b_n изпълнява $b_{n+2}^2 = 7b_{n+1}^2 - b_n^2 - 2$ за $n \geq 1$, с което ще покажем, че $a_n = b_n^2$. След като заместим b_{n+2} в рекурентната зависимост получаваме

$$7b_{n+1}^2 - b_n^2 - 2 = b_{n+2}^2 = 9b_{n+1}^2 - 6b_n b_{n+1} + b_n^2,$$

или

$$b_{n+1}^2 - 3b_n b_{n+1} + b_n^2 + 1 = 0,$$

което лесно може да бъде доказано по индукция или с директното намиране на стойностите на b_n. $\square$

Задача 29. 29 Това е абсолютно същата редица като в Пример 14, но е преместена с едно напред. $\square$

Задача 30. 30 Лесно се намира, че формулата за общия член е

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right] = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2^2\binom{n}{5} + \cdots.$$

Нека $n = 2^k m$, с m нечетно. Така за $p > 0$ намираме, че

$$2^p\binom{n}{2p+1} = 2^{k+p} m \frac{(n-1)\cdots(n-2p)}{(2p+1)!} = 2^{k+p}\frac{m}{2p+1}\binom{n-1}{2p},$$

което се дели на 2^{k+p}, тъй като $2p+1$ в знаменателя е нечетно число. Така следва, че

$$a_n = n + \sum_{p>0} 2^p \binom{n}{2p+1} = 2^k m + 2^{k+1} N,$$

за някакво цяло число N, и така a_n се дели точно на 2^k. $\square$

Задача 31. 31 Очевидно $a_n = (5+\sqrt{21})^n + (5-\sqrt{21})^n$, тъй като a_n е цяло и $(5-\sqrt{21})^n < 1$. Сега нека намерим и рекурентна редица с общ член a_n. Характеристичното уравнение е с корени $5+\sqrt{21}$ и $5-\sqrt{21}$. Така то е $x^2 - 10x + 4$ и зависимостта е $a_{n+2} = 10a_{n-1} - 4a_n$. От тук по индукция следва, че $2^n \mid a_n$. $\square$

Задача 32. 32 Отново искаме да запишем израза във вида $a + b\sqrt{c}$. За целта $(\sqrt{7}+\sqrt{13})^{2008} = ((\sqrt{7}+\sqrt{13})^2)^{1004} = (20+2\sqrt{91})^{1004}$. Сега търсим рекурентна редицата с общ член $a_n = (20+2\sqrt{91})^{1004} + (20-2\sqrt{91})^{1004}$. Тя има характерично уравнение с корени $20+2\sqrt{91}$ и $20-2\sqrt{91}$. Така то е $x^2 - 40x + 36$. Рекурентната зависимост е $a_{n+2} = 40a_{n+1} - 36a_n$. Първите членове очевидно са $a_0 = 2$ и $a_1 = 40$. Лесно се вижда, че $a_{n+2} \equiv a_n (\text{mod} 10)$. Така последната цифра на a_{1004} е 2. Но

$(\sqrt{7}+\sqrt{13})^{2008} = a_{1004} - (20-2\sqrt{91})^{1004}$, а $(20-2\sqrt{91})^{1004} << 0.1$. Така цифрата на единиците е 1, а тази на десетите е 9. $\square$

Задача 33. 33 Вземайки спрегнатия израз, получаваме

$$1 + m - n\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^{2r-1},$$

Така

$$1 + m = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2r-1} + (2-\sqrt{3})^{2r-1}\right].$$

Разглеждаме редицата $(x_n)_{n\geq 1}$, дефинирана чрез $x_1 = 2, x_2 = 5$ и

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Характеристичното уравнение е $t^2 - 4t - 1 = 0$, което има корени $t_1 = 2 + \sqrt{3}$ и $t_2 = 2 - \sqrt{3}$. Формулата за общия член е

$$x_n = c_1(2+\sqrt{3})^n + c_2(2-\sqrt{3})^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

където c_1 и c_2 са решения на системата

$$\begin{cases} c_1(2+\sqrt{3}) + c_2(2-\sqrt{3}) = 2 \\ c_1(2+\sqrt{3})^2 + c_2(2-\sqrt{3})^2 = 5 \end{cases}$$

Така получаваме общата формула

$$x_n = \frac{1}{1+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n + \frac{1}{1-\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Използвайки формулата можем да забележим, че

$$x_r^2 = \frac{(2+\sqrt{3})^{2r}}{4+2\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^{2r}}{4-2\sqrt{3}} - 1 = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2r-1} + (2-\sqrt{3})^{2r-1}\right] - 1 = m,$$

и така исканото е вярно за всяко n, тъй като x_n е цяло число. $\square$

Задача 34. 34 Пресмятаме първите няколко члена и се опитваме да намерим зависимост от вида $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$. Можем да предположим, че $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 4x_n$. Сега ще го докажем. Имаме $x_{n+1} = \left\lfloor(3+\sqrt{5})x_n\right\rfloor$ за всяко $n \geq 1$, и оттук получаваме, че

$$x_{n+2} = \left\lfloor(3+\sqrt{5})x_{n+1}\right\rfloor = 6x_{n+1} + \left\lfloor -(3-\sqrt{5})\left\lfloor(3+\sqrt{5})x_n\right\rfloor\right\rfloor =$$

$$= 6x_{n+1} + \left\lfloor -4\frac{\left\lfloor(3+\sqrt{5})x_n\right\rfloor}{(3+\sqrt{5})}\right\rfloor = 6x_{n+1} - 4x_n,$$

с $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. Знаем, че

$$x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

където t_1, t_2 са корените на квадратното уравнение $t^2 - 6t + 4 = 0$, които са $t_1 = 3 + \sqrt{5}$ и $t_2 = 3 - \sqrt{5}$. Решавайки системата $c_1 t_1 + c_2 t_2 = 1, c_1 t_1^2 + c_2 t_2^2 = 5$, получаваме $c_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$ и $c_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$, така формулата за x_n е

$$x_n = \frac{1}{8\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^n + (-1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^n\right].$$

Можем по индукция да докажем, че $x_n = 2^{n-1} F_{2n+3}, n = 1, 2, \dots$, където F_n е n-тото число на Фибоначи (очевидно $x_1 = 5 = 2^0 F_5, x_2 = 26 = 2^1 F_7$) и така $x_{2007} = 2^{2006} F_{4017}$. $\square$

Задача 35. 35 С помощта на характеристичното уравнение намираме, че $a_n = 2^n + 3^n$. За първата част нека приемем противнот, тоест че съществува просто число p, което дели a_n и a_{n+1}. Очевидно $5 \leq p$. Така $2^n \equiv -3^n (\text{mod} p)$ и съответно $2^{n+1} \equiv -2 \cdot 3^n (\text{mod} p)$. Но $2^{n+1} \equiv -3^{n+1} (\text{mod} p)$. Така $-2 \cdot 3^n \equiv -3^{n+1} (\text{mod} p) \iff 2 \equiv 3 (\text{mod} p)$, което е невъзможно. За втората част с $ord_p a$ ще означаваме показателя на a по модул p. Нека също $2x \equiv 3 (\text{mod} p), (x, p) = 1$. Имаме $-1 \equiv x^{2^k} (\text{mod} p)$ и $1 \equiv x^{2^{k+1}} (\text{mod} p)$. Това означава, че $ord_p x \mid 2^{k+1}$ и $ord_p x \nmid 2^k$. Така $ord_p x = 2^{k+1}$. Но известно свойство на показателя е, че дели $p - 1$ с което сме готови. $\square$

Задача 36. 36 Лесно се намира, че $f(n) = 4^n + 499^n$. Сега аналогично на втората част на предишната задача намираме, че $p(s_i) \equiv 1 (\text{mod} 2^{s_i})$. От $t \leq k \leq s_i$ следва, че $p(s_i) \equiv 1 (\text{mod} 2^t)$. Така $\sum_{i=1}^k p(s_i) \equiv k (\text{mod} 2^t)$. Сега вече търсеното е очевидно. $\square$

Задача 37. 37 Формулата всъщност е

$$x_n = x_{n-1} + \left\lfloor \frac{2(x_{n-1} - 1)}{n} \right\rfloor.$$

Ще се опитаме да пресметнем първите няколко члена на редицата. Намираме $x_1 = c$ и $x_2 = 2c - 1$. При $n = 3$ обаче удряме на камък, защото трябва да намерим $\left\lfloor \dfrac{4(c-1)}{n} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \dfrac{c-1}{n} \right\rfloor$. Това ни подсказва да въведем $c = 3k + \alpha$, където $\alpha \in 0, 1, 2$. При $\alpha = 1$ не е трудно да се забележи, че $x_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(c-1)}{6} + 1$ и съответно да се докаже по индукция. При $\alpha = 2$ също е относително лесно да се забележи, че $x_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(c-2)}{6} + n + 1$ и отново да се докаже по индукция. При $\alpha = 0$ е по-трудно, но все пак доста постижимо да видим, че

$$x_n = \frac{(n+1)(n+2)c}{6} - \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor + 1$$

и отново с индукция ще докажем хипотезата. □

Задача 38. 38 Лесно намираме, че $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} (n \geqslant 3), a_1 = 1, a_2 = 2$. Така, $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \lambda_1\lambda_2 = -1,\ a_1 = 1, a_2 = 2n \in \mathbf{N}^+$. Сега, тъй като $\lambda_1\lambda_2 = -1$ и $\lambda_2 = 2 - \lambda_1$, имаме, че

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 \\ 2 = C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = C_1\lambda_1\lambda_2 + C_2\lambda_2^2 \\ 2 = C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda_1 = -C_1 + C_2\lambda_2^2 \\ 2 = C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 \end{cases} \\
&\Rightarrow C_1\left(1 + \lambda_1^2\right) = \lambda_1.
\end{aligned}$$

Сега от симетрия е вярно също, че $C_2\left(1 + \lambda_2^2\right) = \lambda_2$. И накрая тъй като $1 + \lambda_1\lambda_2 = 0$, имаме

$$\begin{gathered}
a_n^2 + a_{n+1}^2 = C_1^2\left(1 + \lambda_1^2\right)\lambda_1^{2n} + C_2^2\left(1 + \lambda_2^2\right)\lambda_2^{2n} + \\
2C_1C_2\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n\left(1 + \lambda_1\lambda_2\right) \\
C_1\lambda_1^{2n+1} + C_2\lambda_2^{2n+1} = a_{2n+1}
\end{gathered}$$

с което сме готови. □

Задача 39. 39 делим цялата формула на 2^{n+1} и получаваме

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n}{2},$$

което е

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n}{2}.$$

После

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i+1}}{2^{i+1}} - \frac{a_i}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+1}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2}, \\
\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_1}{2^i} = \frac{n(n+1)}{4} + \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+1}}, \\
a_{n+1} = 2^{n+1}\left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\right].
\end{gathered}$$

Полагаме $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$ и така $2S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^{i-1}}$ и

$$\begin{aligned}
S_n = 2S_n - S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^{i-1}} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{i-1}{2^{i-1}} \\
&= \frac{1}{2^{1-1}} - \frac{n+1-1}{2^{n+1-1}} + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{i}{2^{i-1}} - \frac{i-1}{2^{i-1}} \right) \\
&= 1 - \frac{n}{2^n} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{n}{2^n} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right] \\
&= 1 - \frac{n}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n}
\end{aligned}$$

Оттук

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \left(2 - \frac{n+2}{2^n} \right) \right] \\
&= 2^{n+1} \left[\frac{3}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{n+2}{2^{n+1}} \right] (n \geqslant 1).
\end{aligned}$$

Накрая заключваме, че

$$a_n = 2^{n-2} \left(n^2 - n + 6 \right) - n - 1 \quad (n \geqslant 2).$$

$\square$

Задача 40. 40 Уравнението може да се пренапише като

$$x_{n+3} - \frac{1}{b} x_{n+2} - \frac{1}{a} x_{n+1} = -\frac{1}{c} \left(x_{n+2} + \frac{1}{b} x_{n+1} + \frac{1}{a} x_n \right).$$

По индукция намираме, че

$$x_{n+3} - \frac{1}{b} x_{n+2} - \frac{1}{a} x_{n+1} = (-1)^n \frac{1}{c^n} \left(x_3 - \frac{1}{b} x_2 - \frac{1}{a} x_1 \right).$$

Това е възможно само когато $x_3 - \frac{1}{b} x_2 - \frac{1}{a} x_1 = 0$ (иначе c трябва да дели числителя на лявата страна, което е невъзможно, тъй като a and b са фиксирани, а членовете на редицатта са цели числа). Така,

$$x_{n+3} = \frac{1}{b}x_{n+2} + \frac{1}{a}x_{n+1}.$$

Нека $\alpha = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$. Ако $\alpha < 1$, то с полагането $M = \max\{|x_n|, |x_{n-1}|\}$ намираме $|x_{n+1}| \leq \alpha M$, откъдето по индукция намираме, че $x_{2t+1} \leq \alpha^t \cdot \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Но тъй като $\lim_{t\to\infty} \alpha^t = 0$, то за големи t, имаме $|x_{2t+1}| < 1$, което е невъзможно за неотрицателни цели числа. Така $\alpha \geq 1$ и оттук лесно следва, че $a = b = 2$. Така търсените тройки са от вида $(2, 2, c)$, където $c \geq 2$. □

Задача 41. 41 Намираме, че $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{8}$, $a_3 = \frac{5}{16}$, $a_4 = \frac{35}{128}$. Сега можем да забележим, че $2na_n = (2n-1)a_{n-1}$, и това се доказва лесно по индукция. Така лесно се намира, че $a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$. За втората част можем отново по индукция лесно да докажем, че $a_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. □

Задача 42. 42 Намираме общия член на редицата, който може да се запише като:

$$a_n = \frac{1}{2}\left((3+\sqrt{14})^n + (3-\sqrt{14})^n\right) - \frac{2}{\sqrt{14}}\left((3+\sqrt{14})^n - (3-\sqrt{14})^n\right)$$

Имаме

$$\frac{1}{2}\left((3+\sqrt{14})^{2012} + (3-\sqrt{14})^{2012}\right) = \sum_{k=0,k-\text{четно}}^{2012} \binom{2012}{k} 3^{2012-k} 14^{\frac{k}{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{14}}\left((3+\sqrt{14})^{2012} - (3-\sqrt{14})^{2012}\right) = 4 \sum_{k=1,k-\text{нечетно}}^{2012} 3^{2012-k} 14^{\frac{k-1}{2}}$$

Но лесно се доказва, че за p просто (каквото е и 2011) е изпълнено $p \mid \binom{p+1}{k}$ за $1 < k < p$. Също, тъй като очевидно 14 е квадратичен остатък по модул 2011, от $2025 \equiv 14 (\text{mod} 2011)$ следва че $14^{1005} \equiv 1 (\text{mod} 2011)$. Сега

$$a_{2012} \equiv 3^{2012} + 14^{1006} - 4 \cdot 2012 \cdot \left(3^{2011} + 3 \cdot 14^{1005}\right) \equiv 9 + 14 - 4 \cdot 6 \equiv 2010 (\text{mod} 2011),$$

с което сме готови. □

Задача 43. 43 Лесно се намира, че

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\right), n = 1, 2, \cdots.$$

Нека a_n, b_n са естествени числа и $a_n + b_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n$. Така

$$a_n - b_n\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^n,$$
$$\text{so } x_n = b_n, a_n^2 - 2b_n^2 = 1, n = 1, 2, \cdots.$$

Приемаме, че $q \neq 2$. Тъй като $q \mid x_p$, имаме $q \mid b_p$, което означава, че има член на $\{b_n\}$, който се дели на q. Нека d е най-малкото число, такова че $q \mid b_d$. Имаме следната лема.

Лема: За всякакви естесвени числа $n, q \mid b_n$ тогава и само тогава, когато $d \mid n$.

Доказателство: За $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ ще записваме $a + b\sqrt{2} \equiv c + d\sqrt{2} (\bmod q)$, когато $a \equiv c (\bmod q)$ и $b \equiv d (\bmod q)$. Ако $d \mid n$, записваме $n = du$ и

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^{du} \equiv a_d^u (\bmod q),$$
$$\text{и значи } b_n \equiv 0 (\bmod q).$$

В обратната посока, ако имаме $q \mid b_n$, то ще запишем $n = du + r, 0 \leqslant r < d$. Нека приемем, че $r \geqslant 1$. От

$$\begin{aligned} a_n &= (3+2\sqrt{2})^n = (3+2\sqrt{2})^{du} \cdot (3+2\sqrt{2})^r \\ &\equiv a_d^u \left(a_r + b_r\sqrt{2}\right) (\bmod q), \end{aligned}$$

имаме

$$a_d^u b_r \equiv 0 (\bmod q).$$

Но $a_d^2 - 2b_d^2 = 1$, и $q \mid b_d$, а това значи, че $q \nmid a_d^2$. Тъй като q е просто, получаваме $q \nmid a_d$ и $(q, a_d^u) = 1$. От (1) имаме $q \mid b_r$, което противоречи с дефиницията на d. Така $r = 0$ и лемата е доказана.

Сега от факта че q е просто следва, че $q \mid (\binom{q}{i}, i = 1, 2, \cdots, q-1$. Използвайки малката теорема на Ферма, получаваме

$$3^q \equiv 3 (\bmod q), 2^q \equiv 2 (\bmod q).$$

Знаем, че $q \neq 2$, и така $2^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 (\text{mod} q)$ и получаваме

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^q &= \sum_{i=0}^{q} \left(\tbinom{q}{i} \cdot 3^{q-i} (2\sqrt{2})^i \right). \\ &\equiv 3^q + (2\sqrt{2})^q \\ &= 3^q + 2^q \cdot 2^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{2} \\ &\equiv 3 \pm 2\sqrt{2} (\text{mod} q).\end{aligned}$$

Така имаме и

$$(3+2\sqrt{2})^{q^2} \equiv (3 \pm 2\sqrt{2})^q \equiv 3 + 2\sqrt{2} (\text{mod} q).$$

И значи

$$\left(a_{q^2-1} + b_{q^2-1}\sqrt{2} \right)(3+2\sqrt{2}) \equiv 3 + 2\sqrt{2} (\text{mod} q).$$

Така,

$$\begin{cases} 3a_{q^2-1} + 4b_{q^2-1} \equiv 3 (\text{mod} q), \\ 2a_{q^2-1} + 3b_{q^2-1} \equiv 2 (\text{mod} q). \end{cases}$$

Така решаваме системата и $q \mid b_{q^2-1}$. Тъй като $q \mid b_p$, от лемата получаваме $d \mid p$. Така $d \in \{1,\ p\}$, и ако $d = 1$, то $q \mid b_1 = 2$, противоречие! Значи $d = p$, и така $q \mid b_{q^2-1}$. Оттук $p \mid q^2 - 1$, и $p \mid q - 1$ or $p \mid q + 1$. Тъй като $q - 1$ и $q + 1$ са четни, следва че $q \geqslant 2p - 1$. $\square$

7. Приложения към дипломната работа

Като приложение към дипломната работа са включени и видеозаписи, в които могат да се видят решенията и обясненията на основните примери от дипломната работа и да се придобие представа за преподаването им на живо в курсове за напреднали ученици и състезатели. В този контекст това приложение дава ценен поглед на педагогическите специалисти. Учащите с афинитет към аудио-визуалното представяне на съдържание също биха намерили тези приложения за полезни.

Онлайн достъп до тези материали може да се осъществи чрез тази връзка (https://drive.google.com/drive/u/1/folders/1zjgnCVNNZQ0IU2fwEJRVyL-UqIEUvdV4).

8. Заключение и насоки за бъдещо развитие

Настоящата дипломна работа е посветена на едно от най-универсалните и плодотворни направления в състезателната математика – рекурентните редици. От самия брой на включените задачи става ясно колко актуална и широкозасегната е тази тема в олимпиадната математика, особено като се има предвид, че дипломната работа по никакъв начин не претендира за пълнота и че това са примери само за разкритите евристични подходи.

Представена е пълна и прецизна теоретична рамка за решаването на линейни хомогенни зависимости с постоянни коефициенти. Самата тя се отличава с пълнотата си, тъй като поне авторът не е запознат с други ресурси, в които да има толкова детайлно описание с доказателства и работа с комплексни корени. Тази рамка осигурява стабилна база, върху която стъпват голяма част от по-нататъчните разсъждения.

След това е събрана богата колекция от състезателни задачи, свързани с рекурентни редици, които обхващат и разкриват широк кръг от евристични подходи - линеаризация на нелинейни зависимости, свеждане на функционални уравнения и неравенства до анализ на редици, търсене на инварианти, субституции и други ключови стратегии от олимпиадната математика. На база на тези подходи задачите са структурирани в дидактически системи, които съответстват в огромна степен на принципите на Ганчев (Чехларова, 2006) и Нинова и Кадиев (Кадиев и Нинова, 2021) и общата теория на формативното обучение, както може да се види и от коментарите след решенията на почти всички задачи.

Ясно се вижда как подредбата на задачите – от въвеждащи примери до задачи с висока сложност – позволява плавно развитие на когнитивните процеси от анализ и синтез към творчество и пренос на знания. Създадените системи от задачи имат ясно изразена педагогическа ефективност като всяка от задачите в колекциите има определена функция - да въвежда, да надгражда, да обобщава, да насърчава търсенето на хипотези и т.н.. По този начин те образуват цялост, развиваща интуицията, стратегическото мислене и усъвършенстваща мисловните умения, което е в пълно съответствие с визията на Тонов (Тонов, 2012).

Особената стойност на разработката е, че тя свързва евристиката и дидактиката, теорията и практиката в единна система – подход, който липсва в огромна част от наличните извънкласни ресурси. Така дипломната работа допринася към методическата практика. Освен това трябва да споменем, че разработката се нарежда сред изключително редките налични ресурси за рекурентни редици в състезателната математика и представя значително по-широк кръг от задачи и подходи от тях.

В заключение може да се каже, че поставената цел е постигната - създаден е структуриран, аргументиран, методически обоснован и педагогически приложим ресурс за работа с рекурентни редици в контекста на състезателната математика. С оглед на това, че за всяка задача е предоставено подробно решение, полученият материал може добре да послужи на ученици със силни интереси в математиката, на студенти в курсовете им по дискретна математика и други, както и на преподаватели в средни и висши училища и в кръжоци за извънучебна дейност, където се цели да се стимулира творческото мислене при работата с рекурентни редици, поставянето на хипотези, провеждането на опити и прилагането на евристични стратегии. Материалът може да се окаже ценен и за подготовката на бъдещи учители по математика.

В бъдеще работата може да бъде разширена в няколко направления - в математическо и в евристично. От математическа гледна точка биха могли да бъдат включени задачи, показващи приложенията на редиците в комбинаториката като основен метод за броене. Това би наложило и въвеждането на теорията на пораждащите функции. Освен това от алгебрична гледна точка би могла да се даде интерпретация на огромен брой функционални уравнения и неравенства над множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ на естествените и целите числа чрез рекурентни редици. От евристична гледна точка биха могли да се анализират задачи, които прилагат други мисловни подходи, каквито не са включени в настоящата работа и са по-далечни от характеристичните уравнения и линеаризациите, и които са в много по-голяма степен зависими от наблюдения и формулиране и доказване на хипотези.

Като допълнение също биха могли да се разработят автоматични генератори на задачи за рекурентни редици, които да подпомогнат ученици, студенти и преподаватели при усвояването и преподаването на различни методи при работа с рекурентни редици. Това би помогнало за създаването на разширено дидактическо ръководство, включващо по-голям набор от многостепенни системи от задачи, както и адаптирани методики за различни възрастови групи.

За да бъдат установени нагласите на бъдещите преподаватели по математика относно интегрирането на задачи, свързани с рекурентни редици, в учебния процес – особено такива, които стимулират формулирането на хипотези, извършването на опити и използването на евристични стратегии – е необходимо провеждането на целенасочен педагогически експеримент. Чрез подобно изследване би могло да се проследи доколко студентите-бъдещи учители възприемат този тип задачи, какви трудности срещат при тяхното решаване и доколко оценяват тяхната роля за развитието на аналитичното и творческото мислене на учениците. Експериментът може също да даде информация за ефективността на различни методически подходи при въвеждането на рекурентни редици в учебната практика, включително използването на подходящи цифрови инструменти или софтуерни среди за визуализация. Подобно систематично изследване би могло да се реализира в рамките на бъдеща научна работа.

9. Благодарности

Искам да изкажа искрени благодарности на проф. Иван Тонов и на доц. Таня Тонова, които оказваха непрестанна морална подкрепа и чисто практическа помощ в целия процес на следването ми, включително в оформянето на настоящата дипломна работа. Искам да им благодаря за загрижеността, за всички бележки, забележки и за разкриването на най-базовата свързаност на темата с индукцията и основите на математиката, както и за всички незабравими разговори.

Искам още да благодаря на своя научен ръководител проф. Станислав Харизанов за търпението и отдадеността, както и за полезните съвети относно съдържанието, без които тази работа нямаше да има текущия си вид.

Изказвам благодарности и на ръководителя на магистърската програма по ИМЗПМКМИТ доц. Николина Николова за ангажираността в целия административен процес, свързан със завършването и защитата ми.

Библиография

Andreescu, T., Boreico, I., Mushkarov, O., & Nikolov, N. (2019). *Topics in functional equations: 3rd edition* (3rd ed.). XYZ Press.

Art of Problem Solving Community. (2025). *Contest collections* [Библиотека със състезания по математика от различни държави]. https://artofproblemsolving.com/community/c13_contest_collections

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives: Handbook i – cognitive domain*. Longmans.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., & Ljung, G. M. (2015). *Time series analysis: Forecasting and control* (5th ed.). John Wiley & Sons.

Bradley, C., & Smith, G. (Eds.). (2018). *British mathematical olympiad: Problems and solutions 1995–2017*. United Kingdom Mathematics Trust.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Harvard University Press.

Chen, J., Xu, X., et al. (2016). *China southeast mathematical olympiad: Problems and solutions (2002–2015)*. East China Normal University Press.

Datta, B., & Singh, A. N. (1935). *History of hindu mathematics: A source book* (Vol. 1). Asia Publishing House.

Edwards, A. W. F. (2004). The early history of the binomial distribution: De moivre and bernoulli. In *Pascal's arithmetical triangle: The story of a mathematical idea* (pp. 101–120). Johns Hopkins University Press.

Feng, Z. (2020). *Sequences and mathematical induction in mathematical olympiad and competitions* (Second Edition, Vol. 16). East China Normal University Press; World Scientific.

Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: An introduction* (3rd). Pearson.

Kedlaya, K. S., Poonen, B., & Vakil, R. (2002). *The william lowell putnam mathematical competition problems and solutions: 1985–2000*. Mathematical Association of America.

Knuth, D. E. (1997). *The art of computer programming* (3rd ed., Vols. 1–3). Addison-Wesley.

of Pisa (Fibonacci), L. (2002). *Liber abaci* (S. Lawrence, Ed.) [English translation with commentary]. Springer.

Piaget, J. (1970). *Science of education and the psychology of the child*. Orion Press.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Romanian mathematical competitions: Rmc 2002 [Includes Romania TST 2002 problems]. (2002). Romanian Mathematical Society; Theta Foundation.

Romanian mathematical competitions: Rmc 2006 [Includes the Romanian IMO TST 2006 problems]. (2006). Romanian Mathematical Society; Theta Foundation.

Stanley, R. P. (2012). *Enumerative combinatorics, volume 1* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Wilf, H. S. (2005). *Generatingfunctionology* (3rd ed.). A K Peters.

Zhang, Y. (2011). *Combinatorial problems in mathematical competitions* (Vol. 4). East China Normal University Press; World Scientific.

Асенова, П., & Маринов, М. (2019). Система от задачи в обучението по математика [посетен на 10.01.2024]. *Математика и информатика*, *53*. https://bit.ly/3h1I3N7

Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., & др. (2015). *Български математически състезания, 2012–2015*. УНИМАТ СМБ.

Бойваленков, П., Колев, Е., & Николов, Н. (2020). *Български математически състезания 2016–2020*. УНИМАТ СМБ.

Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н., & др. (2007). *Балкански олимпиади по математика*. УНИМАТ СМБ.

Ганчев, И. (1965). Формиране на умения за решаване на задачи. *Математика и физика*, (2–3).

Ганчев, И. (2001). Анализът и синтезът в обучението по математика. In *Методи за решаване на задачи* (pp. 5–31). Макрос.

Кадиев, С., & Нинова, Ю. (2021). Дидактически модел за съставяне на система от задачи на базата на технологичния подход. *Математика и информатика*, *64*(1).

Колев, Е., Бойваленков, П., Мушкаров, О., & др. (2008). *Български математически състезания, 2006-2008* [230 стр., формат 17×24 см, мека корица]. УНИМАТ СМБ.

Министерство на образованието и науката. (2017). Учебна програма по математика за профилирана подготовка – модул 2: Елементи на математическия анализ [Утвърдена със Заповед № РД09–1569/30.06.2017 г.]. https://www.mon.bg/nfs/2018/12/profil-math.pdf

Мушкаров, О., Бойваленков, П., Колев, Е., & др. (2012). *Български математически състезания, 2009-2011* [Сборник задачи от национални и международни състезания, 2008-2011]. УНИМАТ СМБ.

Николов, Н., & Мушкаров, О. (2003). *Функционални уравнения и неравенства*. Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, ФМИ.

Тонов, И. (2012). *Евристиката – наука, изкуство, занаят*. https://www.fmi.uni-sofia.bg/sites/default/files/habilitation_work_of_professor/habil_trud_i_tonov.pdf

Чехларова, Т. (2006). Methodical concepts, introduced by prof. dr habil. ivan ganchev. —, —. https://www.math.bas.bg/omi/toni/rezume-statii/37-METHODICAL%20CONCEPTS,.pdf